Механика

Лекция 11

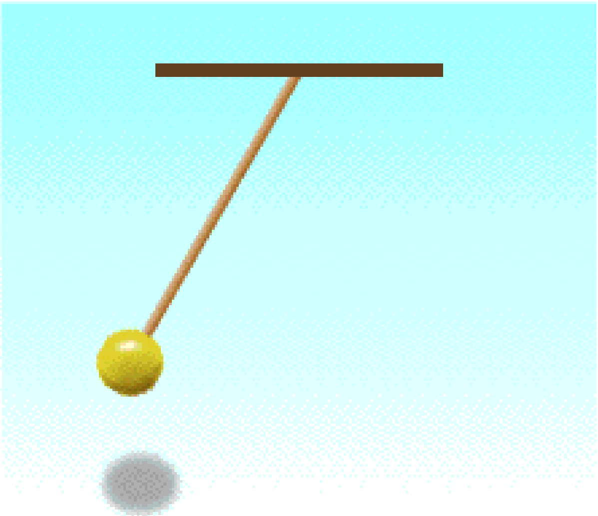
План лекции

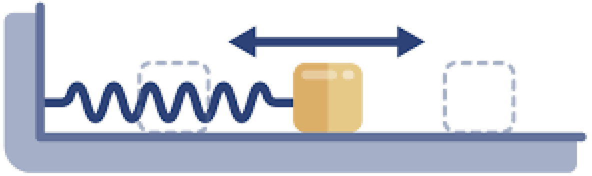
- Свободные колебания систем с одной степенью свободы.
- Гармонические колебания.
- Амплитуда, частота и период колебаний. Фаза и начальная фаза.
- Сложение гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.
- Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Время релаксации. Добротность колебательной системы.
- Вынужденные колебания.

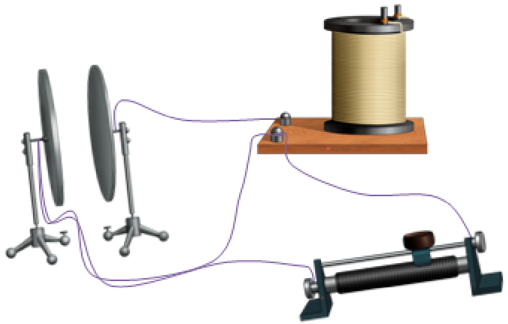
Колебания

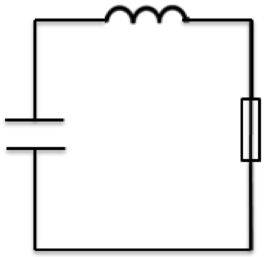
Колеба́ния — повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.

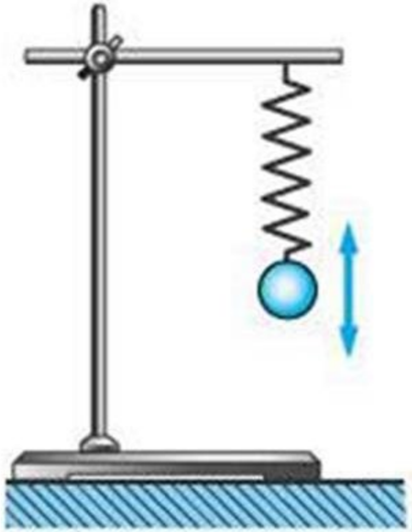
Например, при колебаниях маятника повторяются отклонения его в ту и другую сторону от вертикального положения; при колебаниях в электрическом колебательном контуре повторяются величина и направление тока, текущего через катушку.







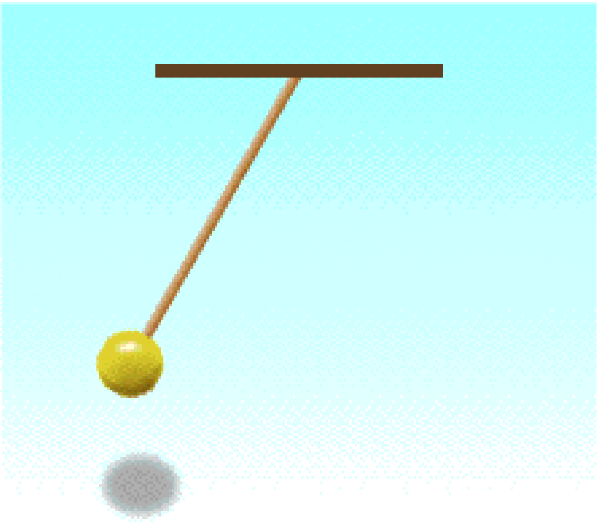


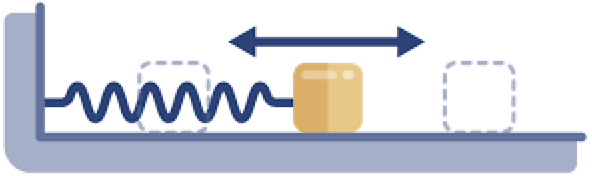


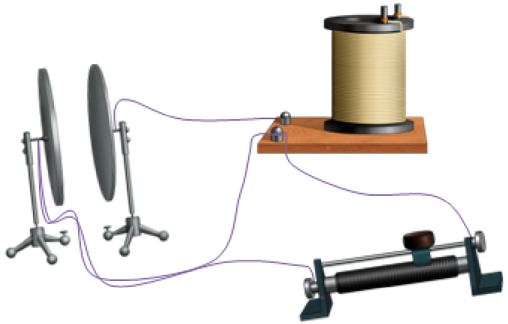
Свободные колебания систем с одной степенью свободы

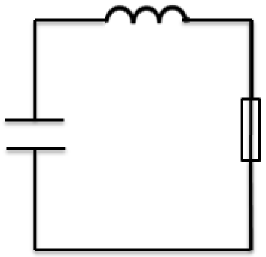
Колебания почти всегда связаны с попеременным превращением энергии одной формы проявления в другую форму. Колебания различной физической природы имеют много общих закономерностей и тесно взаимосвязаны с волнами. Поэтому исследованиями этих закономерностей занимается обобщённая теория колебаний и волн.

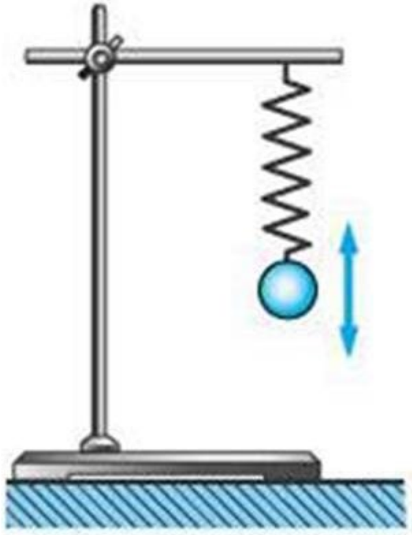
Принципиальное отличие от волн: при колебаниях не происходит переноса энергии.











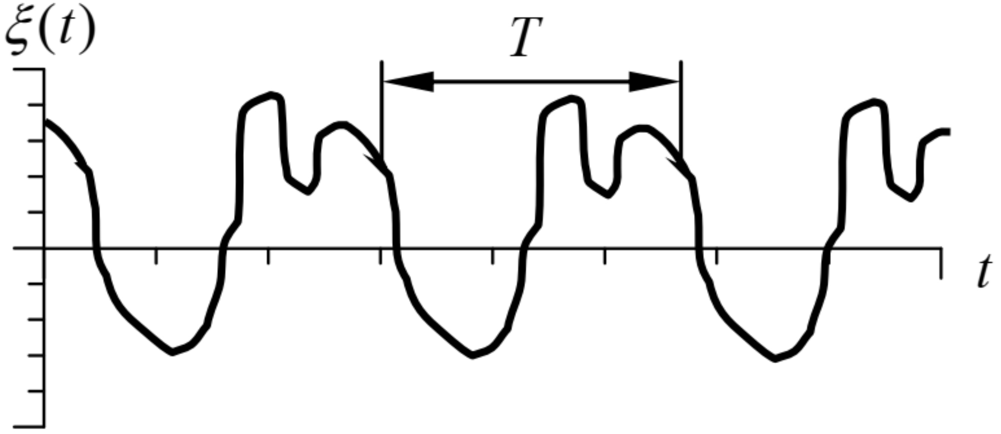
Механические колебания

- **Механические колебания** – это повторяющееся ограниченное движение тел механической системы относительно некоторого своего положения. При этом обобщенные координаты, определяющие положения тел системы в пространстве, ограниченно изменяются около некоторого своего значения.

- **Периодический механический процесс** – движение тел механической системы, точно повторяющееся во времени.

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

- **Период** *T* – минимальный интервал времени, через который процесс в точности повторяется.



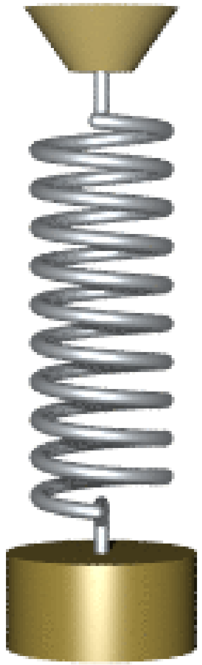
Зависимость обобщенной координаты ξ(t) от времени в случае периодического процесса.

- **Свободные (собственные) колебания** – колебания системы, предоставленной самой себе (при постоянных внешних условиях).

Пружинный маятник

В качестве простейшей колебательной системы рассмотрим груз, подвешенный на пружине в поле силы тяжести. Предположим, что груз может совершать только вертикальные колебания. Будем считать, что система является консервативной, то есть в ней отсутствуют силы трения.

Пружинный маятник – это тело, прикрепленное к невесомой пружине.

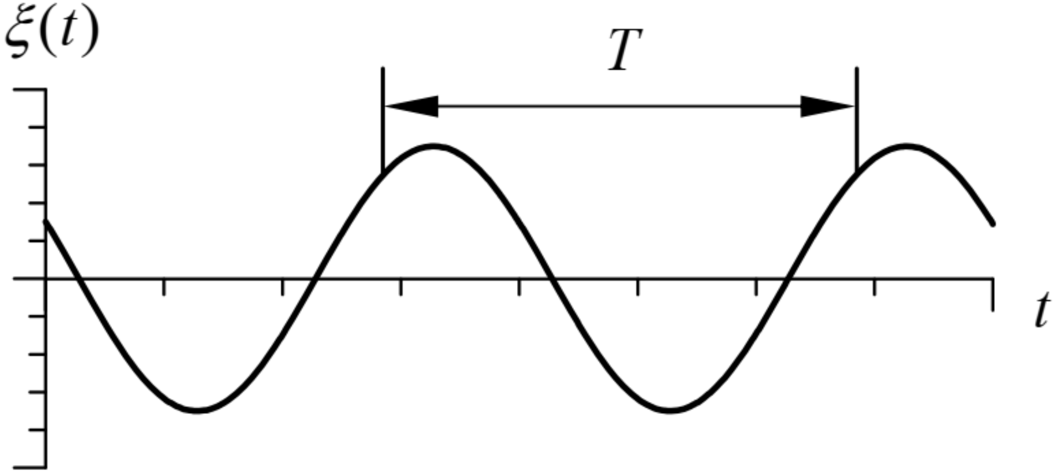


$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Уравнение собственных гармонических колебаний

Гармонические колебания – процесс, при котором физическая величина ξ(t) меняется по гармоническому закону.



$$\boxed{\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0}$$

где

ξ – одна из **обобщенных координат** – независимых физических величин, определяющих положение тел системы;

ω_0 – **угловая частота**

Закон собственных гармонических колебаний

Уравнение собственных гармонических колебаний: $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$

Закон движения при собственных гармонических колебаниях (зависимость обобщенной координаты от времени) – решение уравнения собственных гармонических колебаний:

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Здесь $(\omega_0 t \; + \; \varphi_0)$ – **фаза колебаний**;

A – **амплитуда**;

φ_0 – **начальная фаза** собственных гармонических колебаний, определяемые начальными условиями.

