Биномиальное распределение и его предельные формы

- Биномиальное распределение
- Предельные формы биномиального распределения
  - Распределение Пуассона
  - Распределение Гаусса
- Примеры использования для описания молекулярных явлений

Биномиальное распределение

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

- **$P_n(m)$** – вероятность состояния, в котором из n частиц системы m частиц находятся в благоприятных микросостояниях;
- **p** – вероятность, с которой каждая частица находится в благоприятном состоянии;
- **q=1–p** – вероятность, с которой каждая частица находится в неблагоприятном состоянии (с которой частица не находится в благоприятном состоянии);
- **Среднее значение**

$$\langle m \rangle = np$$

- **Среднеквадратическое отклонение (стандартное отклонение)**

$$\sigma_m = \sqrt{npq}$$

Микроскопическое описание		m (число «решек»)	$\Gamma(n,m)$	$P(n,m)$
№ микросостояния s	Доступные микросостояния			
1	0 0 0 0	0	$\Gamma(4,0)=C_4^0=1$	$1/16=0,0625$
2	r 0 0 0	1	$\Gamma(4,1)=C_4^1=4$	$4/16=0,25$
3	0 r 0 0			
4	0 0 r 0			
5	0 0 0 r			
6	r r 0 0	2	$\Gamma(4,2)=C_4^2=6$	$6/16=0,375$
7	r 0 r 0			
8	r 0 0 r			
9	0 r r 0			
10	0 r 0 r			
11	0 0 r r			
12	r r r 0	3	$\Gamma(4,3)=C_4^3=4$	$4/16=0,25$
13	r r 0 r			
14	r 0 r r			
15	0 r r r			
16	r r r r	4	$\Gamma(4,4)=C_4^4=1$	$1/16=0,0625$

Дисперсия

Дисперсия характеризует разброс случайной величины около среднего значения. Она определяется как среднее значение квадрата отклонения величины от ее среднего значения:

$$\sigma^2 = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle =$$

$$= \left\langle \xi^2 - 2\xi \langle \xi \rangle + \langle \xi \rangle^2 \right\rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$$

Корень квадратный из дисперсии называется **стандартным**, или **среднеквадратичным отклонением**.

Биномиальное распределение

$$\mathrm{P}_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Например, при бросании монеты вероятность выпадения решки p=1/2, а при бросании n=10 раз вероятность того, что выпадут две решки (m=2), равна

$$\mathrm{P}_{10}(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0{,}043$$

Предельные формы биномиального распределения Распределение Пуассона

1) число частиц (случайных величин) n >>1 (в пределе n→∞);
2) вероятность p реализации благоприятного события для одной случайной величины очень мала: p <<1;
3) np=const (<m>=np)

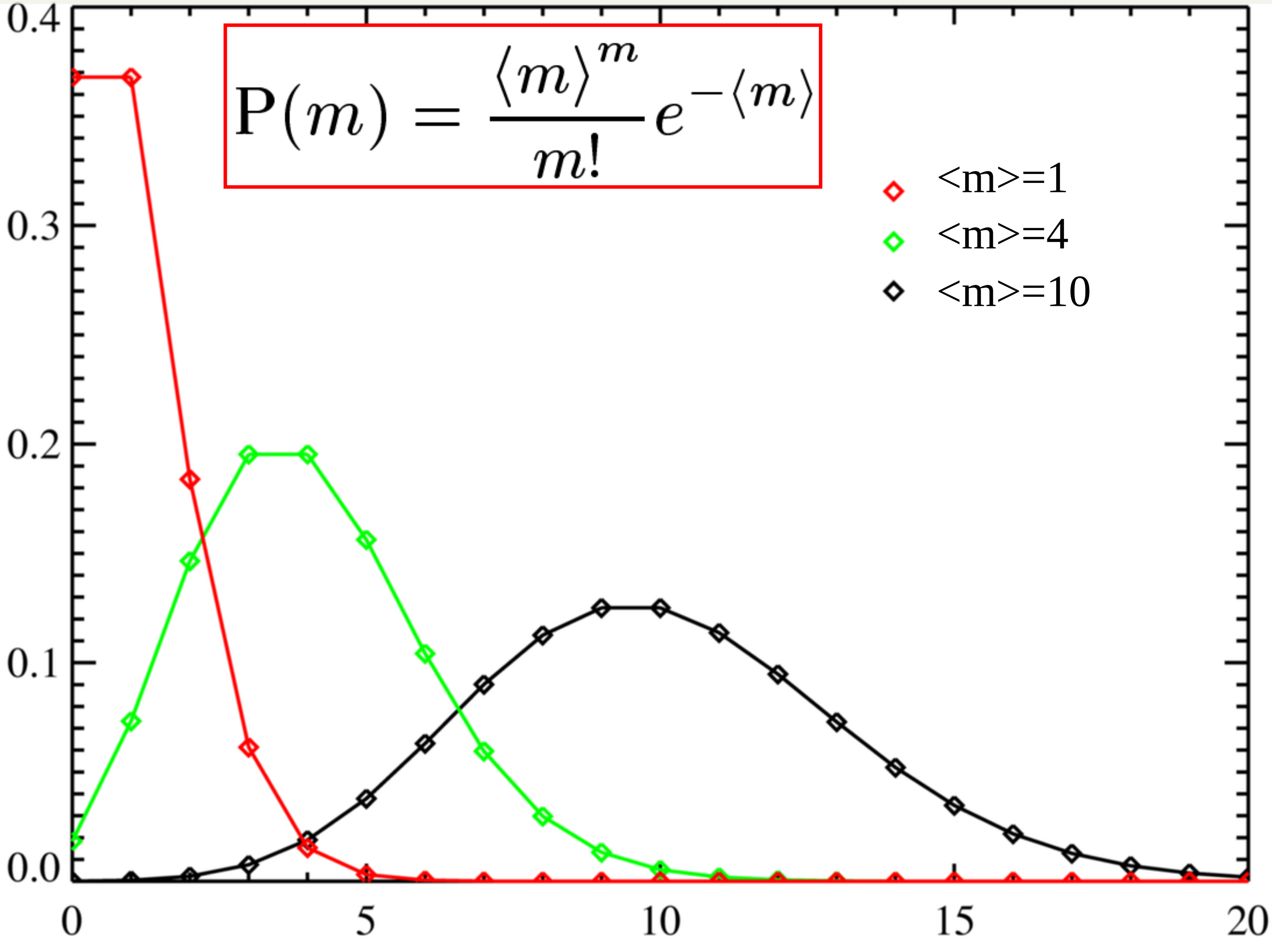
$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n(m) p^m q^{n-m}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}}$$

