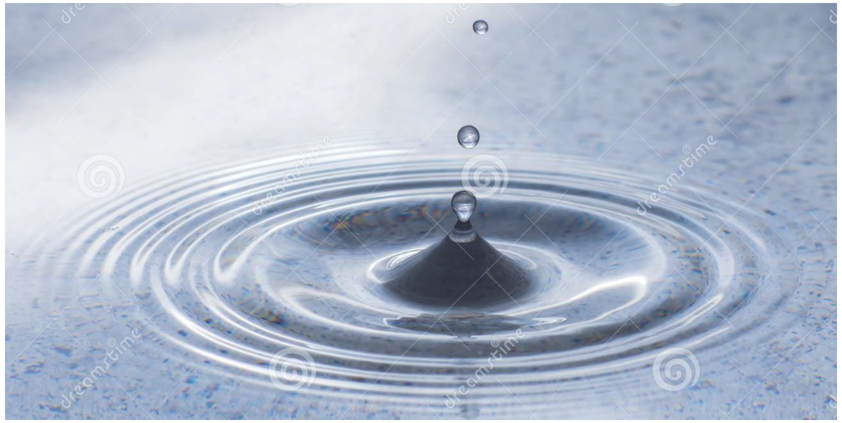
# Механика

Лекция 14

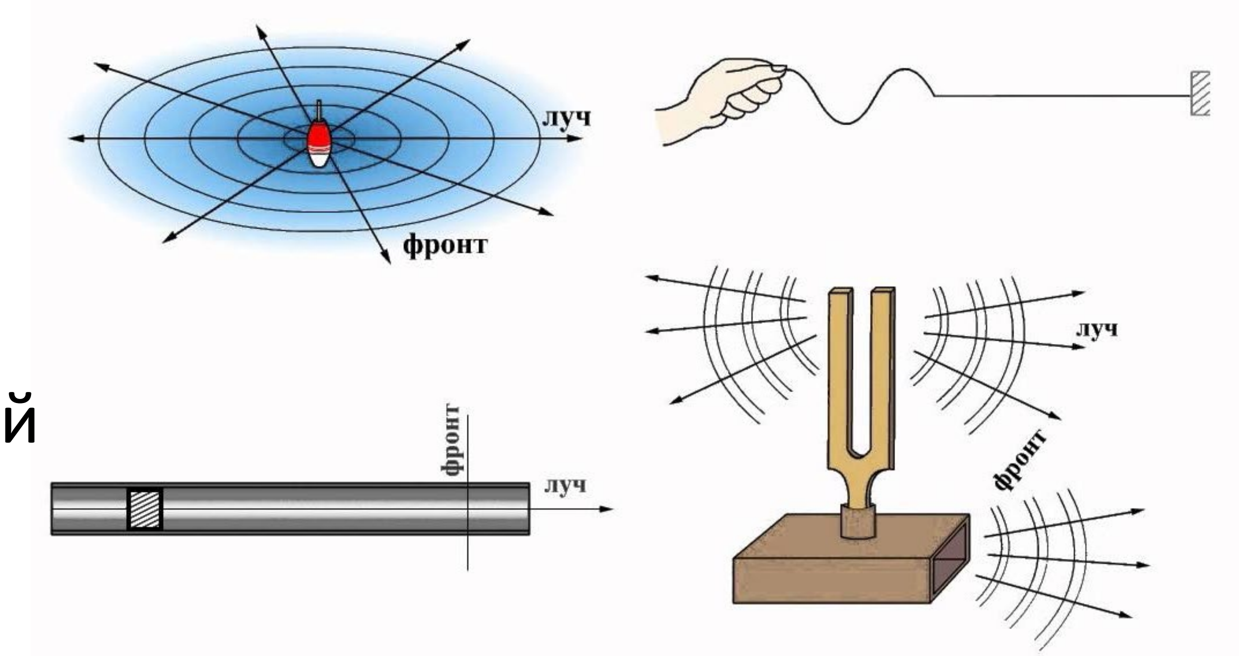
# План лекции

- Волна. Бегущие волны. Продольные и поперечные волны.
- Уравнение бегущей волны.
- Скорость волны и скорости «частиц».
- Плоская гармоническая бегущая волна.
- Волны на струне, в стержне, газе и жидкости. Связь скорости волны со свойствами среды.
- Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова.
- Волны смещений, скоростей, деформаций, напряжений.
- Отражение и прохождение волны на границе раздела двух сред. Основные случаи граничных условий.
- Стоячие волны. Узлы и пучности.
- Нормальные колебания стержня, струны, столба газа.

# Механические волны



- **Волна** – процесс распространения возмущения в пространстве.
- **Возмущение** – пространственно локальное, неравновесное для всей среды изменение ее состояния – изменение физической величины: скалярной – $u(\vec{r},t)$ или векторной – $\vec{u}(\vec{r},t)$, описывающей это состояние.
- **Механические волны** – это волновой процесс в упругой среде.



# Волны в упругих телах

**Скорость волны –** скорость распространения возмущения в пространстве.

Источником волн являются колеблющиеся тела, которые создают в окружающем пространстве деформацию среды.

**Упругая (акустическая) волна** – волна упругих деформаций (напряжений, давлений, смещений частиц, а также их скоростей и ускорений) в среде. Скорость упругой волны, как правило, значительно больше скорости движения частиц в среде.

# Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Решением этого уравнения являются произвольные функции вида

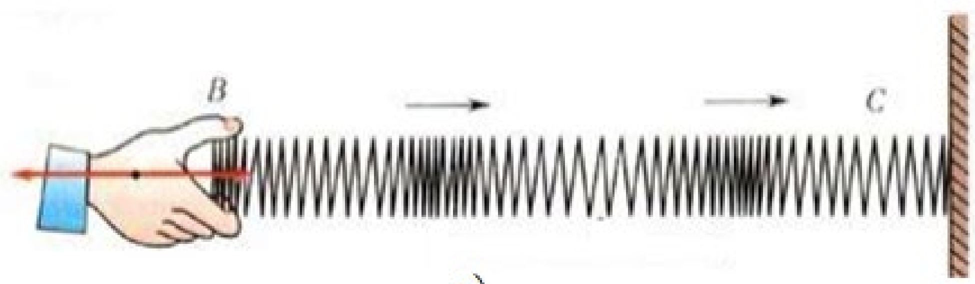
$$u_1\left(t - \frac{x}{c}\right), \qquad u_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

или суперпозиция этих функций.

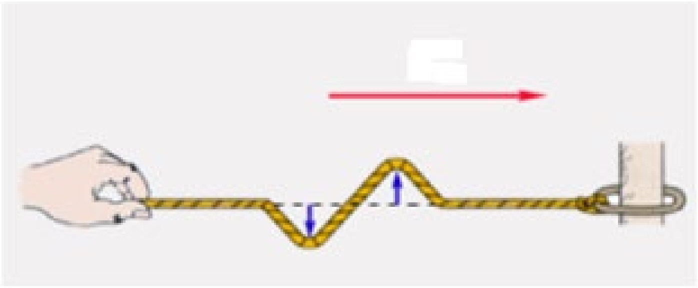
В общем случае волновое уравнение описывает распространение волн в трехмерном пространстве имеет более сложный вид.
$u$ может быть **любая** величина:
смещение, скорость, плотность, давление и другие величины.

