Распределение Максвелла

- Распределение Максвелла по проекции и модулю скорости для молекул идеального равновесного газа.
- Характерные скорости распределения Максвелла (наивероятнейшая, средняя, среднеквадратичная).
- Граница применимости распределение Максвелла
- Принцип детального равновесия.
- Эксперименты, подтверждающие распределение Максвелла.

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.

- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул***.

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по компонентам скоростей:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

Плотность вероятности:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T}\right)$$

В силу независимости каждой из компонент скоростей, получаем:

$$dP(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)$$

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей:

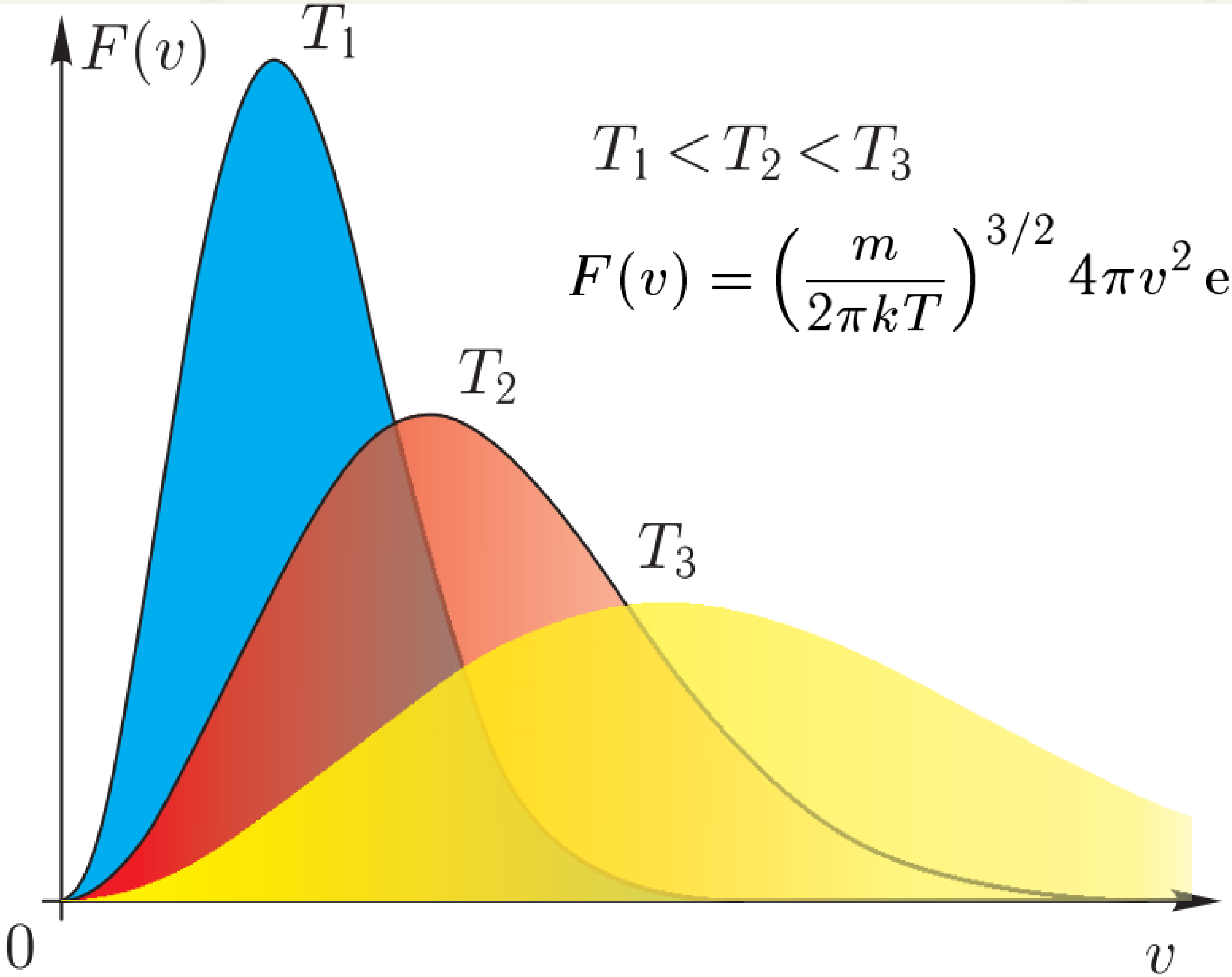
$$dP(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) 4\pi v^2 dv$$

