

Распределение Максвелла

- Распределение Максвелла по компонентам скоростей
- Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей
- Распределение Максвелла при различных температурах
- Характерные скорости распределения Максвелла
- Распределение по энергиям
- Экспериментальная проверка распределения Максвелла

Распределение Максвелла по скоростям

- **Распределение Максвелла по скоростям** — это распределение по скоростям молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, названное по имени английского физика Дж. Максвелла, установившего это распределение в 1859 г.
- **Распределение Максвелла по скоростям** не зависит от конкретного вида взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание. Важно только, чтобы ***взаимодействие молекул не зависело от их скоростей и описывалось потенциальной энергией, зависящей только от координат молекул.***

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по компонентам скоростей:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T} \right) dv_x dv_y dv_z$$

Плотность вероятности:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2 + mv_y^2 + mv_z^2}{2k_B T} \right)$$

В силу независимости каждой из компонент скоростей, получаем:

$$dP(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right) dv_x$$

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right)$$

Распределение Максвелла по скоростям

Распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей:

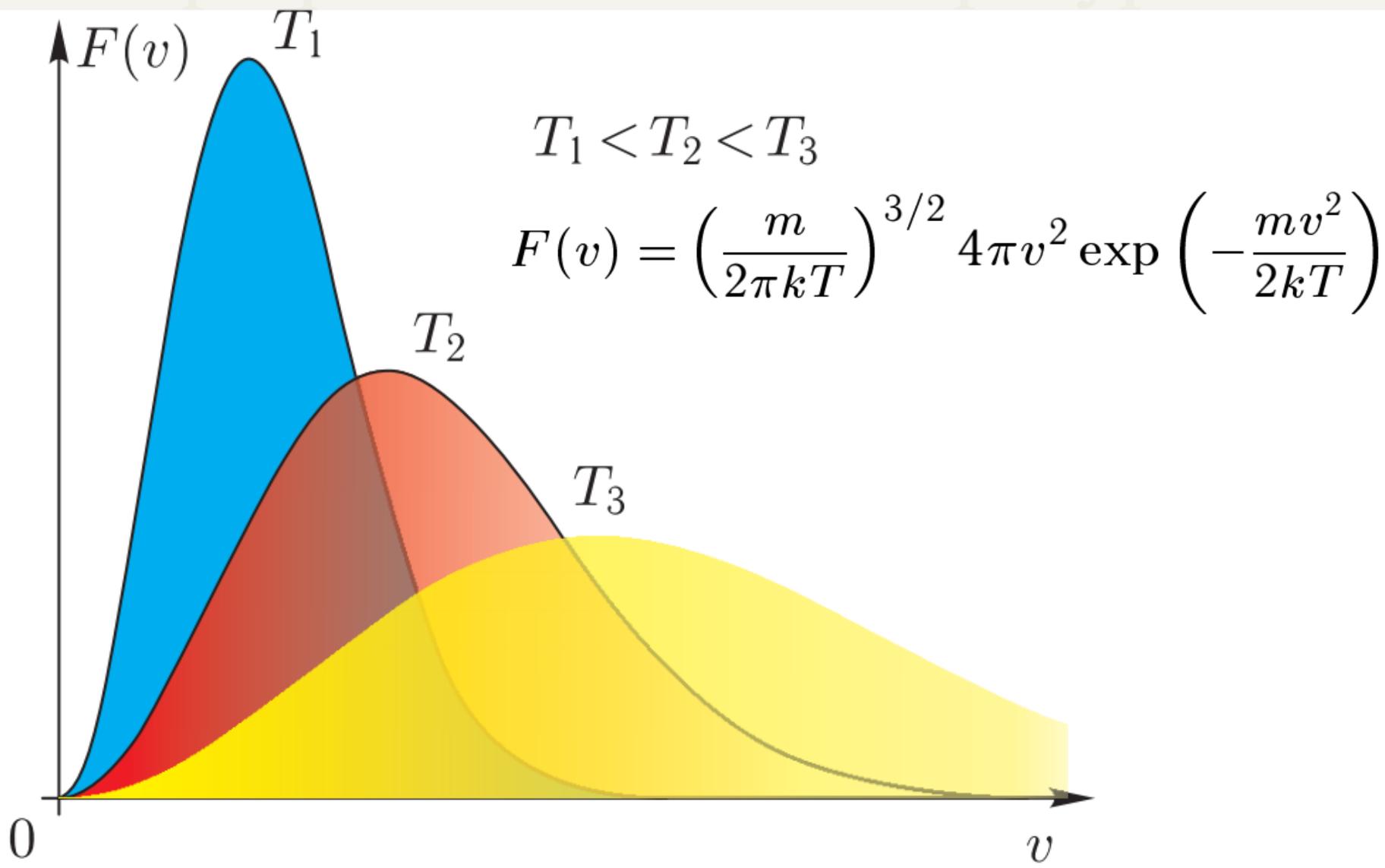
$$dP(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) 4\pi v^2 dv$$

