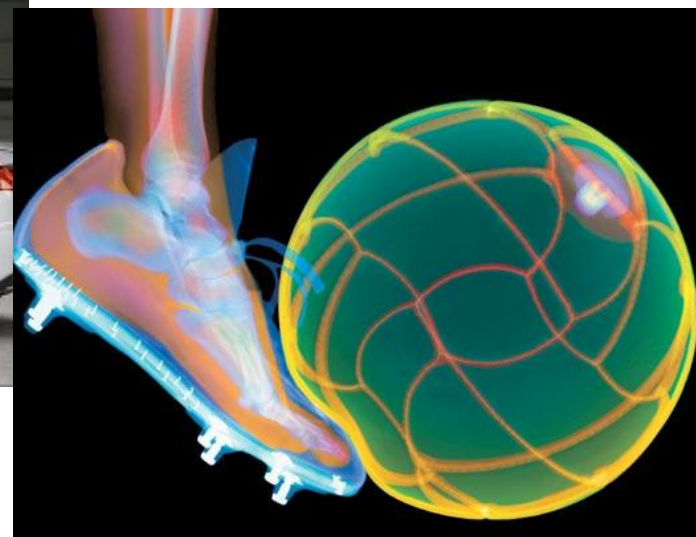


<http://genphys.phys.msu.ru/rus/sci/nanogroup/lectures.html>



# Основы механики деформируемых тел

При взаимодействиях тел меняется не только положения их в пространстве, но также изменяется их форма, то есть происходят различные деформации. Во многих случаях необходимо знать законы, связывающие действующие силы с теми деформациями, которые они вызывают.



# Основы механики деформируемых сред

- Упругая и остаточная деформация.
- Типы деформаций. Деформации растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба.
- Количественные характеристики деформаций. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Модуль сдвига.
- Связь между модулем Юнга и модулем сдвига.
- Энергия упругих деформаций.

# Основы механики деформируемых тел

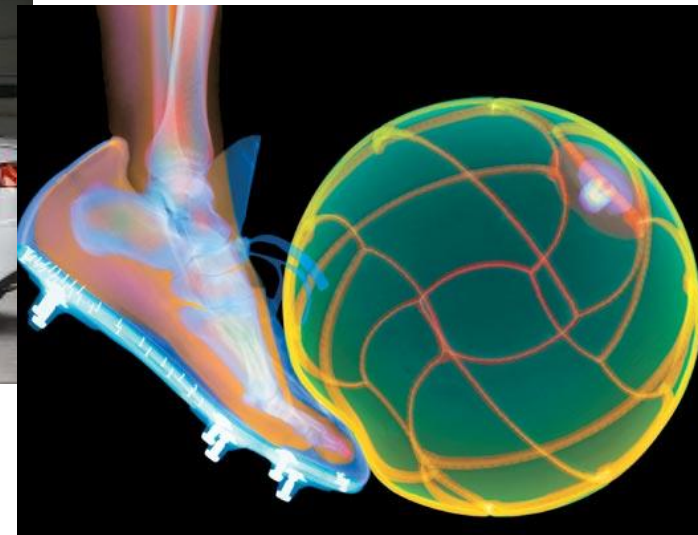
До этого мы предполагали, что под действием приложенных сил в теле возникают определенные деформации, однако они не принимались в расчет для описания движения этого тела как целого. Тело рассматривалось как абсолютно твердое.

**Деформация** – изменение взаимного расположения материальных точек тела, вызванное внешним воздействием, которое приводит к искажению формы и размера тела и вызывает изменение сил взаимодействия между материальными точками, т.е. появлений напряжений.

# Основы механики деформируемых тел

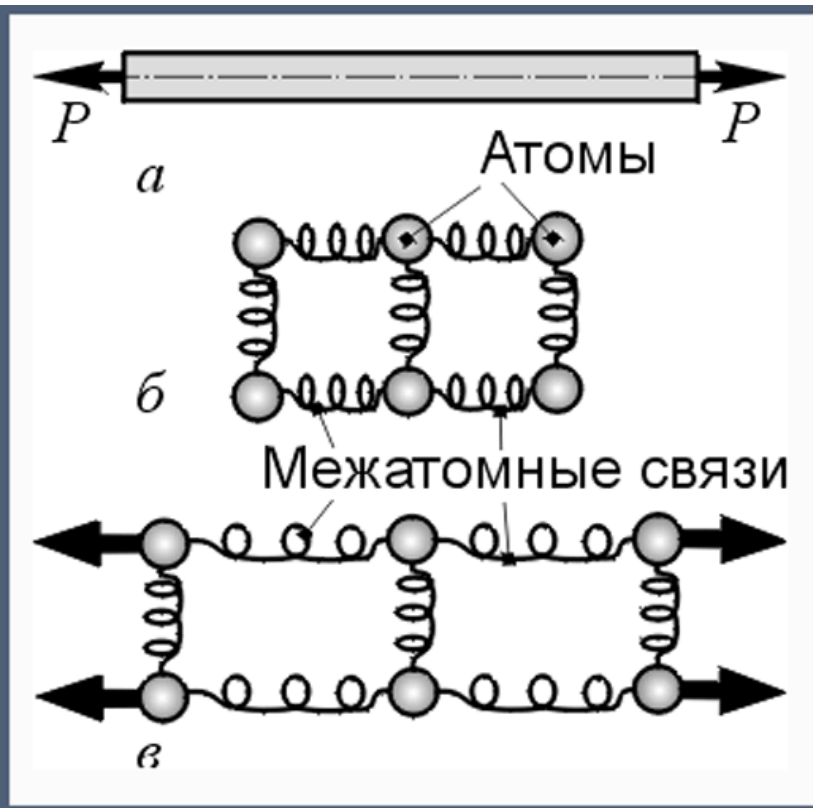
**Упругие деформации** – это деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия внешних сил.

