

# Механика

---

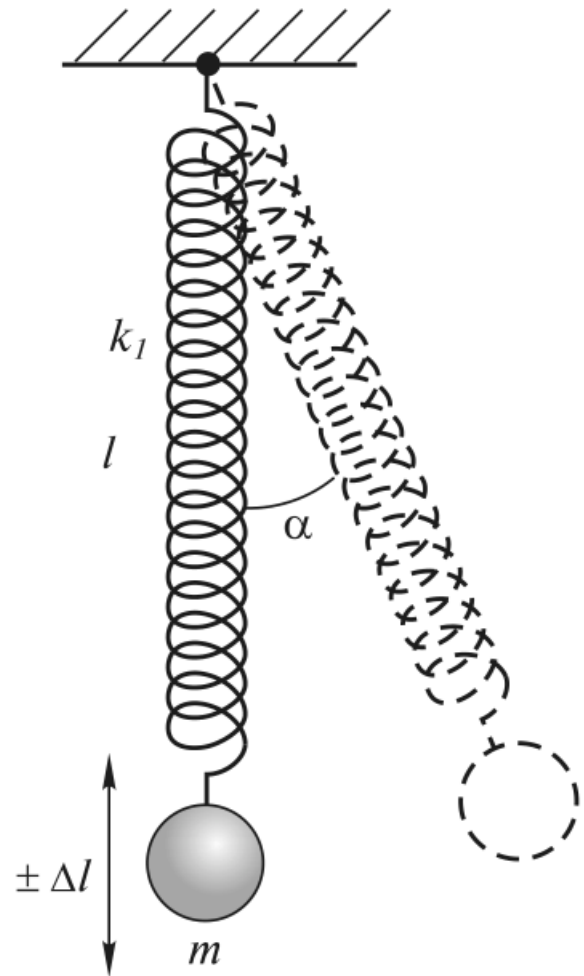
## Лекция 13



# План лекции

- Свободные колебания в системах со многими степенями свободы
- Биения
- Спектр колебаний
- Анализ двух связанных осцилляторов
- Колебания с затуханием. Энергия и её диссипация
- Вынужденные колебания. Резонанс

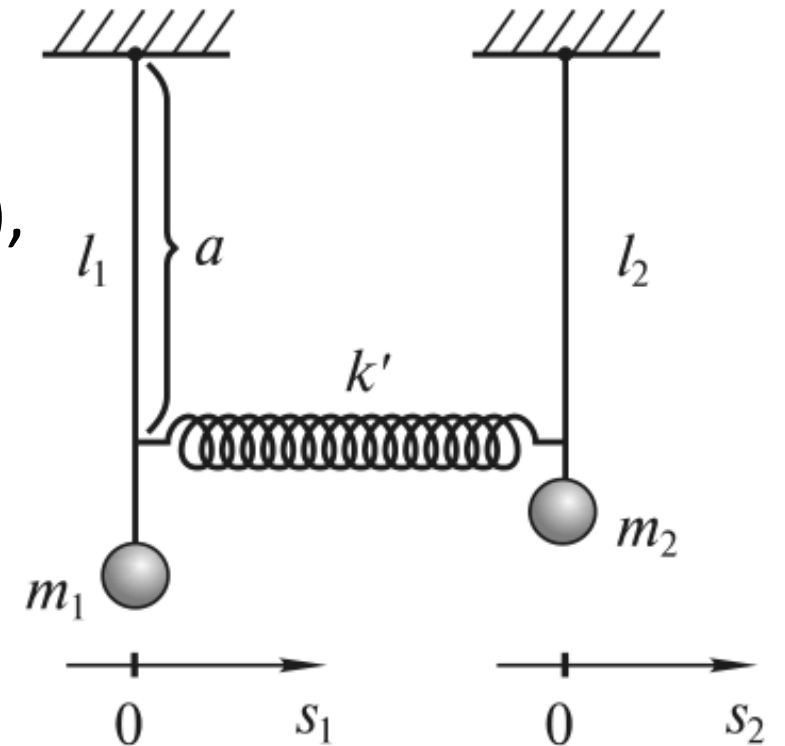
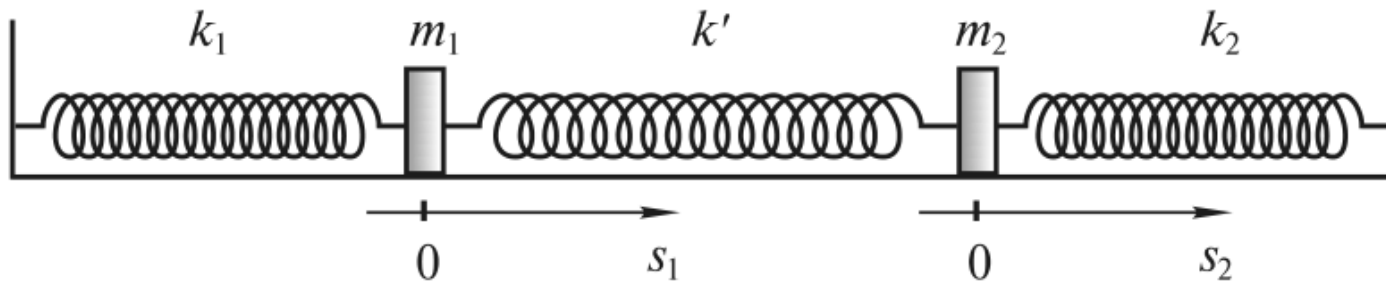
# Маятник Горелика