Плотность вероятности 概率密度:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k T} \right)$$

Число частиц, модуль скорости которых находится в интервале $(v; v+dv)$: $dN = NdP(v)$

Распределение Максвелла при различных температурах

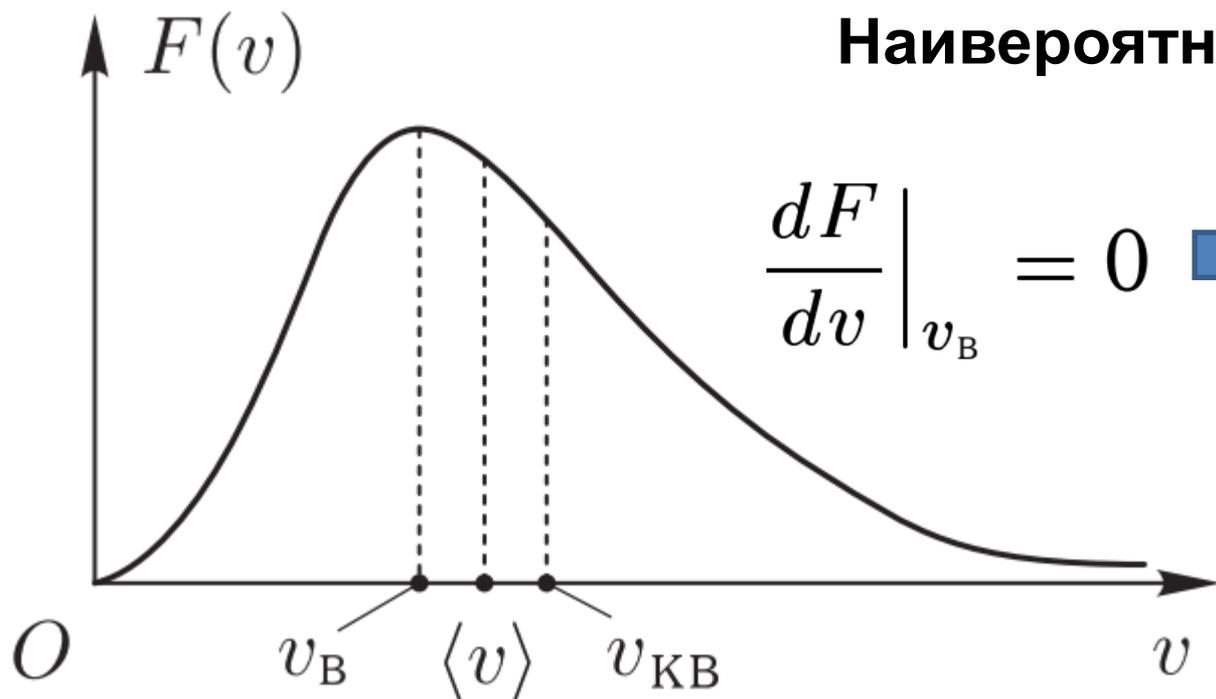


Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

Наивероятнейшая скорость:

