«Метод изображений» в электростатике

Теорема единственности в электростатике обосновывает «метод изображений». Он помогает решать задачи с участием точечного заряда и плоскости (или нескольких плоскостей), точечного заряда и сферы (заземленной и незаземленной) и в ряде других случаев.

Задача состоит в следующем: имеется замкнутая область пространства с заданными распределением зарядов и граничными условиями (например, потенциал на границе). Нужно найти электрическое поле (потенциал, а из него напряженность) в этой области.

Решение «методом изображений» состоит в подборе фиктивных зарядов <u>вне</u> рассматриваемой области, таких, что их совместное с реальными зарядами поле обеспечивает заданные граничные условия (потенциал на границе). Поскольку внутри области заряды не изменились, найденное поле удовлетворяет уравнению Пуассона (является его решением). Выполняются также граничные условия. По теореме единственности других решений нет.

Примеры «методы изображений» приведены далее.

Проводящая заземленная плоскость и точечный заряд

Сила, действующая на заряд +q со стороны плоскости:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4x^2}$$

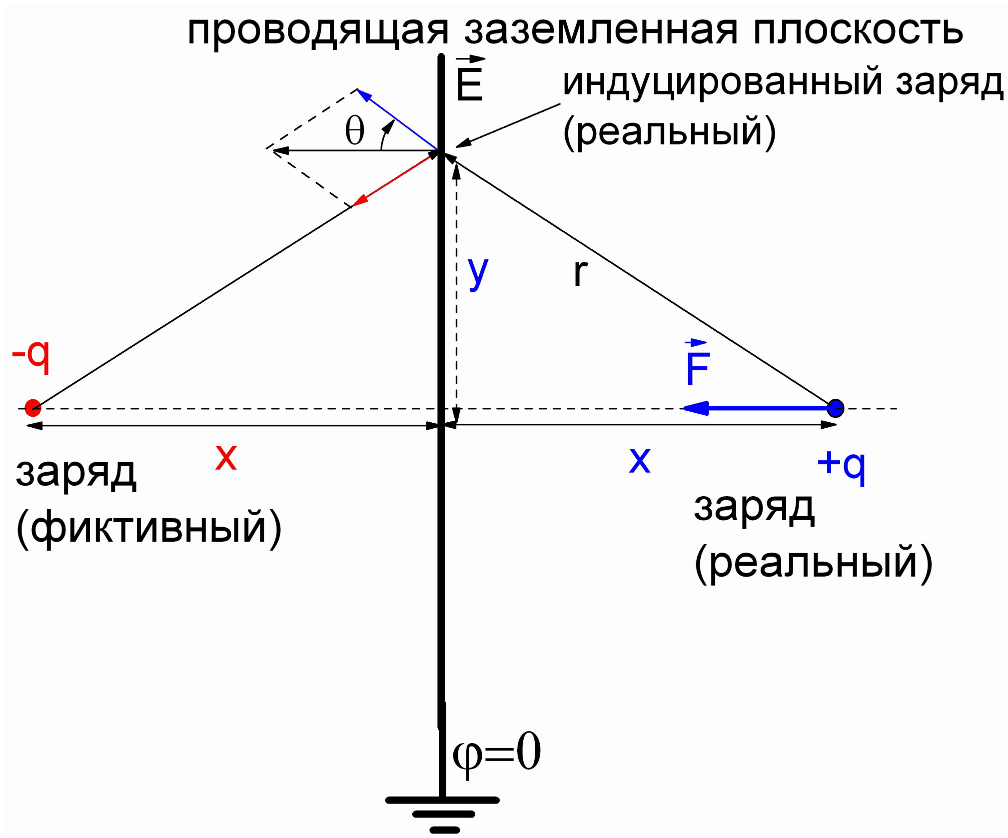
Напряженность поля вблизи плоскости:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q\cdot\cos(\theta)}{r^2}$$

Плотность индуцированного на плоскости заряда:

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \epsilon_0\cdot|\vec{E}| = -\frac{q\cdot x}{2\pi(x^2+y^2)^{3/2}}$$