# Продольные и поперечные волны

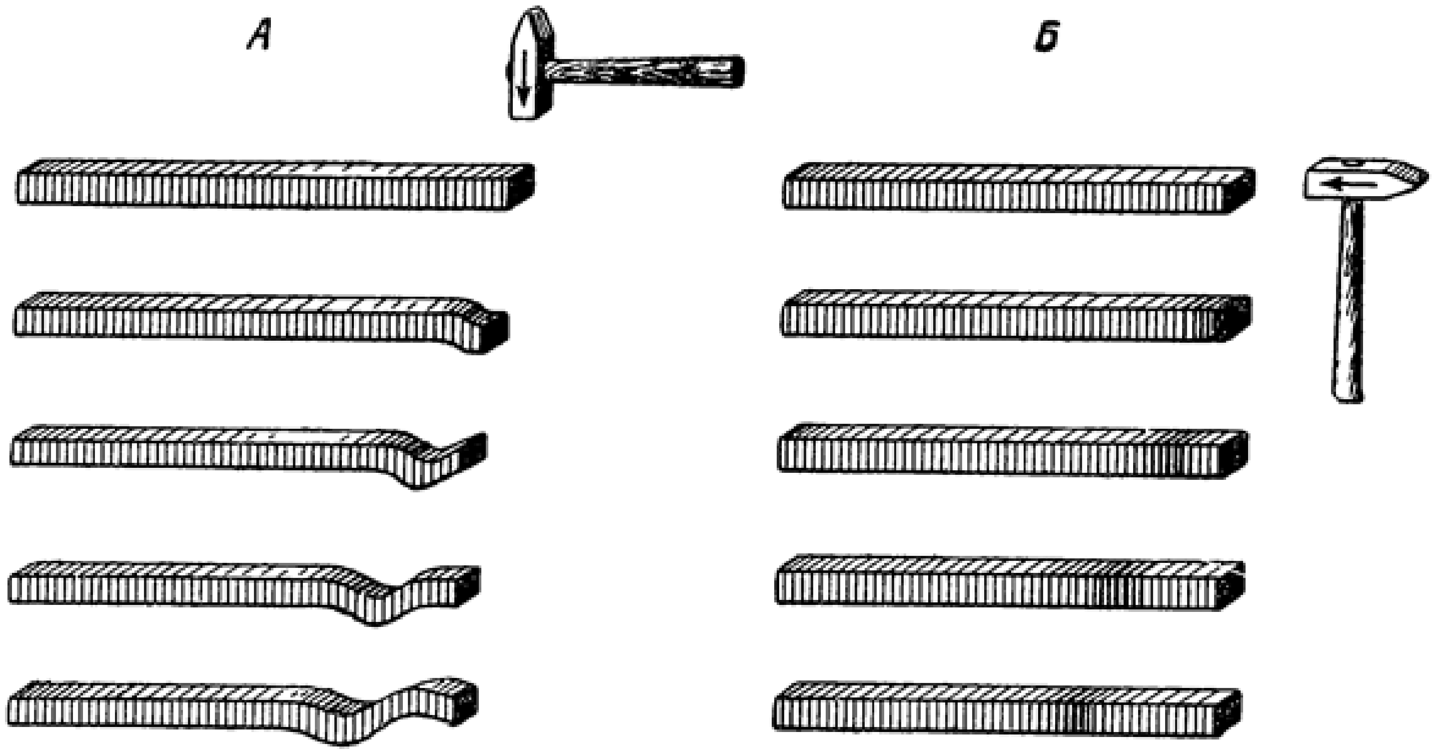
- **Продольные волны** – волны, в которых векторное волновое поле $\vec{u}(\vec{r}, t)$ направлено вдоль направлению распространения волны.
- **Поперечные волны** – волны, в которых $\vec{u}(\vec{r}, t)$ направлено перпендикулярно направлению распространения волны.



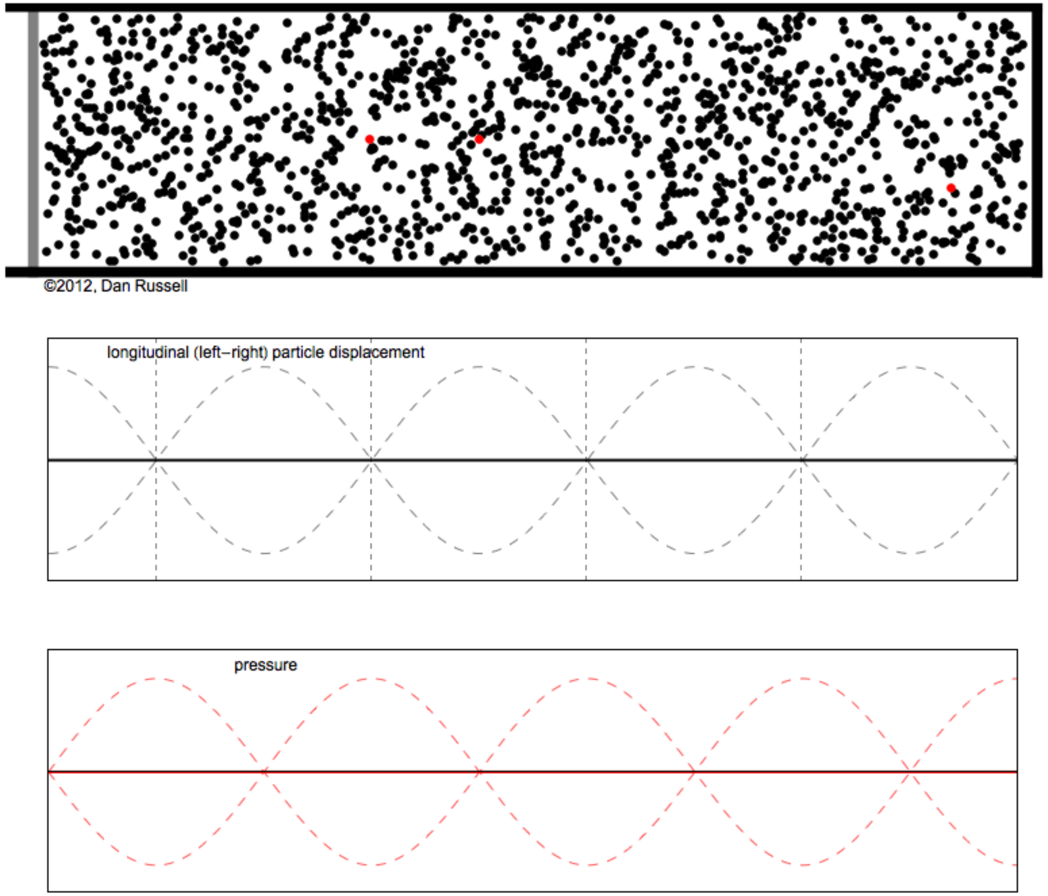

а)



б)



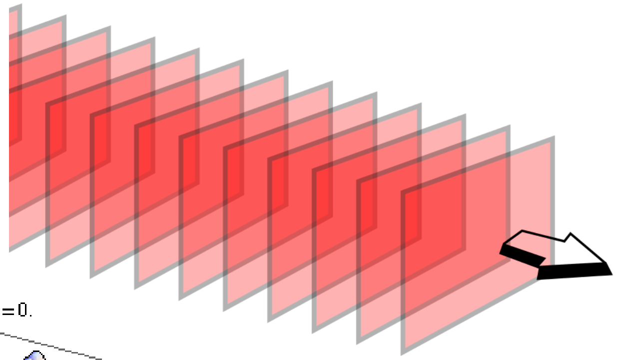
# Продольные и поперечные волны




# Бегущая плоская гармоническая волна

$$u(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

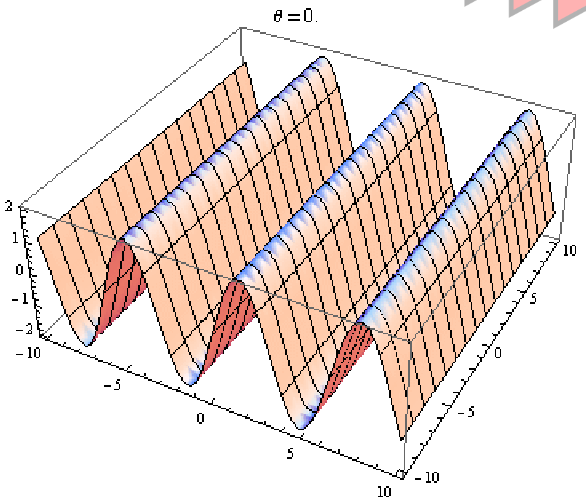
**Плоская волна** — волна, фронт которой имеет форму плоскости. В случае распространения в произвольном направлении можно записать