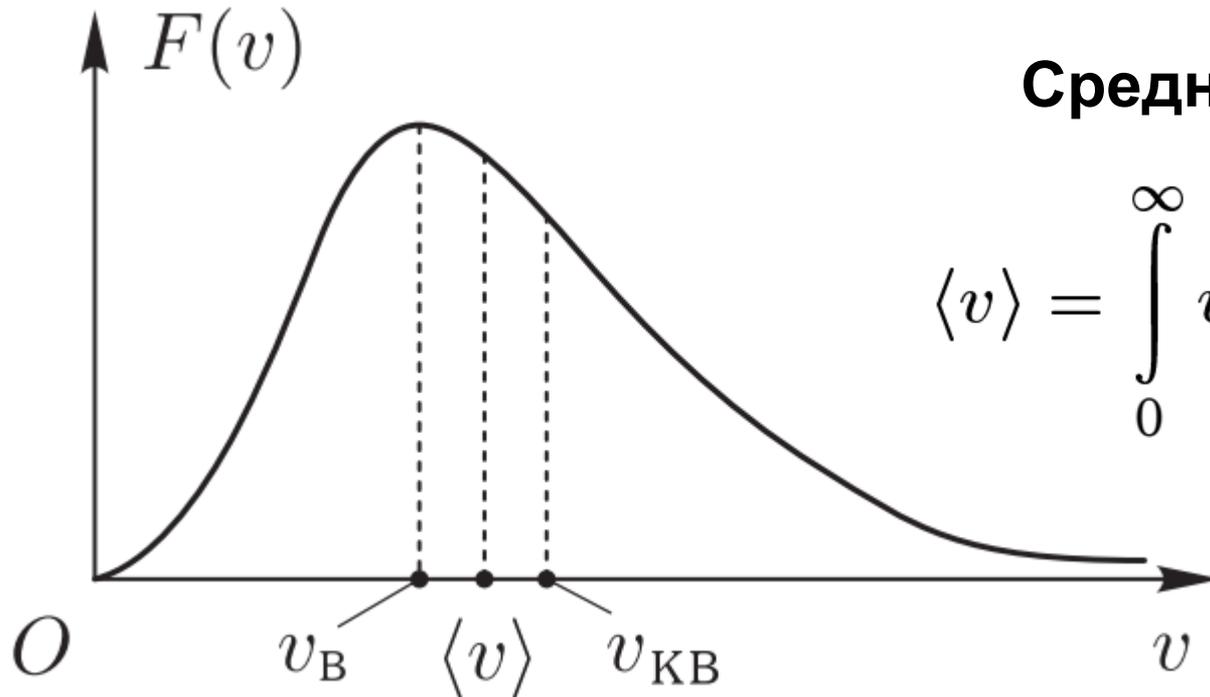


$$\left. \frac{dF}{dv} \right|_{v_B} = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$



Средняя скорость:

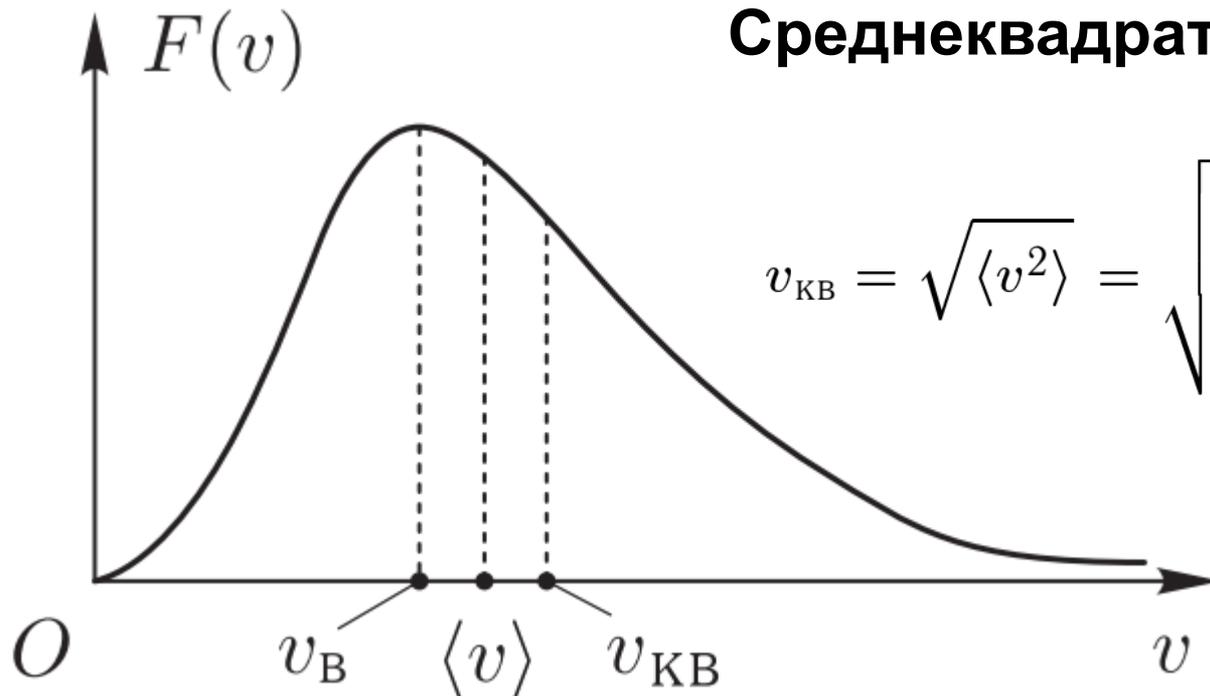
$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot F(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Характерные скорости распределения Максвелла

Плотность вероятности:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Среднеквадратичная скорость:



$$v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 \cdot F(v) \cdot dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Распределение по энергиям

Вероятность, с которой молекула идеального газа имеет значение энергии в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$:

$$dP_L(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right) d\varepsilon$$

Плотность вероятности:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$$

$$\varepsilon_{\text{НВ}} = \frac{k_B T}{2} \quad \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3k_B T}{2}$$

