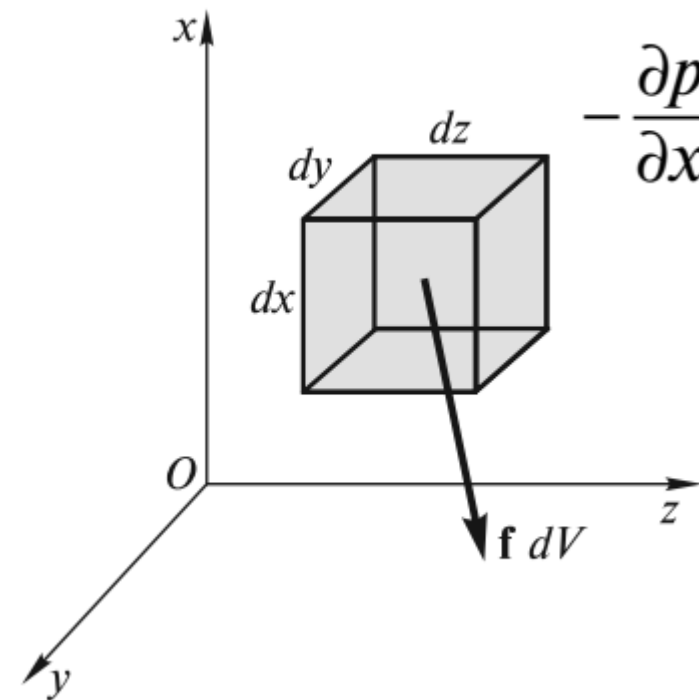


Распределение Больцмана

- Барометрическая формула
- Распределение Больцмана молекул равновесного газа в поле силы тяжести и в поле центробежных сил
- Опыты Перрена по исследованию закона распределения молекул в поле силы тяжести

Основное уравнение гидростатики



$$-\frac{\partial p}{\partial x} + f_x = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0.$$

$$\text{grad } p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$-\text{grad } p + \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U.$$

$$\text{grad}(p + U) = 0$$

$$p + U = \text{const}$$

Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести Барометрическая формула

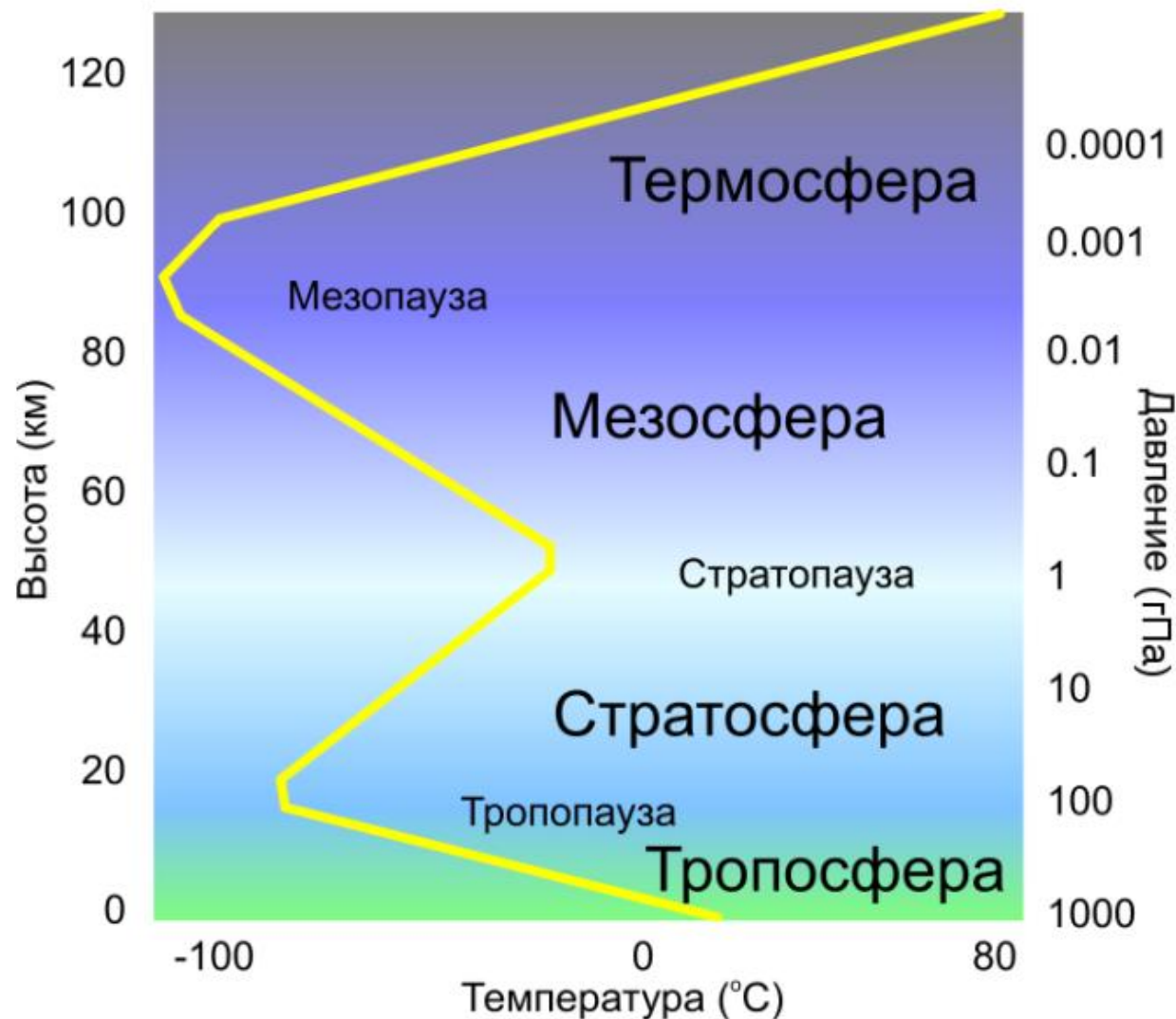
Пусть несжимаемая однородная жидкость находится в поле силы тяжести $\mathbf{f}=\rho\mathbf{g}$. Плотность потенциальной энергии можно записать в виде $U(x)=-\rho gx$.