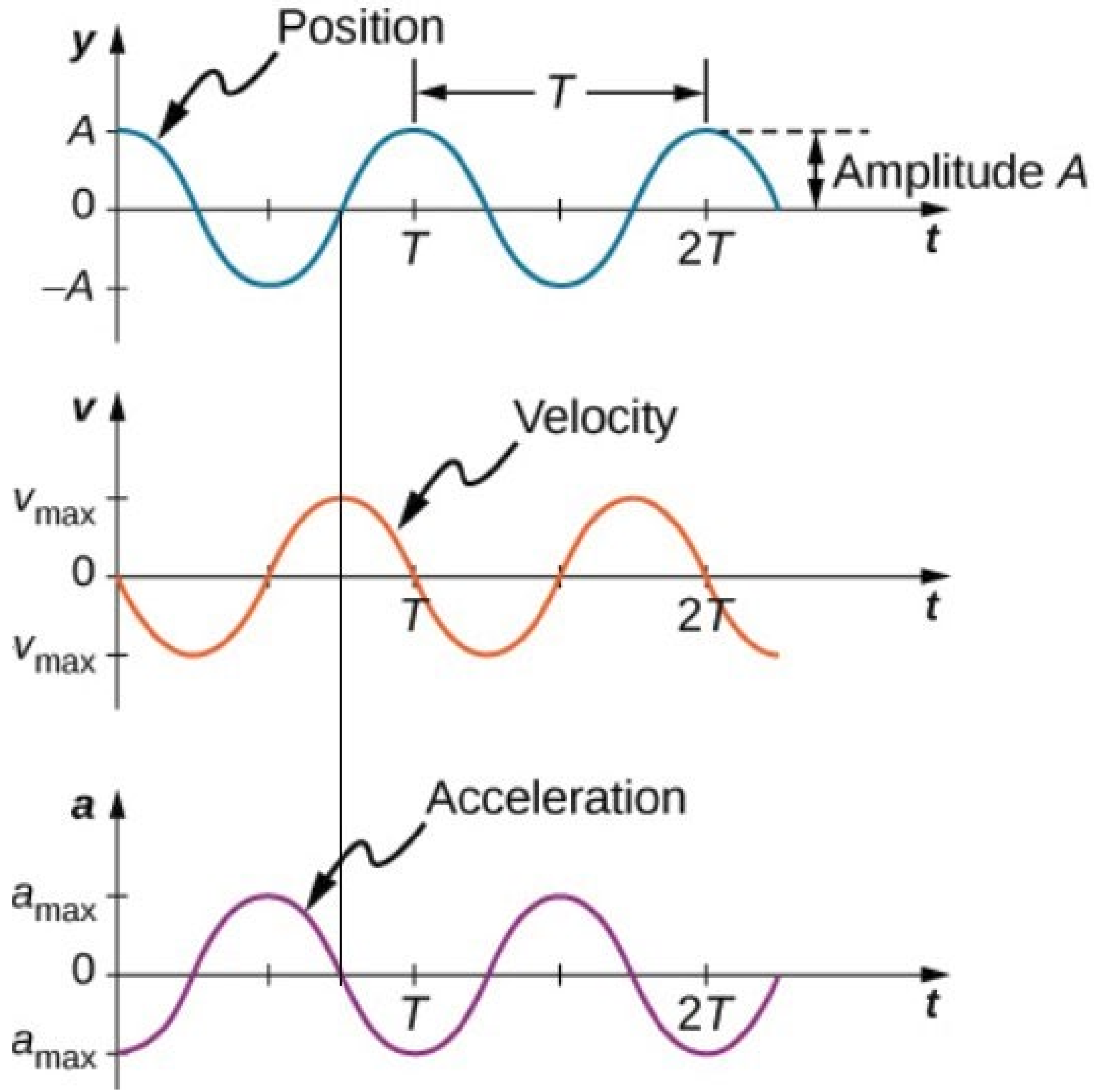
Начальные условия

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 колебаний определяются начальными условиями. Например, в начальный момент времени известно смещение маятника равно и начальная скорость.

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0}\right)^2} \qquad \varphi_0 = -\omega_0 t_0 - \arctan\left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0 \xi_0}\right)$$

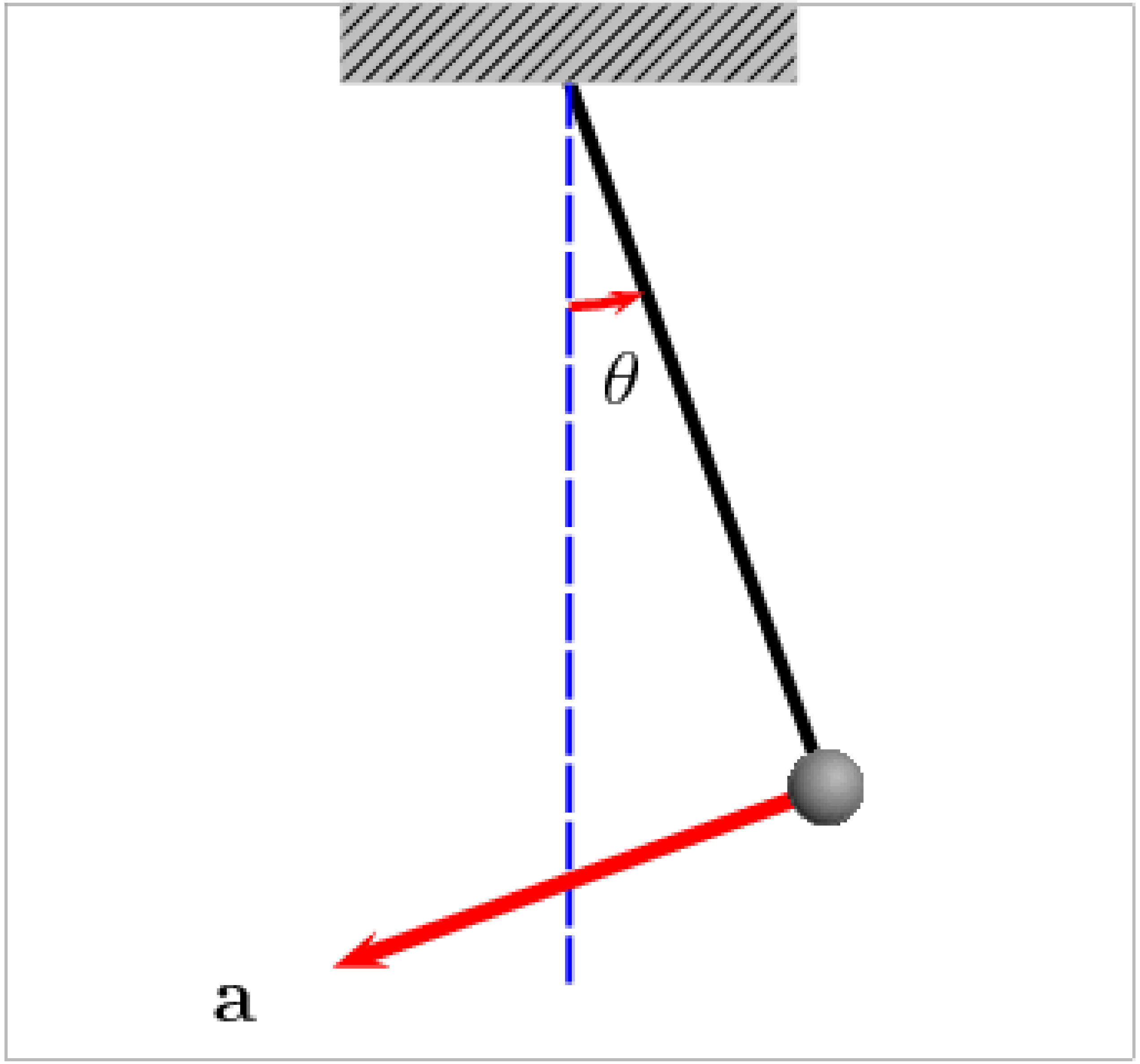
Для рассматриваемых колебаний не только смещение, но и скорость, и ускорение являются гармоническими функциями времени.



Смещение

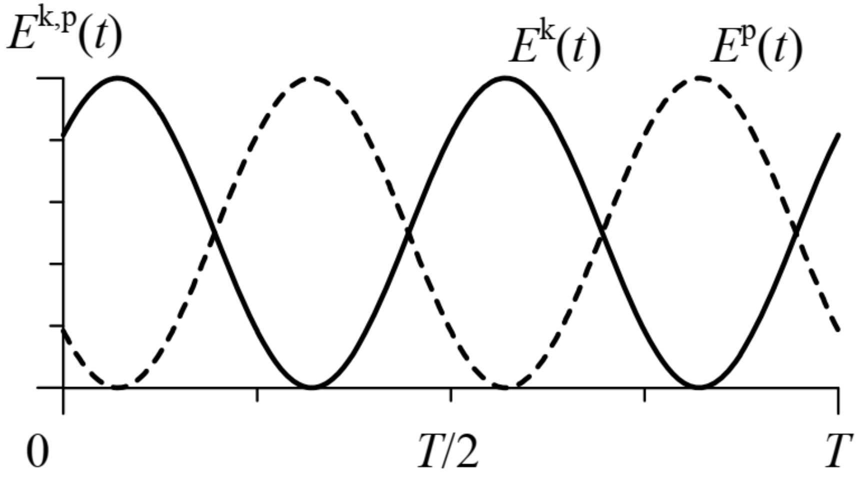
Скорость

Ускорение



θ
a

Энергия свободных колебаний

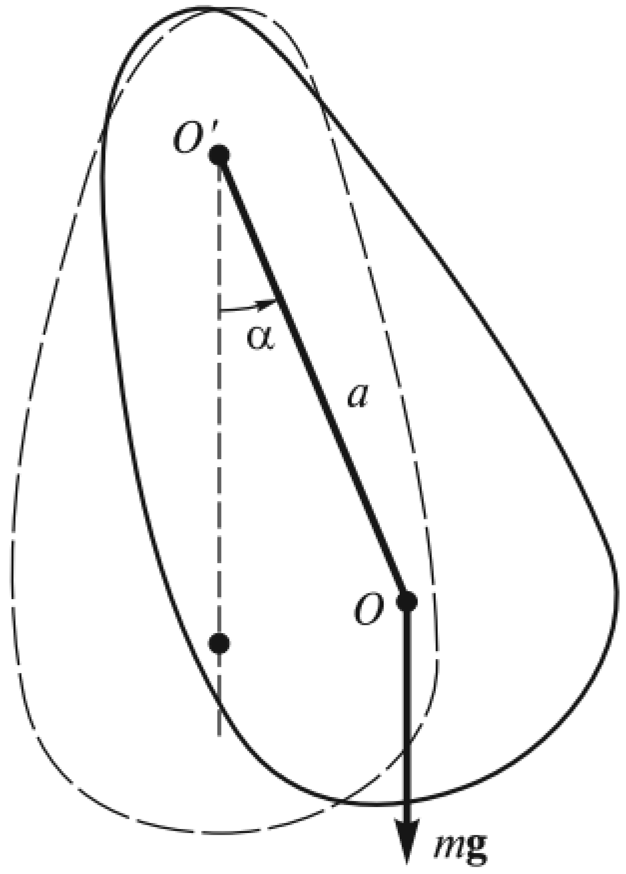


$$E = E_k(t) + E_p(t) = \frac{kA^2}{2}$$

Так как в рассматриваемой системе отсутствуют силы трения, то полная энергия колебаний с течением времени не изменяется, причем наблюдается периодическая перекачка кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника изменяются в противофазе по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$ и одинаковыми амплитудами. Механическая энергия пружинного маятника, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной в процессе колебаний