Распределение Максвелла по скоростям

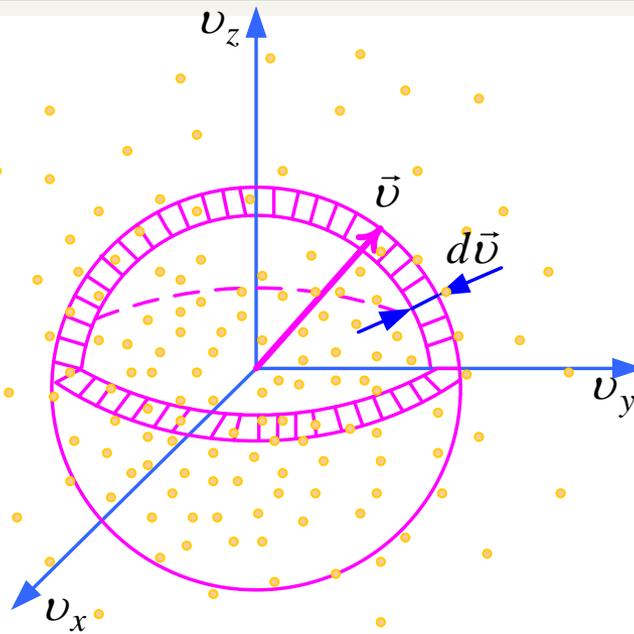


Рисунок 1.2

- Вероятность нахождения частицы в фазовом объеме (распределение Гиббса)

$$dP = A \exp\{-E/KT\} d\Gamma$$

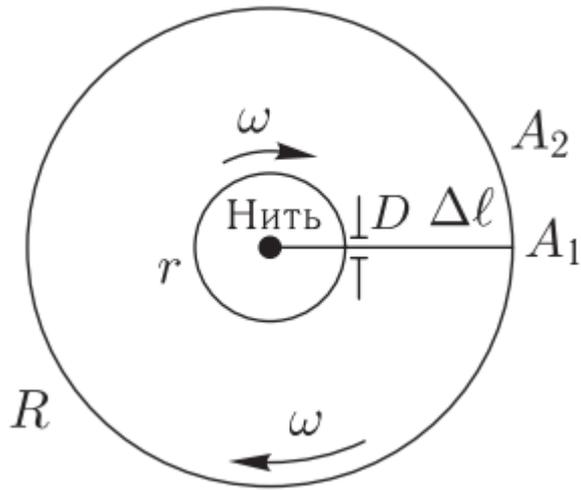
- Для практических целей важно определять число частиц, модуль скорости которых находится в интервале $(v; v+dv)$
- фазовый объем для этого случая

$$d\Gamma = 4\pi v^2 dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Принцип детального равновесия

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



При протекании по нити электрического тока она нагревалась, и атомы серебра, пройдя через щель внутреннего цилиндра и неподвижную щелевую диафрагму D , затем оседали на внутренней поверхности охлаждаемого внешнего цилиндра.

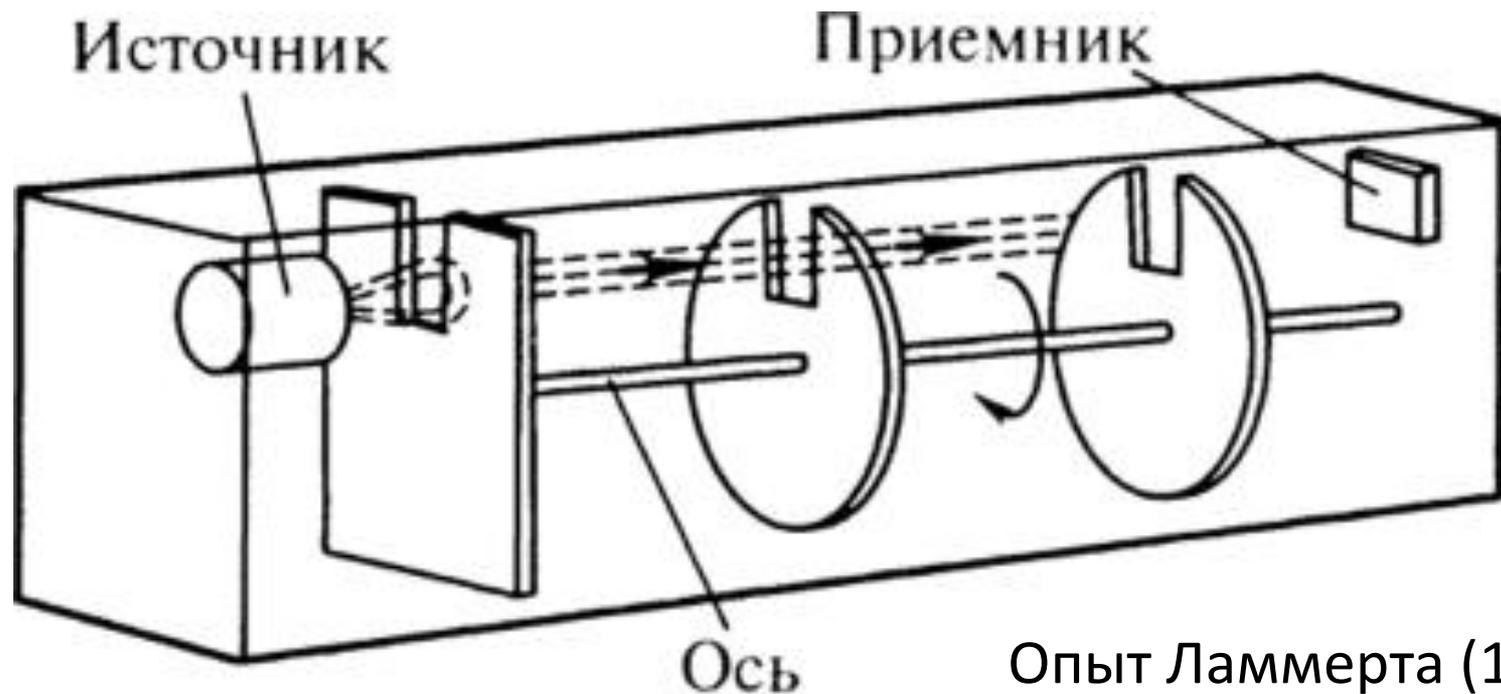
При неподвижных цилиндрах на этой поверхности образовывалась узкая серебряная полоска в точке A_1 . При равномерном вращении цилиндров с угловой скоростью ω полоска смещалась в точку A_2 , находящуюся от первоначальной точки A_1 на расстоянии Δl