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

Число частиц, модуль скорости которых находится в интервале (*v*;*v*+*dv*): $dN = NdP(v)$

Распределение Максвелла при различных температурах



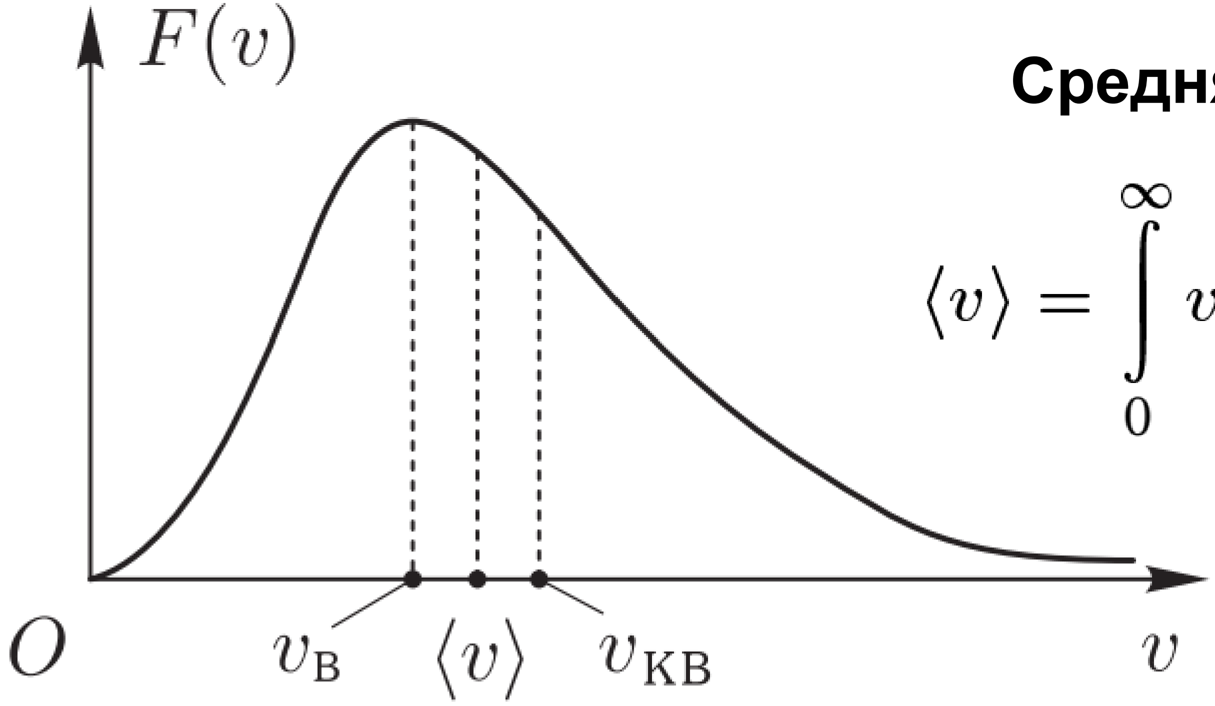
$$T_1 < T_2 < T_3$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