# Колебания в системе с 2 степенями свободы

Многие колебательные системы представляют собой системы двух или нескольких связанных между собой осцилляторов.

Примерами могут служить молекулы (атомы, взаимодействующие между собой), маятники, колеблющиеся вокруг одной оси (связь осуществляется посредством упругих сил), связанные электрические контуры.



# Колебания в системе с 2 степенями свободы

При произвольном возбуждении колебания не будут гармоническими. Однако правильный выбор начальных условий позволит получить гармонические колебания:

$$x_1(t) = x_{01} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_2(t) = x_{02} \sin(\omega t + \varphi)$$

**Нормальные колебания или «моды»**

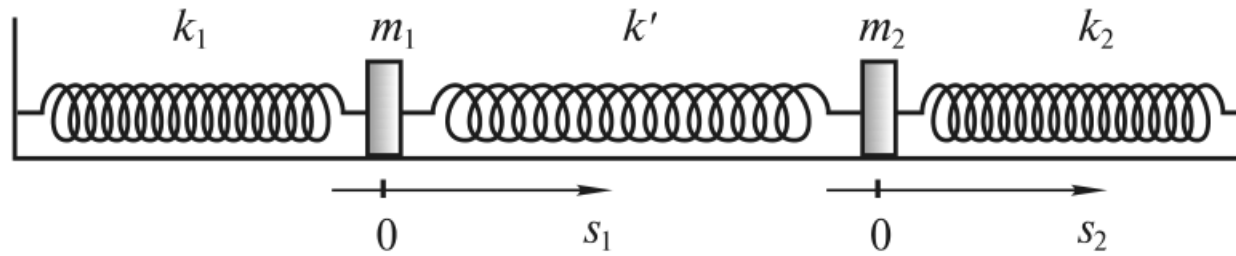
$\omega$  – нормальная частота и

$\zeta = x_{02}/x_{01}$  – коэффициент распределения амплитуд

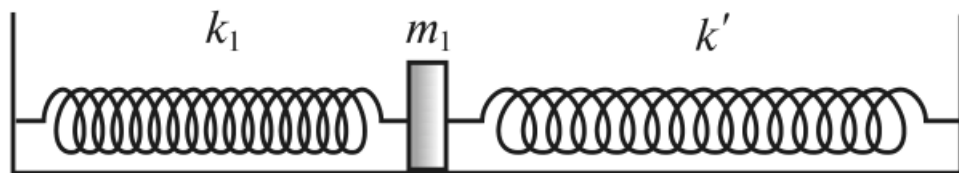
определяются свойствами самой системы

В общем случае любое колебание – **суперпозиция мод.**

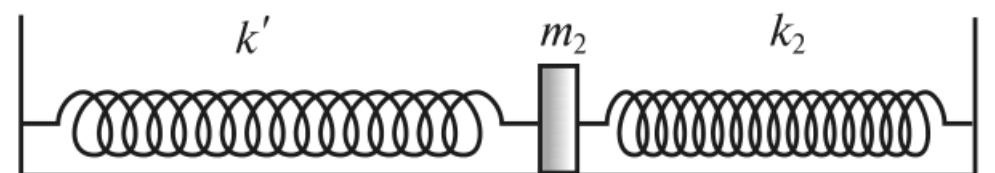
# Парциальные частоты



Закрепим один груз