$$u(\vec{r},t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)$$

**Волновой фронт** – поверхность постоянной фазы.

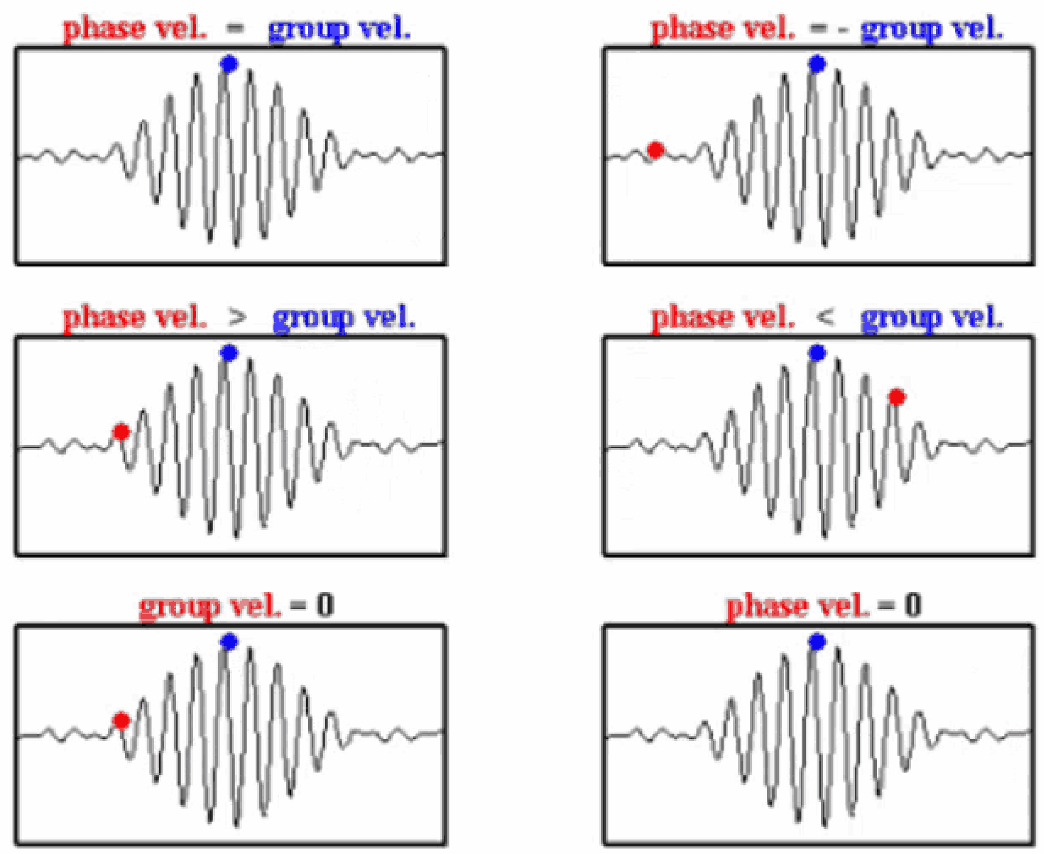
Для плоской волны – это плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{k}$, движущиеся вдоль $\vec{k}$ с фазовой скоростью $-\vec{v}_{\text{ф}}$.

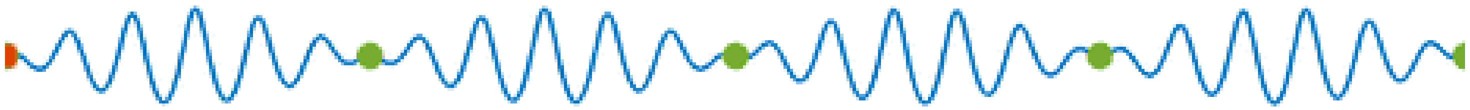


# Фазовая и групповая скорости

**Фазовая скорость** — скорость перемещения точки, обладающей постоянной фазой колебательного движения в пространстве, вдоль заданного направления.

**Групповая скорость** — это величина, характеризующая скорость распространения «группы волн» — то есть более или менее хорошо локализованной квазимонохроматической волны.

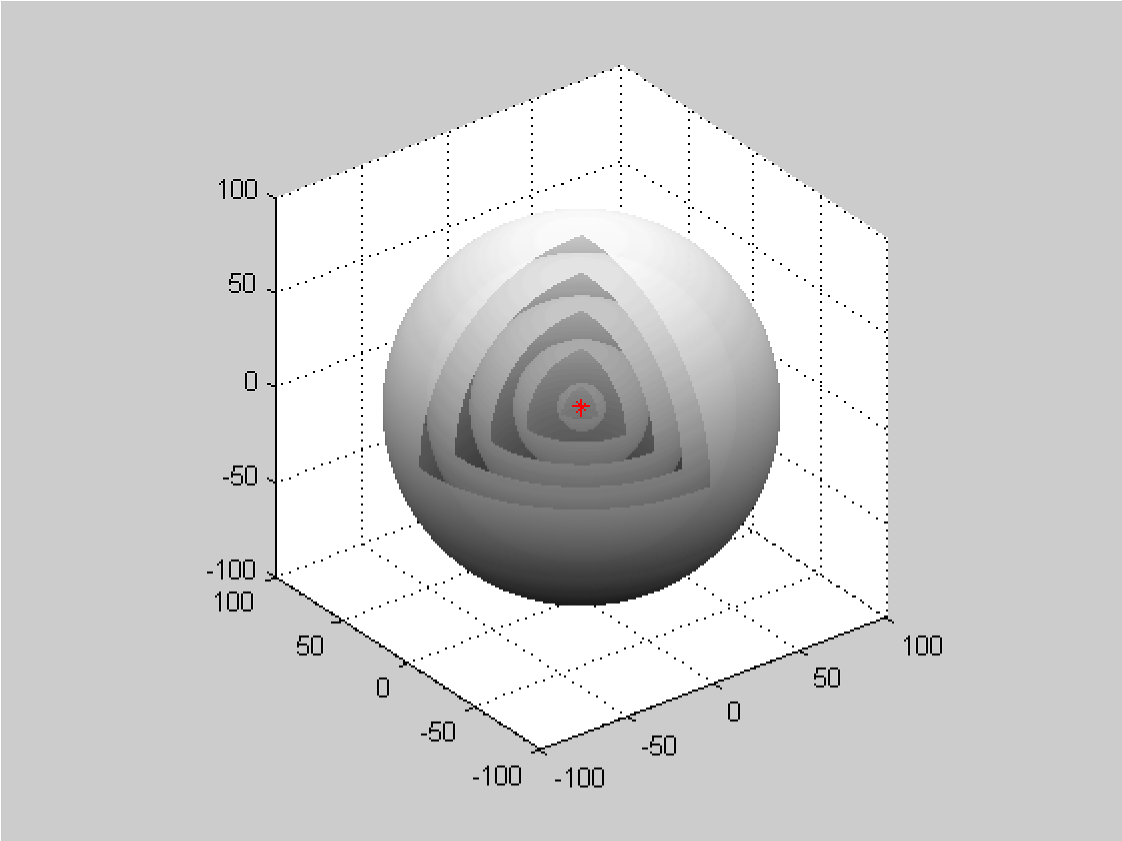


# Сферическая волна

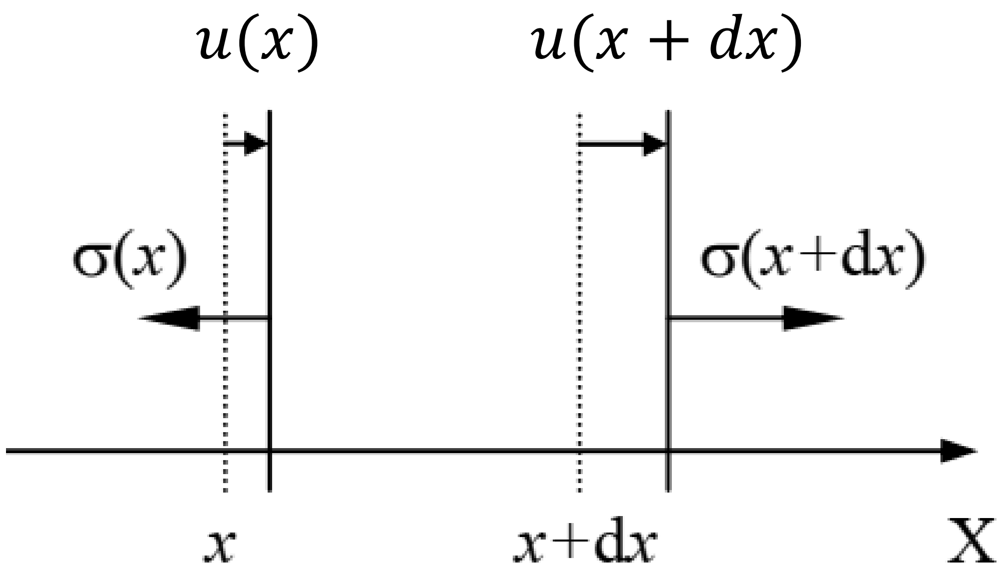
Поверхность фронта волны – сфера.

$$u(\vec{r}, t) = \frac{A}{|\vec{r}|} \sin\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)$$



# Продольные волны в стержне

Рассмотрим распространение **продольных** деформаций в упругом стержне. Рассмотрим физически бесконечно малый слой $dx$ твердого тела с координатой $x$ вдоль направления распространения волны.




$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

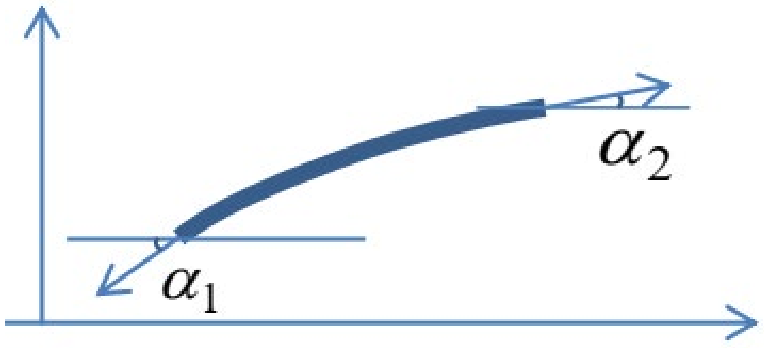
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Скорость волны для **поперечной** упругой волны в твердом теле: $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

# Волны на струне

В качестве примера рассмотрим волны в струне, натянутой между двумя неподвижными зажимами.