Физический маятник



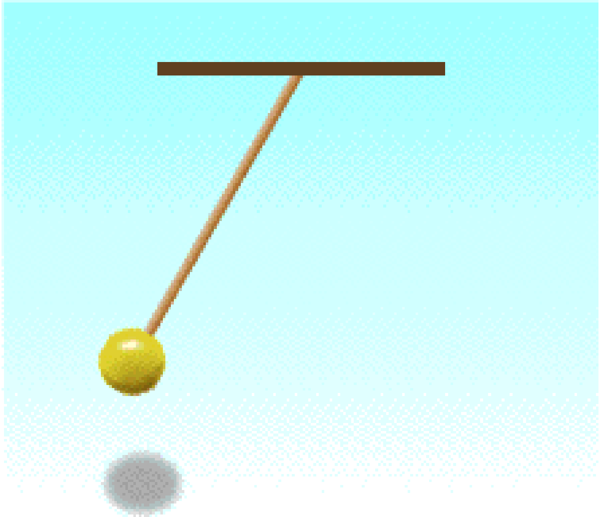
Физический маятник - абсолютно твердое тело, подвешенное в поле сил тяжести.

Рассмотрим колебания физического маятника относительно горизонтальной оси, в процессе которых все материальные точки физического маятника движутся в параллельных плоскостях.

$$\ddot{\alpha} = -\frac{mga}{J}\alpha$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

Математический маятник



Математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в поле сил тяжести.

Рассмотрим колебания математического маятника относительно горизонтальной оси, происходящие в одной плоскости.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с телом, к которому подвешен математический маятник.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$$

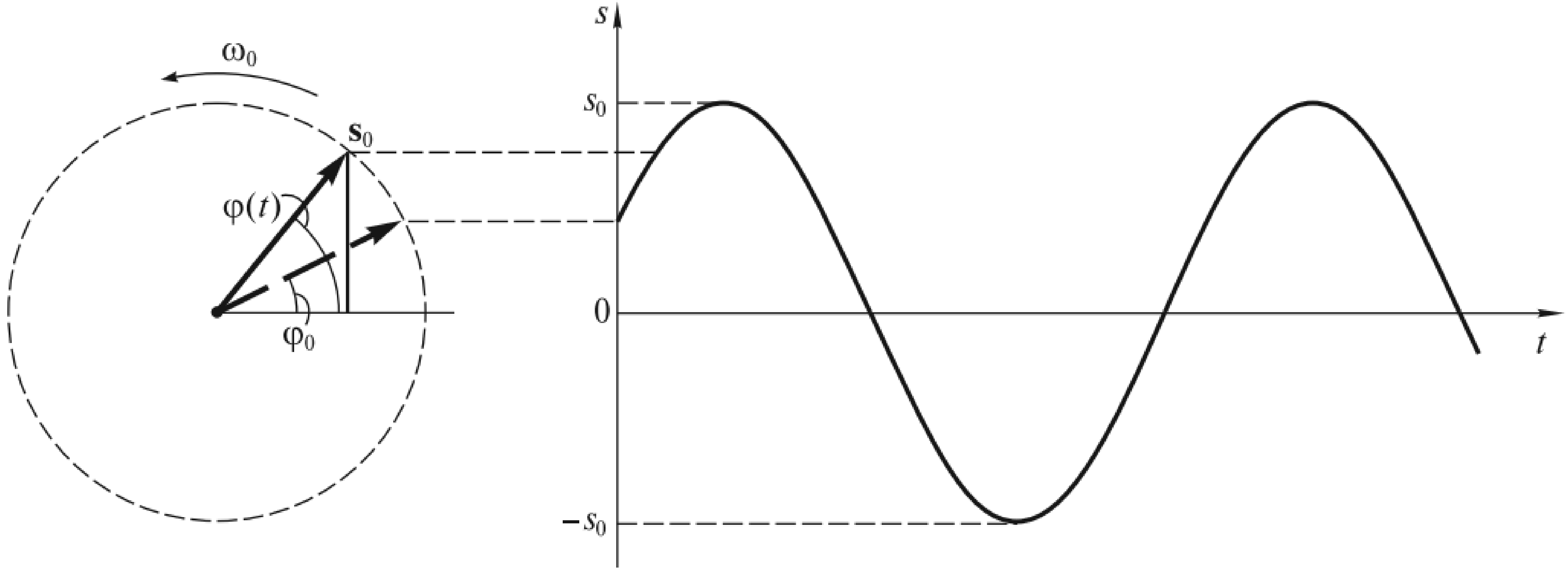
$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

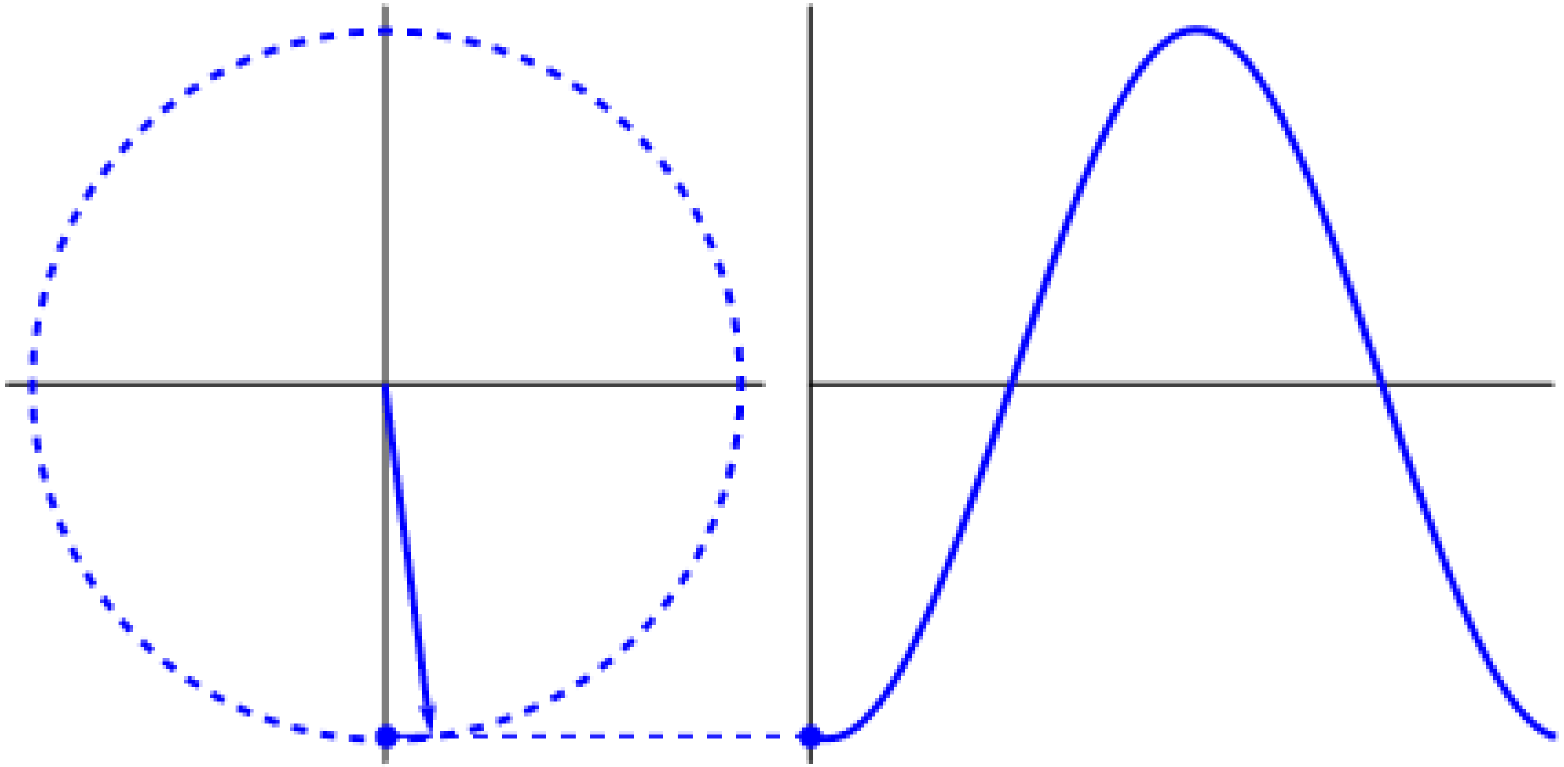
$$E_k = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{mglA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_p = mgl(1 - \cos\alpha) = \frac{mglA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

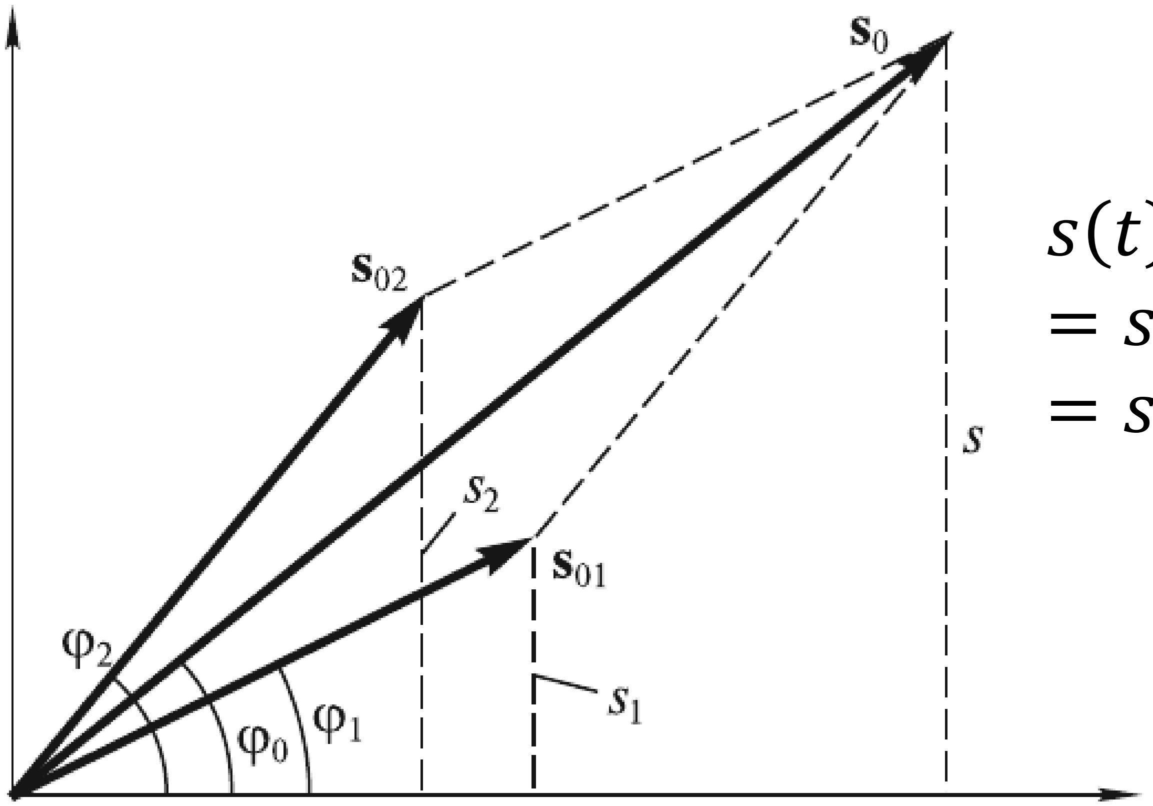
Метод векторных диаграмм

Гармонические колебания можно изобразить графически в виде вращающегося на плоскости вектора амплитуды.