**Неупругие деформации** – не исчезают после прекращения действия внешних сил.



# Основы механики деформируемых тел

На микроскопическом уровне деформация связана с смещением атомов из которых это тело состоит.



Изменение положения атомов при деформации приводят к тому, что в теле возникают внутренние силы или внутренние напряжения, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Внутренние силы взаимодействия являются короткодействующими, поэтому действуют на малый объем и приложены к ограничивающей его поверхности.

# Типы деформаций

Среди многочисленного разнообразия возможных деформаций принято выделять однородное

- **растяжение (сжатие),**
- **сдвиг,**
- **кручение,**
- **изгиб.**

Эти деформации наиболее просто поддаются анализу. В общем случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Поэтому деформации **растяжение (сжатие)** и **сдвиг** принято называть **элементарными**.

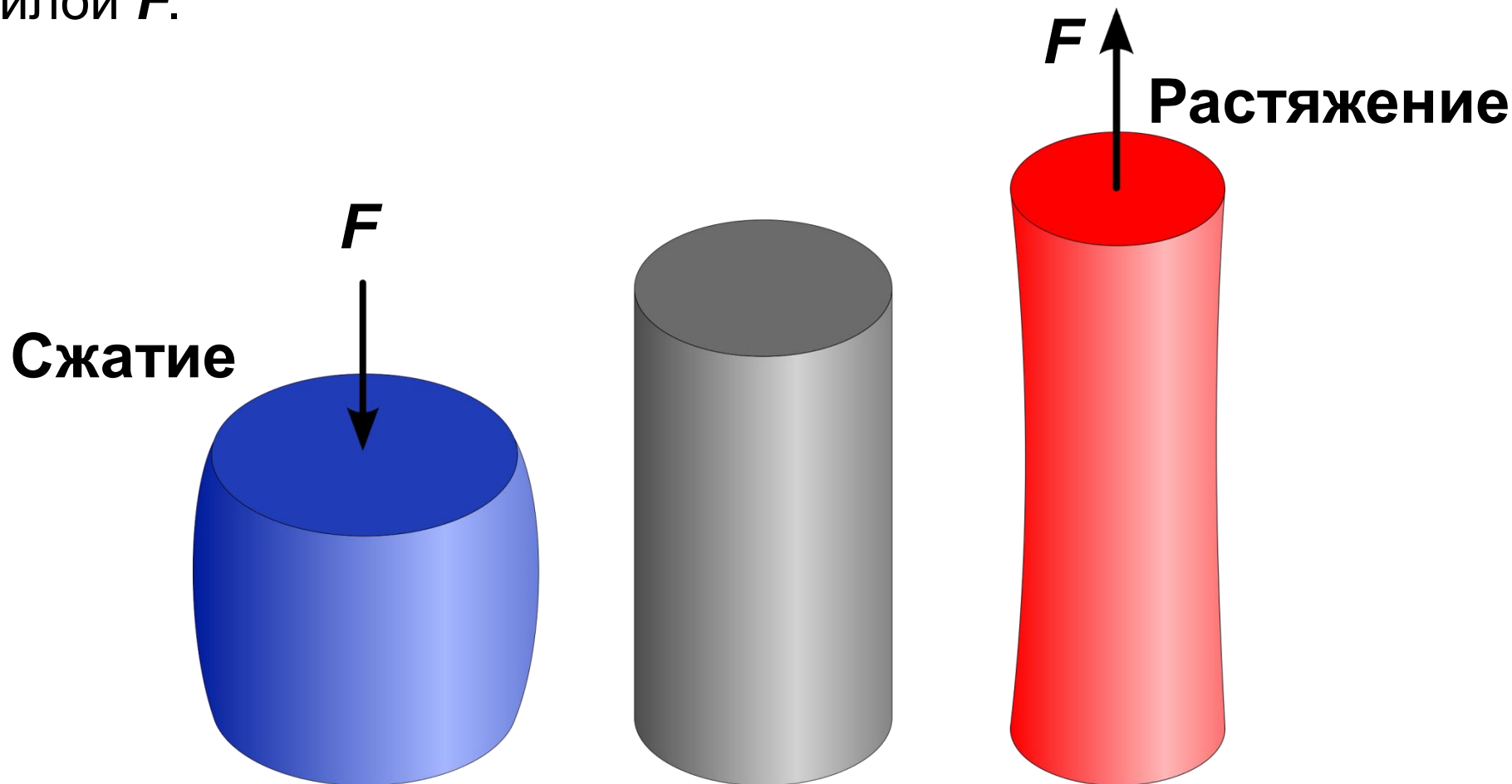
# Основы механики деформируемых тел

- Введение. Определение деформации
- Типы деформаций
  - **Растяжение (сжатие)** (Коэффициент Пуассона
    - Закон Гука
    - Всестороннее сжатие
  - Сдвиг
- Энергия упругих деформаций



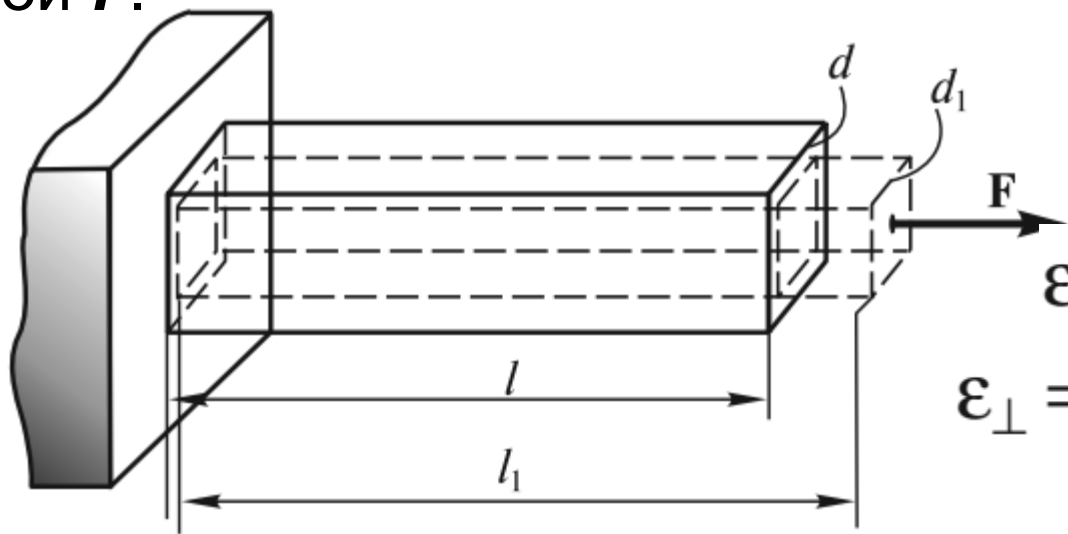
# Деформация растяжения (сжатия)

Закрепим один конец резинового бруска длиной  $l$ , имеющего квадратное сечение, и потянем за другой конец с постоянной силой  $F$ .



# Деформация растяжения (сжатия)

Закрепим один конец резинового бруска длиной  $l$ , имеющего квадратное сечение, и потянем за другой конец с постоянной силой  $F$ .