- Колебания струны полностью описывается одной функцией: $u(x, t)$, характеризующей вертикальные отклонения струны.
- Предположим, что струна является идеальной - упругой и достаточно тонкой, а амплитуда колебаний каждой точки струны мала.
- Будем считать также, что натяжение струны $T$ во всех точках одинаково.




$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho_л}}$$

$\rho_л$ – линейная плотность струны в отсутствие волны

# Волны в жидкости и газе

В жидкости и газе, так же, как и в упругом теле, могут распространяться волны. Их распространение описывается волновым уравнением, его вывод подобен тому, как это было сделано для волн в упругом стержне.

Скорость упругой волны в идеальных жидкости и газе:

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0}}$$

где $P$ – давление, $\rho$ – плотность жидкости или газа, $\rho_0$ – плотность в отсутствие волны.

# Волны смещений, …

- волна **смещений**

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- волна **скоростей** (скоростей частиц)

$$v_ч = \frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- волна **деформаций**

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- волна **напряжений**

$$\sigma = E\varepsilon = E u_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

# Поток энергии в бегущей волне

Пусть в упругой среде распространяется незатухающая плоская гармоническая волна. Найдем **плотность полной энергии колебаний** $w$, переносимой этой волной. Мгновенное значение плотности энергии складывается из потенциальной и кинетической энергии единичного объема. То есть

$$w = w_{\text{кин}} + w_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Среднее значение плотности энергии

$$\langle w \rangle = \left\langle \frac{1}{2}w_0\big(1 - \cos\big(2(\omega t - kx)\big)\big) \right\rangle = \frac{1}{2}w_0$$

# Вектор Умова

Профессором МГУ Умовым в 1874 г. было введено понятие вектора плотности потока энергии

$$\vec{S} = w\vec{c}$$

Поток энергии через произвольную площадку $ds$, нормаль $\vec{n}$ к которой составляет угол $\alpha$ с направлением распространения волны, может быть выражен как

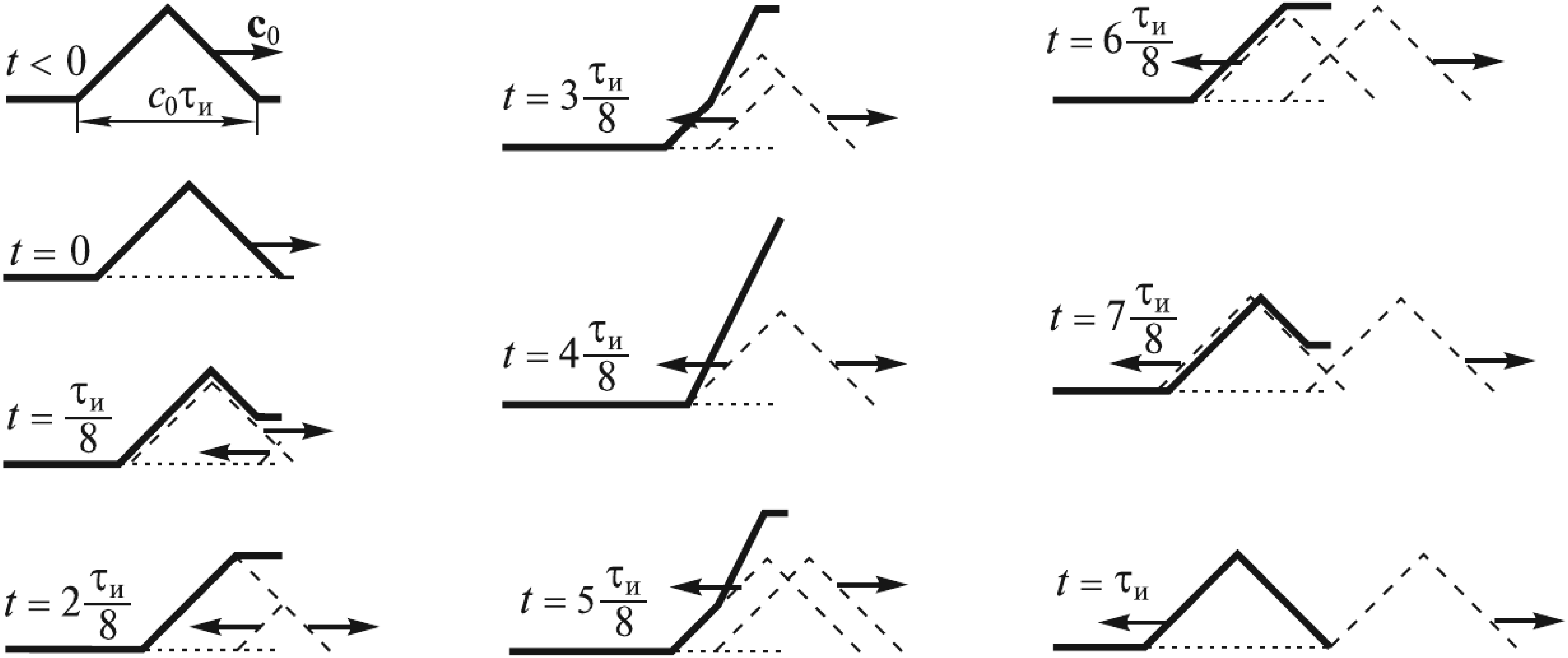
$$d\Phi = \vec{S}d\vec{s} = wc\, ds \cos\alpha$$

Плотность потока энергии зависит от выбранного момента времени, поэтому удобно пользоваться усредненным значением за период,

$$I = \langle w \rangle c = \frac{1}{2} c\rho\omega^2 u^2$$ **интенсивностью волны**

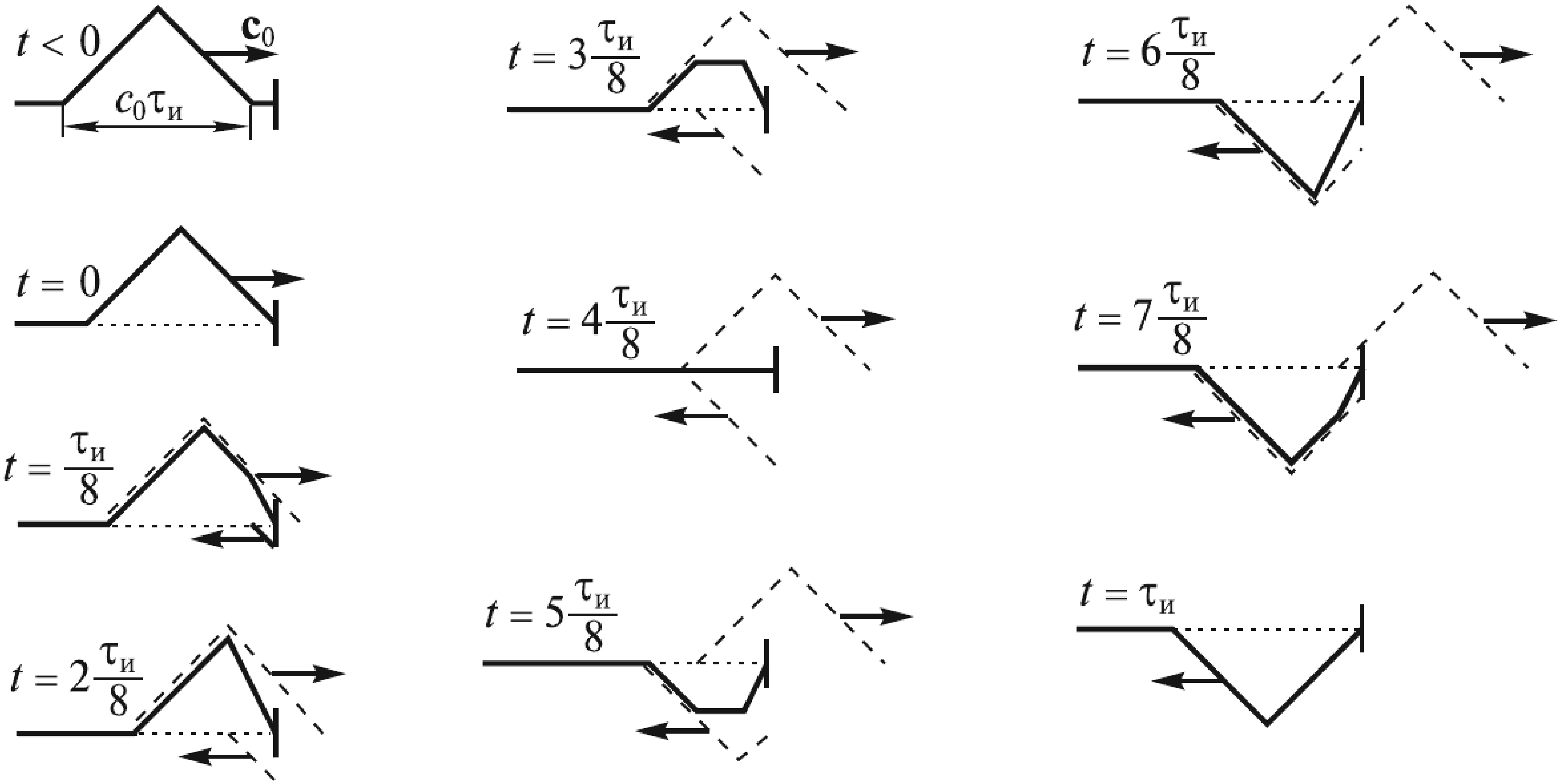
# Граница раздела двух сред

Отражение и прохождение волны на границе раздела двух сред (конец шнура свободен)