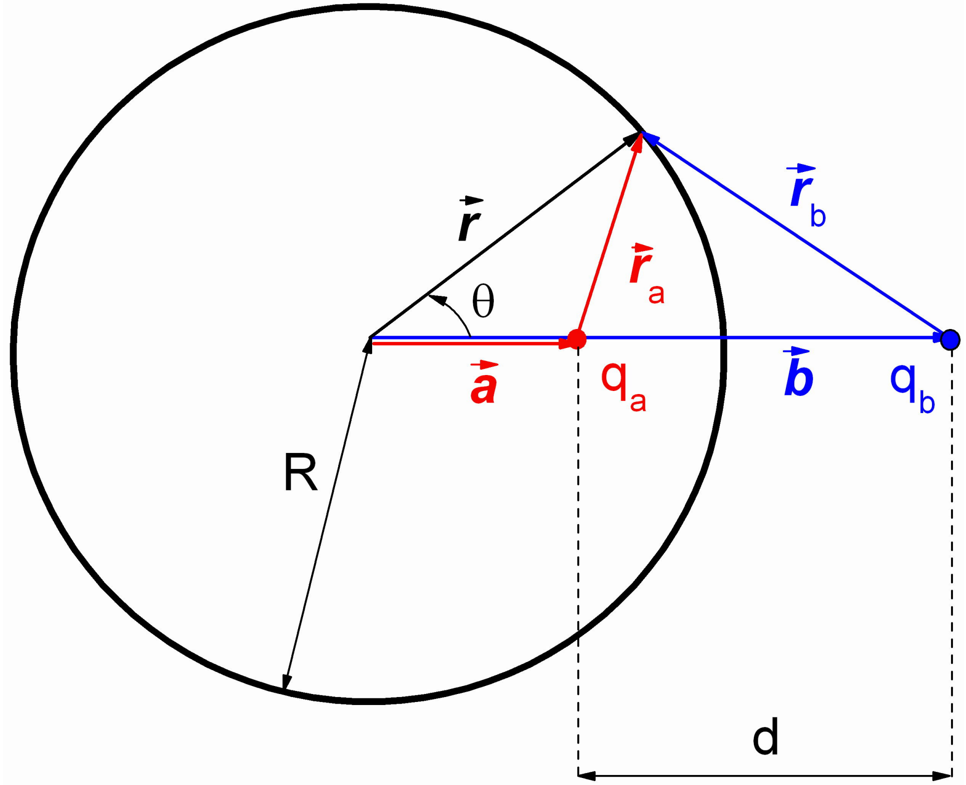


Поверхность нулевого потенциала для двух разноименных зарядов

Дано: q_a, q_b, d. $q_a\, q_b<0$ (заряды разноименны)

Известно: поверхность «$\varphi=0$» - сфера.

Найти: a, b, R



$$\vec{r}_a = \vec{r} - \vec{a}; \quad \vec{r}_b = \vec{r} - \vec{b};$$

$$r_a = \sqrt{R^2 + a^2 - Ra\cos(\theta)};$$

$$r_b = \sqrt{R^2 + b^2 - Rb\cos(\theta)};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_a}{r_a} + \frac{q_b}{r_b}\right) = 0;$$

$$q_a \cdot r_b = -q_b \cdot r_a; \ \rightarrow q_a^2 \cdot r_b^2 = q_b^2 \cdot r_a^2$$

$$q_b^2 \cdot (R^2 + a^2 - Ra\cos(\theta)) = q_a^2 \cdot (R^2 + b^2 - Rb\cos(\theta));$$

$$q_b^2 \cdot Ra = q_a^2 \cdot Rb; \ \rightarrow q_b^2 \cdot a = q_a^2 \cdot b;$$

$$q_b^2 \cdot (R^2 + a^2) = q_a^2 \cdot (R^2 + b^2);$$

$$\rightarrow q_a^2 \cdot \frac{b}{a}(R^2 + a^2) = q_a^2 \cdot (R^2 + b^2);$$

$$\frac{b}{a}(R^2 + a^2) = R^2 + b^2; \ \rightarrow b \cdot R^2 + b \cdot a^2 = a \cdot R^2 + a \cdot b^2;$$