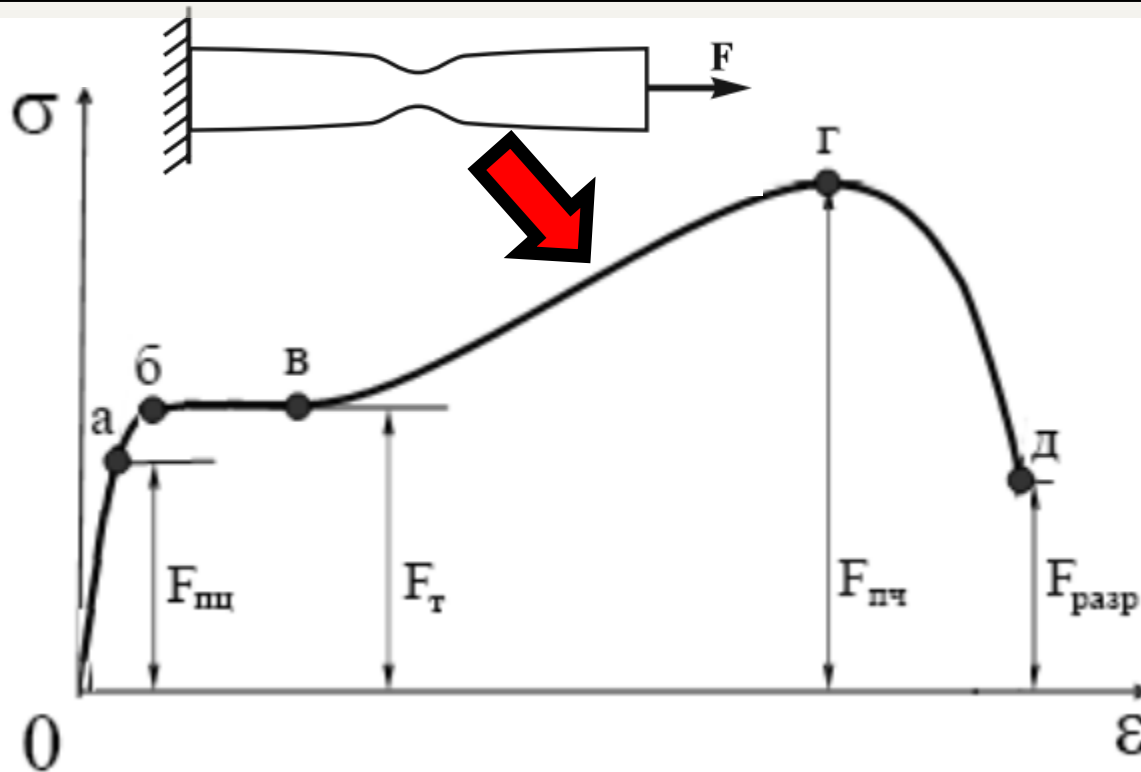


$$\varepsilon = (l_1 - l)/l = \Delta l/l,$$
$$\varepsilon_{\perp} = (d_1 - d)/d = \Delta d/d$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

- **Относительное удлинение**
- **Поперечное сжатие**
- Величину усилия, действующего на единицу площади поперечного сечения стержня, называют **напряжением** и обозначают.

# Деформация растяжения (сжатия)



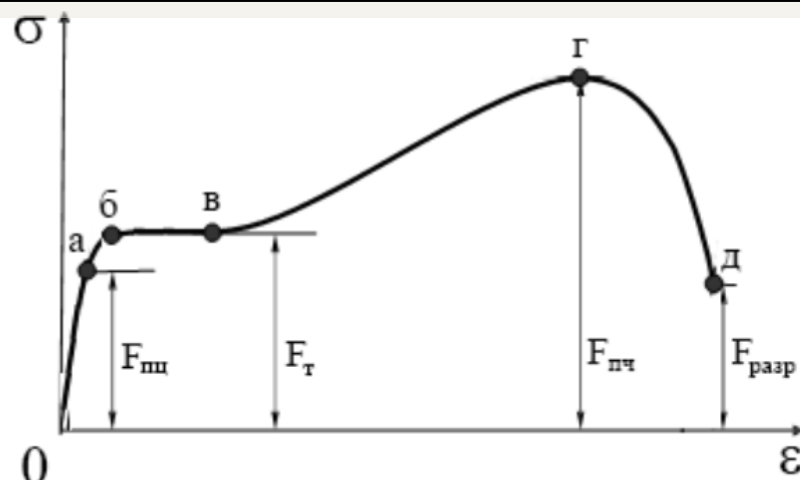
Закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

коэффициент  $E$   
называется  
**модулем Юнга**

- От  $0$  до  $a$  называется областью пропорциональности
- Точка  $б$  соответствует пределу упругости
- Точка  $в$  соответствует пределу текучести
- От  $в$  до  $г$  называется областью упрочения материала
- От  $г$  до  $д$  называется областью разрушения

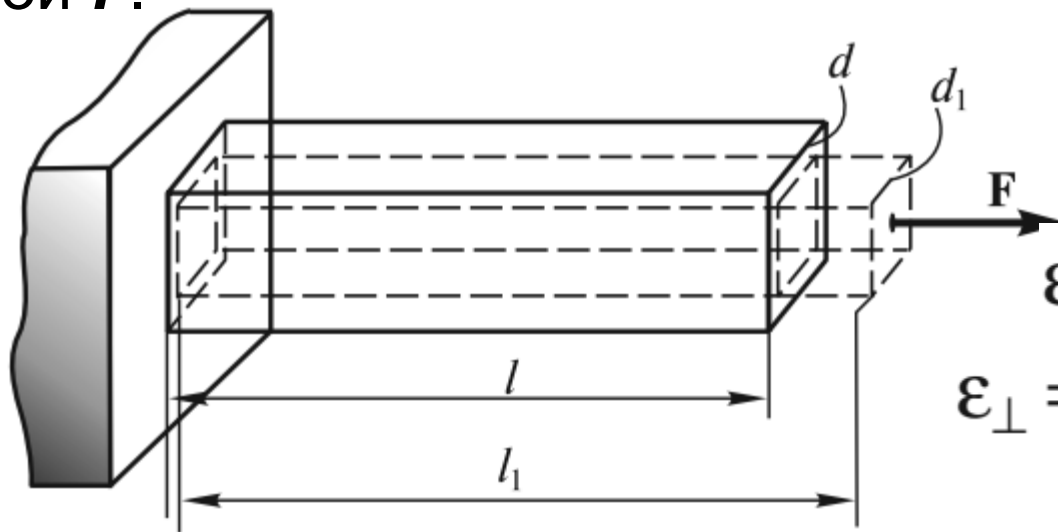
# Деформация растяжения (сжатия)



