Биномиальное распределение и его предельные формы

- Биномиальное распределение
- Предельные формы биномиального распределения
  - Распределение Пуассона
  - Распределение Гаусса
- Примеры использования для описания молекулярных явлений

Биномиальное распределение

$$\mathrm{P}_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Например, при бросании монеты вероятность выпадения решки p=1/2, а при бросании n=10 раз вероятность того, что выпадут две решки (m=2), равна

$$\mathrm{P}_{10}(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} = 0{,}043$$

Предельные формы биномиального распределения Распределение Пуассона

1) число частиц (случайных величин) n >>1 (в пределе n→∞);

2) вероятность p реализации благоприятного события для одной случайной величины очень мала: p <<1;

3) np=const (<m>=np)

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n(m) p^m q^{n-m}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(m) = \frac{\langle m\rangle^m}{m!} e^{-\langle m\rangle}}$$

Пример 1. Представим себе, что на 100 монет приходится одна юбилейными. Какова вероятность того, что если взять 200 монет две из них окажутся юбилейными?

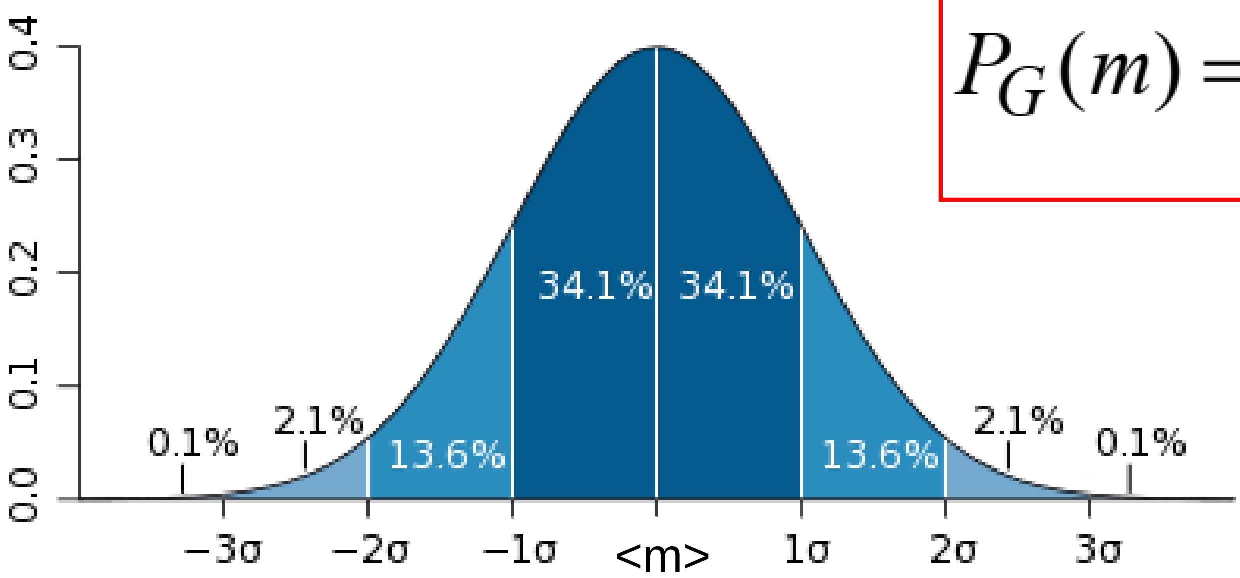
$$\mathrm{P}(2) = \left(\langle 2\rangle^2 / 2!\right) e^{-\langle 2\rangle} = 0{,}27$$

Предельные формы биномиального распределения Распределение Гаусса

1) число частиц (случайных величин) n >>1 (в пределе n→∞);

2) для значений m, близких к <m>, т.е. при отклонении от среднего значения на величину порядка стандартного отклонения.

$$P_G(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\langle m\rangle)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{d \ln m!}{dm} \approx \ln m$$

Примеры использования для описания молекулярных явлений

1. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1м^3. Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 K. В сосуде выделен малый объем равный 1см^3 . С какой вероятностью в малом объеме не окажется не одной молекулы?

2. Идеальный газ находится в закрытом сосуде объемом 1м^3. Давление равно 10^5 Па, температура равна 273 K. В сосуде выделен малый объем равный 1см^3 . Какова вероятность того, что в малом объеме будет находится на 2 молекулы меньше среднего числа молекул в этом объеме?