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k'}{m}}$$



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k'}{m}}$$

# Нормальные частоты

Найдем нормальные частоты в случае

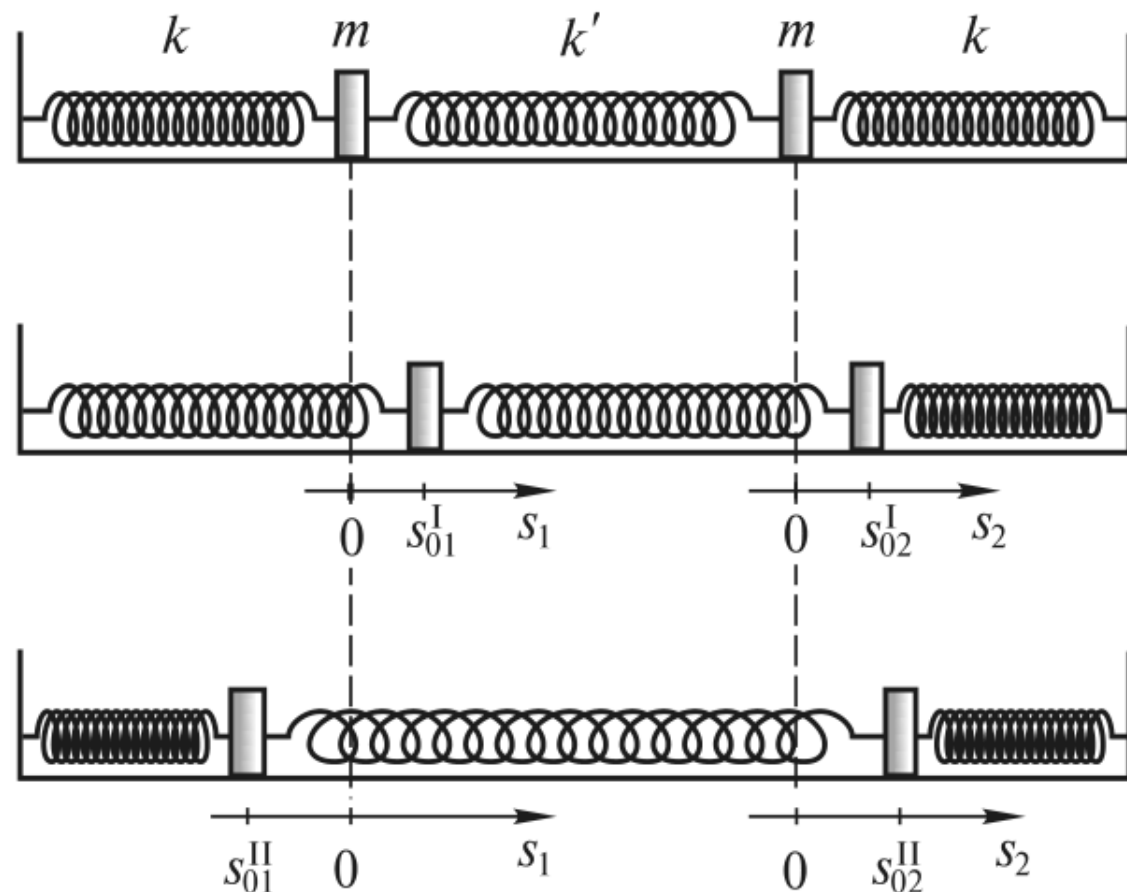
$$m_1 = m_2 = m,$$

$$k_1 = k_2 = k$$

Подберем начальные условия, откуда

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

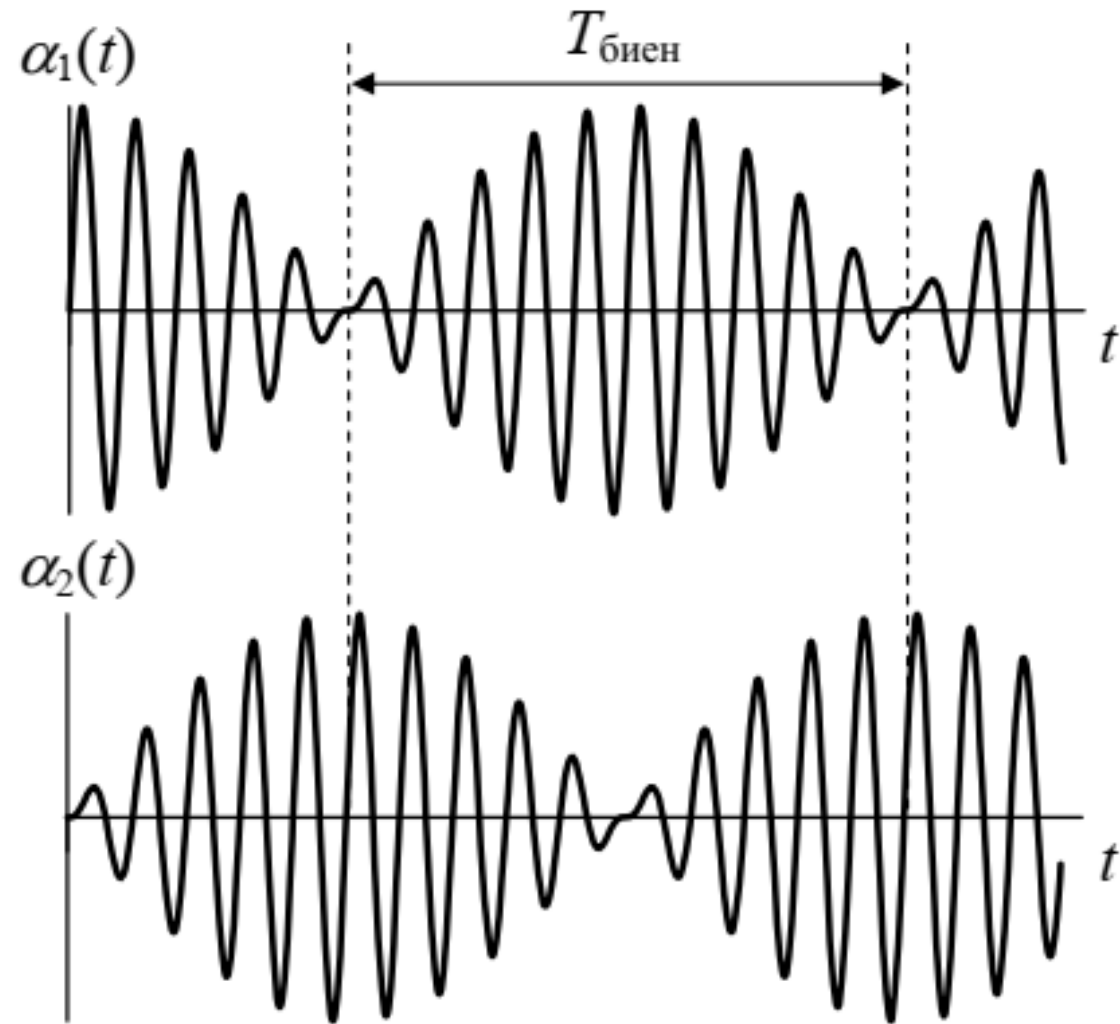


# Биения

**Биения** – это периодическое изменение амплитуды колебаний, возникающее при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