$$\Delta l = \omega R \Delta t$$

$$\Delta t = (R - r) / v$$

$$v = \omega R (R - r) / \Delta l$$

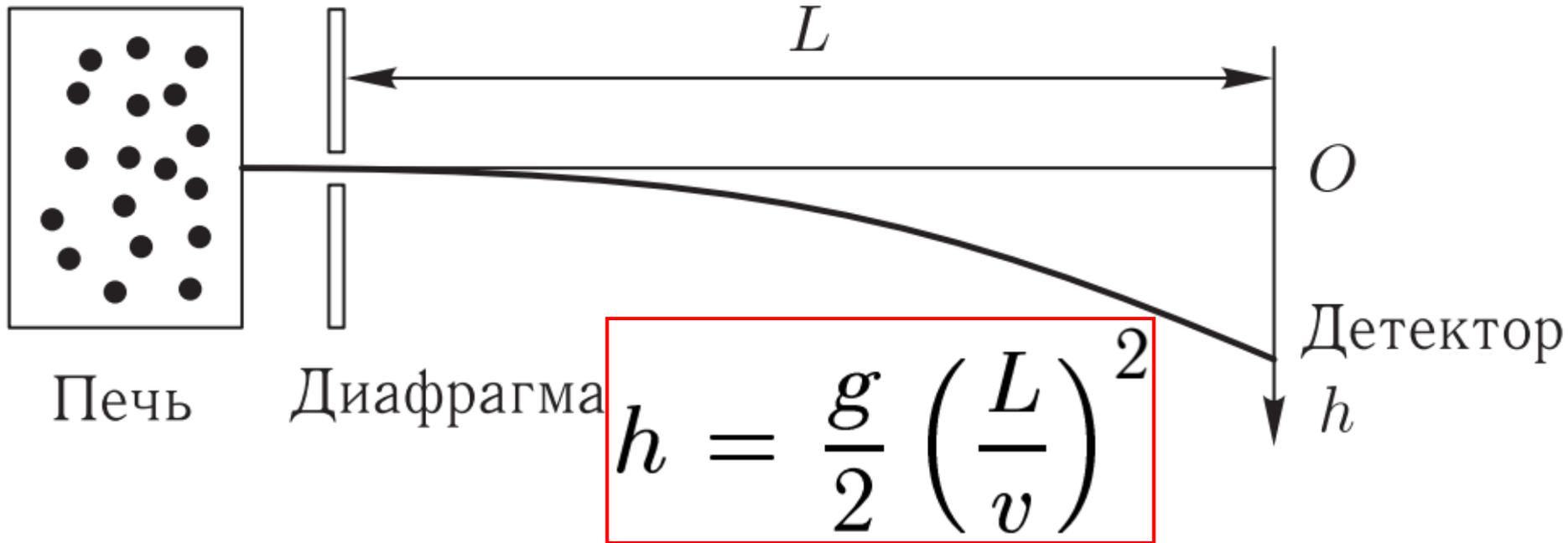
Экспериментальная проверка распределения Максвелла



$$\frac{l}{v} = \frac{\alpha}{\omega}$$

Условие пролёта

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



В 1947 г. И. Эстерманом, О. Симпсоном и О. Штерном были выполнены эксперименты по измерению отклонения вниз горизонтальных молекулярных пучков в поле силы тяжести. В эксперименте пучок атомов цезия вылетал через отверстие в печи с некоторой скоростью v и, пройдя диафрагму, под действием силы тяжести начинал двигаться по параболе.