Гармонические колебания можно изобразить графически в виде вращающегося на плоскости вектора амплитуды.



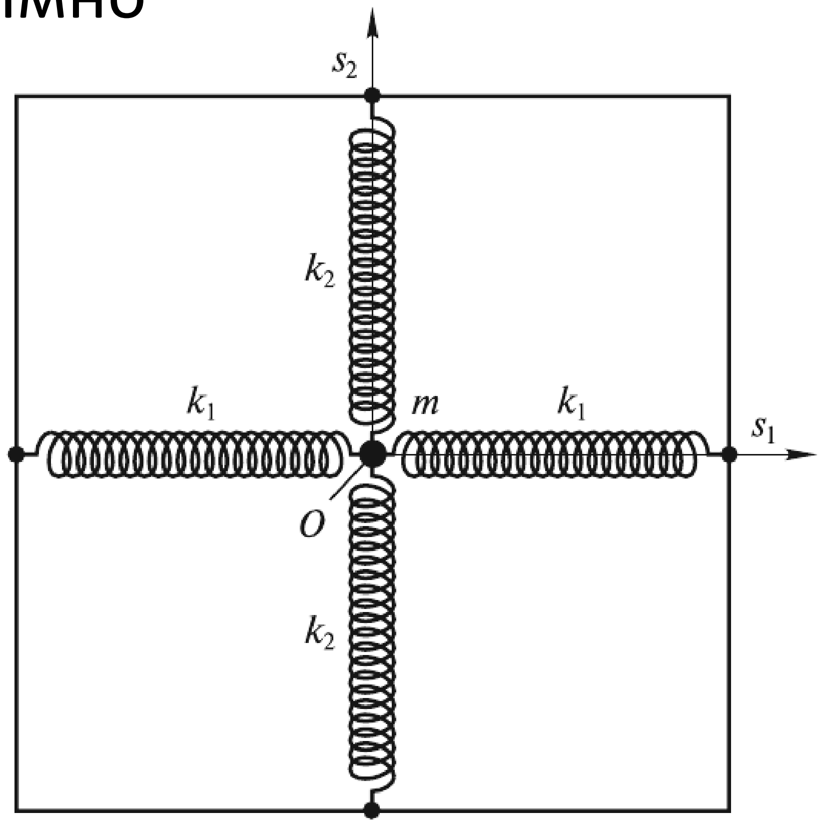
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) =$$
$$= s_{01}\sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02}\sin(\omega_0 t + \varphi_2) =$$
$$= s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \arctan\frac{s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2}{s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2}$$

$$s_0 = \sqrt{(s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2)^2 + (s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2)^2}$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

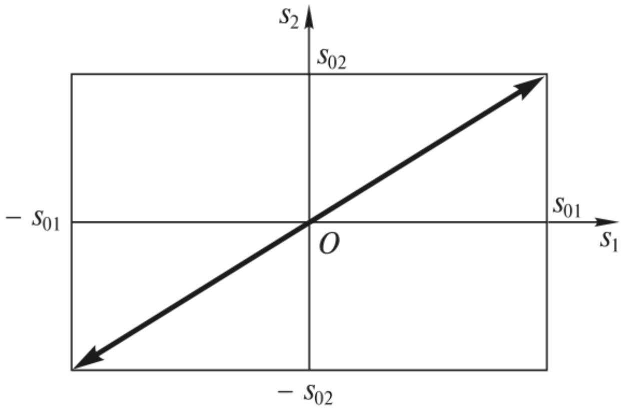
Пусть колебания маятника происходят в двух взаимно перпендикулярных направлениях.



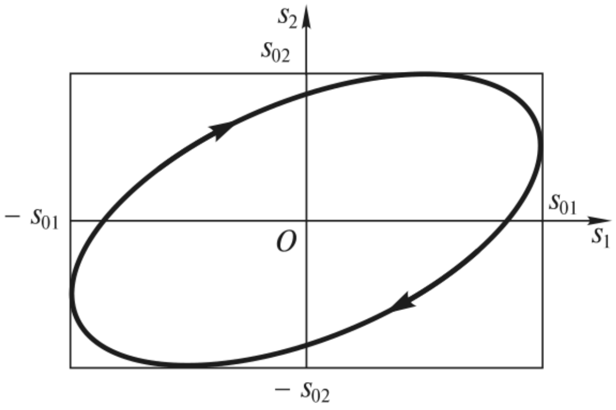
$$x_1 = x_{01}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = x_{02}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Если частоты равны, $\omega_1 = \omega_2$, то уравнение траектории тела маятника будет иметь вид эллипса:

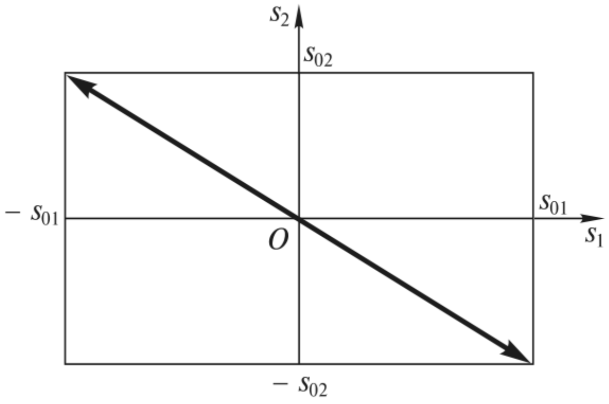
$$\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{02}}\right)^2 - 2\frac{x_1}{x_{01}}\frac{x_2}{x_{02}}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$