$$p(x) = p_0 + \rho gx$$

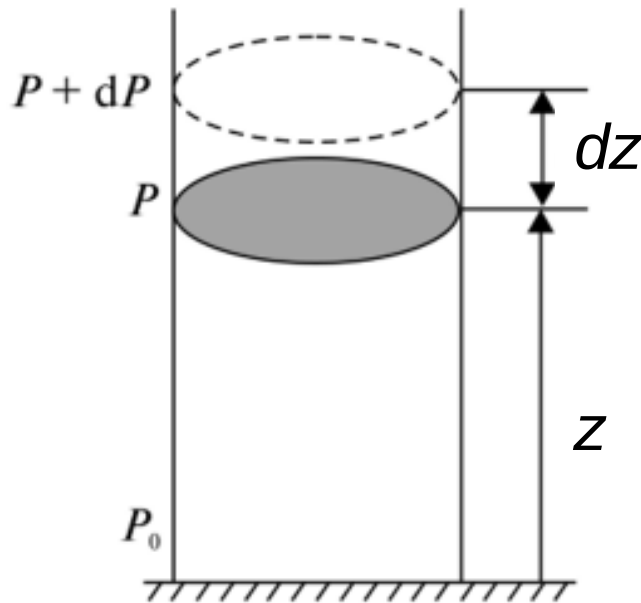
Барометрическая формула

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gx}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{x}{H_0}\right)$$