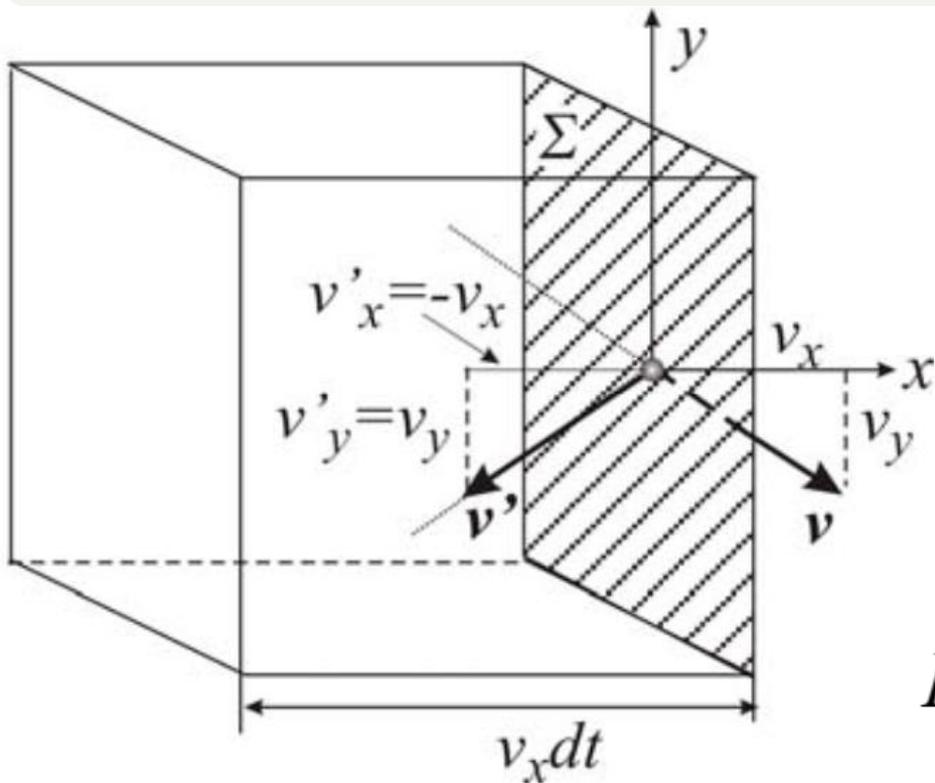
Распределение Максвелла

Видео демонстрации

Основные положения молекулярно-кинетической теории.

- Все тела состоят из большого числа обособленных частиц: атомов и молекул.
- Эти частицы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения, интенсивность которого зависит от температуры.
- Эти частицы взаимодействуют друг с другом (имеются силы притяжения и отталкивания).

Частота ударов молекул о стенку



Вычислим давление p идеального газа при температуре T и концентрации молекул n_0 .

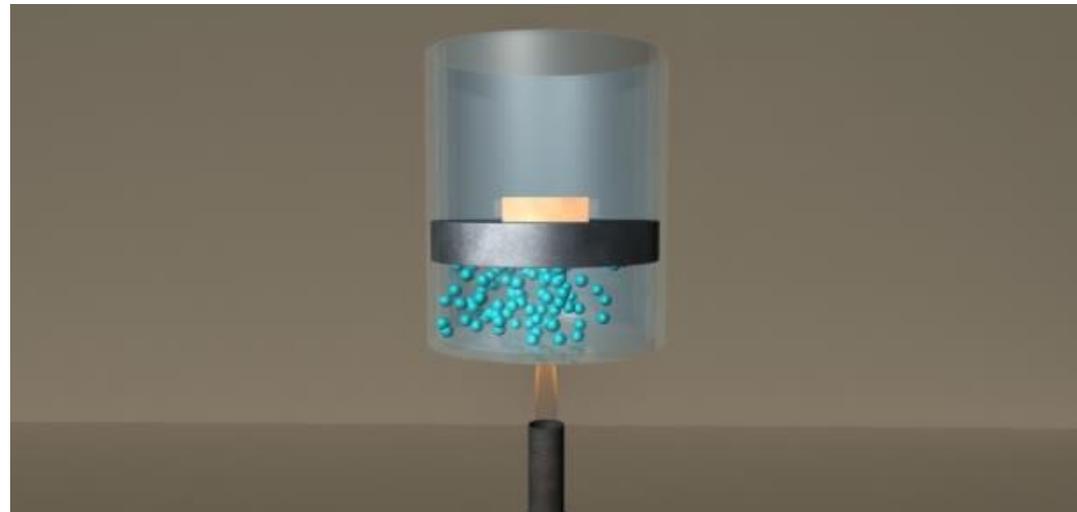
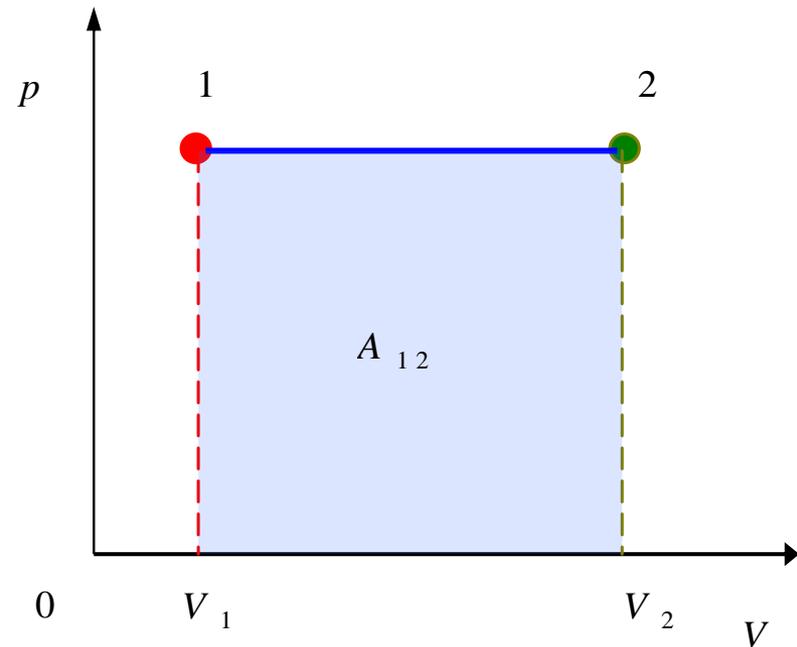
$$dV = v_x \Sigma dt$$