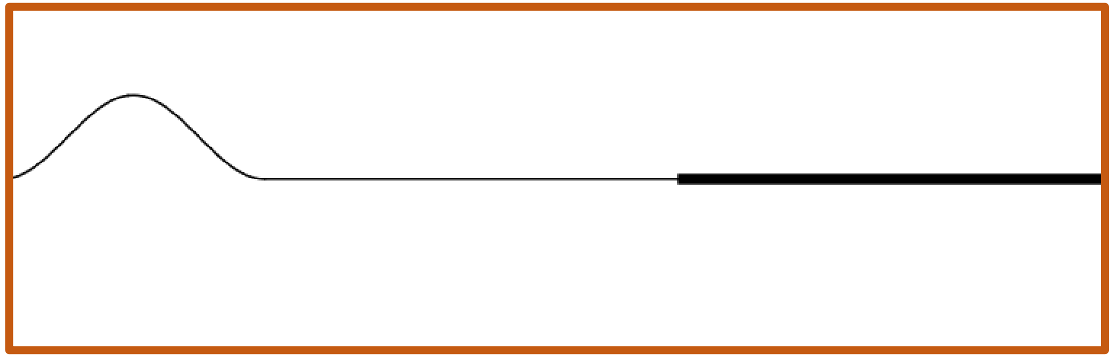


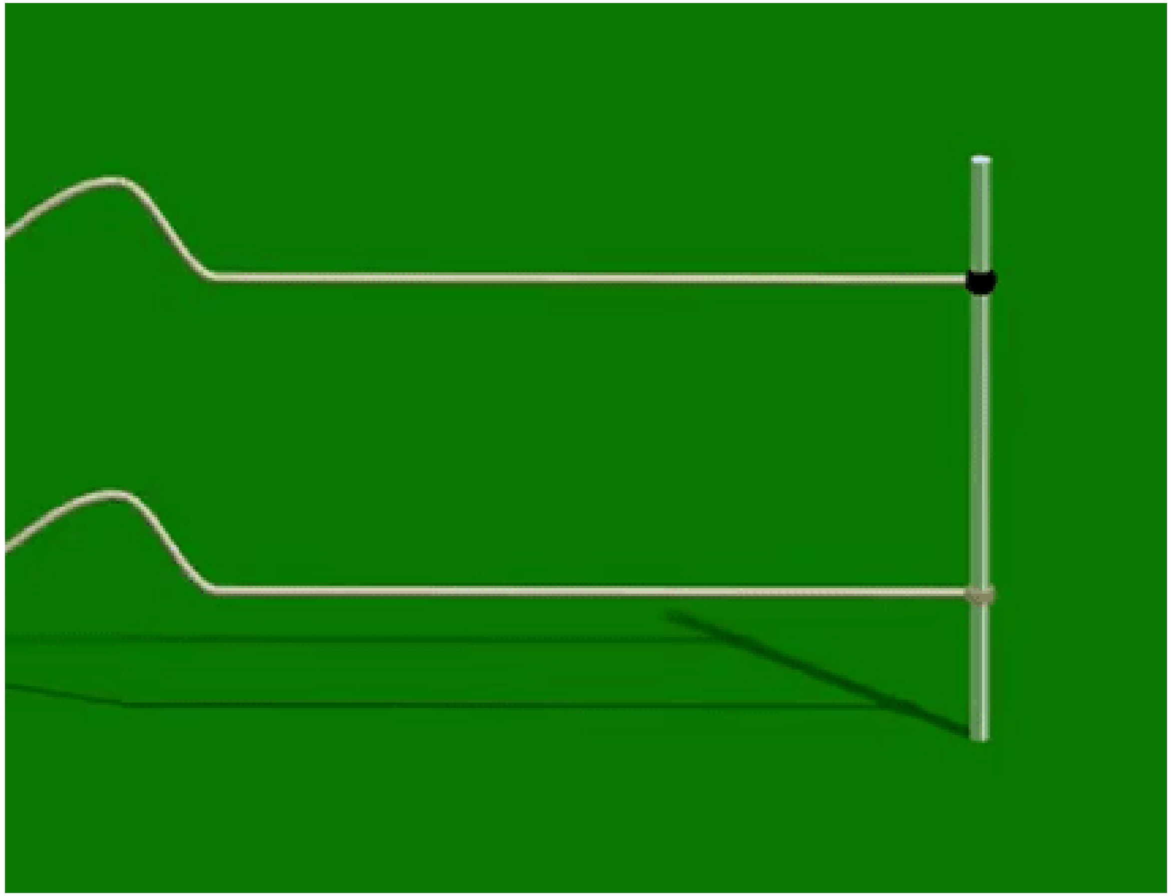
# Граница раздела двух сред

Отражение и прохождение волны на границе раздела двух сред (конец шнура закреплен)



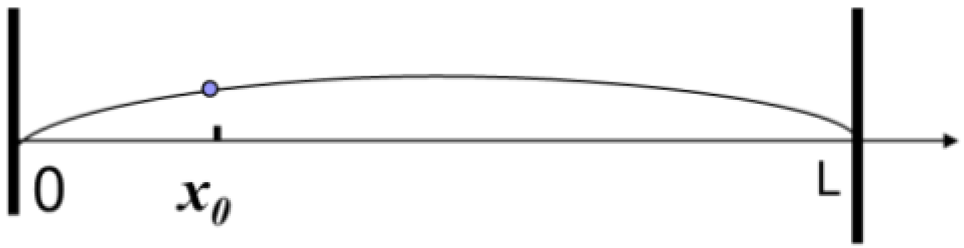
# Граница раздела двух сред





# Стоячие волны, моды колебаний

Рассмотрим особенности распространения волн в струне, закрепленной на левом и правом концах. Предположим, что одна из точек струны (с координатой $x = x_0$) под действием внешней силы совершает колебания по гармоническому закону. То есть, будут выполнены следующие условия




$$u(x_0, t) = u_{00} \cos \omega t$$
$$u(0, t) = 0$$
$$u(L, t) = 0$$

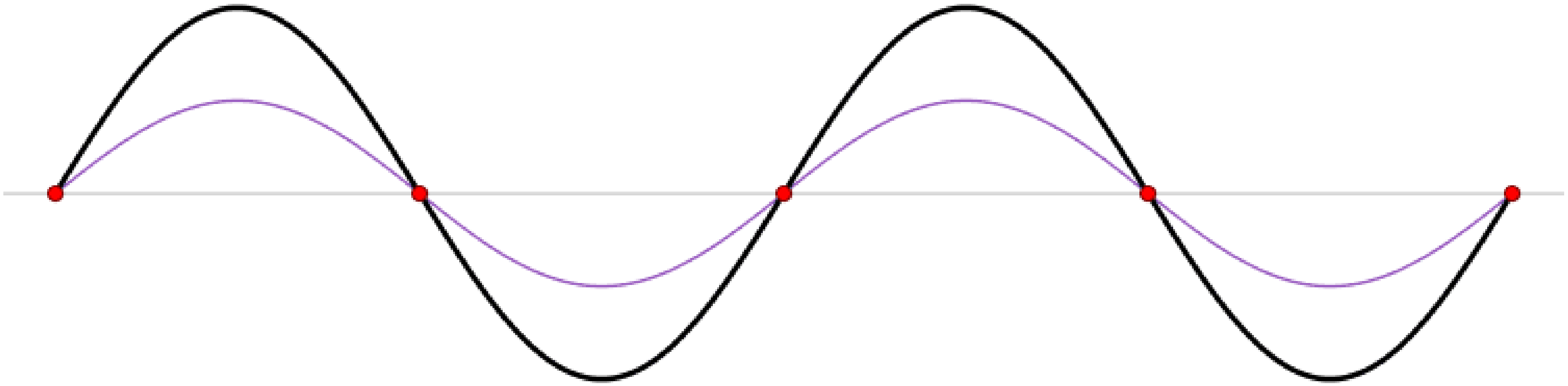
Возмущение от колеблющейся точки закрепления будет распространяться по струне в обе стороны со скоростью $c$.

$$u_+(x, t) = u_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \varphi)$$
$$u_-(x, t) = u_0 \cos(\omega t + \frac{\omega}{c} x + \varphi)$$

При отражении фаза изменяется на $\pi$.