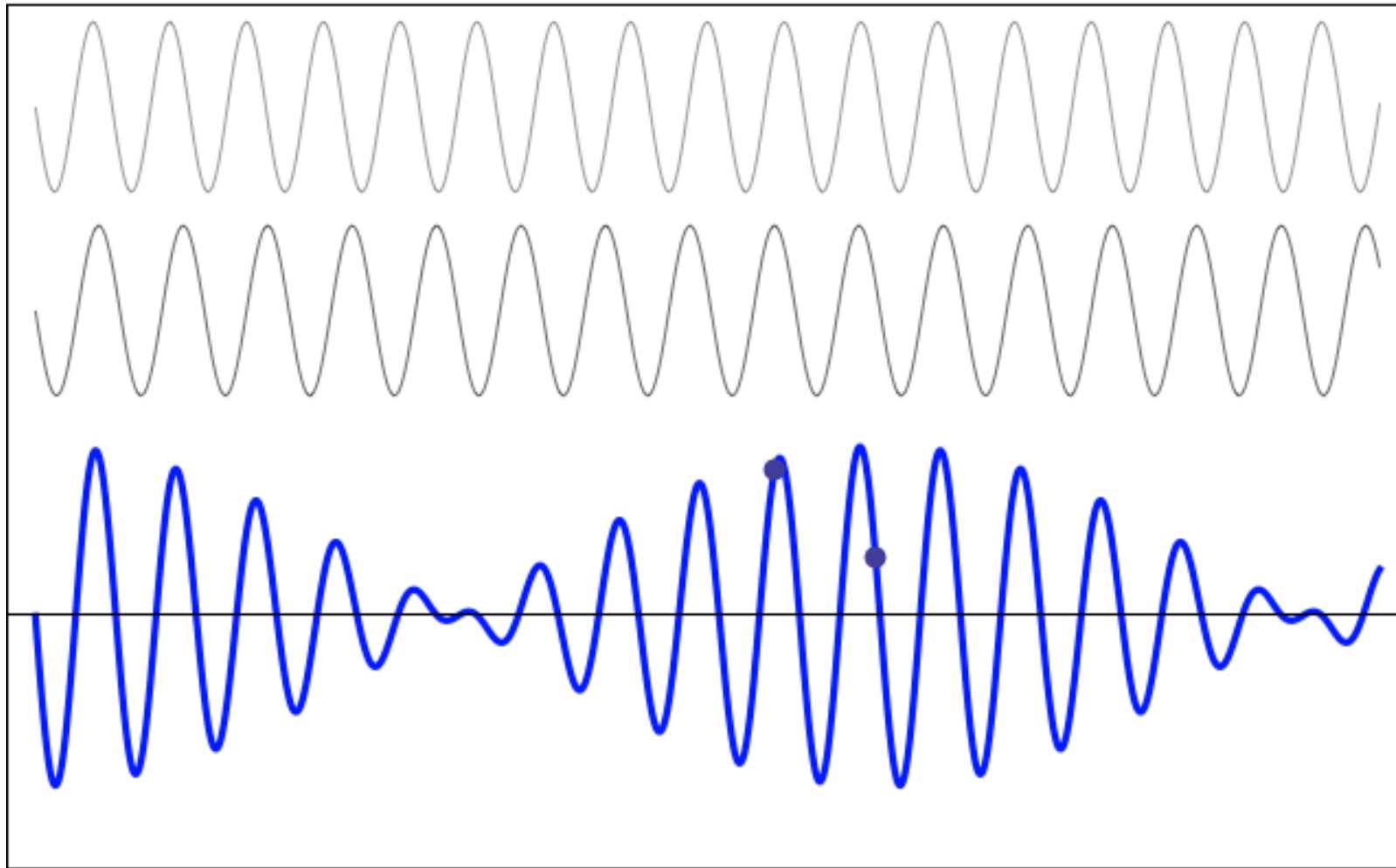
$$x_1(t) = x_{01} \cos \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cos \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t$$

$$x_2(t) = x_{02} \sin \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \sin \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t$$