Распределение давления в покоящейся газе в поле сил тяжести



Распределение Больцмана

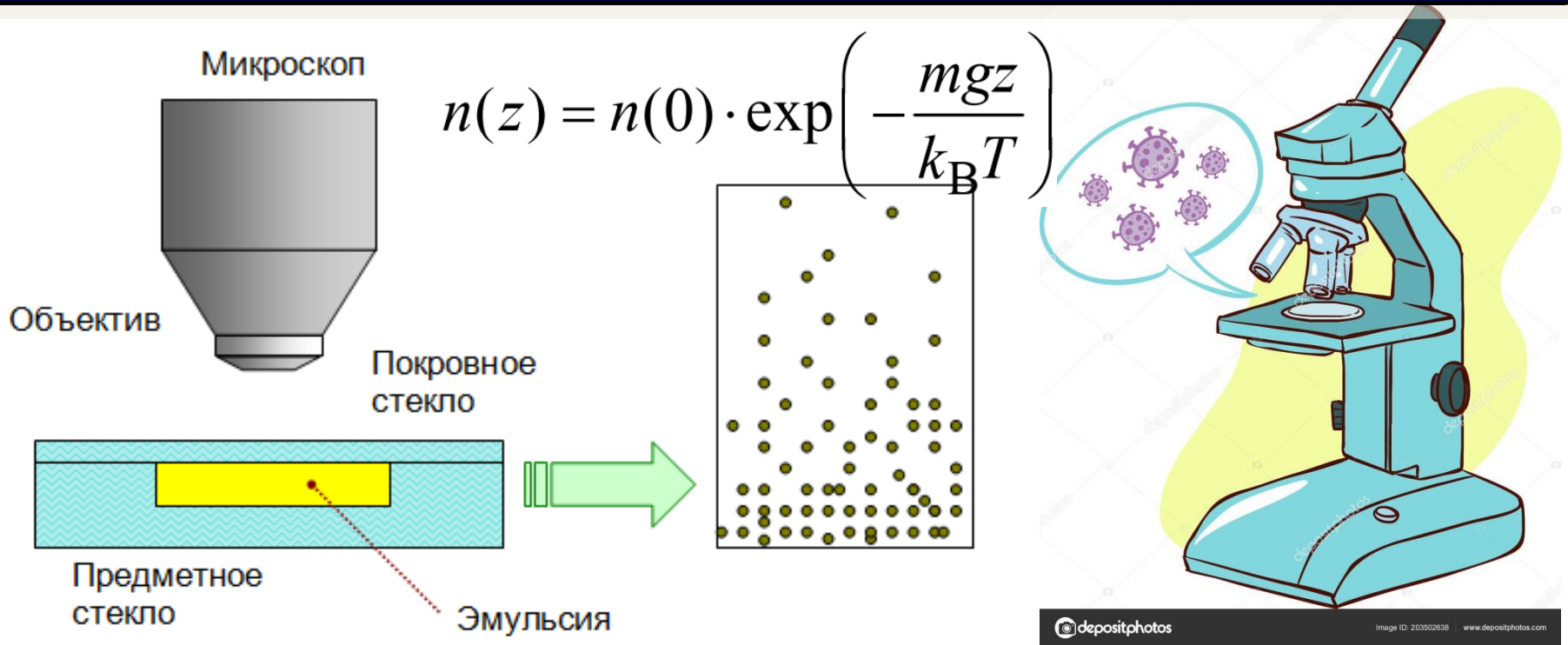


Если молекулы идеального газа, находятся при температуре T в потенциальном поле, то вероятность $dP_B(x, y, z)$, с которой молекула газа, обладающая потенциальной энергией $U(x, y, z)$, имеет координаты в интервале значений $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$ описывается распределением Больцмана.

$$dP_B(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{k_B T}\right) dx dy dz$$