Материал	Модуль упругости $E$ , ГПа	Модуль сдвига $G$ , ГПа	Предел текучести $\sigma_{т}$ , ГПа	Предел прочности при растяжении $\sigma_{м}$ , ГПа
Сталь углеродистая обыкновенная	200—210	77—81	0,19—0,31	0,32—0,71
Сталь высокопрочная закаленная	200—210	77—81	1,2—1,95	1,5—2,0
Медь	110—130	41,5—44,0	0,07	0,22
Алюминий	69—72	25,0—26,5	0,022	0,05
Свинец	14—18	5,5—8,0	0,005	0,014—0,018

# Коэффициент Пуассона

Закрепим один конец резинового бруска длиной  $l$ , имеющего квадратное сечение, и потянем за другой конец с постоянной силой  $F$ .



$$\varepsilon = (l_1 - l)/l = \Delta l/l,$$
$$\varepsilon_{\perp} = (d_1 - d)/d = \Delta d/d$$

$$\mu = -(\varepsilon_{\perp}/\varepsilon) > 0$$

**Какого численное значение коэффициента Пуассона?**

Поскольку при растяжении ( $\varepsilon > 0$ ) объем никогда не уменьшается, то  $0 < \mu < 1/2$ .

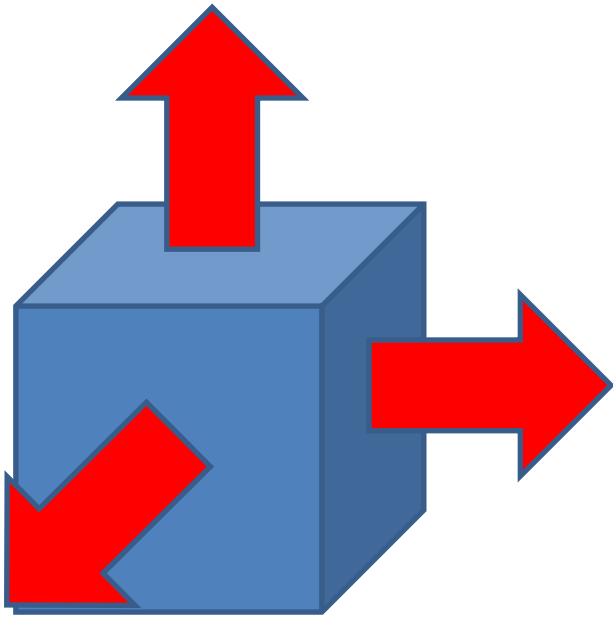
# Всестороннее сжатие

Будем резиновый куб растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней.

$$\mu = -(\varepsilon_{\perp}/\varepsilon) > 0$$

$$\varepsilon = (l_1 - l)/l = \Delta l/l,$$

$$\varepsilon_{\perp} = (d_1 - d)/d = \Delta d/d$$



При всестороннем сжатии, когда

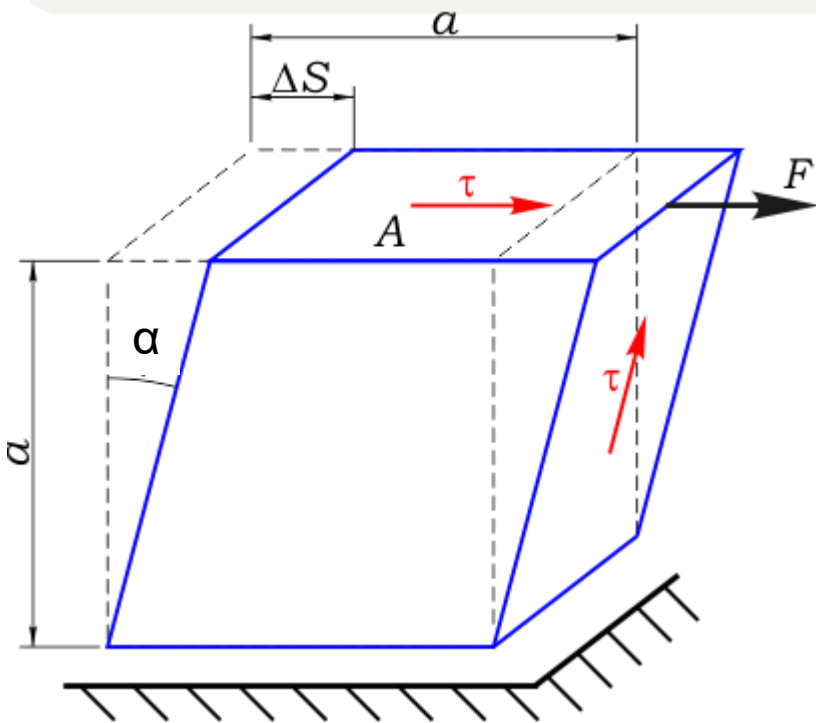
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