Распределение Максвелла

- Распределение Максвелла по проекции и модулю скорости для молекул идеального равновесного газа.
- Характерные скорости распределения Максвелла (наивероятнейшая, средняя, среднеквадратичная).
- Граница применимости распределение Максвелла
- Принцип детального равновесия.
- Эксперименты, подтверждающие распределение Максвелла.

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.

- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул***.

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по компонентам скоростей:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

Плотность вероятности:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T}\right)$$

В силу независимости каждой из компонент скоростей, получаем:

$$dP(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right)$$

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей:

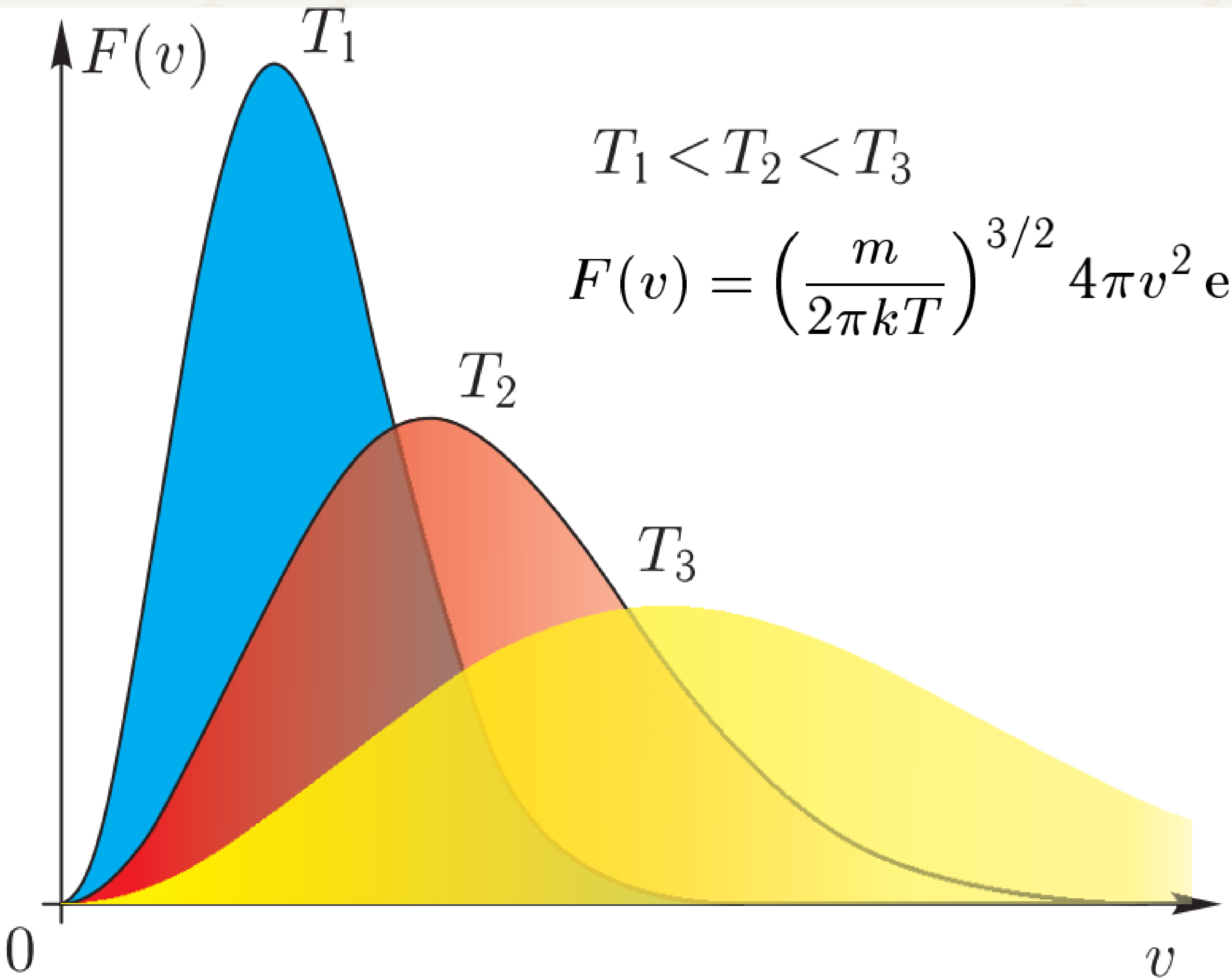
$$dP(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv$$