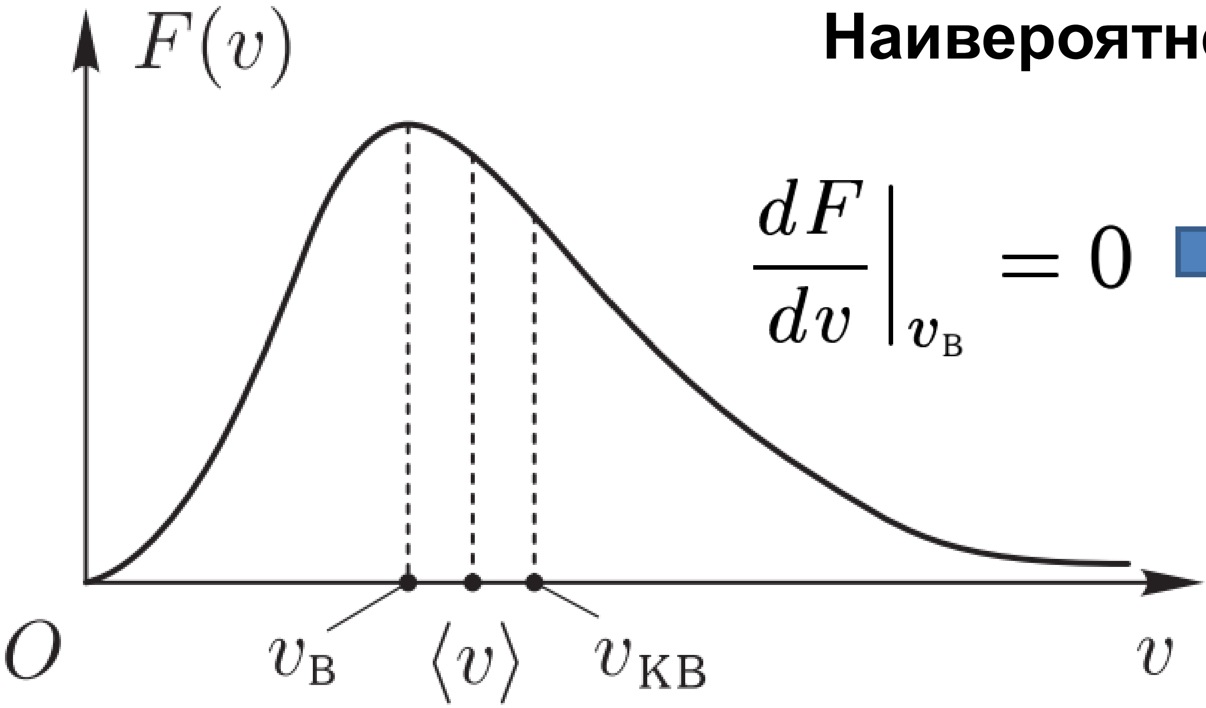
Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot F(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



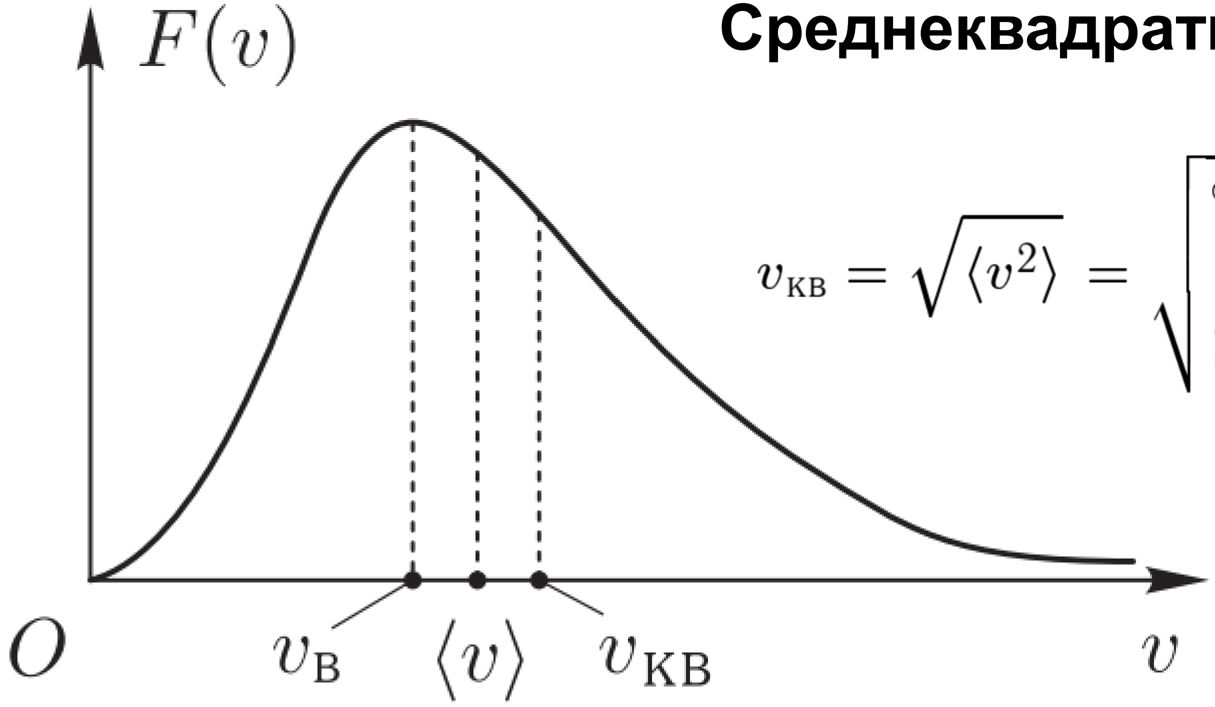
Наивероятнейшая скорость:

$$\left.\frac{dF}{dv}\right|_{v_{\text{в}}} = 0 \Rightarrow v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



Среднеквадратичная скорость:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int\limits_0^\infty v^2 \cdot F(v) \cdot dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.

- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул***.

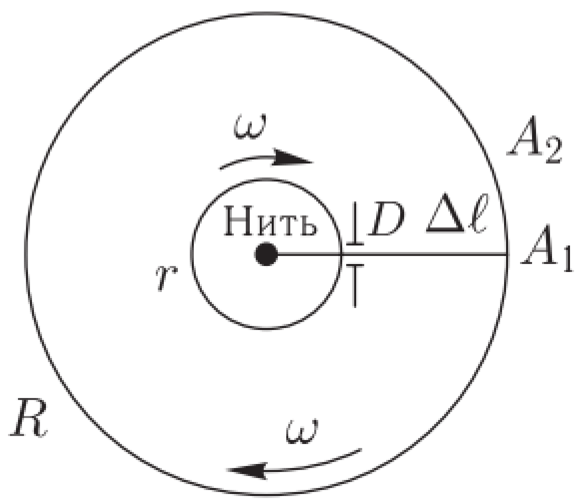
Граница применимости распределение Максвелла

Принцип детального равновесия

При термодинамическом равновесии среднее число dN частиц в каждом скоростном объеме $dv_x dv_y dv_z$ не изменяется с течением времени, невзирая на огромное число столкновений. Это означает, что количество одних частиц, покинувших этот объем в результате столкновений, в среднем будет равно такому же количеству других частиц, пришедших в этот объем.

Принцип детального равновесия утверждает, что между произвольными двумя скоростными объемами равновесие устанавливается напрямую (без участия других объемов).

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\Delta l = \omega R \Delta t$$