# Основы механики деформируемых тел

- Введение. Определение деформации
- Типы деформаций
  - Растяжение (сжатие)
    - Коэффициент Пуассона
    - Закон Гука
    - Всестороннее сжатие
  - **Сдвиг**
- Энергия упругих деформаций

# Деформация сдвига



- Закрепим нижнее основание резинового кубика, а к верхней грани приложим постоянную силу  $F$ .
- Назовем величину, равную тангенсу угла сдвига, относительным сдвигом.

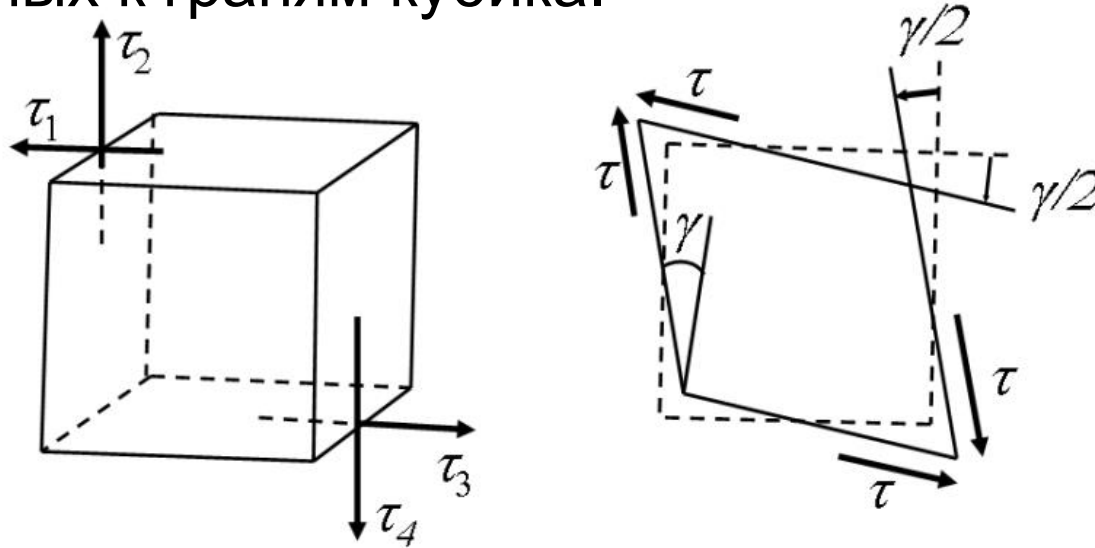
$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha,$$

В большинстве важных случаев угол  $\alpha$  мал, так что  $\gamma \approx \alpha$ .



# Деформация сдвига

Рассмотрим деформацию кубика, вырезанного из однородного изотропного вещества, под действием распределенных касательных сил, приложенных к его противоположным граням. Для соблюдения условий равновесия необходимо равенство всех напряжений, приложенных к граням кубика.

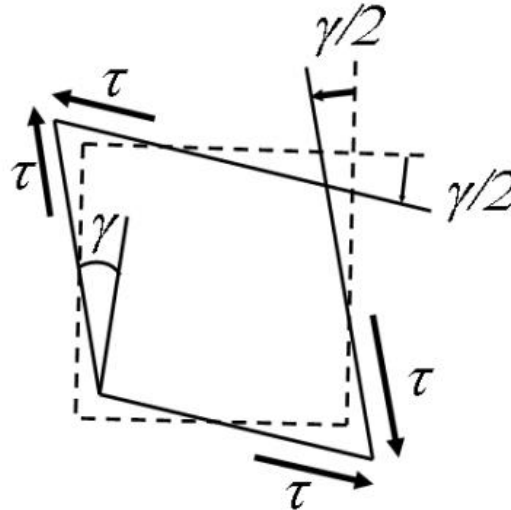
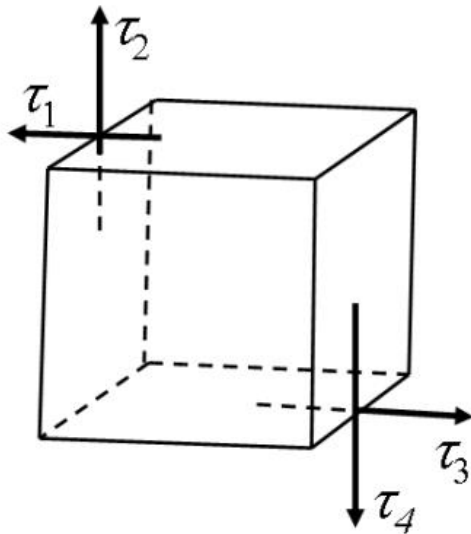


- поступательного движения нет
- вращательного движения нет

# Деформация сдвига

При изменении напряжений будут меняться только углы между гранями кубика. Объем при этом остается постоянным. Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол  $\gamma$ .