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Число частиц, модуль скорости которых находится в интервале (*v*;*v*+*dv*): $dN = NdP(v)$

Распределение Максвелла при различных температурах



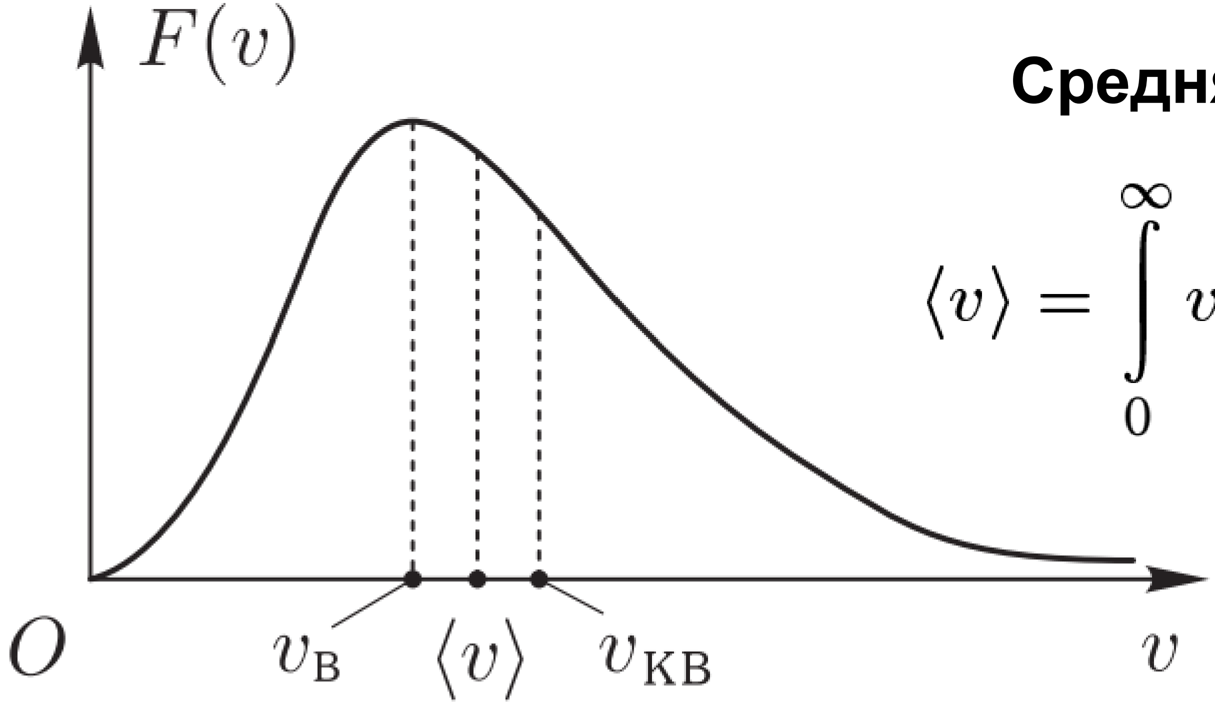
$$T_1 < T_2 < T_3$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



