

Механика

Лекция 10



План лекции

- Упругая и остаточная деформация.
- Типы деформаций.
Деформации растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба.
- Количественные характеристики деформаций. Закон Гука.
Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Модуль сдвига.
- Связь между модулем Юнга и модулем сдвига.
- Энергия упругих деформаций.

Основы механики деформируемых тел

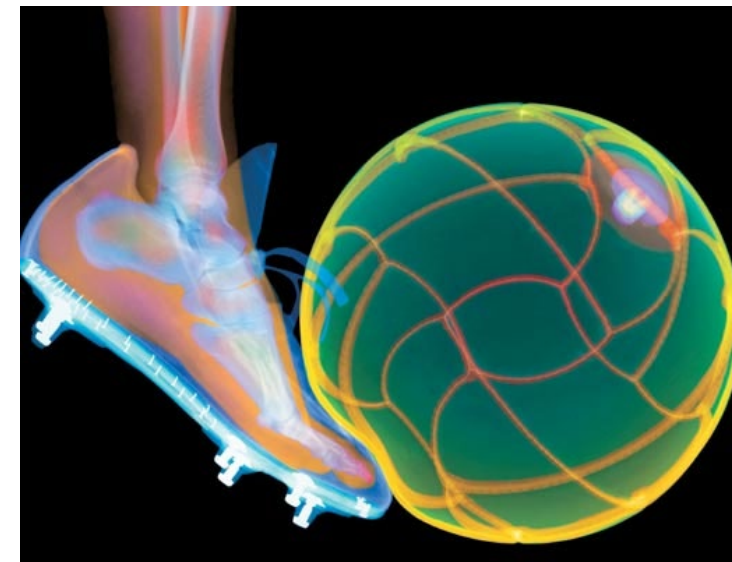
До этого мы предполагали, что под действием приложенных сил в теле возникают определенные деформации, однако они не принимались в расчет для описания движения этого тела как целого. Тело рассматривалось как абсолютно твердое.

Деформация – изменение взаимного расположения материальных точек тела, вызванное внешним воздействием, которое приводит к искажению формы и размера тела и вызывает изменение сил взаимодействия между материальными точками, т.е. появлений напряжений.