$$\rightarrow R^2(b-a) = ab \cdot (b-a);$$

$$R^2 = ab \ (a \neq b).$$

$$\rightarrow q_a = -\frac{q_b \cdot R}{b}.$$

$$a = d\frac{q_a^2}{q_a^2 + q_b^2}; \ b = d\frac{q_b^2}{q_a^2 + q_b^2};$$

$$R = d\frac{|q_a \cdot q_b|}{q_a^2 + q_b^2} \ (|q_a| \neq |q_b|, \ a \neq b)$$

Заземленная проводящая сфера и точечный заряд вне сферы

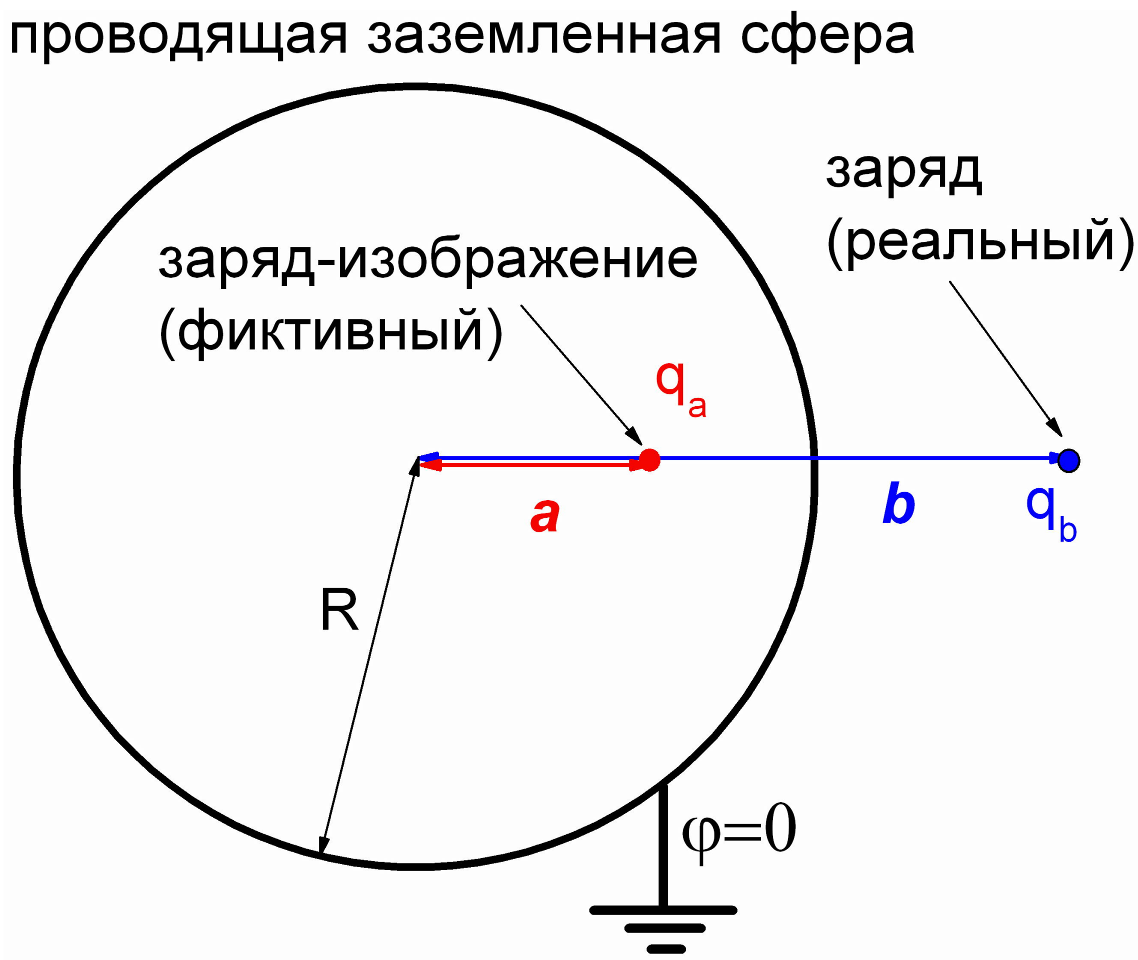
Дано: R, b>R, q_b

Найти: F

$a=R^2/b$; $q_a=-Rq_b/b$

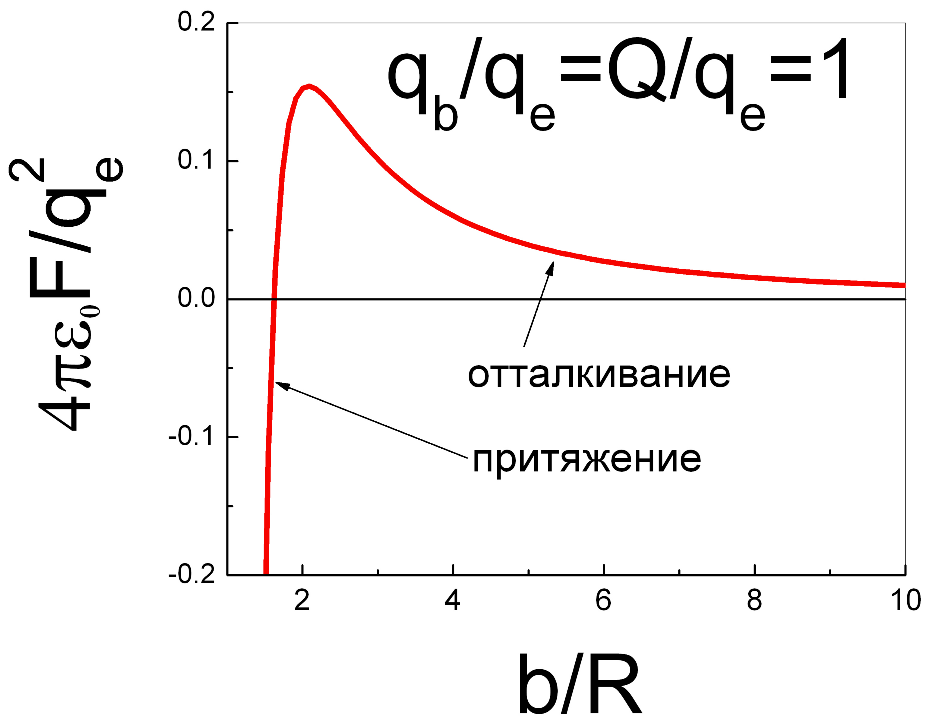
$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a q_b}{(b-a)^2}=$$

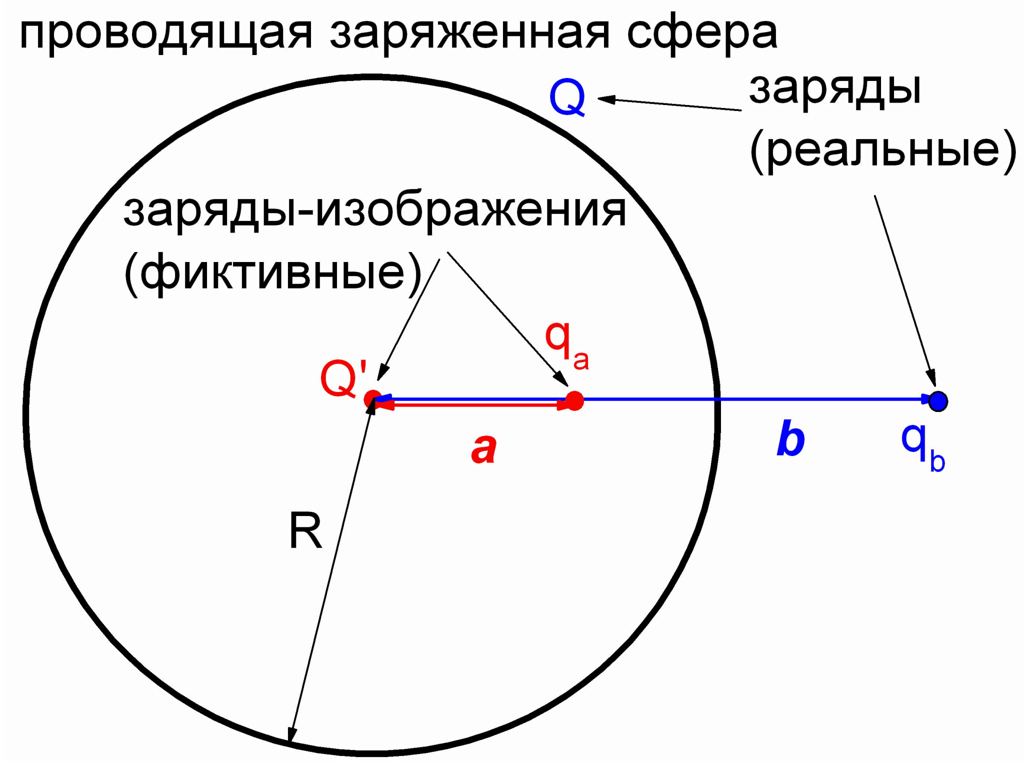
$$=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_b^2 Rb}{(b^2-R^2)^2}$$