У.



**Закон Гука** для деформации сдвига

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Коэффициент  $G$  называется **модулем сдвига**.

Связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

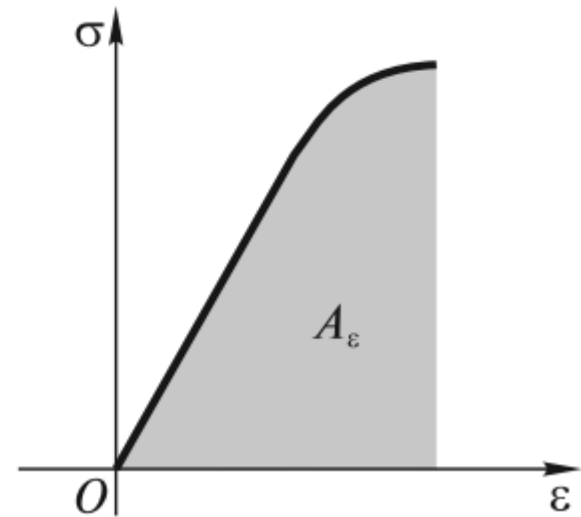
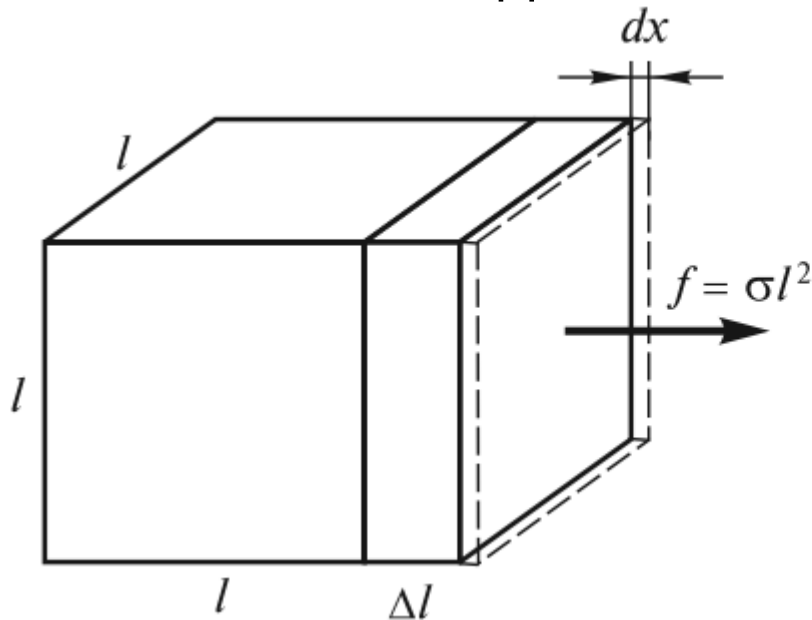
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

# Основы механики деформируемых тел

- Введение. Определение деформации
- Типы деформаций
  - Растяжение (сжатие)
    - Коэффициент Пуассона
    - Закон Гука
    - Всестороннее сжатие
  - Сдвиг
- **Энергия упругих деформаций**

# Энергия упругих деформаций

Будем резиновый куб растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней.



При растяжении на величину  $dx$  уже деформированного кубика элементарная работа равна

$$dA_\varepsilon = f dx = \sigma l^3 d\varepsilon.$$

$$A_\sigma = \int_0^\varepsilon l^3 \sigma(\varepsilon') d\varepsilon'$$

# Энергия упругих деформаций

Аналогично несложно показать, что результирующая работа при деформации сдвига кубика равна