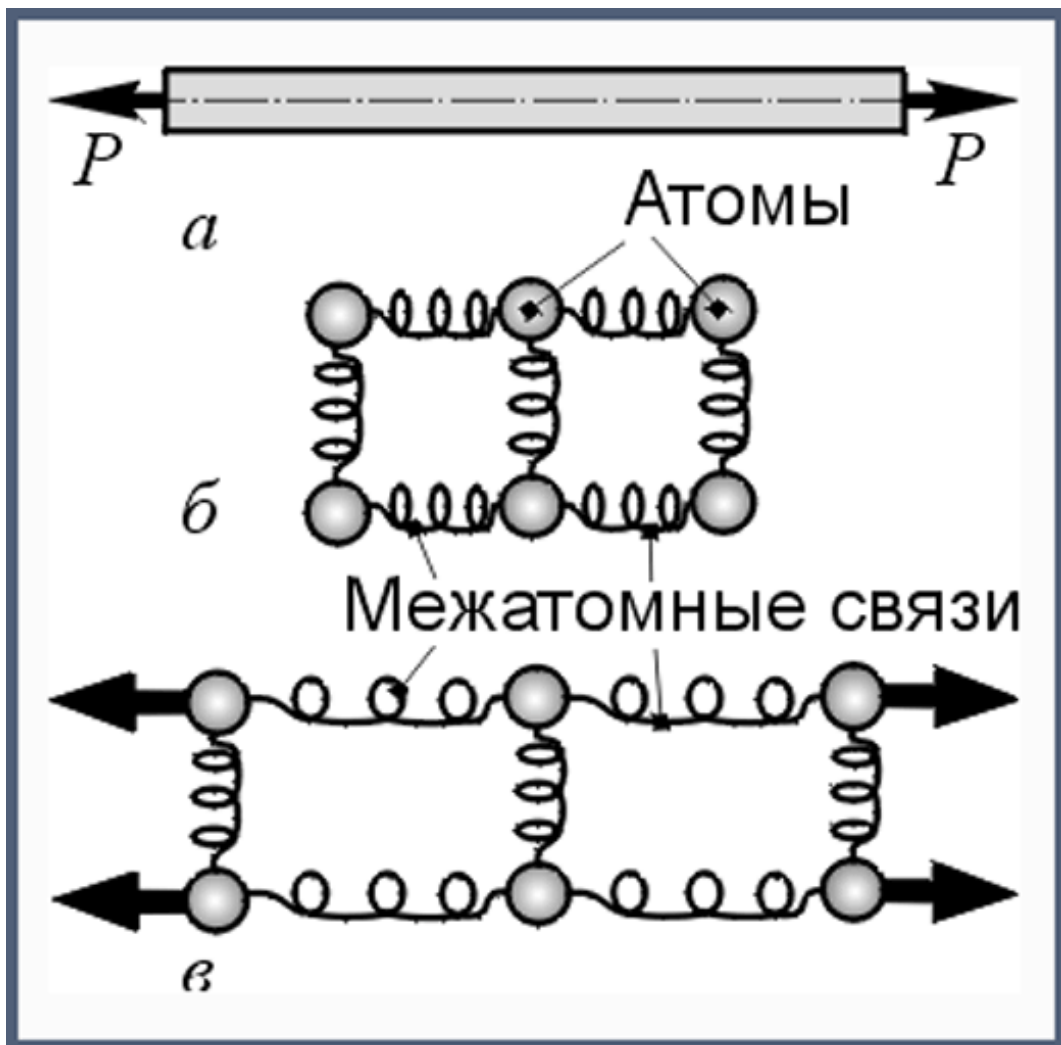
Основы механики деформируемых тел

Упругие деформации – это деформации, которые полностью исчезают после прекращения действия внешних сил.

Неупругие деформации – не исчезают после прекращения действия внешних сил.



Основы механики деформируемых тел



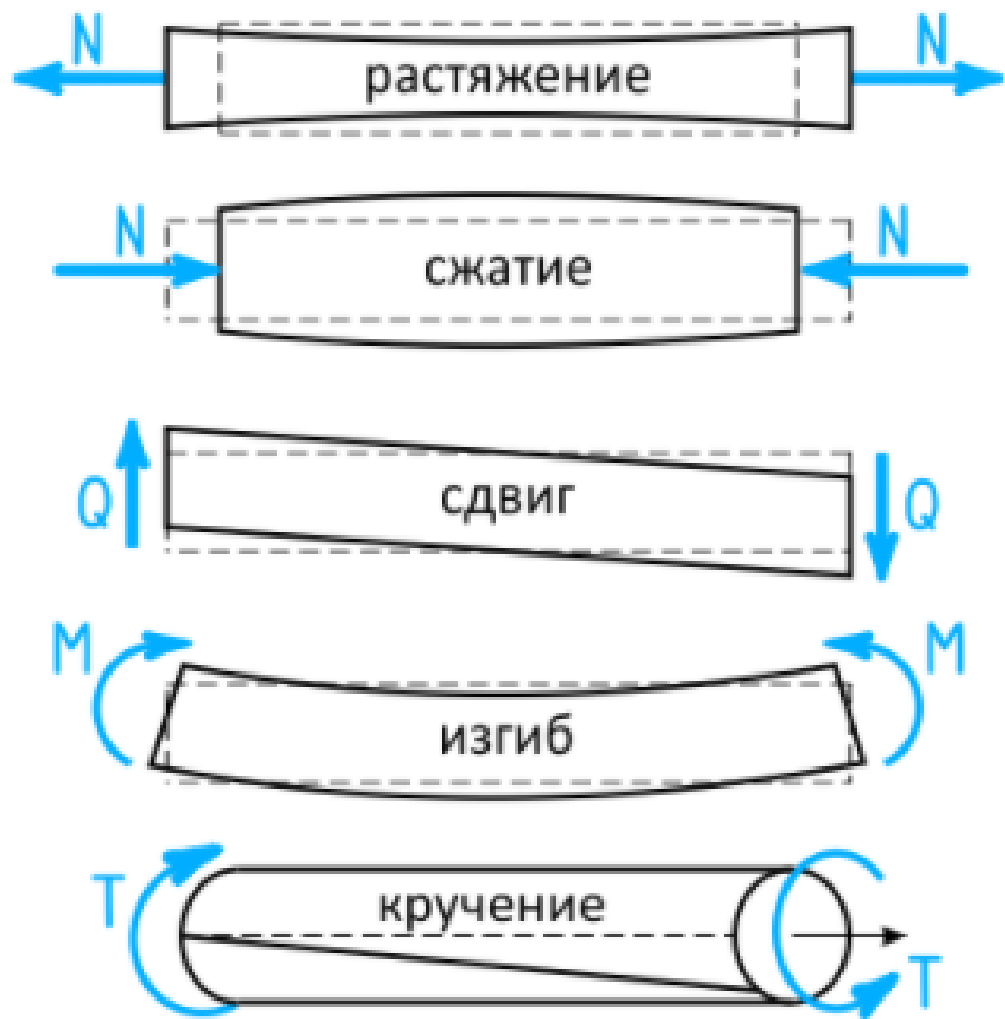
На микроскопическом уровне деформация связана с смещением атомов из которых это тело состоит. Изменение положения атомов при деформации приводят к тому, что в теле возникают внутренние силы или внутренние напряжения, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Внутренние силы взаимодействия являются короткодействующими, поэтому действуют на малый объем и приложены к ограничивающей его поверхности.