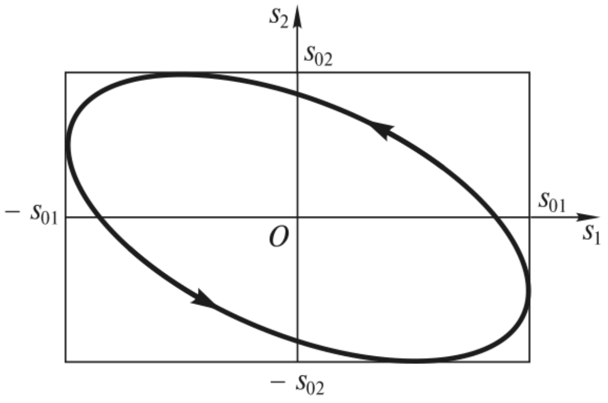
$\Delta\varphi = 0$



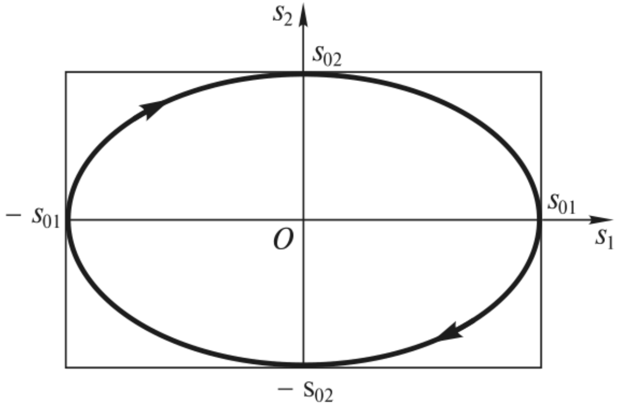
$0 < \Delta\varphi < \pi/2$



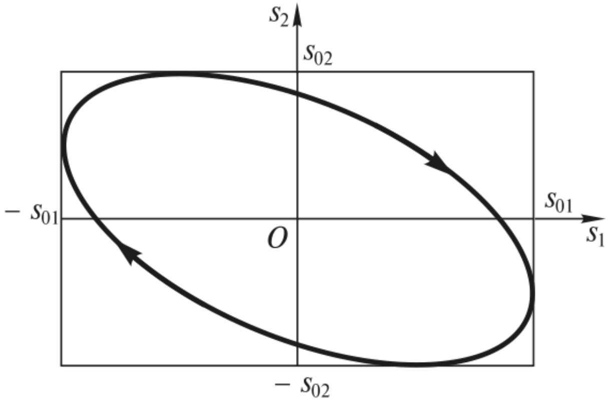
$\Delta\varphi = \pi$



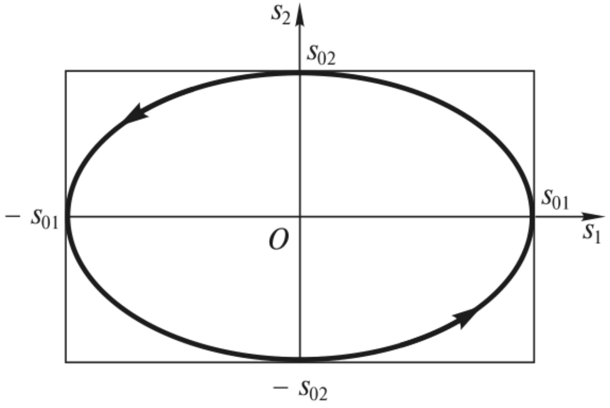
$\pi < \Delta\varphi < 3/2\ \pi$



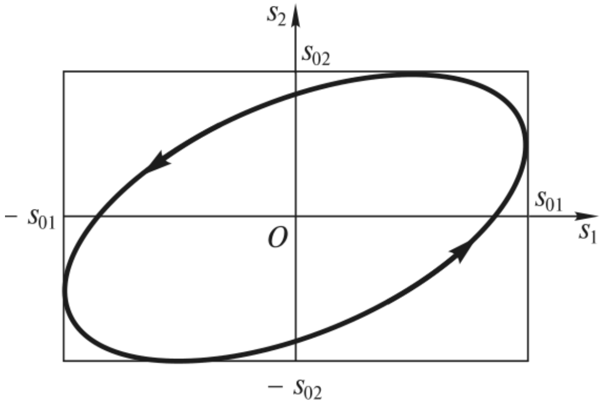
$\Delta\varphi = \pi/2$



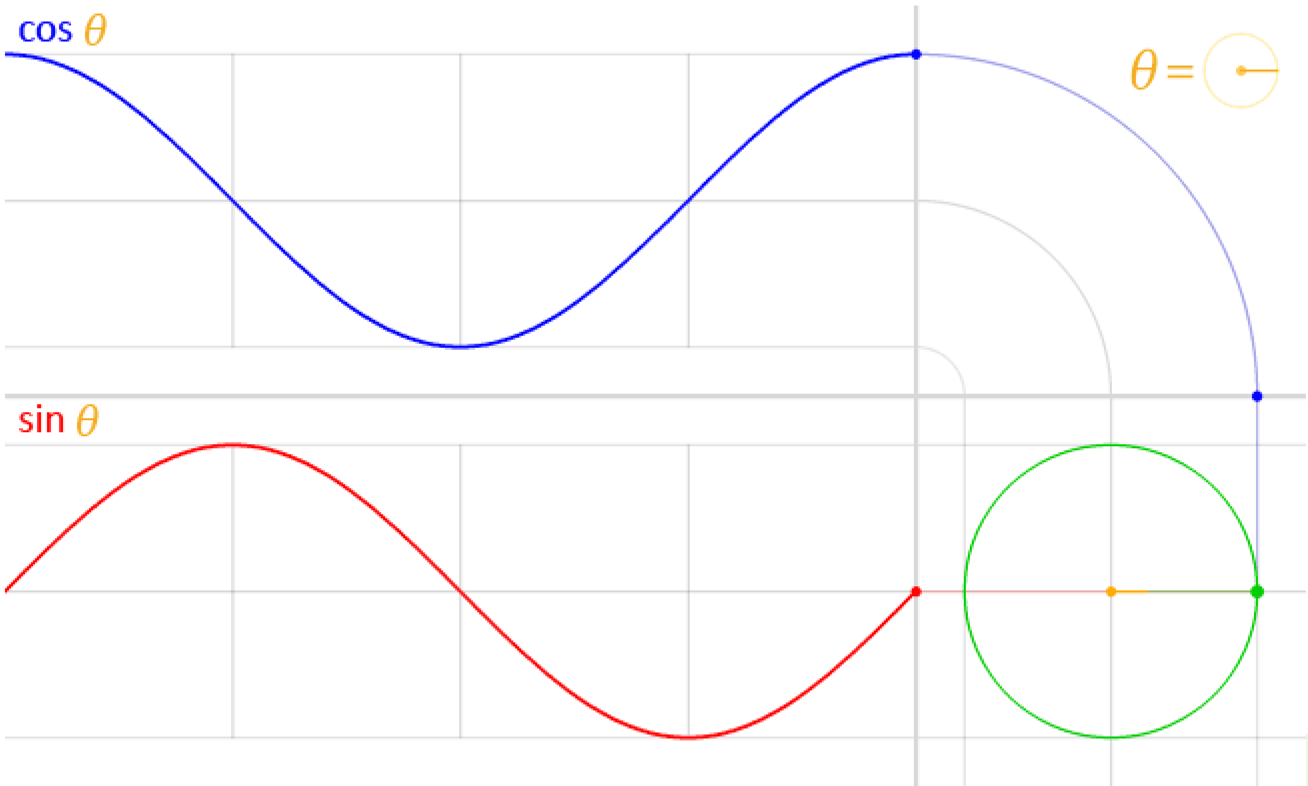
$\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$

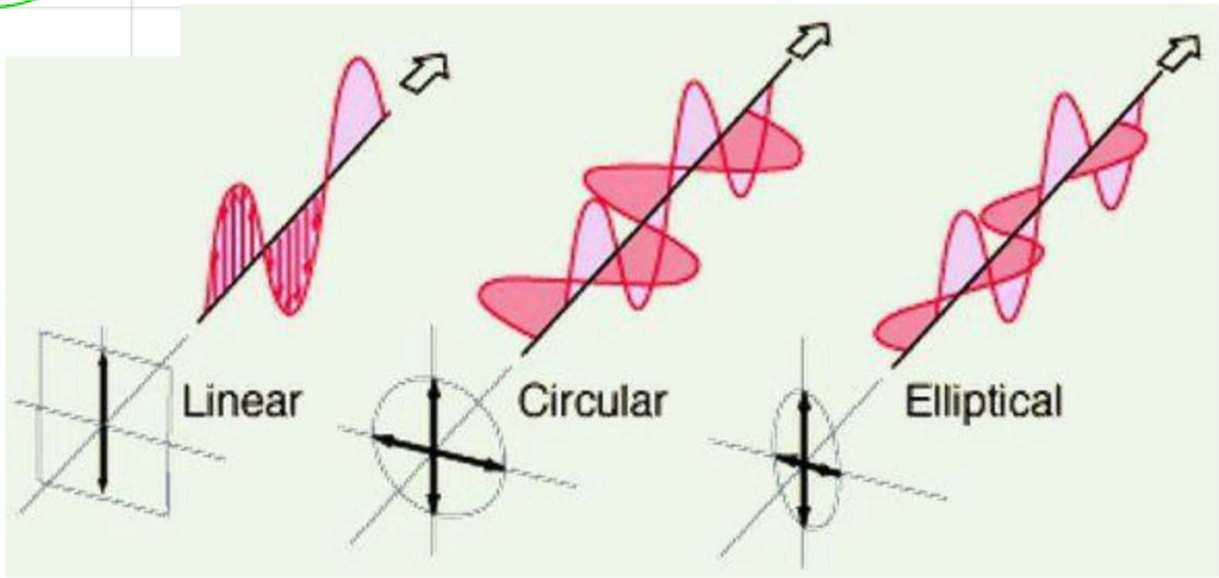


$\Delta\varphi = 3/2\ \pi$



$3/2\ \pi < \Delta\varphi < 2\pi$


cos θ
$\theta =$
sin θ

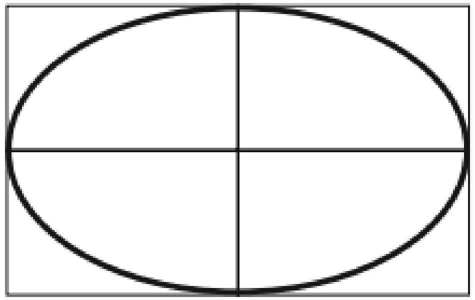

Linear
Circular
Elliptical

Фигуры Лиссажу

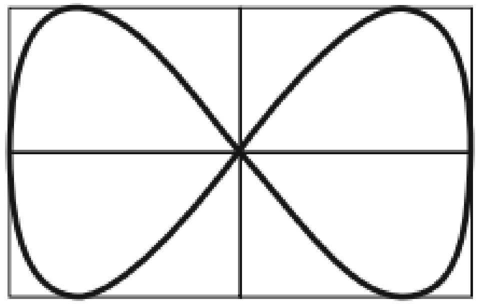
Если ω_1 и ω_2 не совпадают, но являются кратными,

$$m\omega_1 = n\omega_2$$

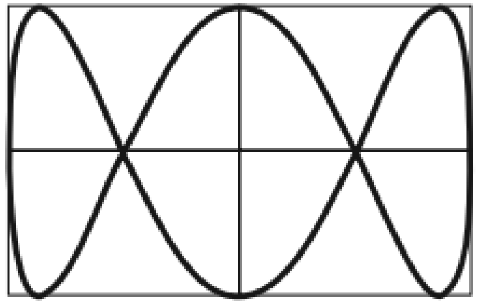
то траектории также являются замкнутыми кривыми, называемыми фигурами Лиссажу.



