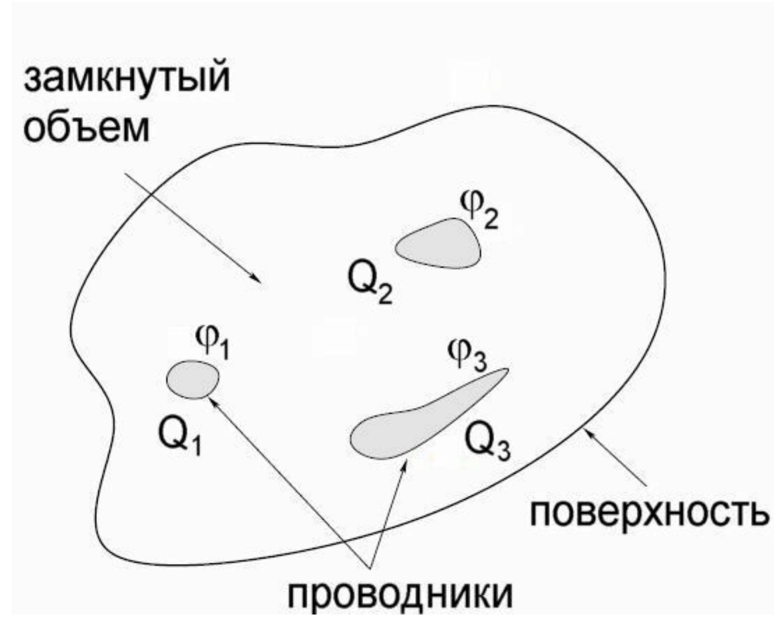
Система заряженных проводников

В случае системы нескольких проводников их заряды и потенциалы связаны линейными (опять принцип суперпозиции) соотношениями:



$$\varphi_i = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_{ij} \cdot Q_j$$

$$Q_i = \sum_{i=1}^{i=N} \beta_{ij} \cdot \varphi_j$$

(нормировка: $\varphi(\infty)=0$)

α_{ij} – потенциальные, β_{ij} – емкостные коэффициенты (система ограничена в пространстве)

Другая запись линейной связи между зарядами и потенциалами:

$$Q_i = \tilde{C}_{ii} \cdot \varphi_i + \sum_{i=1, i\neq j}^{i=N} \tilde{C}_{ij} \cdot (\varphi_i - \varphi_j)$$

$\tilde{C}_{ii}$ – собственная частичная ёмкость

$\tilde{C}_{ij}$ – взаимная частичная ёмкость

Для системы из одного проводника собственная частичная ёмкость совпадает с ёмкостью уединённого проводника.

Для электронейтральной системы последнюю формулу можно переписать в виде:

$$Q_i = \sum_{i=1, i\neq j}^{i=N} C_{ij} \cdot (\varphi_i - \varphi_j)$$

Покажем это для электронейтральной системы из двух проводников (конденсатора), для которой

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

Из системы

$$Q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2$$

$$Q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2$$

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

получаем

$$\varphi_1 = -\varphi_2 \frac{\beta_{12} + \beta_{22}}{\beta_{11} + \beta_{21}}$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \frac{\beta_{21} + \beta_{11}}{\beta_{22} + \beta_{12}}$$

Отсюда,

$$Q_1 = \beta_{11}\varphi_1 - \beta_{12}\varphi_1 \frac{\beta_{21} + \beta_{11}}{\beta_{22} + \beta_{12}} =$$

$$= \varphi_1 \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - \beta_{12}^2}{\beta_{22} + \beta_{12}}$$

Так как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + 2\beta_{12}}{\beta_{22} + \beta_{12}}$$

то $Q_1 = C_{12}\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv C\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)$, где

$$C = \frac{\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2}{\beta_{11} + \beta_{22} + 2\beta_{12}}$$

$$C_{12} \equiv C$$

– то, что называется ёмкостью конденсатора.