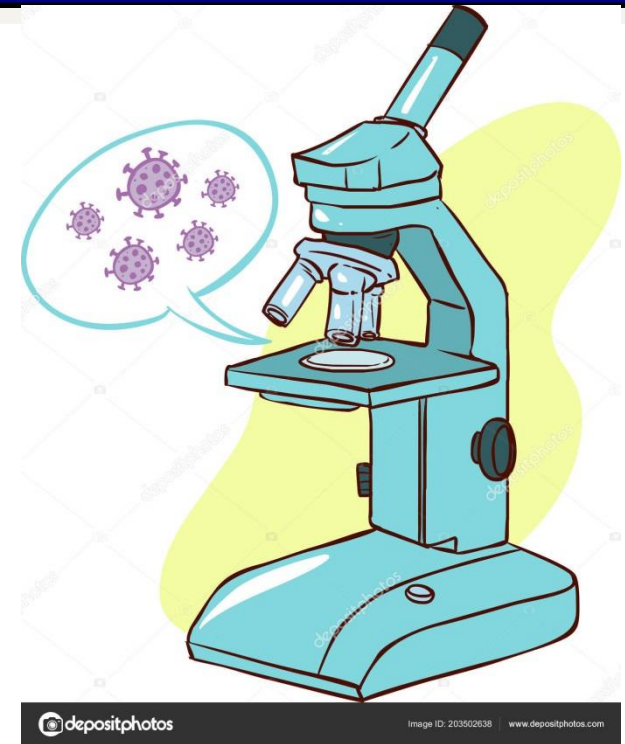
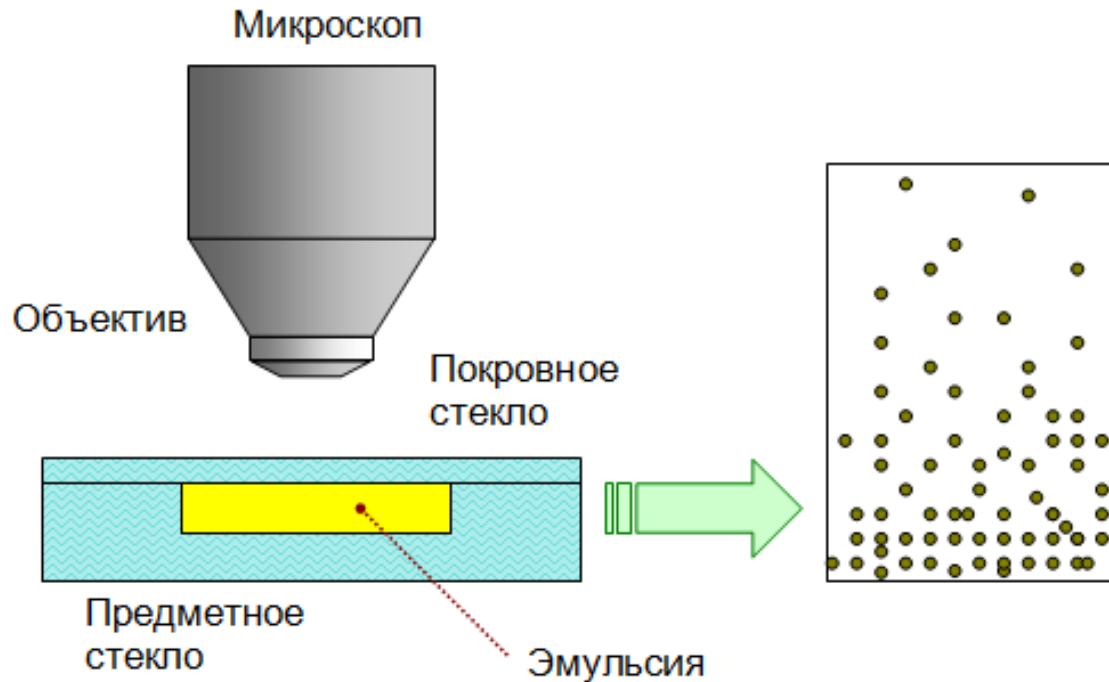
Константа A находится из условия нормировки распределения.