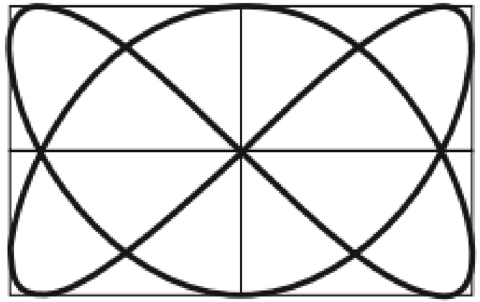
$m = 1, \; n = 1$



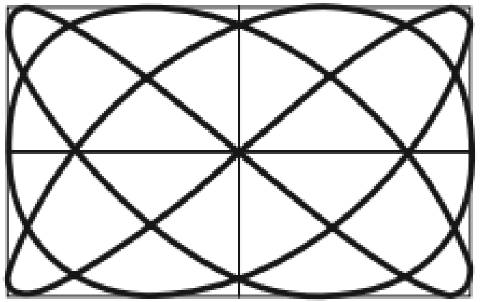
$m = 1, \; n = 2$



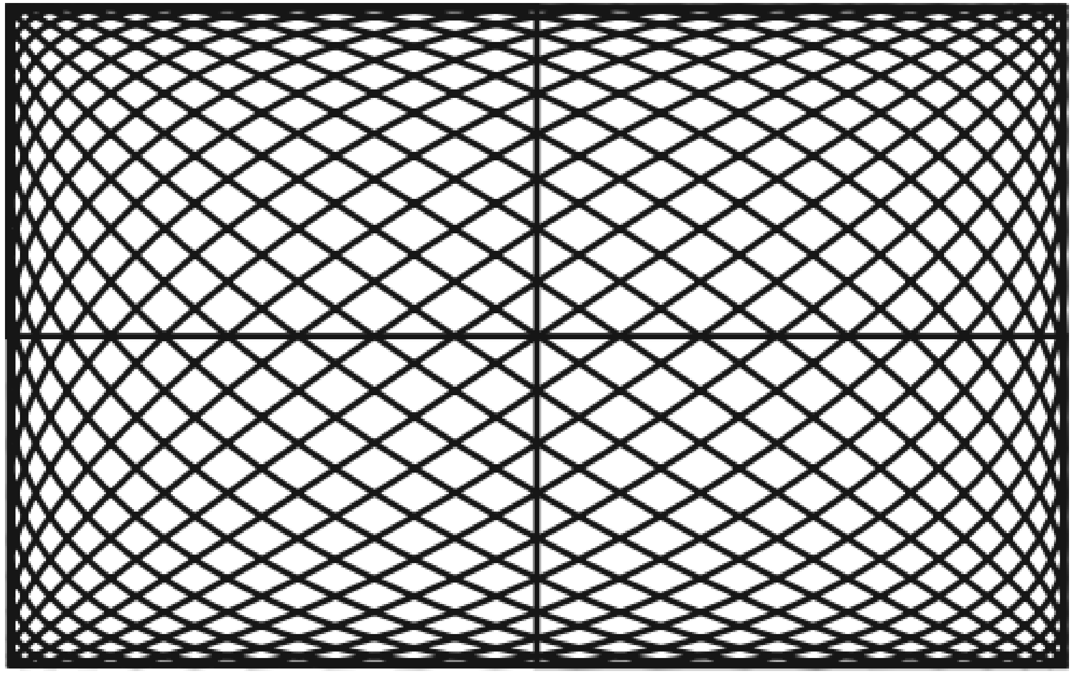
$m = 1, \; n = 3$



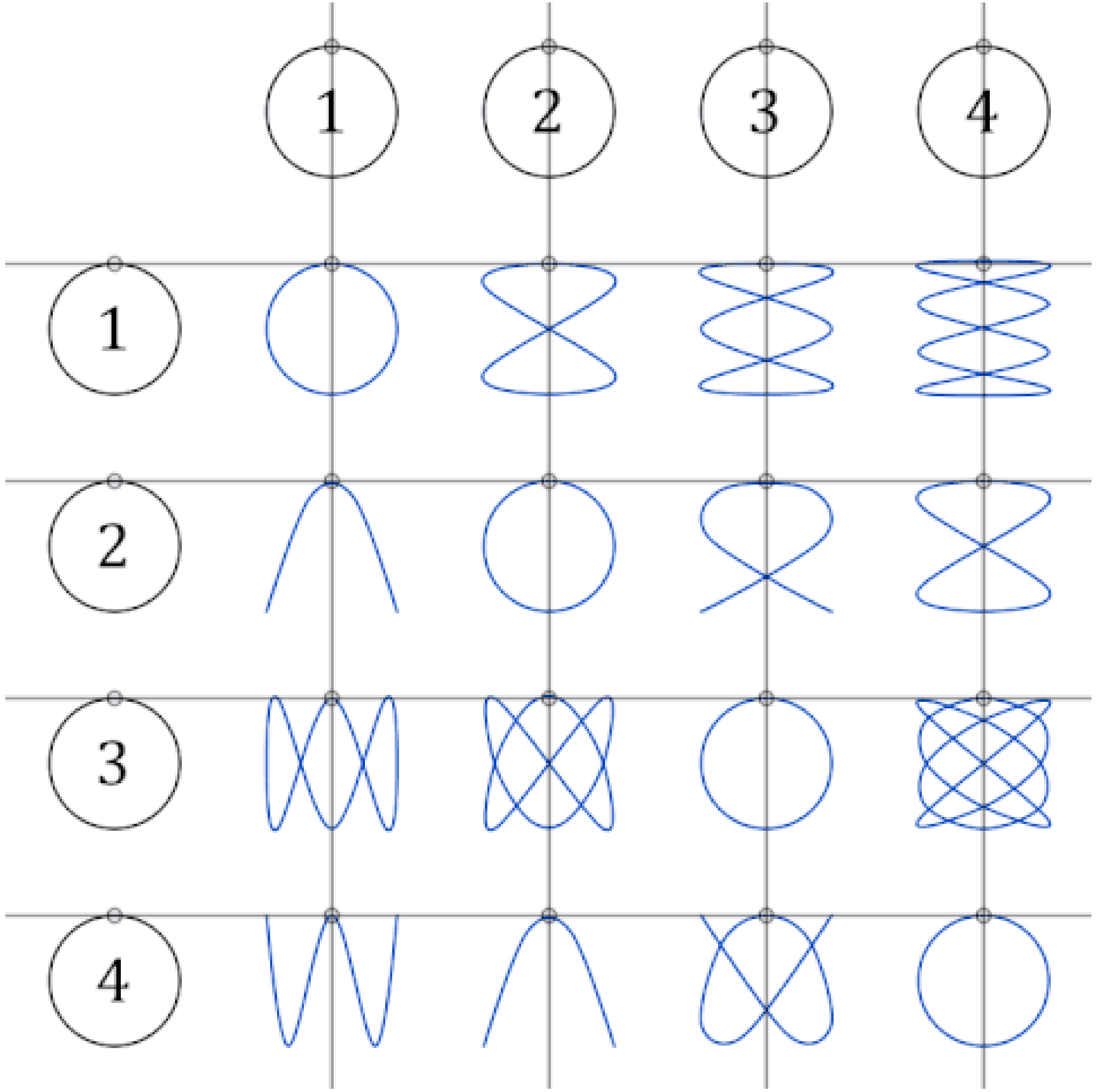
$m = 2, \; n = 3$



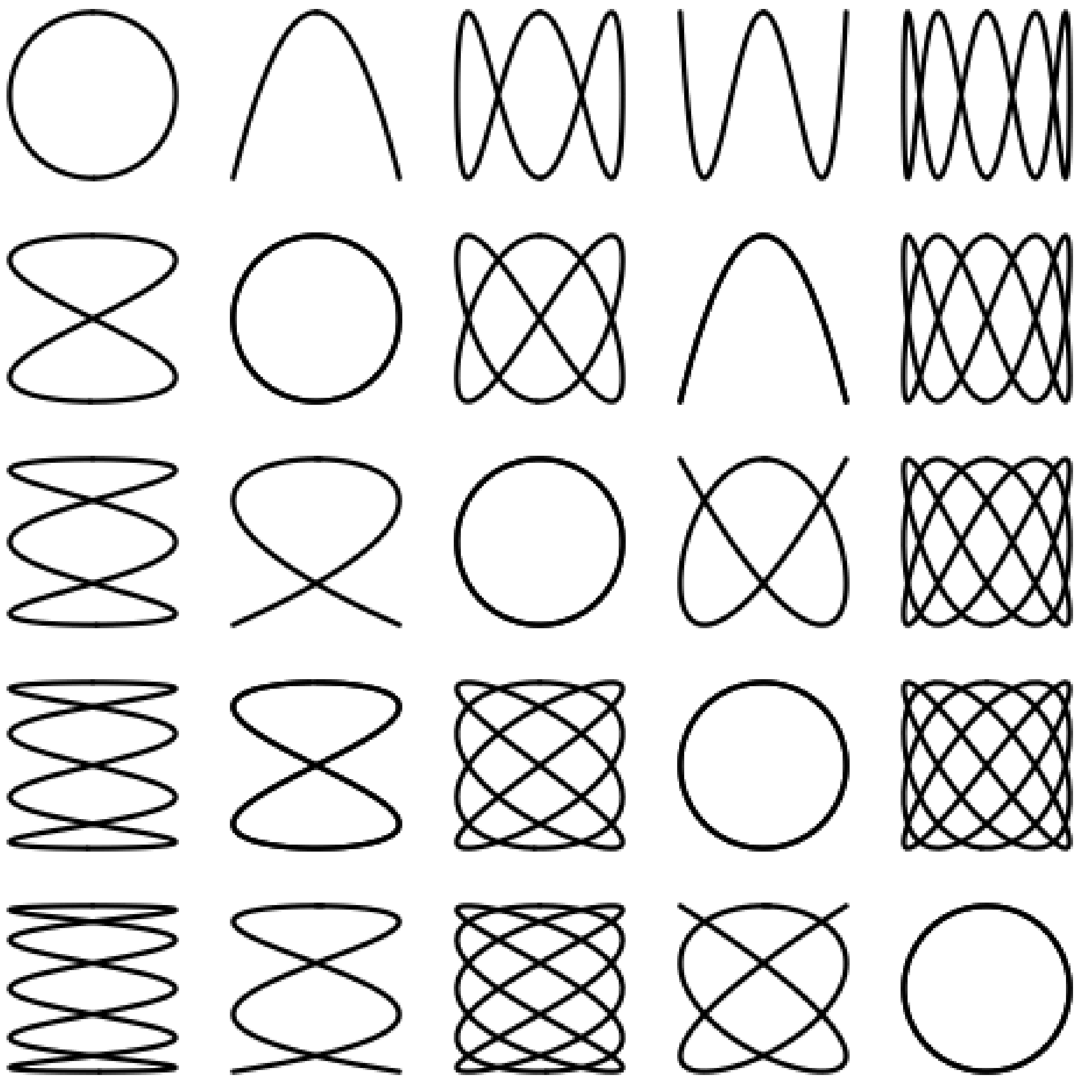
$m = 3, \; n = 4$



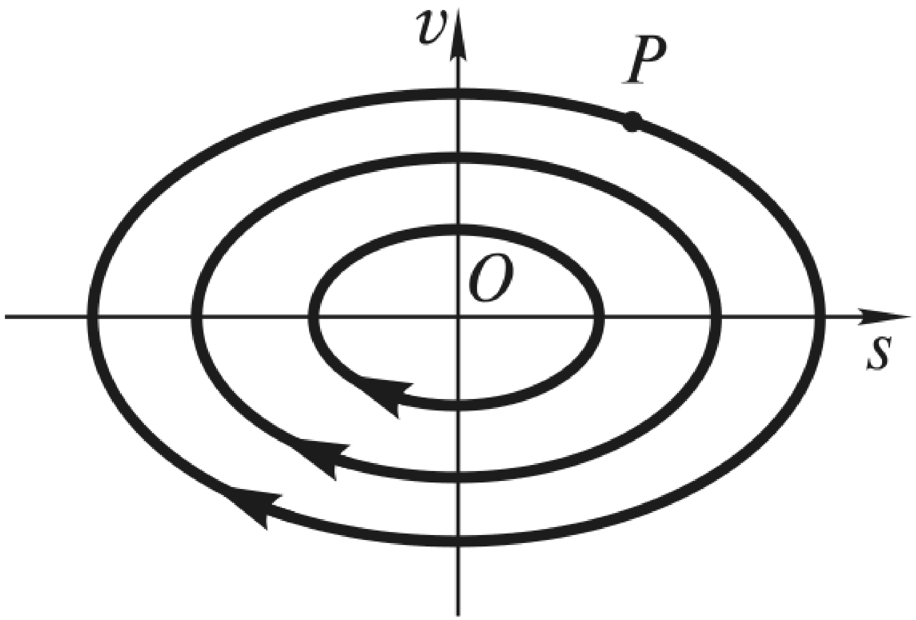
$m = 19, \; n = 20$

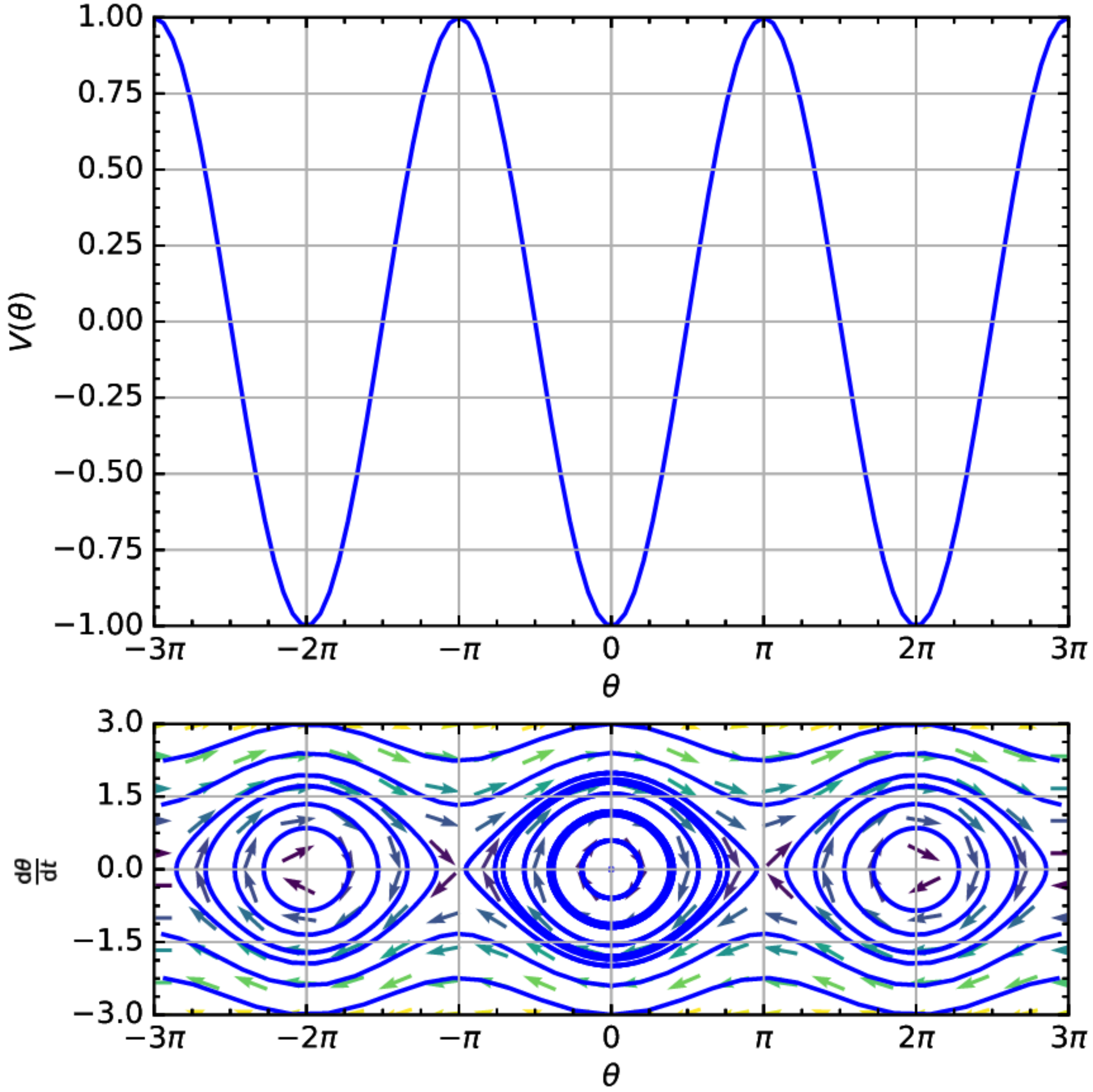

1
2
3
4
1
2
3
4

Фигуры Лиссажу при переменной фазе

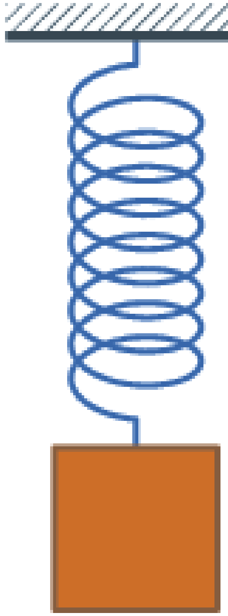


Фазовый анализ





Собственные затухающие колебания



Рассмотрим на примере пружинного маятника основные закономерности свободных колебаний при наличии силы трения.