# Узлы и пучности

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются **узлами**. Точки, в которых она достигает максимальных значений, называются **пучностями**.



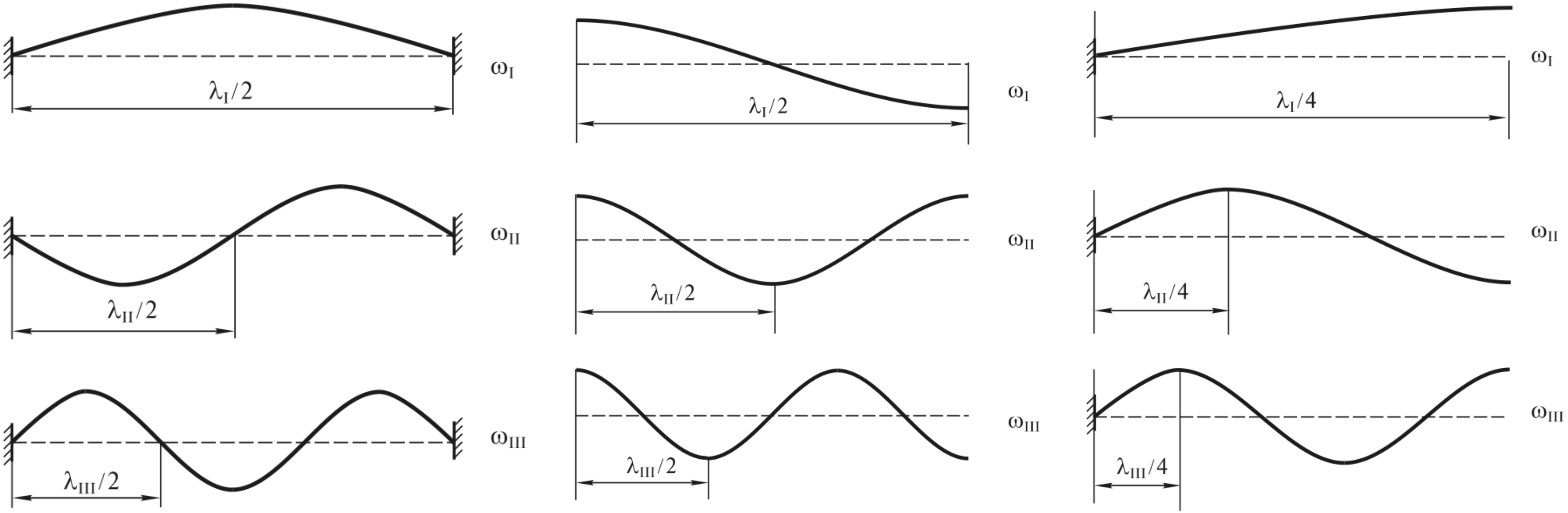
Собственные колебания струны называются **нормальными колебаниями** или **модами**, если все точки струны совершают гармонические колебания.