Опыт Перрена



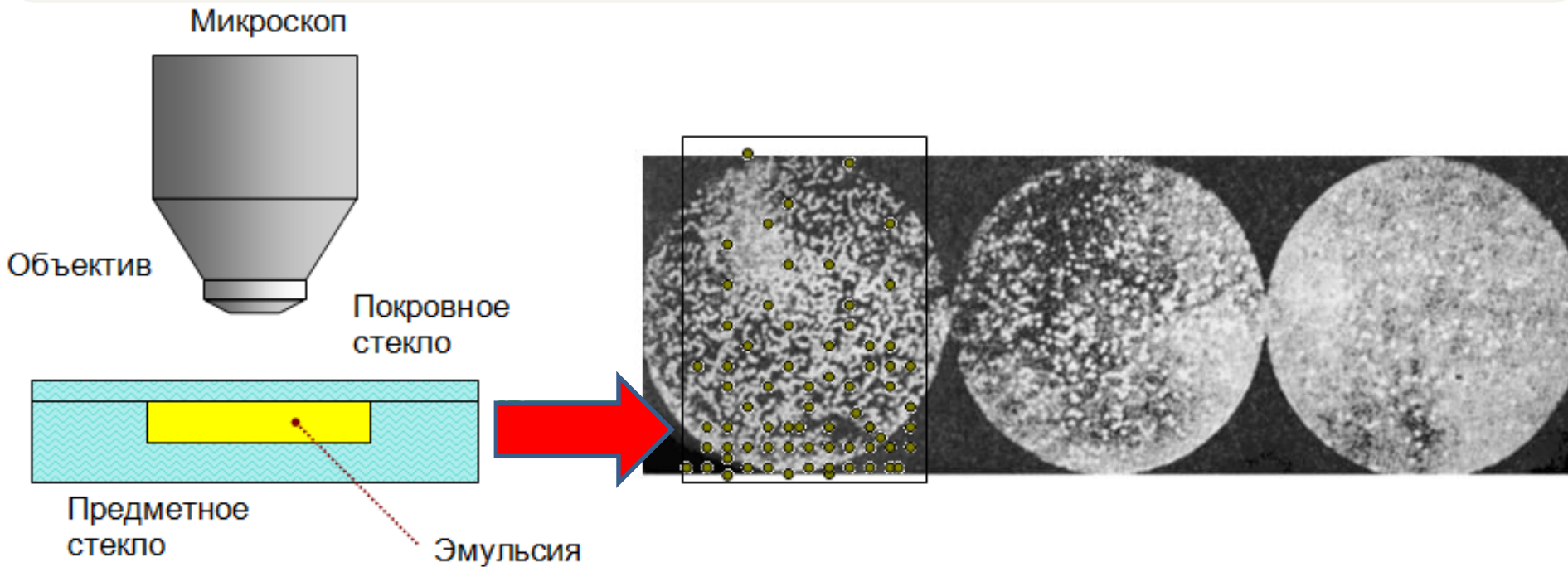
- **Эмульсия** представляла собой взвесь одинаковых сферических частиц специального древесного сока или смолы (гуммигута) в воде. Размер этих частиц (около 0,4 мкм) позволял наблюдать их в микроскоп.

Опыт Перрена



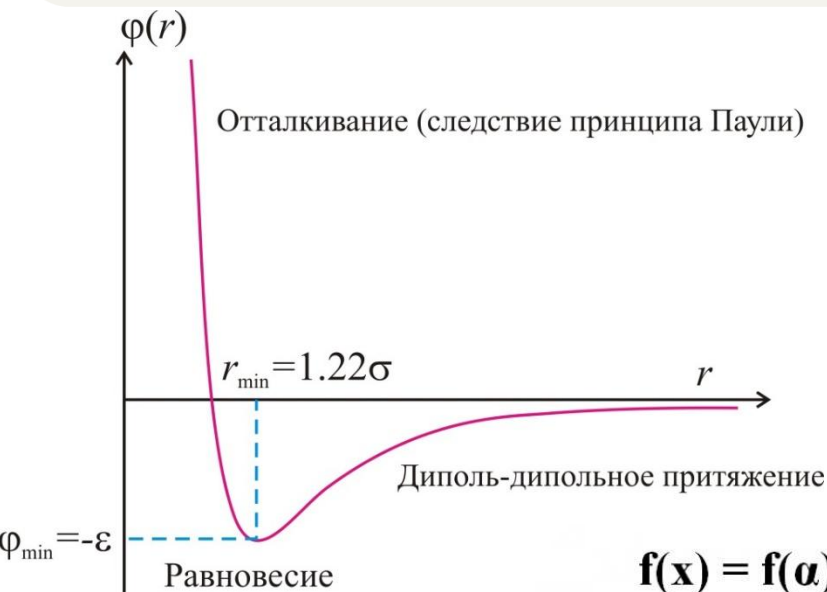
- Под микроскопом исследовалось броуновское движение частиц, которые распределялись по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения.
- Микроскоп наводился на верхний слой эмульсии, делали через микроскоп мгновенную фотографию, подсчитывали число броуновских частиц на фотографии.

Опыт Перрена



Далее тубус микроскопа опускали на 0,01 мм, снова фотографировали и подсчитывали число броуновских частиц на фотографии. Оказалось, что на дне сосуда броуновских частиц больше, на поверхности эмульсии меньше, а в целом распределение броуновских частиц по высоте соответствует распределению Больцмана.