Наиболее простое решение уравнение движение имеет в том случае, когда сила трения пропорциональна скорости. Такая ситуация реализуется для вязкого трения при малых скоростях, когда сила трения направлена против направления вектора скорости, а ее величина пропорциональна первой степени скорости.

Собственные затухающие колебания

Уравнение движения пружинного маятника при наличии силы трения имеет вид:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где η — коэффициент вязкого трения, зависящий от размеров и формы тела, свойств его поверхности и среды, в которой происходит движение.

В нормированном виде уравнение затухающих колебаний имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\delta = \dfrac{\eta}{2m}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Решение этого уравнения при $\delta < \omega_0$: $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$

Собственные затухающие колебания

При $\delta < \omega_0$:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

При $\delta = \omega_0$:

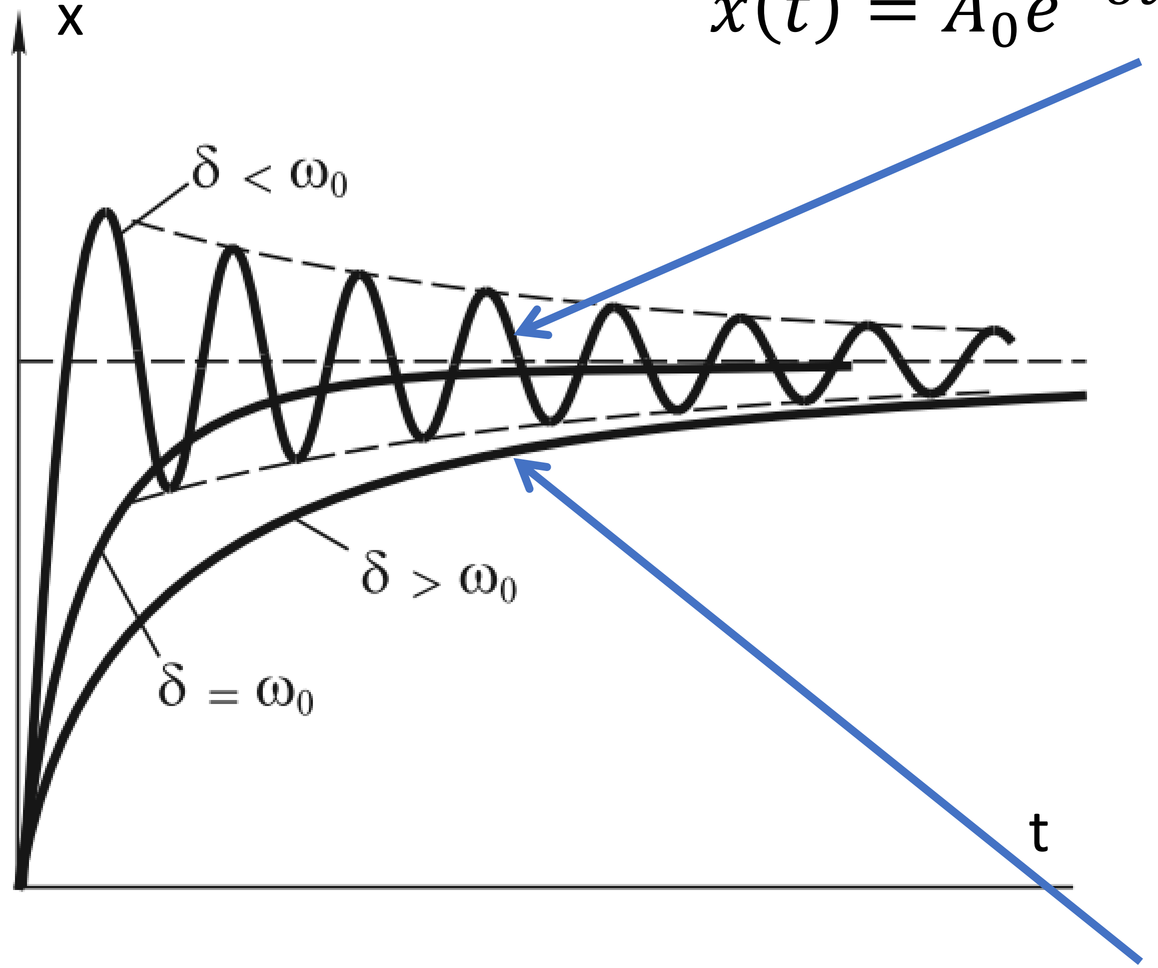
$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}$$

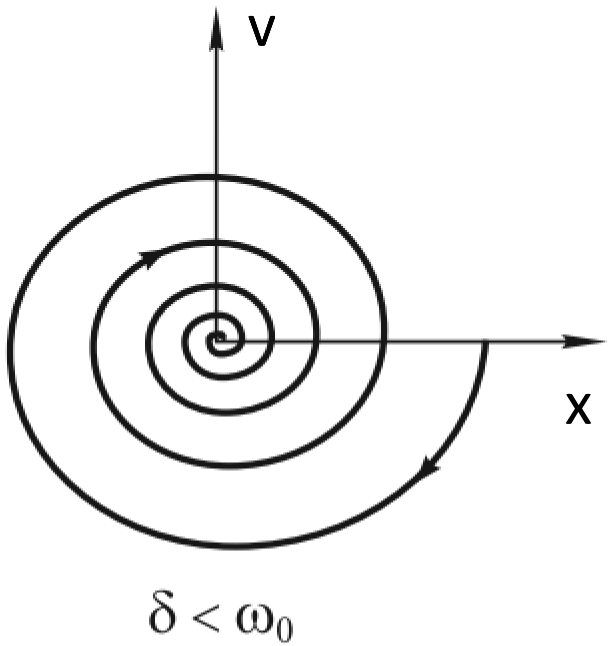
При $\delta > \omega_0$:

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

Собственные затухающие колебания

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$





Случай апериодического движения – с затуханием больше критического ($\delta > \omega_0$).

Коэффициент затухания. Время релаксации

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- δ – **коэффициент затухания**.
- τ – **время затухания** - интервал времени, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз ($e = 2.71828$).

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

- **Угловая частота** и **период** затухающих колебаний.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Добротность колебательной системы

- θ – **логарифмический декремент затухания**

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$$

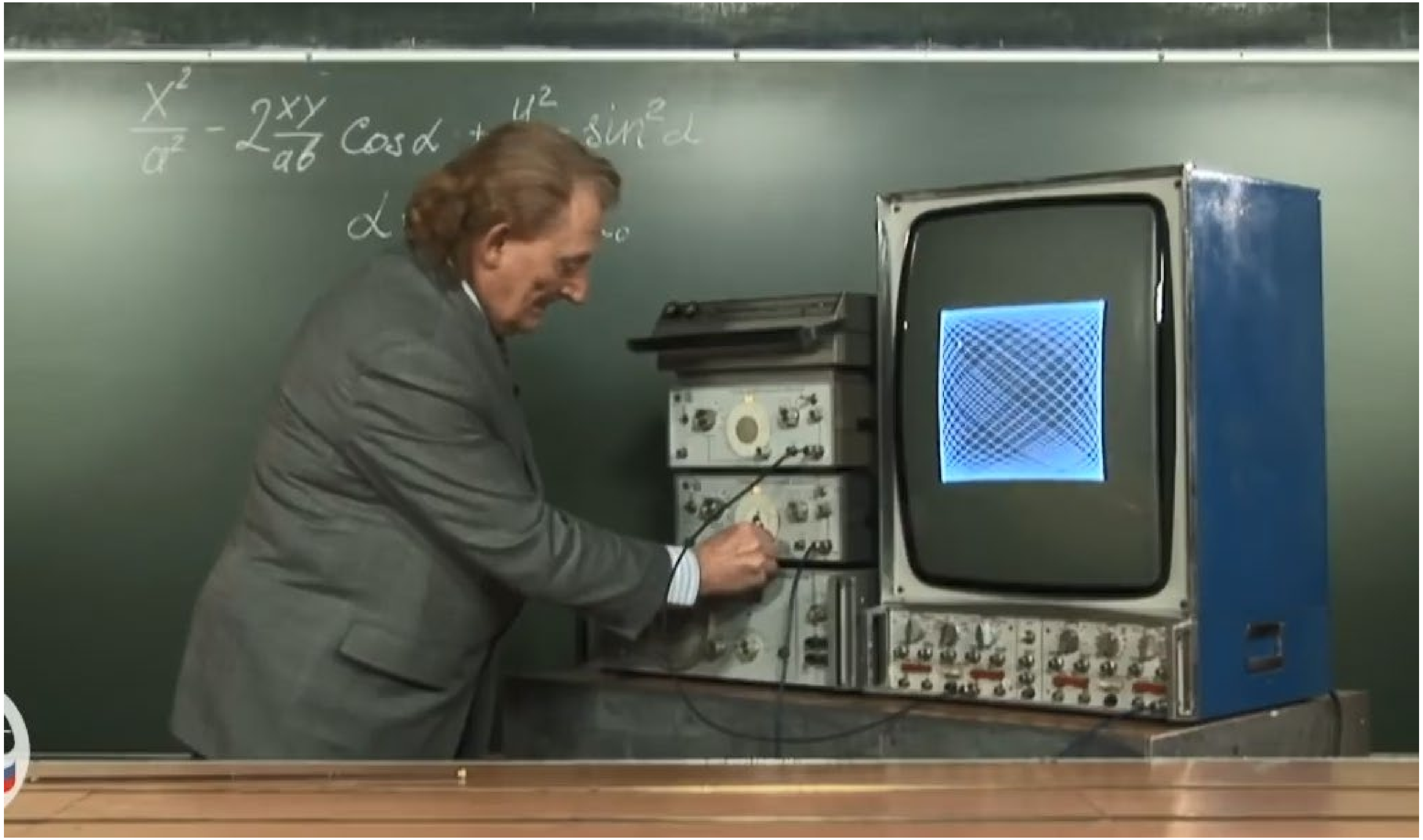
- Q – **добротность** колебательной системы