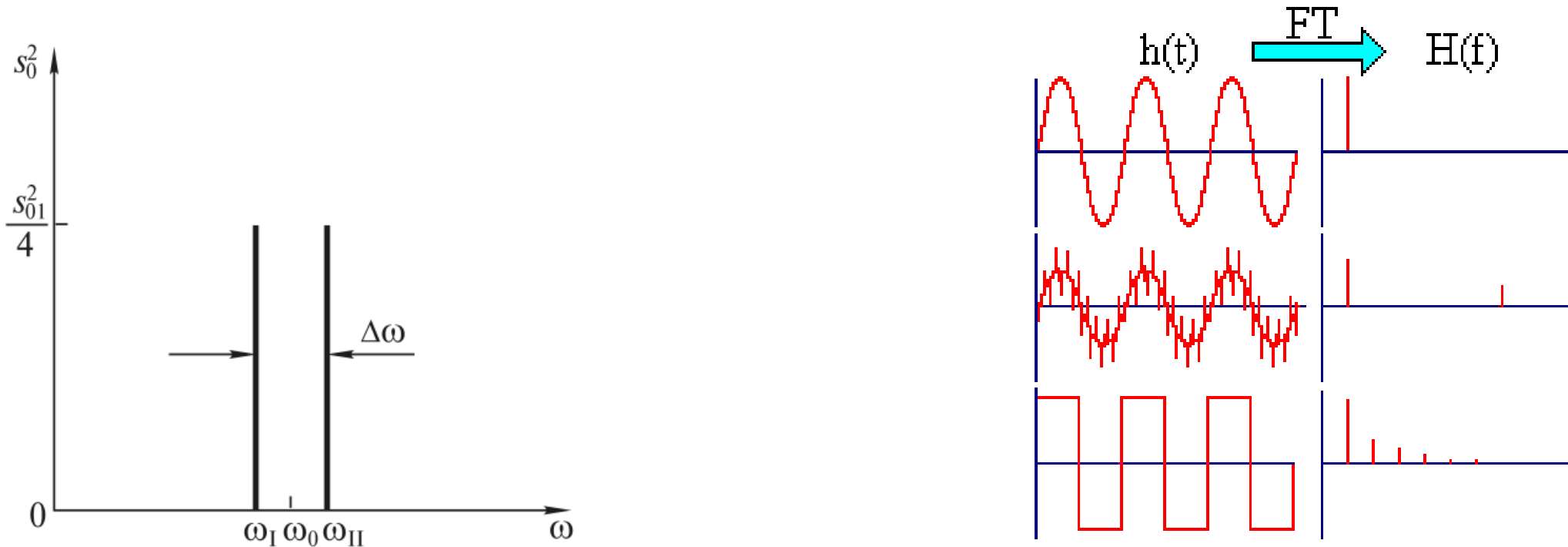
# Биения



# Спектральный анализ

Для анализа колебательных процессов использую **спектральное представление** – зависимость квадрата амплитуды от частоты.

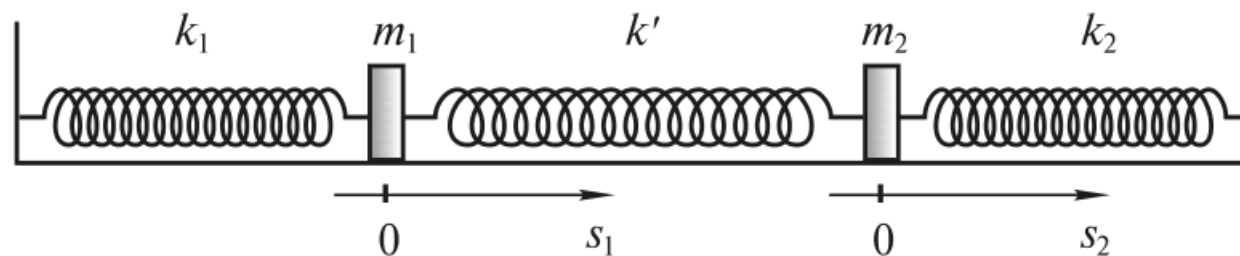
В частности для биений:



В общем случае используют преобразование Фурье

# Анализ двух связанных осцилляторов

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k' x_1 + k' x_2$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k' x_2 + k' x_1$$



$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2$$
$$\ddot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 - \omega_2^2 x_2$$