$$A_\tau = \int_0^\tau l^3 \tau(\gamma') d\gamma'$$

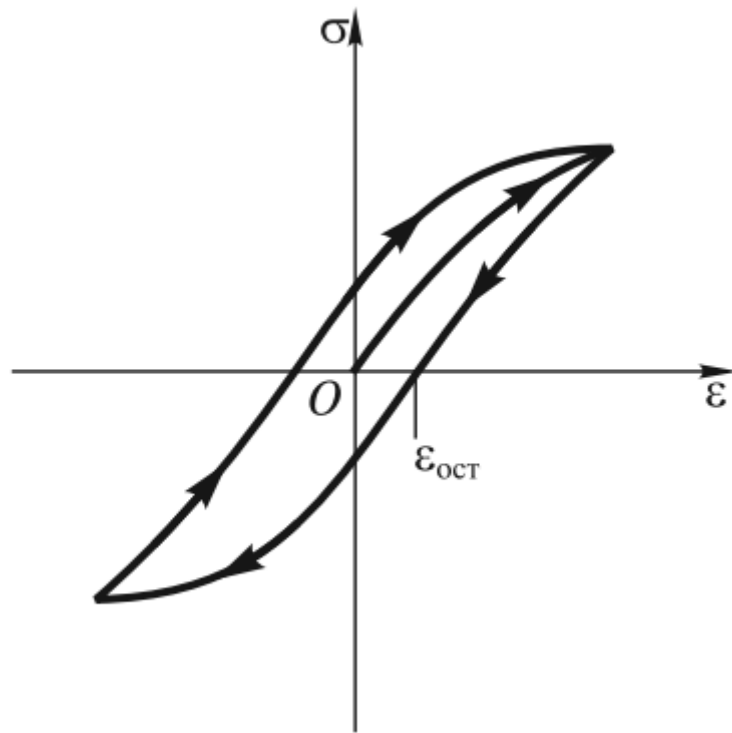
- **Объемная плотность**

$$w_\varepsilon = \frac{A_\varepsilon}{l^3} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2; \quad w_\gamma = \frac{A_\gamma}{l^3} = \frac{1}{2} G \gamma^2.$$

- **Деформация** – изменение взаимного расположения материальных точек тела, вызванное внешним воздействием, которое приводит к искажению формы и размера тела и вызывает изменение сил взаимодействия между материальными точками, т.е. появлений напряжений.

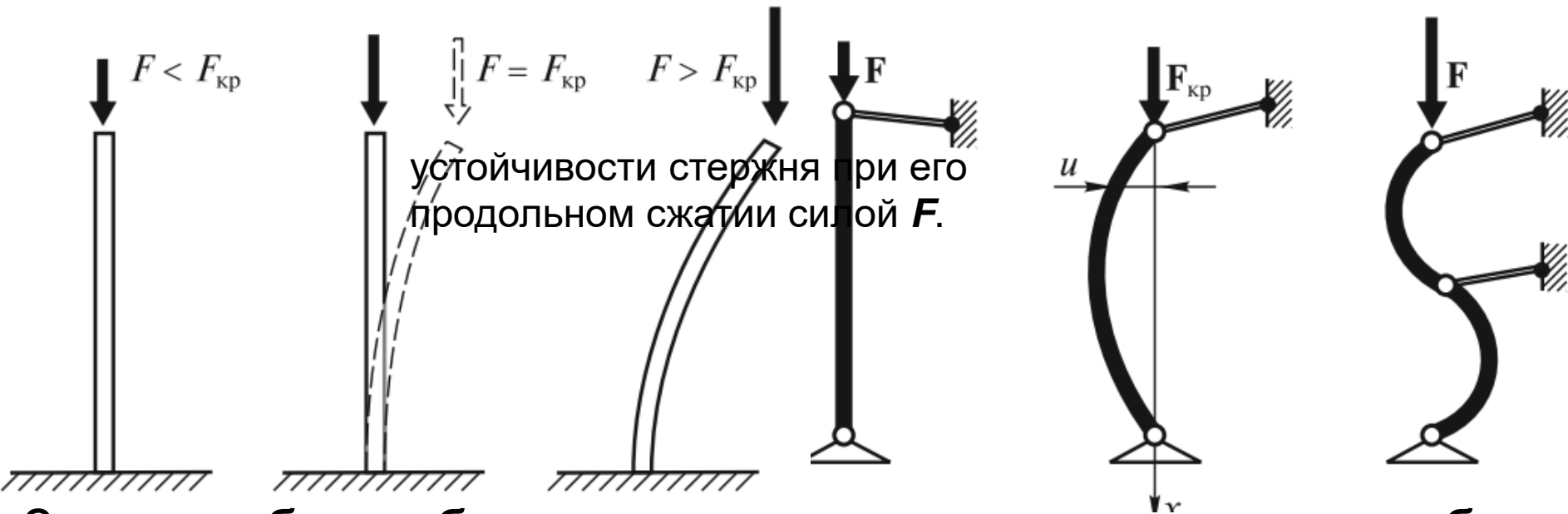
# Упругий гистерезис

Если деформации выйдут за область упругости, то при снятии внешних нагрузок в теле будут существовать остаточные деформации. Чтобы их устранить, надо приложить сжимающую силу. Такая зависимость от приложенных напряжений носит название **упругого гистерезиса**.



# Основы механики деформируемых тел

Рассмотрим задачу о потере устойчивости стержня при его продольном сжатии силой  $F$ .



Задача об изгибе стержня при продольном сжатии была решена в XVIII выдающимся математиком Л.Эйлером.

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$



# Основы механики деформируемых тел