Также нетрудно показать, что емкость связана с частичными ёмкостями формулой:

$$C_{12} = \tilde{C}_{12} + \frac{\tilde{C}_{11} \cdot \tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{22}}$$

Таким образом для электронейтральной системы двух проводников (конденсатора) для описания связи между зарядом и разностью потенциалов достаточно одного параметра.

Свойства потенциальных и емкостных коэффициентов можно рассмотреть на примере системы двух концентрических сфер:

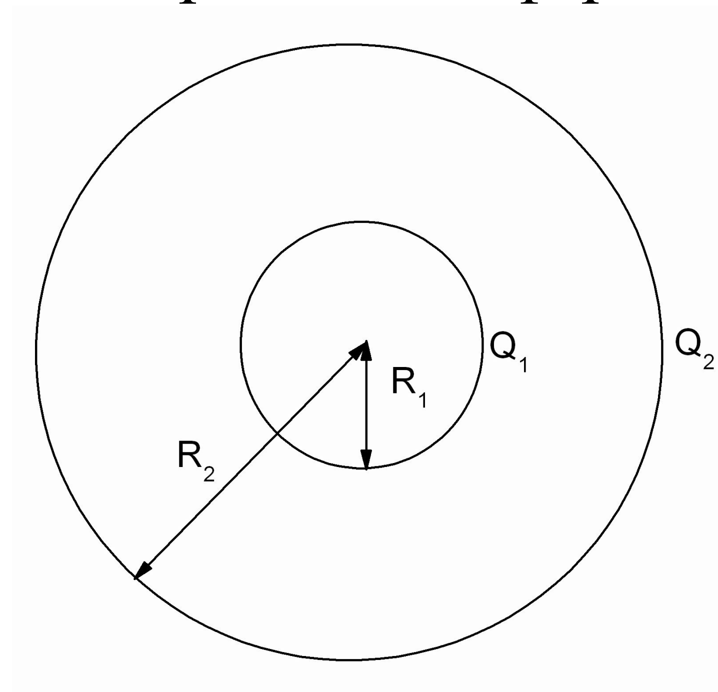
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1}; \quad \alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2};$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{ij} = \alpha_{ji}}$$



Из сферической симметрии системы следует <u>однородность распределения зарядов по сферам</u>

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$D = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}$$

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{D}; \quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{D};$$

$$\beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{D}; \quad \beta_{21} = -\frac{\alpha_{21}}{D}$$

(1) $\beta_{ij} = \beta_{ji}$; симметричность емкостных коэффициентов

(2) $\beta_{ij} \leq 0$ если $i \neq j$

(3) β_{ij} <u>зависят от</u> размера, формы проводников и их взаимного расположения, <u>не зависят</u> от Q_i, φ_i

Если $Q_1=Q$, $Q_2=-Q$, то получаем сферический конденсатор. Для него $\varphi_2=0$; $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=Q(R_2-R_1)/4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2$;

$\Rightarrow C = Q/\Delta\varphi=\boxed{4\pi\varepsilon_0\, R_1 R_2/(R_2-R_1)}$ – емкость сферического конденсатора. При $R_1\to\infty$, $R_2\to\infty$, $R_2-R_1=d$, получаем формулу емкости плоского воздушного конденсатора:

$C = Q/\Delta\varphi=4\pi\varepsilon_0\, R^2/d = \boxed{\varepsilon_0\, S/d}$.

Конденсаторы. Ёмкость плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

Конденсатор – система двух проводников с равными по модулю и противоположными по знаку зарядами.

$\boxed{C=Q/\Delta\varphi}$ – емкость конденсатора.

Для цилиндрического конденсатора емкость равна: $\boxed{C=2\pi\varepsilon_0 h/\ln(R_2/R_1)}$, где h- высота, R_2 и R_1 – радиусы обкладок.

Поле плоского конденсатора – внутри и снаружи. Видно, что вне конденсатора поле, хотя и слабее поля внутри (силовые линии реже), но ненулевое. Иногда его надо учитывать (задача «плоский конденсатор в металлической коробочке»).