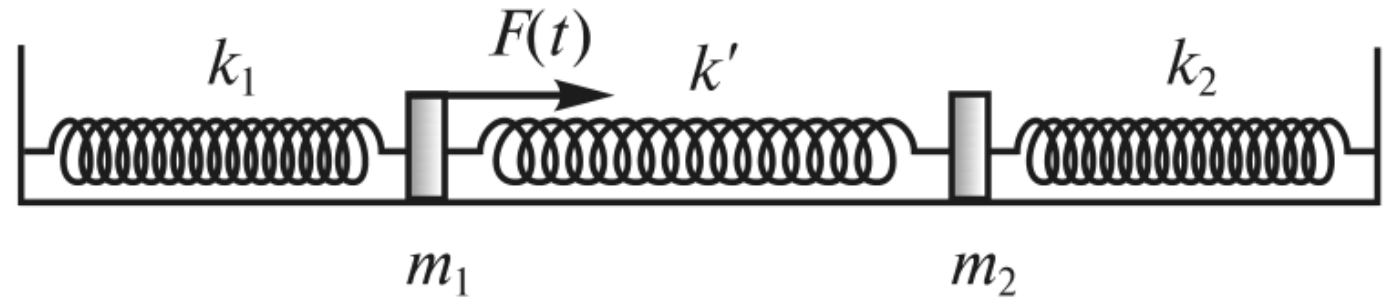
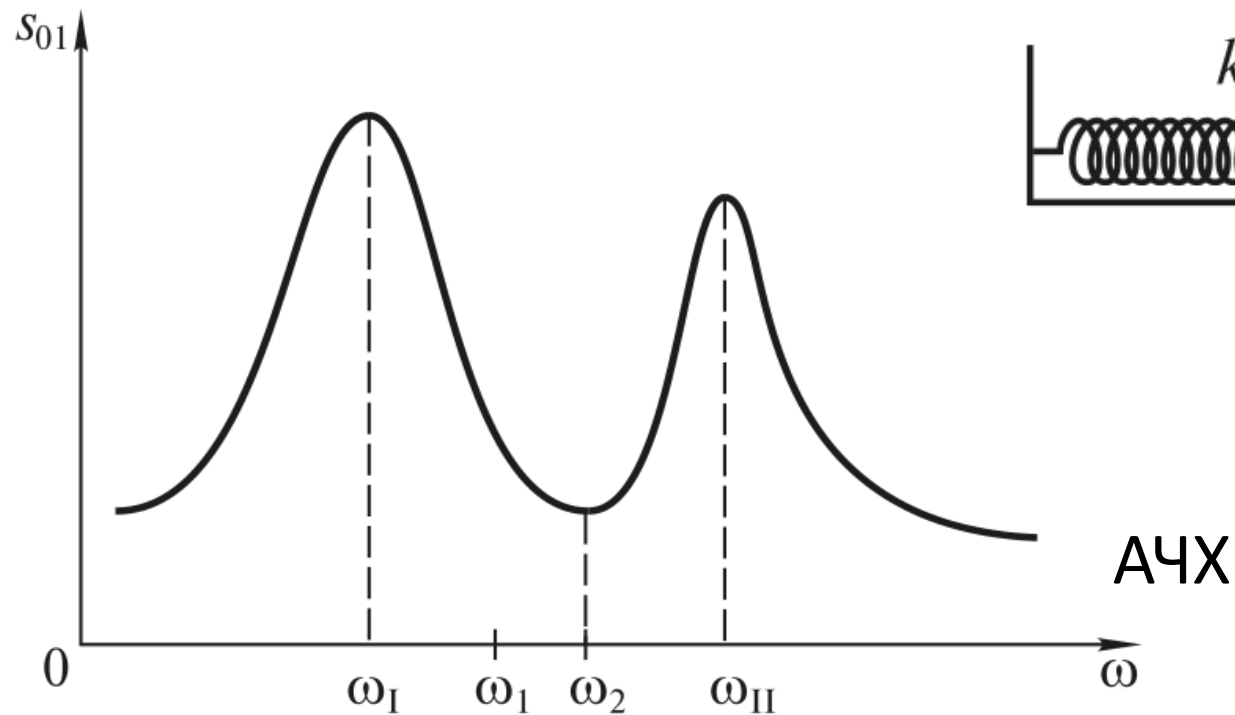
$\omega_i$  – парциальные частоты