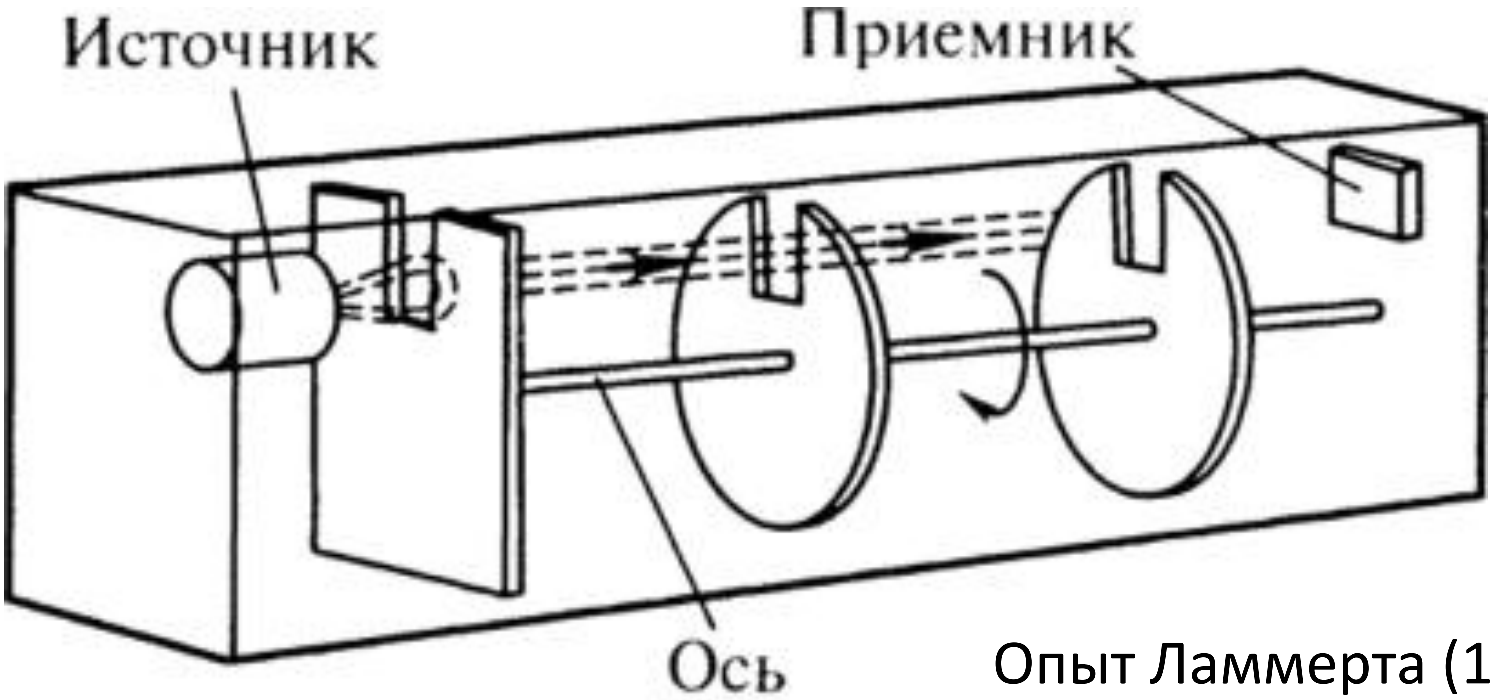
$$\Delta t = (R - r)/v$$

$$v = \omega R(R - r)/\Delta l$$

При протекании по нити электрического тока она нагревалась, и атомы серебра, пройдя через щель внутреннего цилиндра и неподвижную щелевую диафрагму D, затем оседали на внутренней поверхности охлаждаемого внешнего цилиндра.

При неподвижных цилиндрах на этой поверхности образовывалась узкая серебряная полоска в точке A1. При равномерном вращении цилиндров с угловой скоростью ω полоска смещалась в точку A2, находящуюся от первоначальной точки A1 на расстоянии Δl

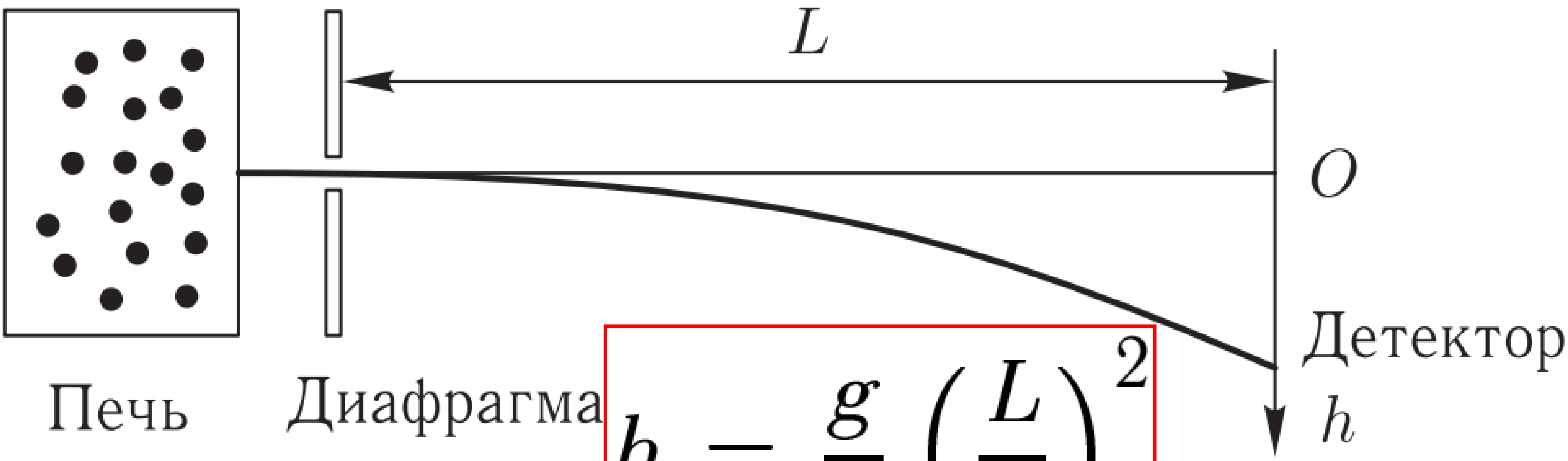
Экспериментальная проверка распределения Максвелла