# Граничные условия

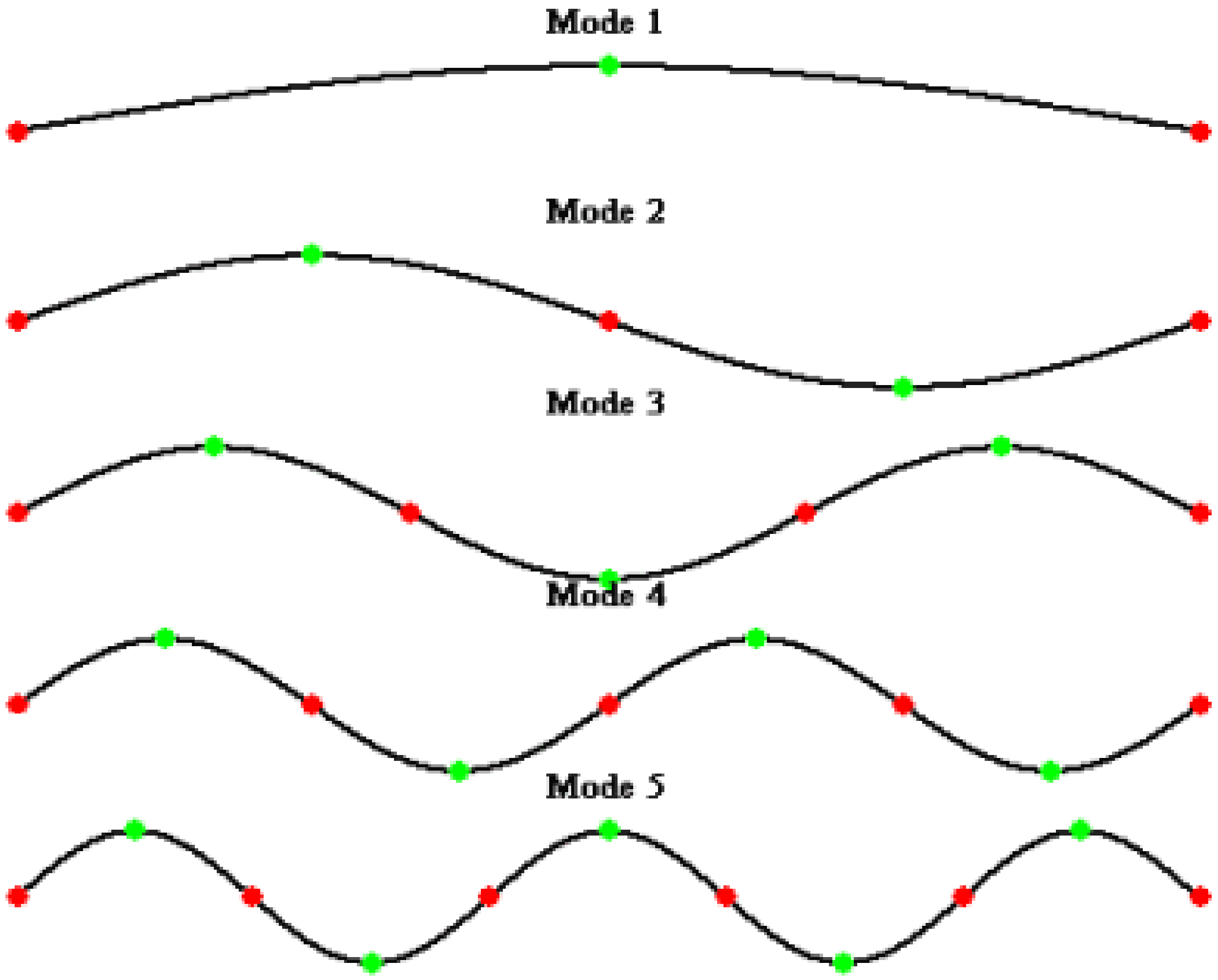
Концы закреплены

Концы свободны

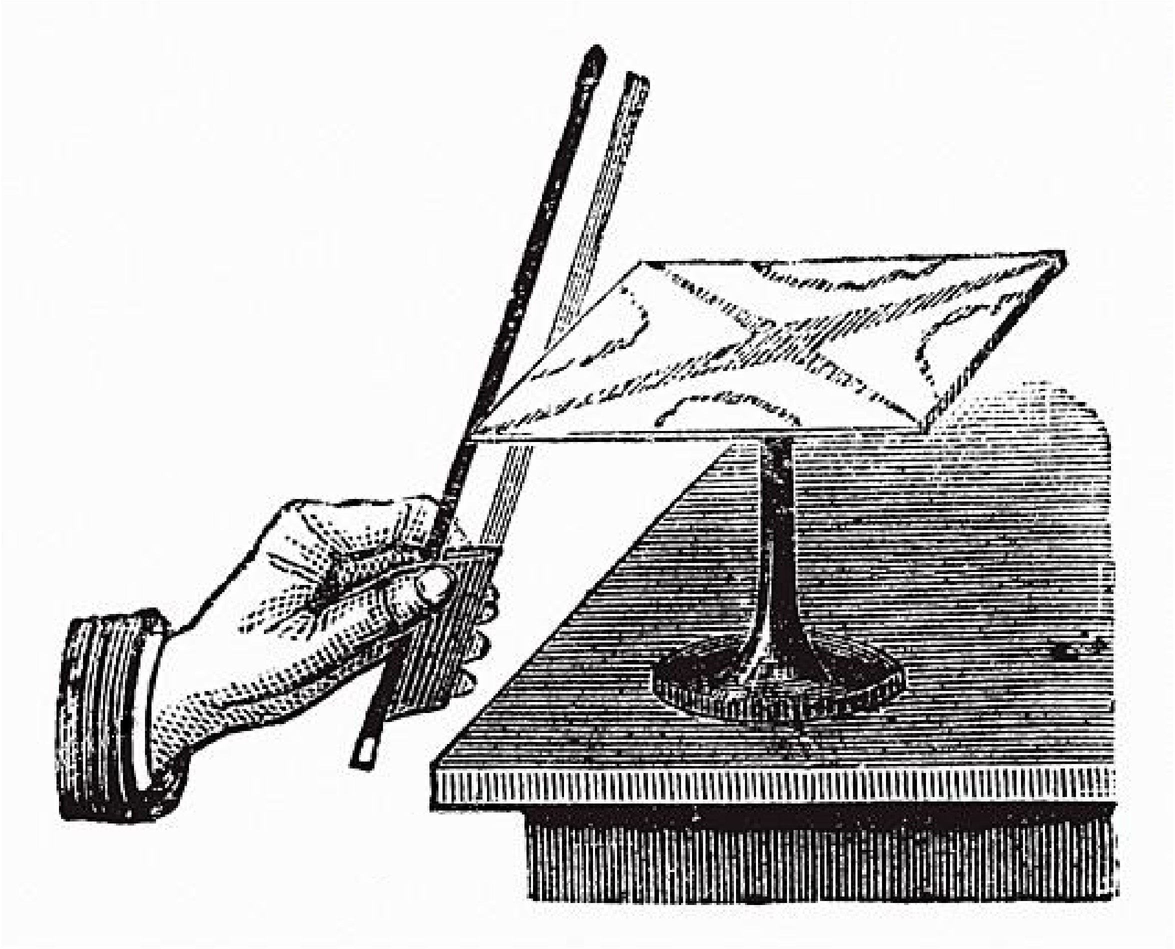
Один конец свободен

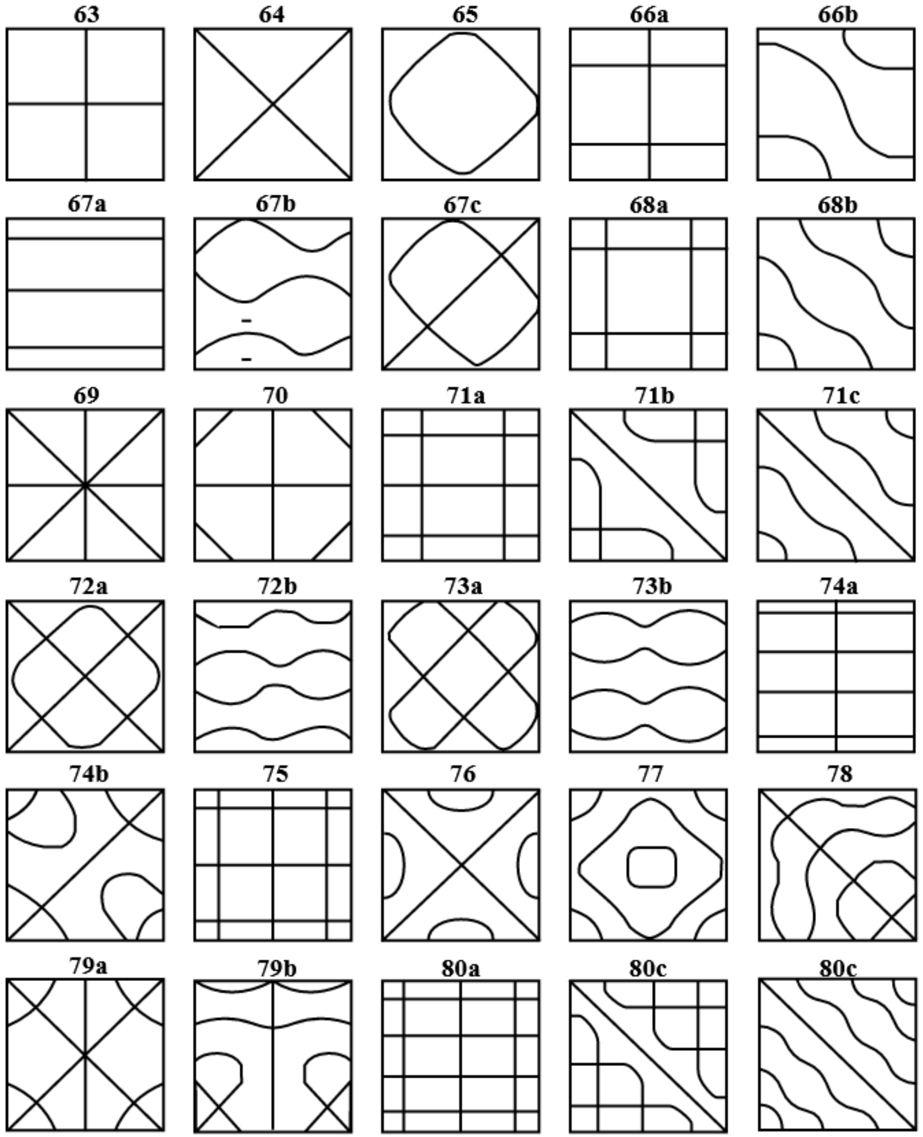


# Моды в струне

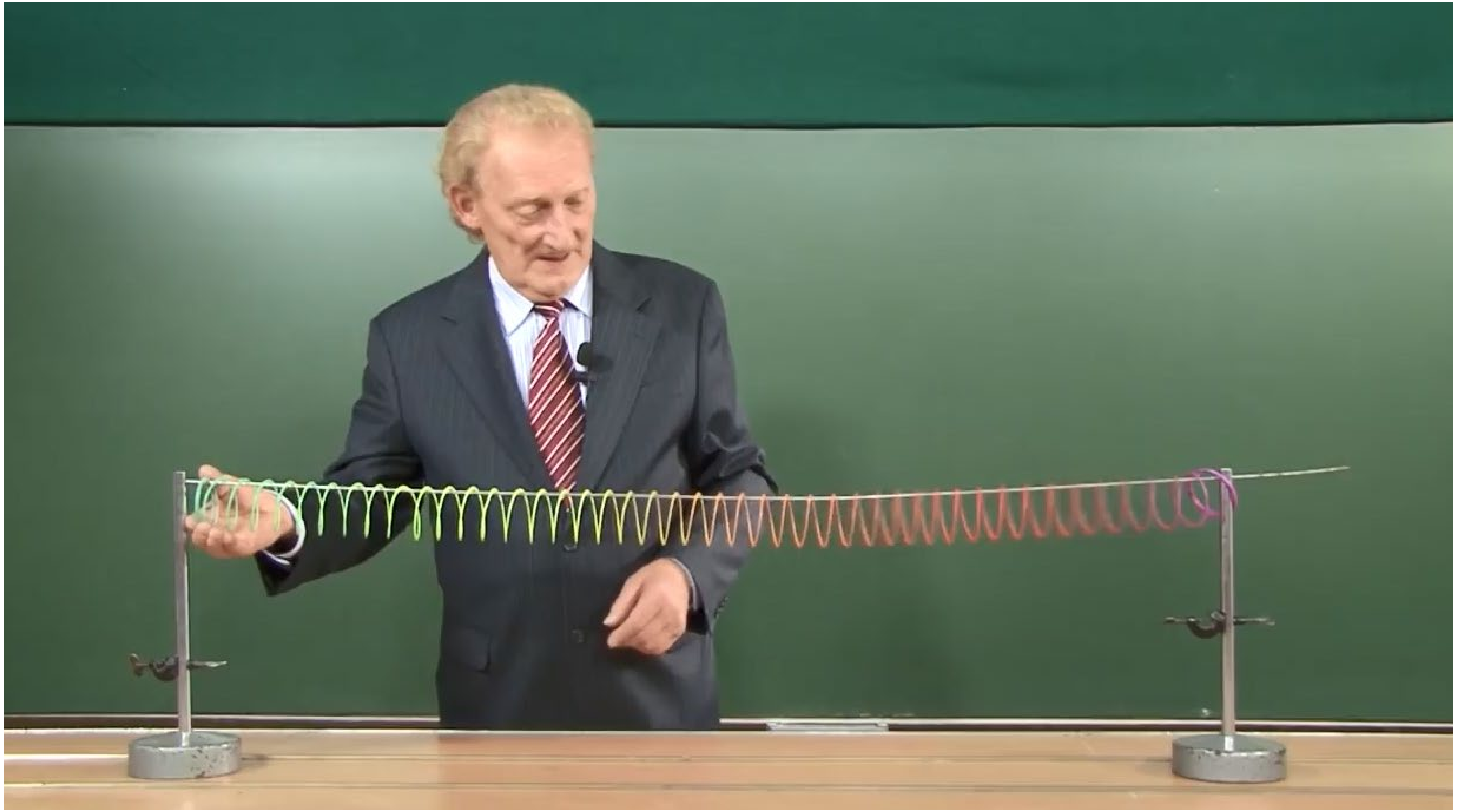