$$\alpha_i = -\frac{k'}{m}$$

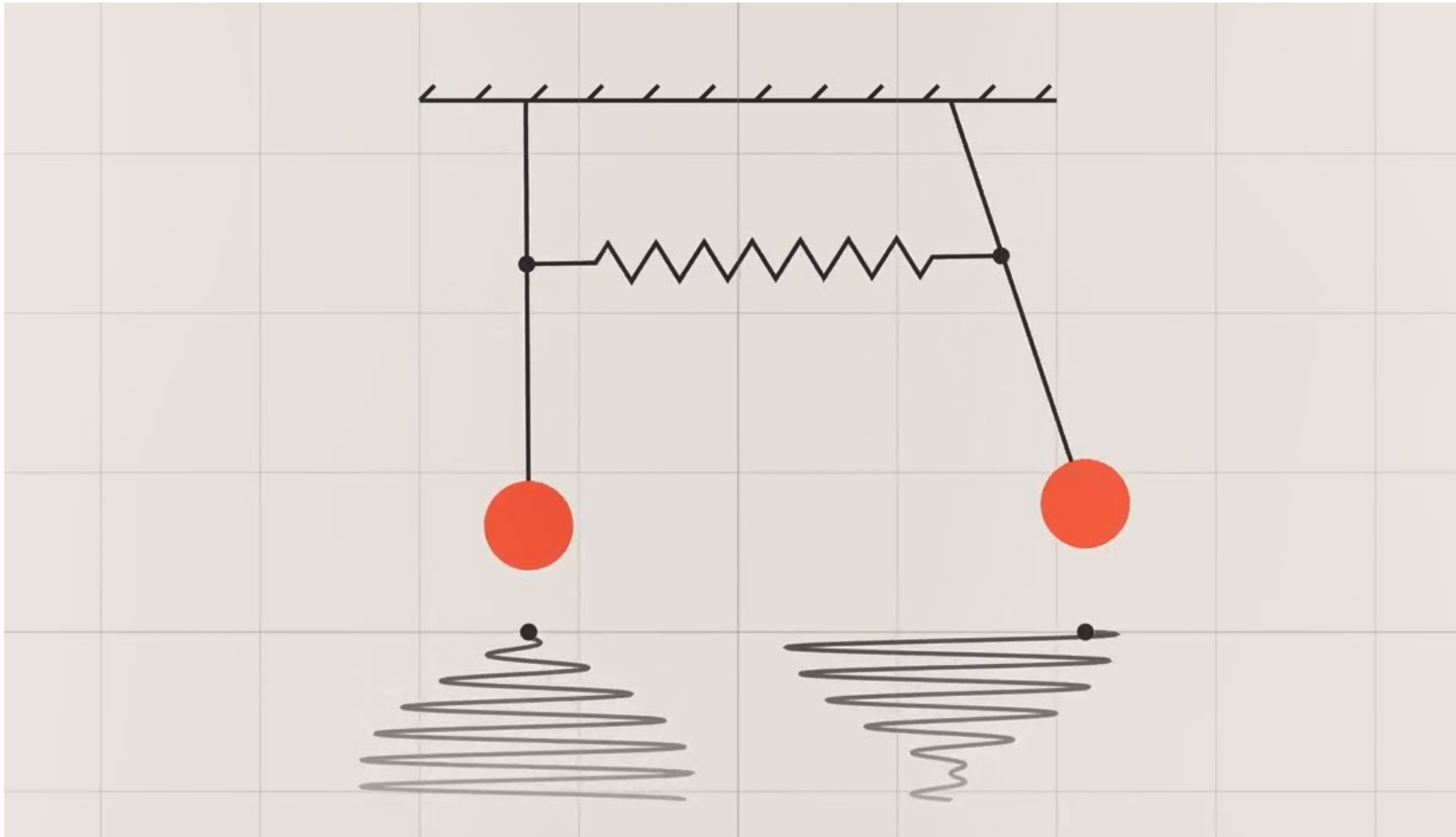
Не решаются по отдельности – необходимо их разделить

# Вынужденные колебания. Резонанс

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - 2\delta_1 \dot{x}_1 - \alpha_1 x_2 + \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t$$
$$\ddot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 - \omega_2^2 x_2 - 2\delta_2 \dot{x}_2$$



# Связанные колебания



# Маятник Уилберфорса