$$p = \int_0^{\infty} 2mv_x^2 \{n_0 dP(v_x)\}$$

$$p = nk_B T$$

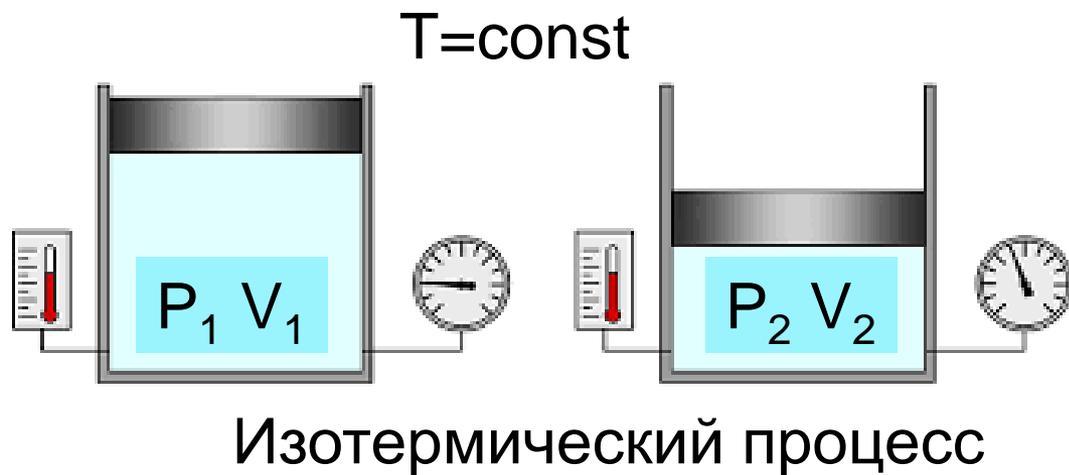
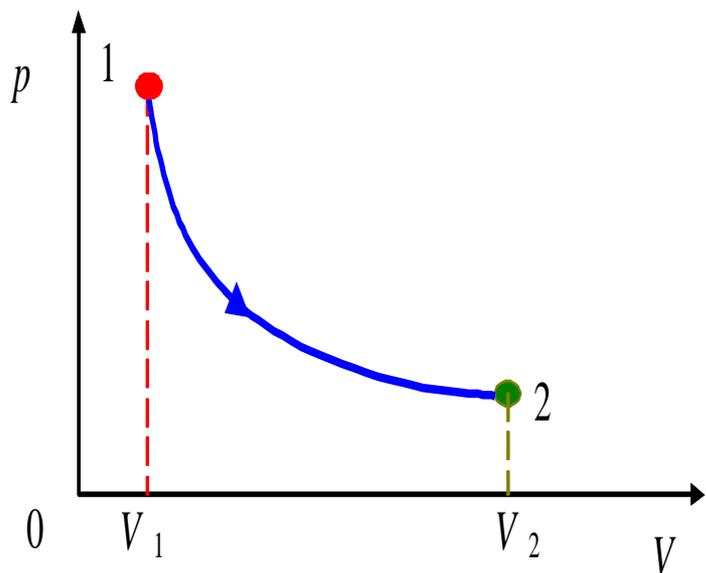
Изобарический процесс