Сила между заземленной сферой и внешним точечным зарядом всегда соответствует притяжению. При $b\to\infty$ $F\sim 1/b^3$. Так же, как в случае с плоскостью, можно найти индуцированные на сфере заряды.

Заряженная проводящая сфера и точечный заряд вне сферы





Одноименно заряженные тела могут притягиваться !

$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Qq_b}{b^2}+\frac{q_b^2 R}{b^3}-\frac{q_b^2 Rb}{(b^2-R^2)^2}\right)$$

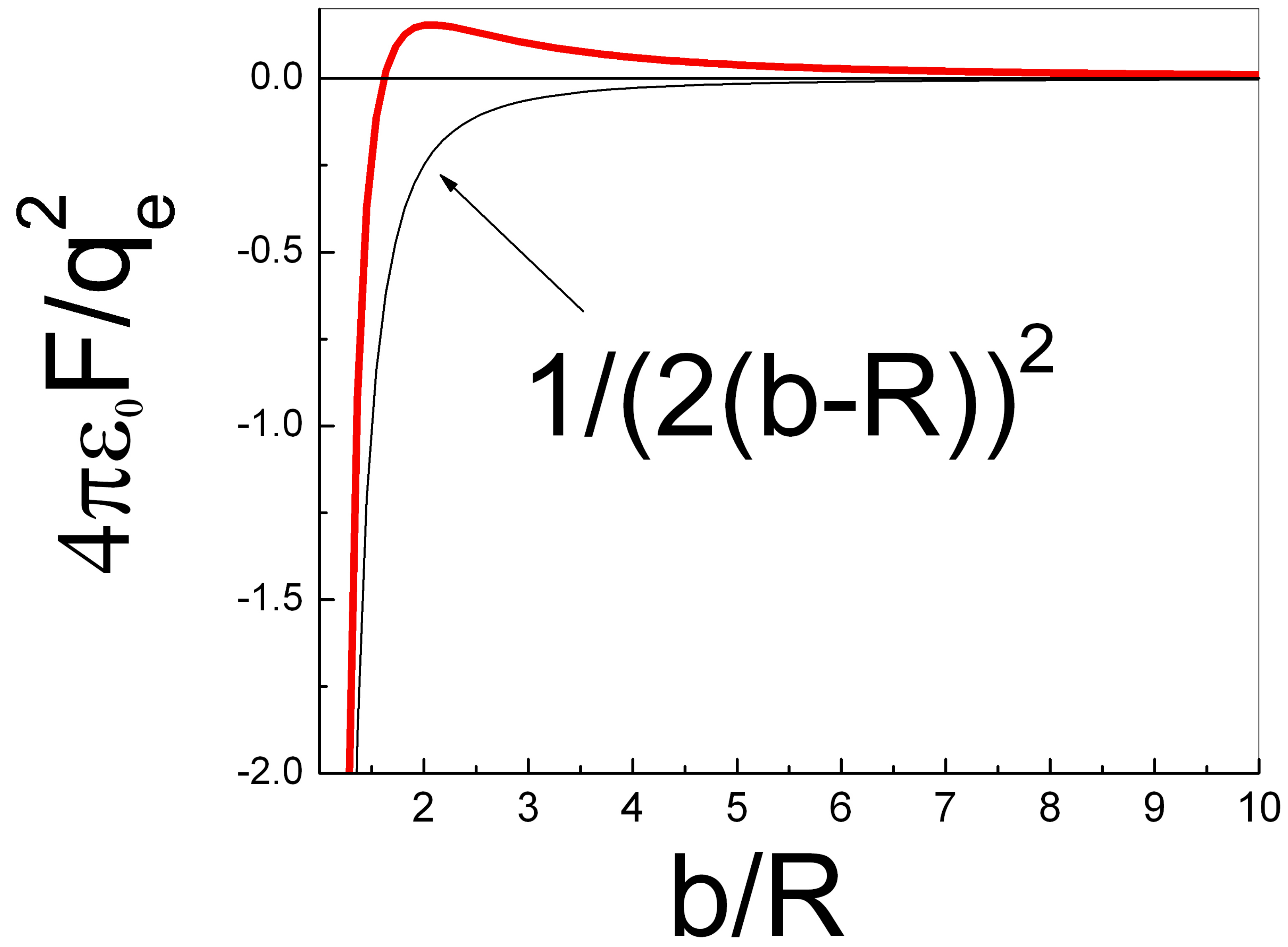
При b→∞ F~1/b^2.