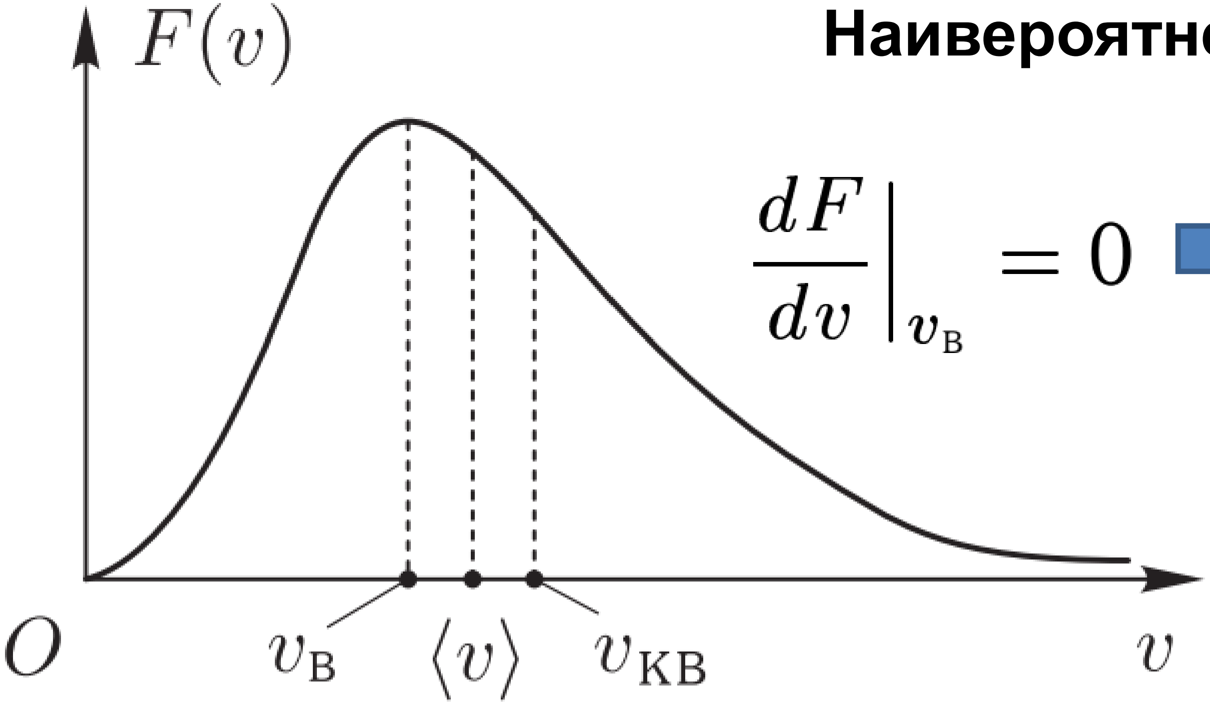
Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot F(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



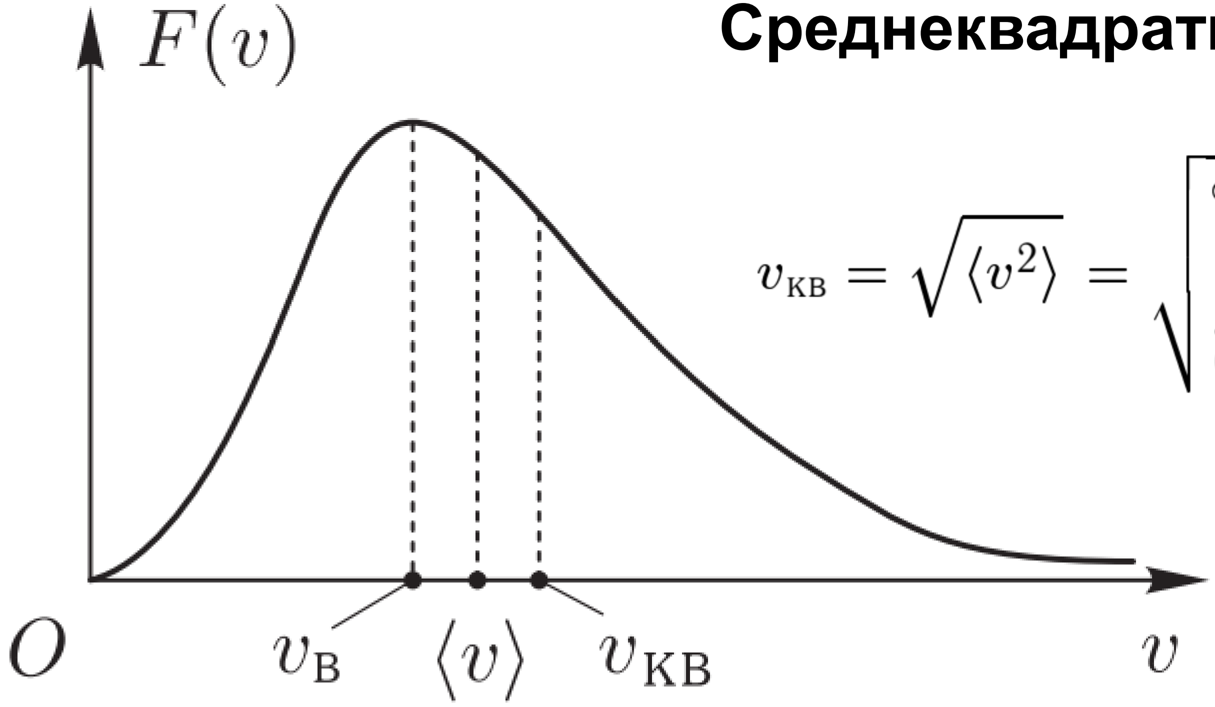
Наивероятнейшая скорость:

$$\left.\frac{dF}{dv}\right|_{v_{\text{В}}} = 0 \Rightarrow v_{\text{В}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$



Среднеквадратичная скорость:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 \cdot F(v) \cdot dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.

- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул***.

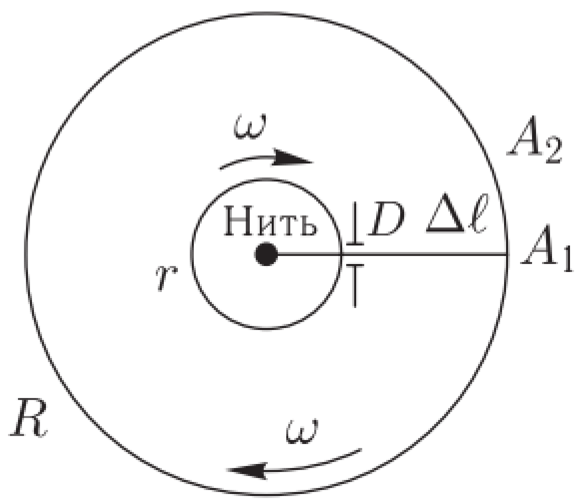
Граница применимости распределение Максвелла

Принцип детального равновесия

При термодинамическом равновесии среднее число dN частиц в каждом скоростном объеме $dv_x dv_y dv_z$ не изменяется с течением времени, невзирая на огромное число столкновений. Это означает, что количество одних частиц, покинувших этот объем в результате столкновений, в среднем будет равно такому же количеству других частиц, пришедших в этот объем.

Принцип детального равновесия утверждает, что между произвольными двумя скоростными объемами равновесие устанавливается напрямую (без участия других объемов).

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\Delta l = \omega R \Delta t$$