Явление теплового расширения для твердых тел



$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$



Вещество	Алмаз	Бетон	Золото	Кремний	Медь	Натрий
α , ($10^{-6}/K$)	1,1	14,5	14	5,1	16,6	71

Таблица 2.1: Коэффициенты линейного теплового расширения в области комнатной температуры.

Основы статистической физики

- Понятие фазового пространства
- Микро- и макросостояния.
- Постулат равновероятности микросостояний равновесной термодинамической системы.
- Эргодическая гипотеза.
- Статистическое определение температуры равновесного состояния.
- Статистический смысл энтропии. Формула Больцмана для энтропии.

Микросостояние статистической системы

- **Микросостояние статистической системы** — это состояние системы, охарактеризованное настолько подробно, что заданы состояния всех образующих систему частиц.
- **Микропараметры**— характеристики одной частицы статистической системы, определяющие ее состояние в этой системе.

Макросостояние

- **Макросостояние** — состояние системы, описанное с помощью макроскопически измеряемых параметров — макропараметров.
- **Макропараметр** — величина, которая может быть определена с помощью макроскопических измерений, ее значение зависит от суммарного действия всех частиц системы.

Постулат равновероятности

Основной постулат статистической физики –
микросостояния равновесной изолированной системы
равновероятны и равны $P_s = 1/\Gamma_0$,

Эргодическая гипотеза

Эргодическая гипотеза в статистической физике, состоит в предположении, что средние по ансамблю равно среднему по времени.

(из эргодической гипотезы следует постулат равновероятности)

$$\overline{N_1} = \langle N_1 \rangle$$

$$\overline{N_1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T N_1(t) \cdot dt.$$

Распределение Гиббса

- Вероятность нахождения частицы в фазовом объеме (распределение Гиббса)

$$dP = A \exp\{-E/KT\} d\Gamma$$

Определение энтропии

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Энтропия одного моля идеального газа может быть представлена в виде

$$S(V, T) = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}$$

$$S = k_B \ln \Gamma$$

Основы статистической физики

- Понятие фазового пространства
- Микро- и макросостояния.
- Постулат равновероятности микросостояний равновесной термодинамической системы.
- Эргодическая гипотеза.
- Статистическое определение температуры равновесного состояния.
- Статистический смысл энтропии. Формула Больцмана для энтропии.

- Теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы
 - Броуновское движение

Теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_B T/2$.

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle &= \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_y^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_z^2 \rangle}{2} = \\ &= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{m \langle v_{0x}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0y}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0z}^2 \rangle}{2} = \frac{J_x \langle \omega_x^2 \rangle}{2} = \frac{J_y \langle \omega_y^2 \rangle}{2} = \frac{J_z \langle \omega_z^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

Броуновское движение

- В 1827 г. английский ботаник Р. Броун наблюдал в микроскоп с сильным увеличением беспорядочное движение субмикронных частиц (спор семян), взвешенных в воде. Интенсивность броуновского движения увеличивалась с ростом температуры среды и с уменьшением ее вязкости и размеров частиц.
- Впоследствии пришло понимание того, что Б. Д. является результатом многочисленных толчков, испытываемых субмикронной спорой со стороны окружающих ее молекул жидкости.

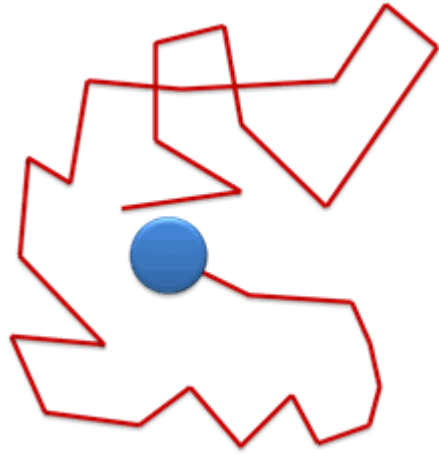
Броуновское движение

- **Броуновское движение** – это хаотическое (беспорядочное) тепловое движение взвешенной в жидкости или газе броуновской частицы под действием ударов молекул окружающей среды. Броуновская частица имеет размеры, значительно превосходящие размеры молекул среды (жидкости или газа), в которой она находится.
- **Причина броуновского движения** – флуктуации силы, действующей на броуновскую частицу со стороны молекул среды, возникающие в результате флуктуаций суммарного импульса, передаваемого молекулами среды, ударяющимися о броуновскую частицу.