Потенциал сферы:

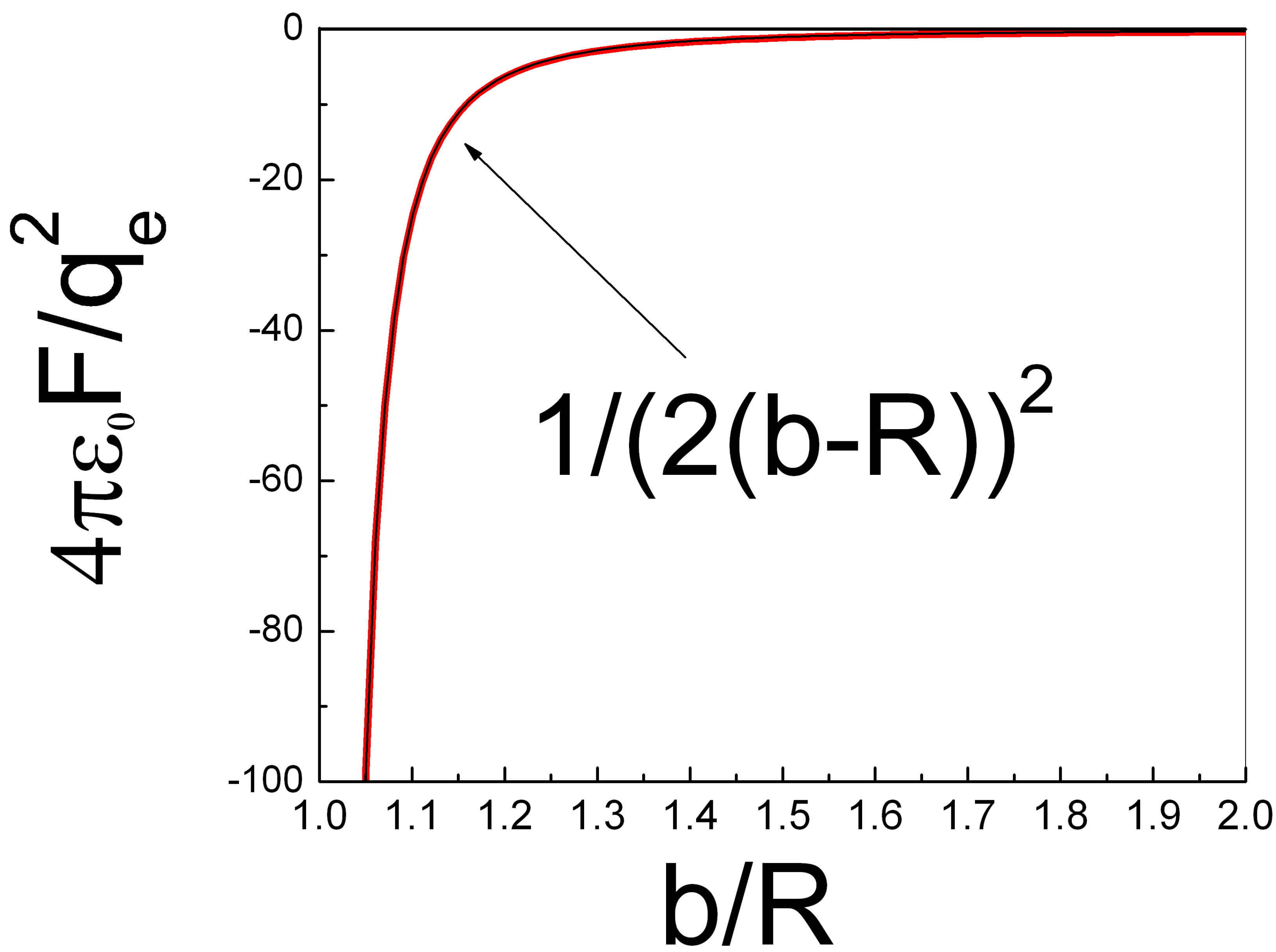
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R}+\frac{q_b}{b}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{R};\rightarrow$$

$$Q'=Q+q_b\frac{R}{b}.$$

Переход от сферы к бесконечной плоскости ($Q=q_b$).