Пример 1. Представим себе, что на 100 монет приходится одна юбилейными. Какова вероятность того, что если взять 200 монет две из них окажутся юбилейными?

$$\mathrm{P}(2) = \left(\langle 2 \rangle^2 / 2! \right) e^{-\langle 2 \rangle} = 0{,}27$$

Распределение Пуассона



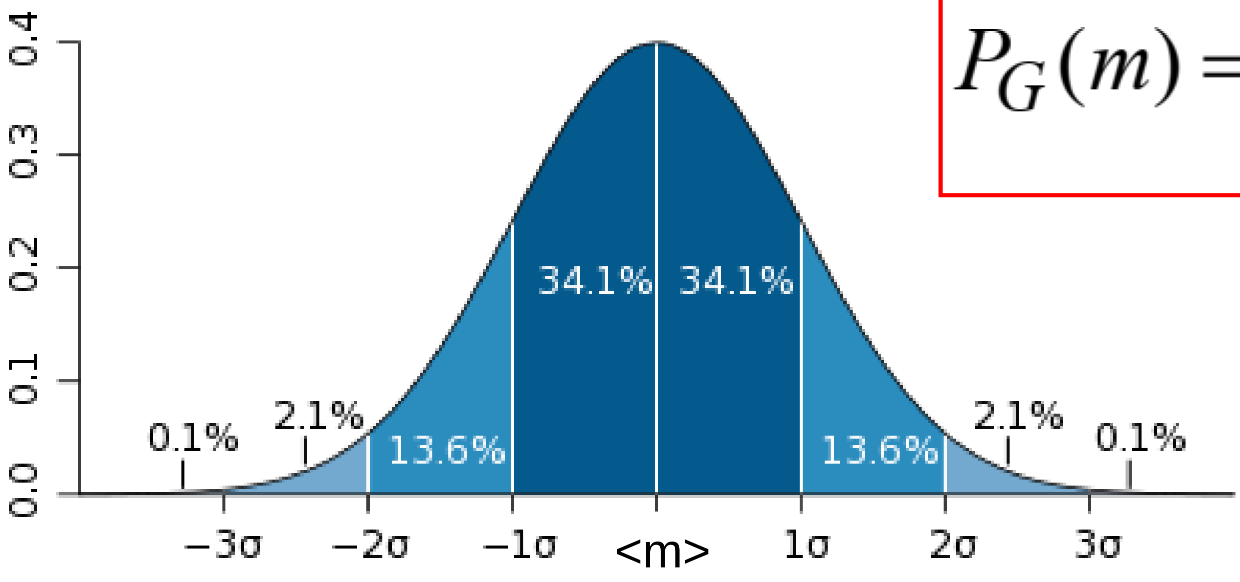
$$\boxed{\mathrm{P}(m) = \frac{\langle m\rangle^m}{m!}e^{-\langle m\rangle}}$$

Предельные формы биномиального распределения Распределение Гаусса

1) число частиц (случайных величин) n >>1 (в пределе $n \to \infty$);

2) для значений m, близких к <m>, т.е. при отклонении от среднего значения на величину порядка стандартного отклонения.

$$P_G(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\langle m\rangle)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{d\ln m!}{dm} \approx \ln m$$

Примеры использования для описания молекулярных явлений

1. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1м^3. Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 К. В сосуде выделен малый объем равный 1см^3 . С какой вероятностью в малом объеме не окажется не одной молекулы?

2. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1м^3. Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 К. В сосуде выделен малый объем равный 1см^3 . Какова вероятность того, что в малом объеме будет находится на 2 молекулы меньше среднего числа молекул в этом объеме?

Постулат равновероятности

Основной постулат статистической физики – микросостояния равновесной изолированной системы равновероятны и равны $P_s = 1/\Gamma_0$,

Эргодическая гипотеза

Эргодическая гипотеза в статистической физике, состоит в предположении, что средние по ансамблю равно среднему по времени.

(из эргодической гипотезы следует постулат равновероятности)

$$\overline{N}_1 = \langle N_1 \rangle \qquad \overline{N}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T N_1(t) \cdot dt.$$