Опыт Ламмерта (1929)

$$\frac{l}{v} = \frac{\alpha}{\omega}$$ Условие пролёта

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\boxed{h = \frac{g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2}$$

В 1947 г. И. Эстерманом, О. Симпсоном и О. Штерном были выполнены эксперименты по измерению отклонения вниз горизонтальных молекулярных пучков в поле силы тяжести. В эксперименте пучок атомов цезия вылетал через отверстие в печи с некоторой скоростью ***v*** и, пройдя диафрагму, под действием силы тяжести начинал двигаться по параболе.

Распределение Максвелла

- Примеры применения распределения Максвелла к описанию молекулярных явлений.
- Явление эффузии. Явление конденсации (испарения) молекул.
- Распределение Максвелла по импульсу и по кинетической энергии.
- Характерные энергии (наивероятнейшая, средняя).
- Частота ударов молекул газа о поверхность стенки сосуда.

Распределение по энергиям

Вероятность, с которой молекула идеального газа имеет значение энергии в интервале ($\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$) :

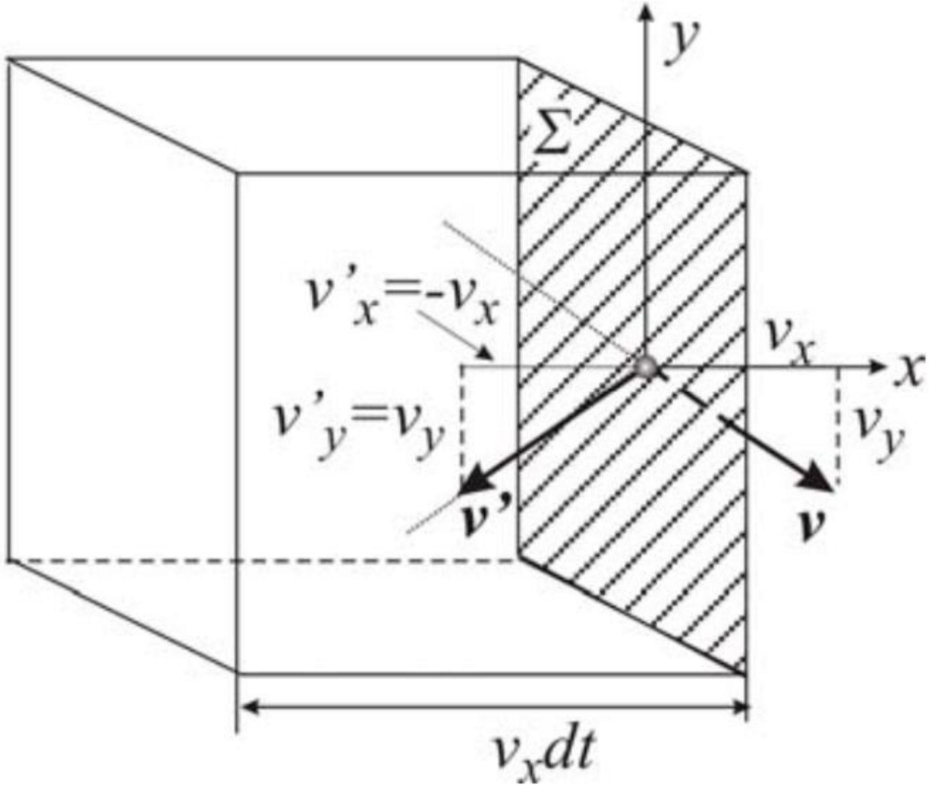
$$dP_L(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_\text{B} T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_\text{B} T} \right) d\varepsilon$$