- Изобарический процесс
 $P = \text{const}$



Закон Бойля–Мариотта

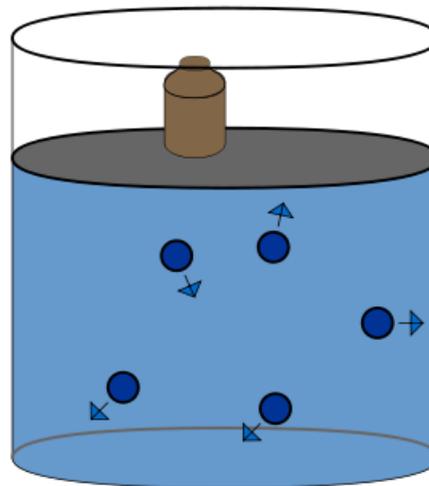
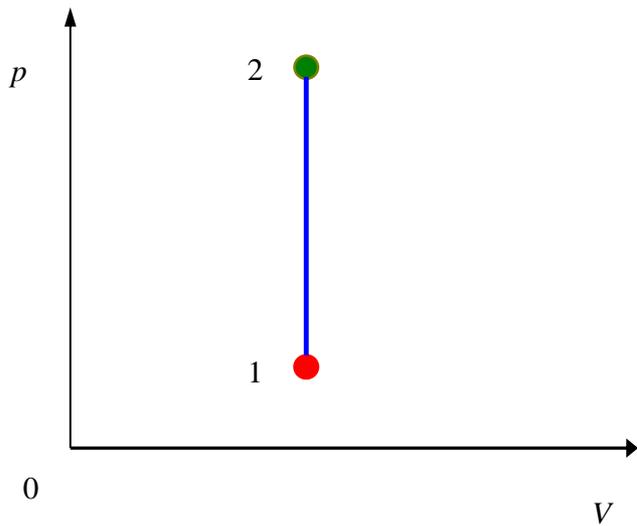
- **Изотермический процесс**
 $T = \text{const}$



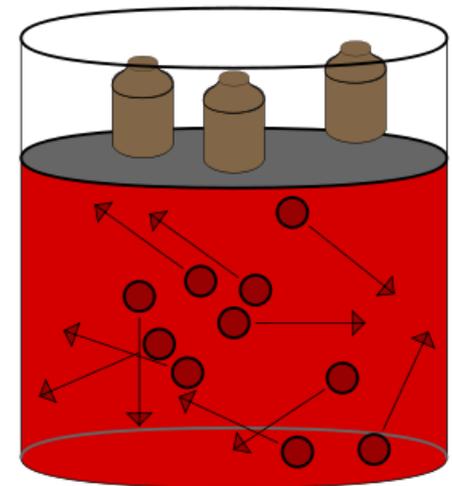
Закон Шарля

- **Изохорический процесс**

$$V = \text{const}$$



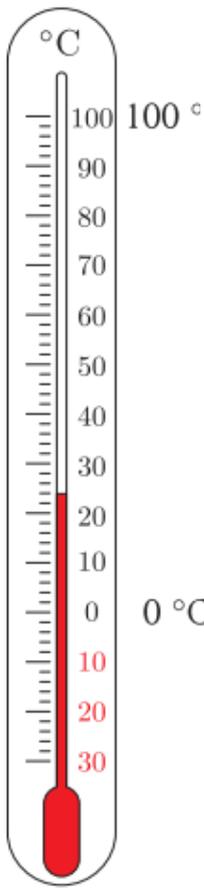
$$T = T_0$$



$$T = 3T_0$$

Термометры и температурные шкалы

Температурная шкала Цельсия была предложена шведским астрономом А. Цельсием в 1742 г. За $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ стали принимать температуру таяния льда, а за $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ — кипения воды.



0 °C · Термометр

Термометры и температурные шкалы

Шкала Кельвина. В 1727 г. французский физик Ж. Шарль экспериментально установил, что давление не очень плотных газов, заключенных в фиксированный объем, возрастает пропорционально их температуре в соответствии с законом

$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

в котором температура измеряется по шкале Цельсия, p_0 — давление при температуре 0°C , коэффициент термического увеличения давления $\alpha = 273\text{град}^{-1}$ и практически одинаков для большого числа различных газов.

$$T = t + \alpha^{-1} = t + 273$$

Это дает прекрасную возможность использовать разреженный газ в качестве термометрического тела, а давление будет термометрической величиной.

Теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы

- В состоянии термодинамического равновесия кинетическая энергия молекулы, приходящаяся на каждую поступательную и вращательную степень свободы, одинакова и равна $k_B T/2$.

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon \rangle &= \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_y^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_z^2 \rangle}{2} = \\ &= \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{m \langle v_{0x}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0y}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{0z}^2 \rangle}{2} = \frac{J_x \langle \omega_x^2 \rangle}{2} = \frac{J_y \langle \omega_y^2 \rangle}{2} = \frac{J_z \langle \omega_z^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$