# Фигуры Хладни



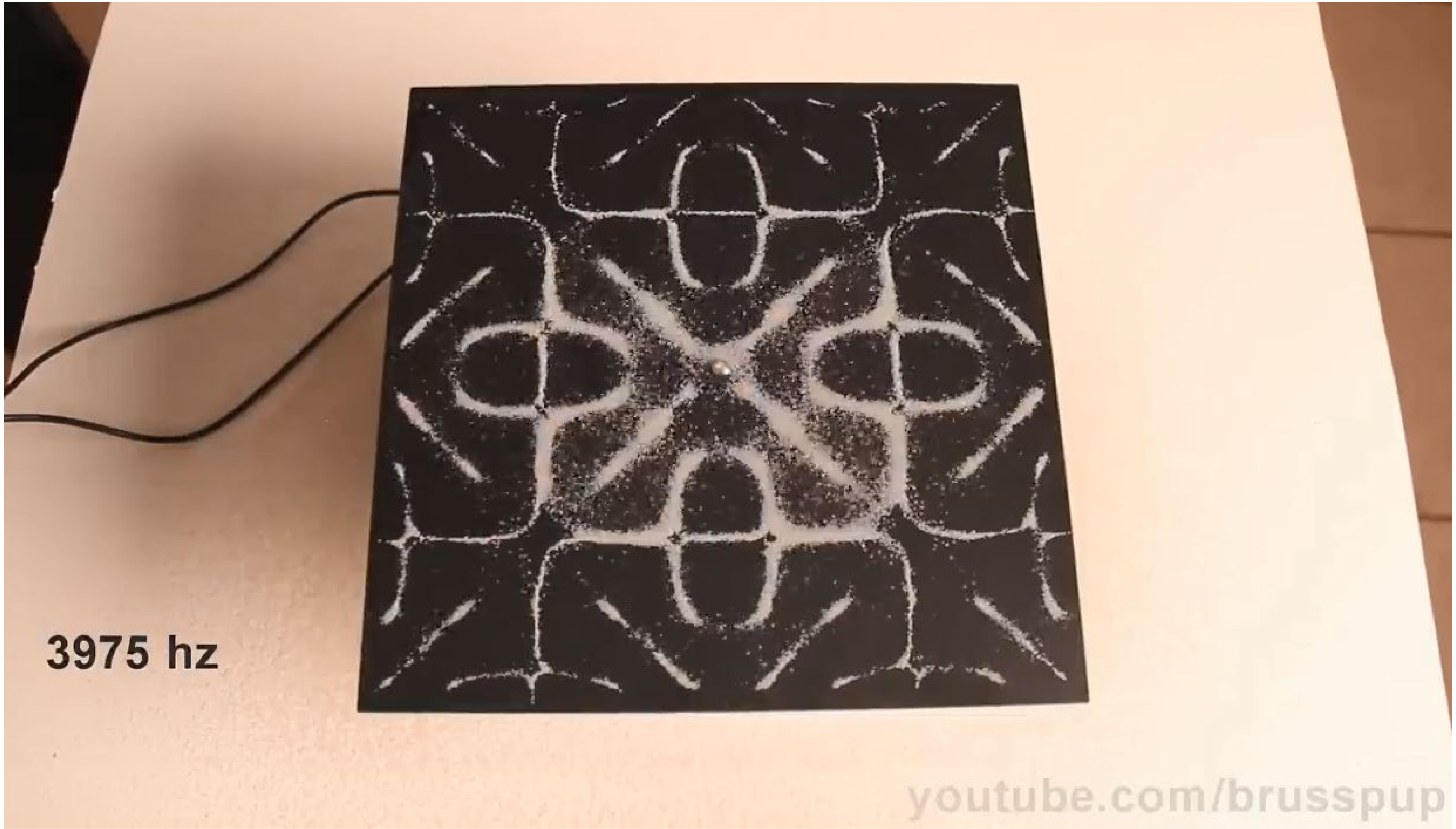


# Модель продольной волны

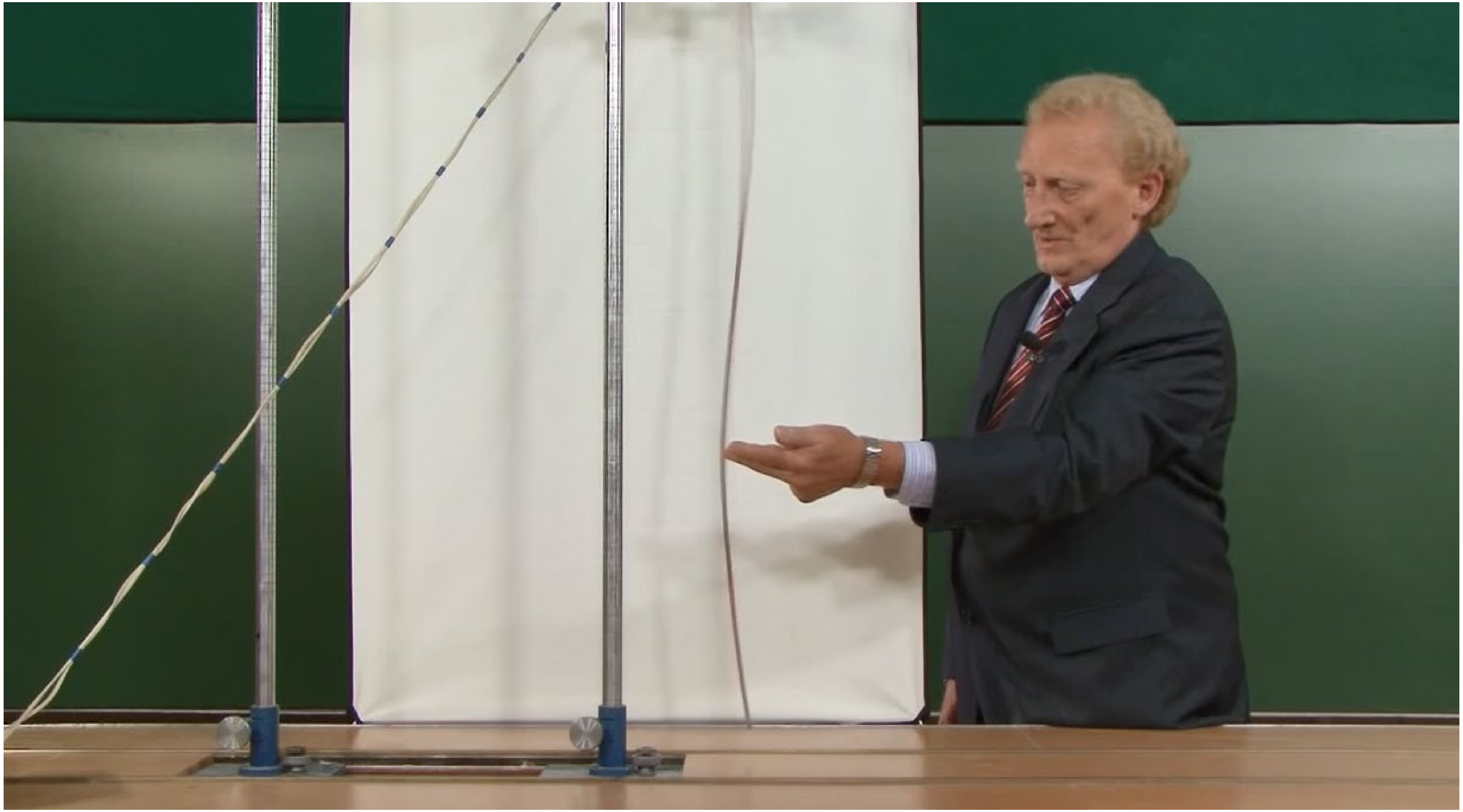


# Труба Рубенса

# Фигуры Хладни



# Стоячая волна на стержне со свободным концом



# Стоячая волна на шнуре с закрепленным концом