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}$$

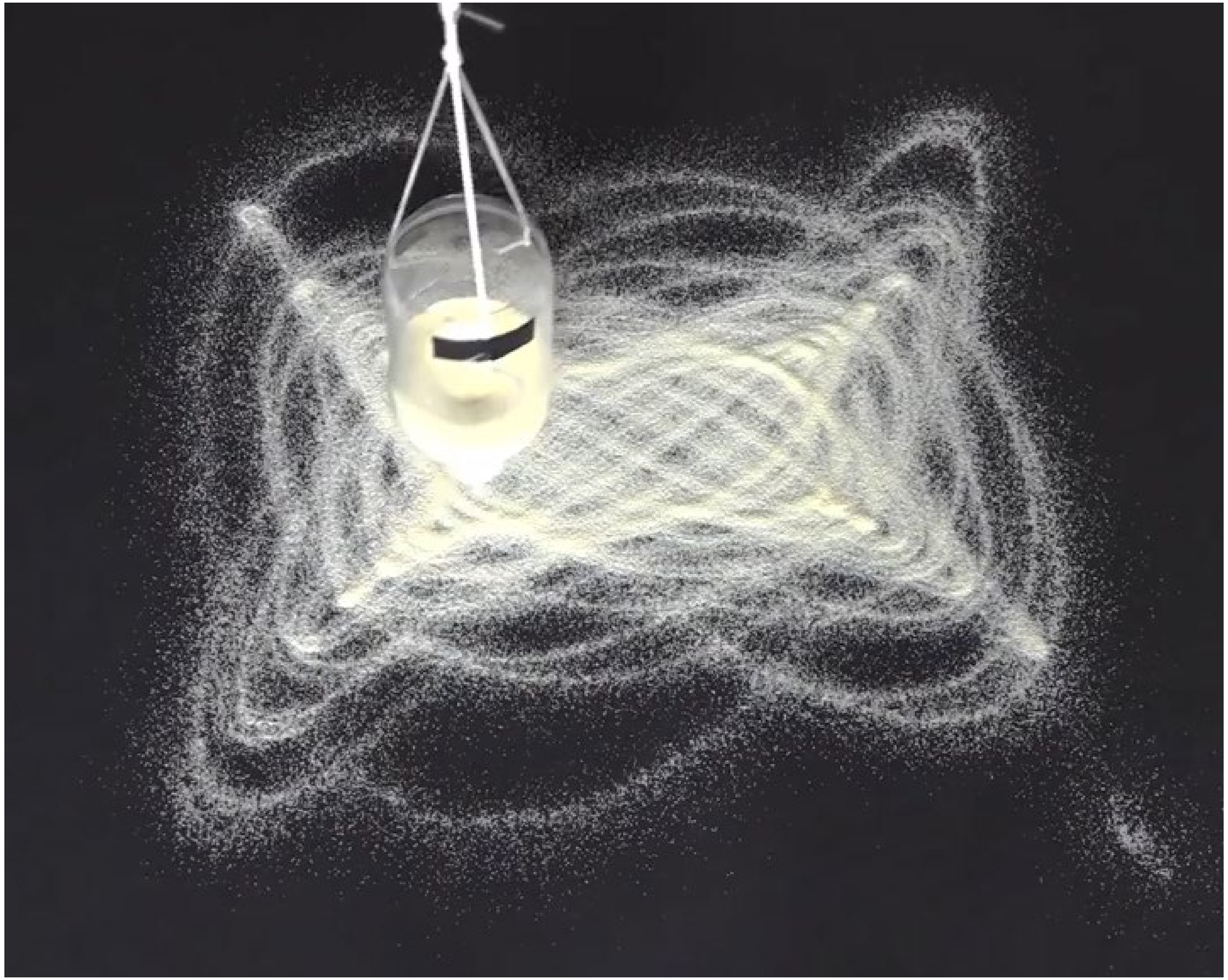
Если $\delta T = \dfrac{1}{N} \ll 1$ **, то** $Q = \dfrac{\pi}{\theta} = \pi \mathrm{N}$

Физический маятник

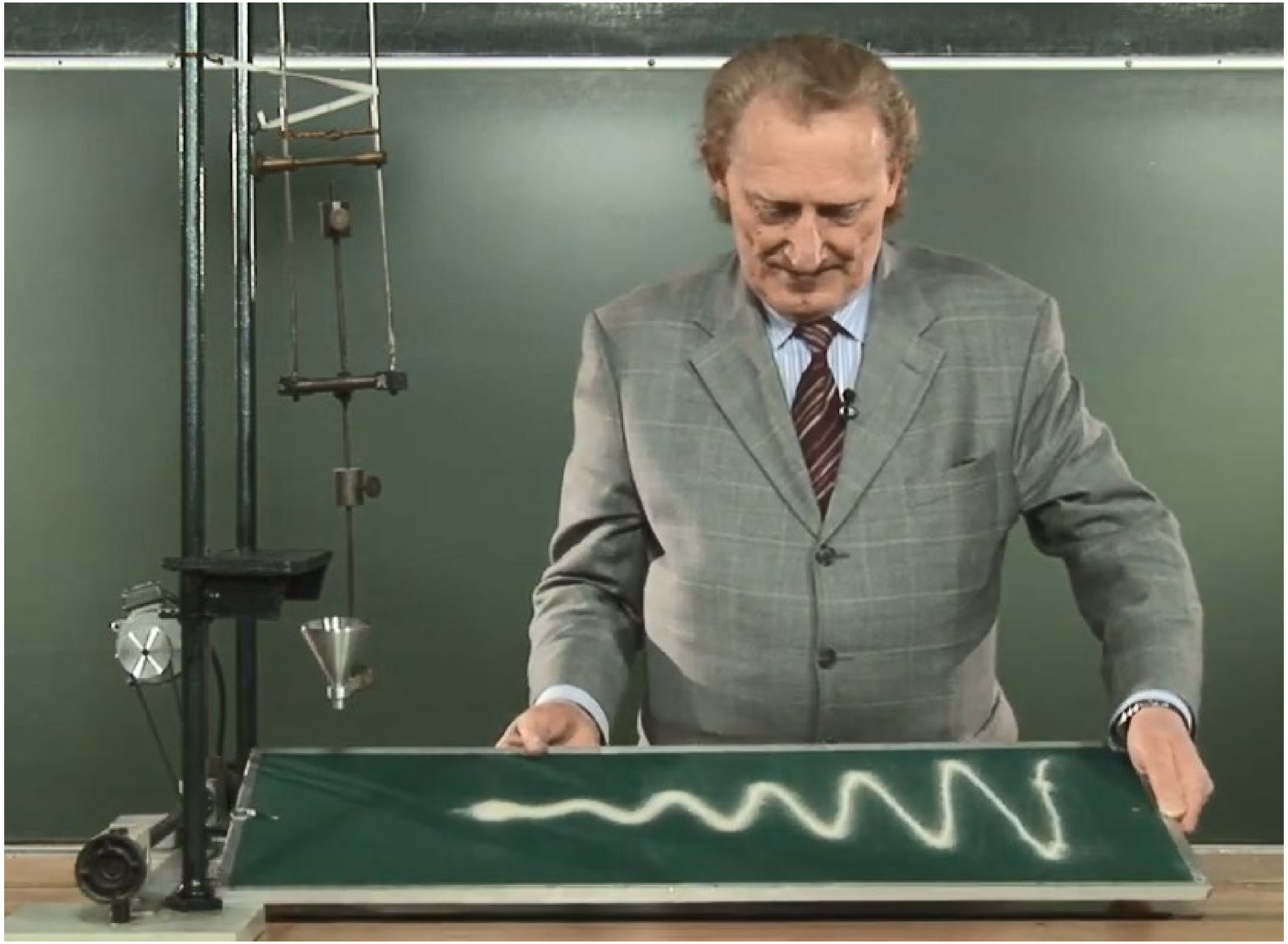
Фигуры Лиссажу на осциллографе



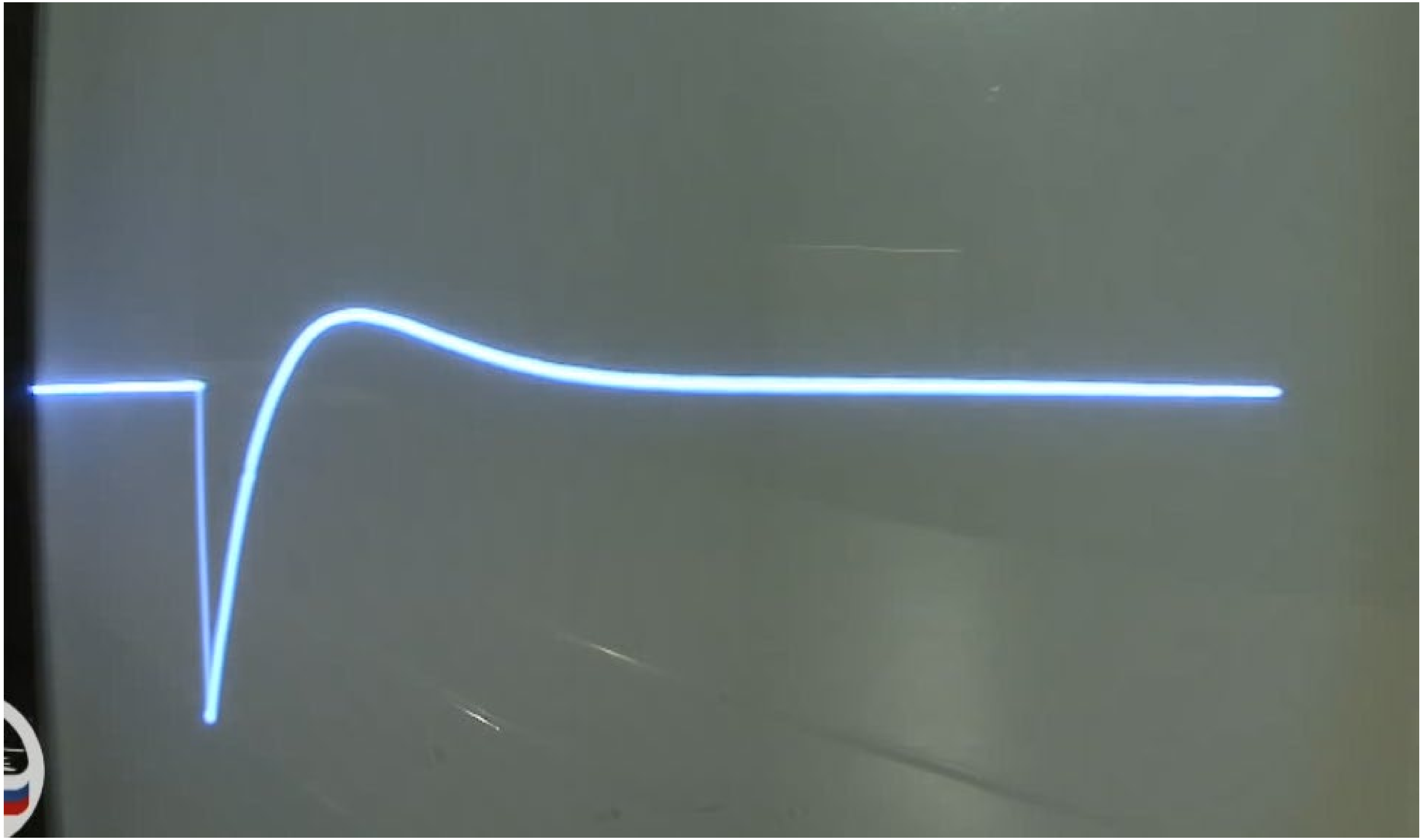
Фигуры Лиссажу песком



Затухающие колебания маятника



Затухающие колебания маятника



Фазовые кривые