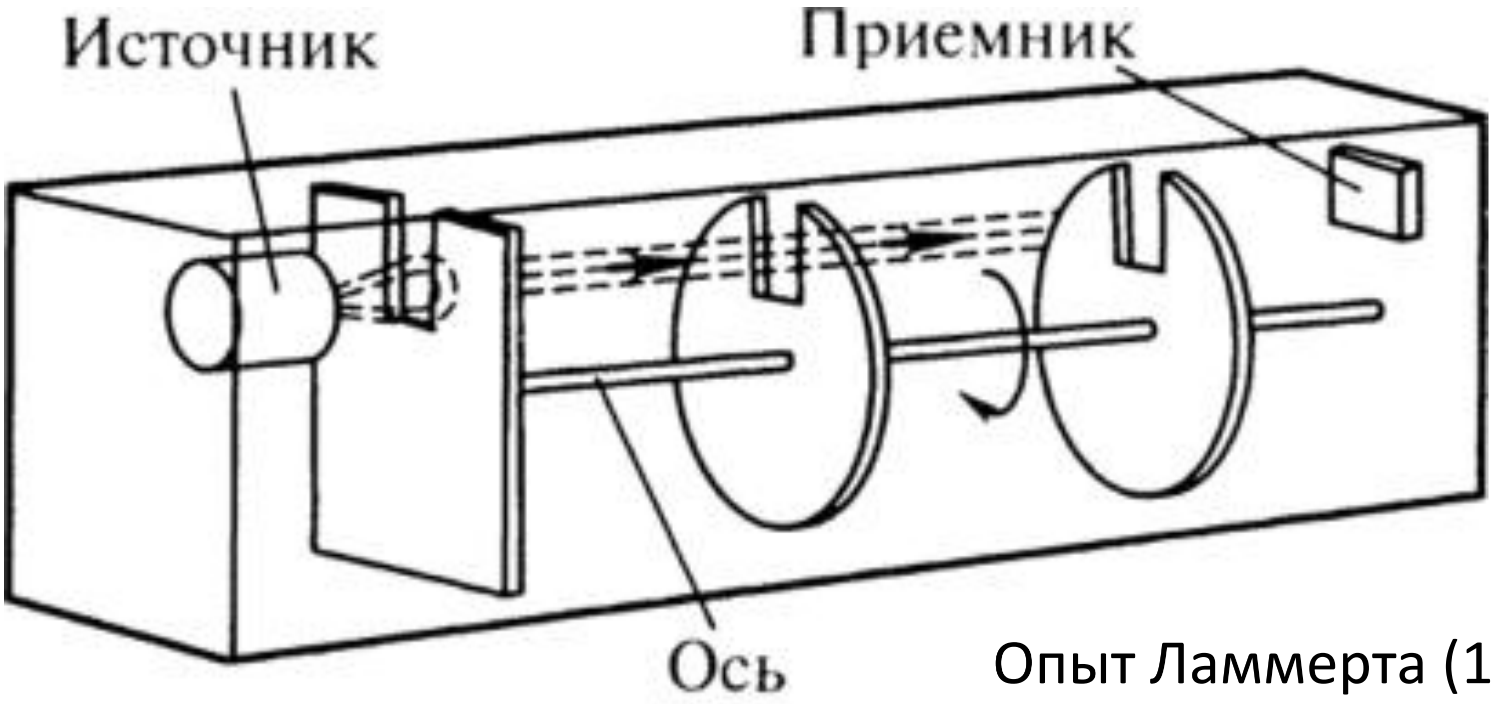
$$\Delta t = (R - r)/v$$

$$v = \omega R(R - r)/\Delta l$$

При протекании по нити электрического тока она нагревалась, и атомы серебра, пройдя через щель внутреннего цилиндра и неподвижную щелевую диафрагму D, затем оседали на внутренней поверхности охлаждаемого внешнего цилиндра.

При неподвижных цилиндрах на этой поверхности образовывалась узкая серебряная полоска в точке A1. При равномерном вращении цилиндров с угловой скоростью ω полоска смещалась в точку A2, находящуюся от первоначальной точки A1 на расстоянии Δl

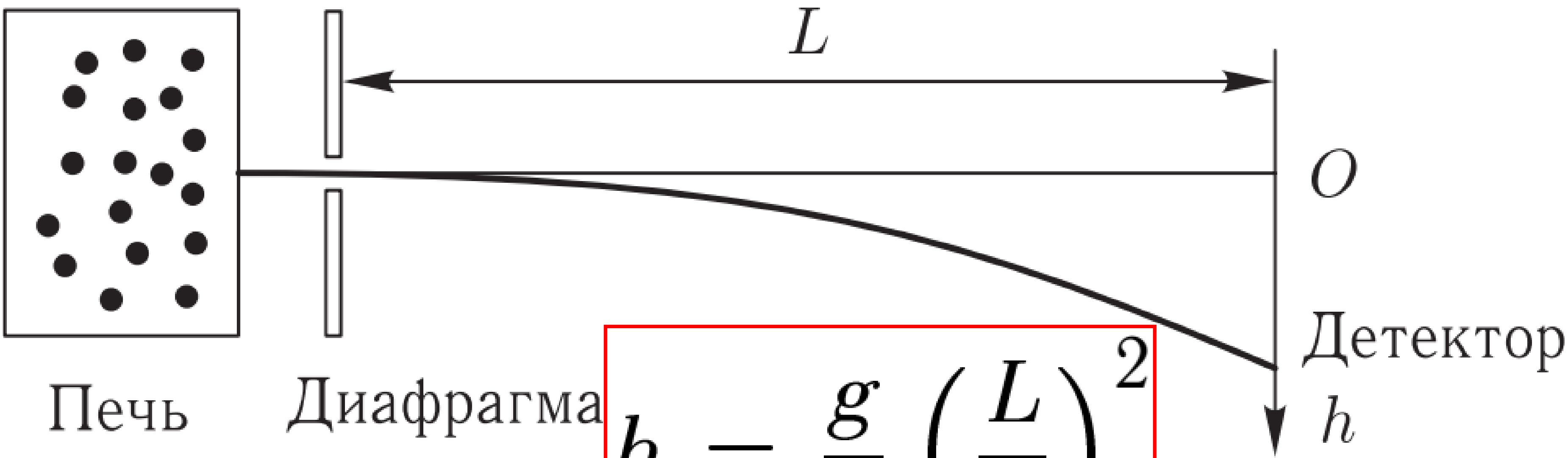
Экспериментальная проверка распределения Максвелла



Опыт Ламмерта (1929)

$$\frac{l}{v} = \frac{\alpha}{\omega}$$ Условие пролёта

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\boxed{h = \frac{g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2}$$

В 1947 г. И. Эстерманом, О. Симпсоном и О. Штерном были выполнены эксперименты по измерению отклонения вниз горизонтальных молекулярных пучков в поле силы тяжести. В эксперименте пучок атомов цезия вылетал через отверстие в печи с некоторой скоростью ***v*** и, пройдя диафрагму, под действием силы тяжести начинал двигаться по параболе.