Переход от сферы к бесконечной плоскости ($Q=-q_b$)



Вывод:
при малых расстояниях точечного заряда до сферы сила не зависит от величины и знака заряда сферы.

То же верно и для бесконечной плоскости ($R \to \infty$).

Проводящая сфера и точечный заряд внутри сферы

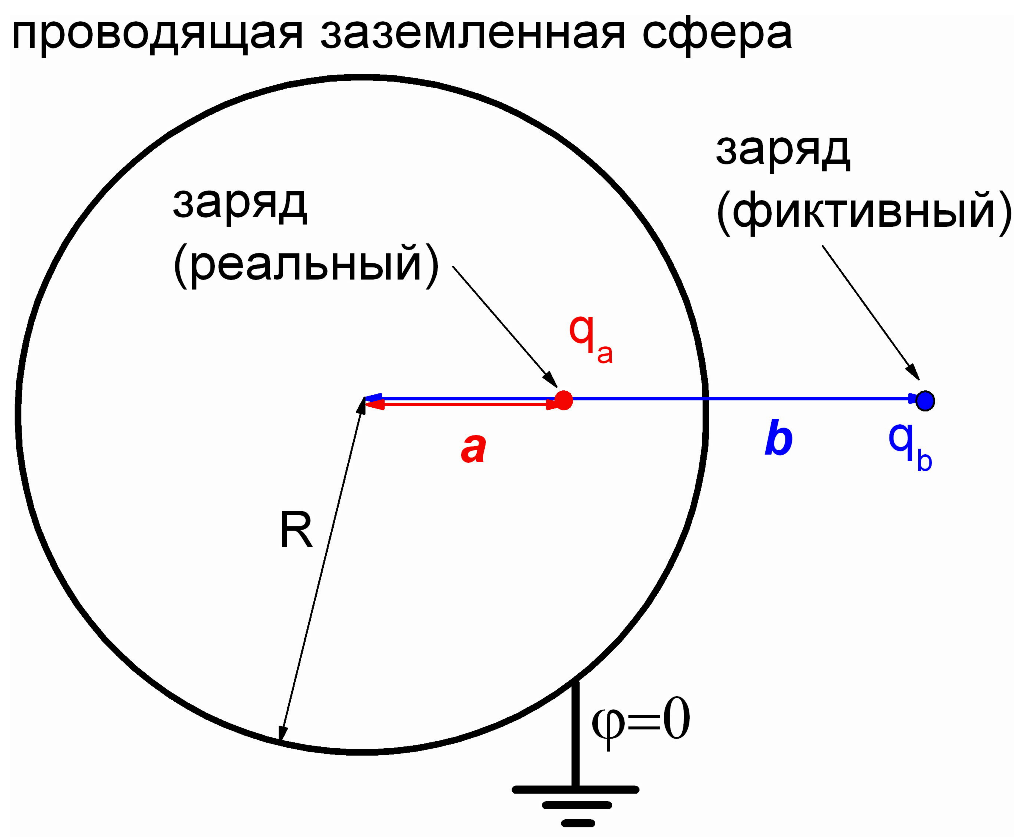
Дано: R, a<R, q_a

Найти: F

$$b=R^2/a;\ q_b=-Rq_a/a$$

$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a q_b}{(b-a)^2}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a^2 Ra}{(a^2-R^2)^2}$$



Сила между заземленной сферой и точечным зарядом всегда соответствует притяжению. При a=0 (заряд в центре сферы) F=0. Если сфера не заземлена, формула для силы останется прежней ! Правильный потенциал на сфере можно обеспечить сферическим заряженным слоем (фиктивный заряд в виде сферы), который на заряд внутри (а, значит, на заряд q_a) не действует (напряженность внутри однородно заряженной сферы равна нулю).