Плотность вероятности:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_\text{B} T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_\text{B} T} \right)$$

$$\varepsilon_\text{НВ} = \frac{k_\text{B} T}{2} \qquad \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle = \frac{3 k_\text{B} T}{2}$$

Частота ударов молекул о стенку



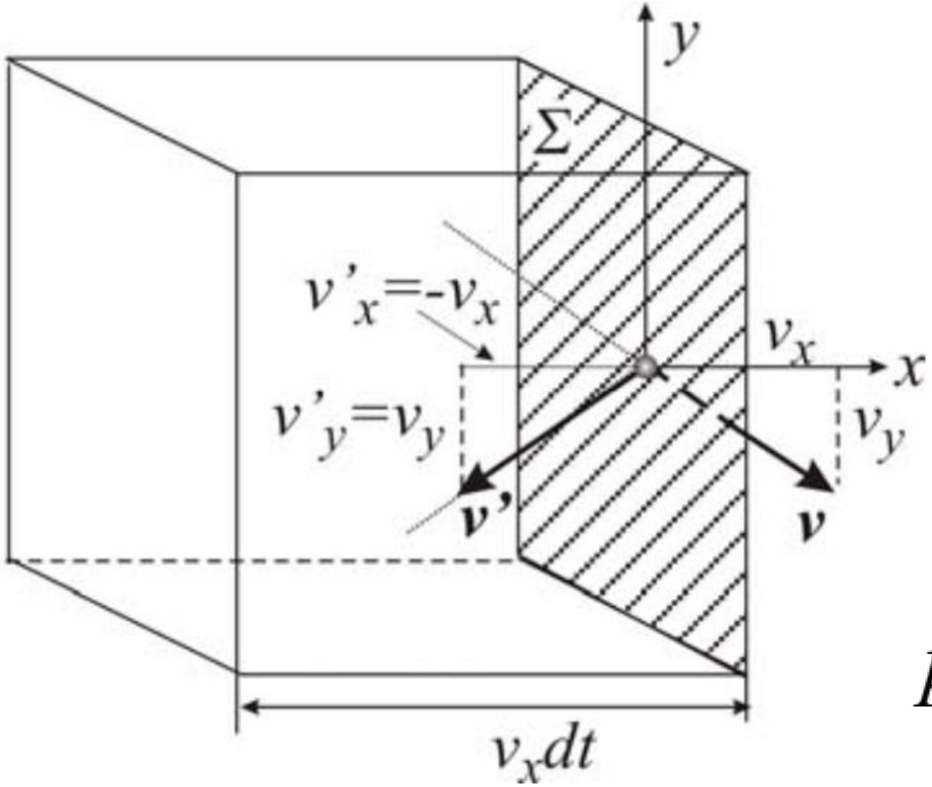
Вычислим **количество ударов молекул о стенку** единичной площади за единицу времени при их тепловом движении.

$$dV = v_x \Sigma dt$$

$$dw(v_x) = \frac{dN(v_x)}{dt \cdot \Sigma} = v_x \cdot n(v_x) = v_x n_0 f(v_x) dv_x$$

$$w = \int_0^\infty dw(v_x) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_0^\infty v_x \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}\right) dv_x = n_0 \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона



Вычислим давление p идеального газа при температуре T и концентрации молекул n_0 .

$$dV = v_x \Sigma dt$$

$$p = \int_0^\infty 2mv_x^2 \left\{ n_0 dP(v_x) \right\}$$

$$p = nk_{\text{B}}T$$