Броуновское движение



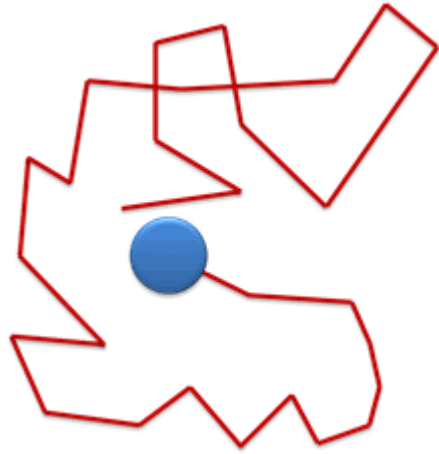
Броуновское движение



- За время наблюдения $t \gg \Delta t$ число блужданий равно за равные промежутки времени $n = t/\Delta t$.
- Пусть при каждом блуждании частица совершает случайное перемещение $\mathbf{q}_i$, тогда при блужданиях случайное смещение частицы от начальной точки (начала координат) будет определяться радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i$$

Броуновское движение



- Если проводить серию из большого числа опытов, то для среднего значения квадрата удаления частицы от начала координат можно записать

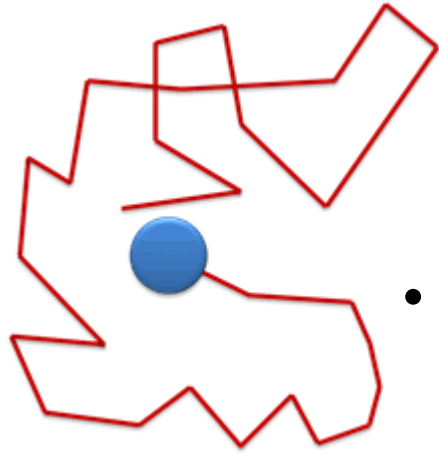
$$\langle r_n^2 \rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle q_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j}^n \langle \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \rangle$$

- Поскольку блуждания статистически независимы, то положительные слагаемые второй суммы в среднем «уравновешиваются» точно такими же отрицательными слагаемыми

$$\sum_{i \neq j}^n \langle \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \rangle = 0$$

$$\langle q_i^2 \rangle = q^2$$

Броуновское движение



$$\langle r_n^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle q_i^2 \rangle = q^2 \frac{t}{\Delta t} = \alpha \cdot t$$

- При случайных блужданиях среднеквадратичное удаление частицы от начала координат пропорционально времени!

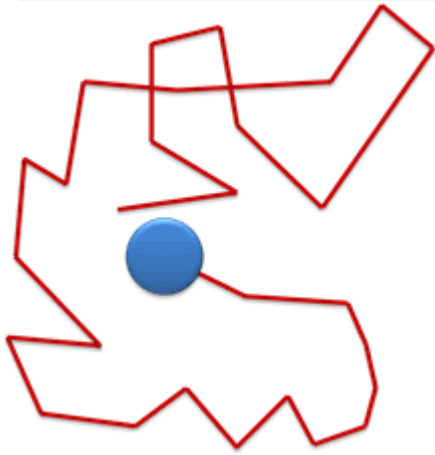
- Для движения центра масс частицы вдоль координатной оси Ox , можно записать уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + F_x$$

где b — коэффициент трения вязкой жидкости, F_x — проекция на координатную ось случайной силы, вызванной столкновениями.

$$\langle r_n^2 \rangle = \alpha \cdot t = \frac{6kT}{b} t$$

Броуновское движение



Подтверждение этой формулы было получено Перреном в 1906 г. на экспериментальной установке, на которой проверялось распределение Больцмана. Он фиксировал положения частиц гуммигута через интервалы времени.

- Перреном была вычислена постоянная Больцмана. Ее значение хорошо согласовывалось со значением K_B , полученным им в ранее описанном опыте. Все это доказывало справедливость молекулярно-кинетических представлений.
- Законами броуновского движения определяется диффузия в газах, случайные движения ионов в растворах электролитов и электронов в электрических цепях и пр.