Типы деформаций

Среди многочисленного разнообразия возможных деформаций принято выделять однородное

- **растяжение (сжатие),**
- **сдвиг,**
- **кручение,**
- **изгиб.**

Эти деформации наиболее просто поддаются анализу. В общем случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Поэтому деформации **растяжение (сжатие)** и **сдвиг** принято называть **элементарными**.



Начальный образец

Сжатие

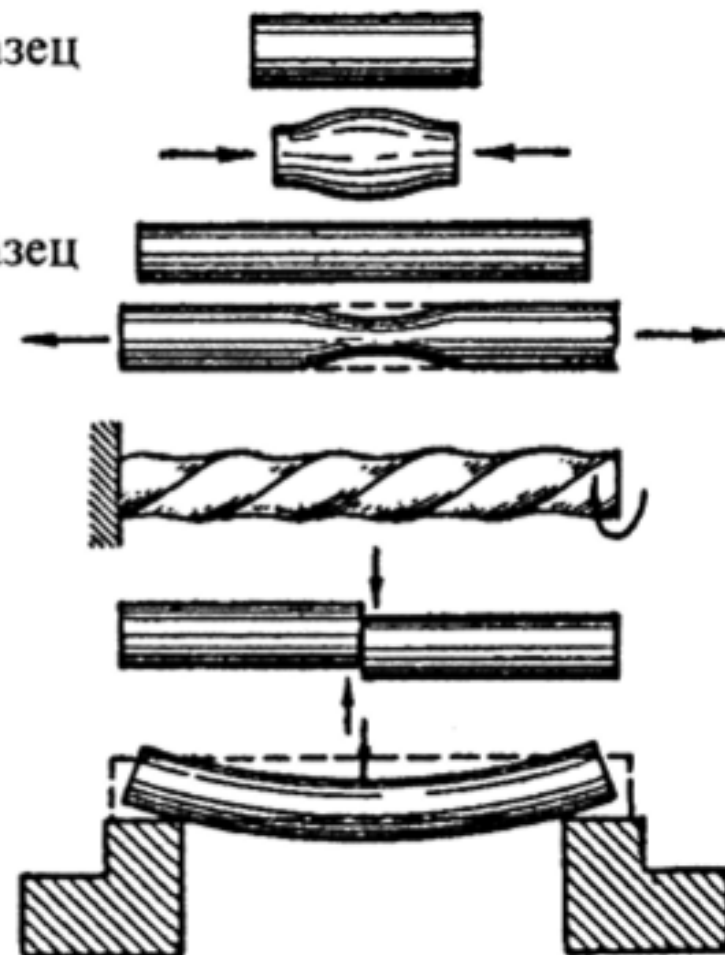
Начальный образец

Растяжение

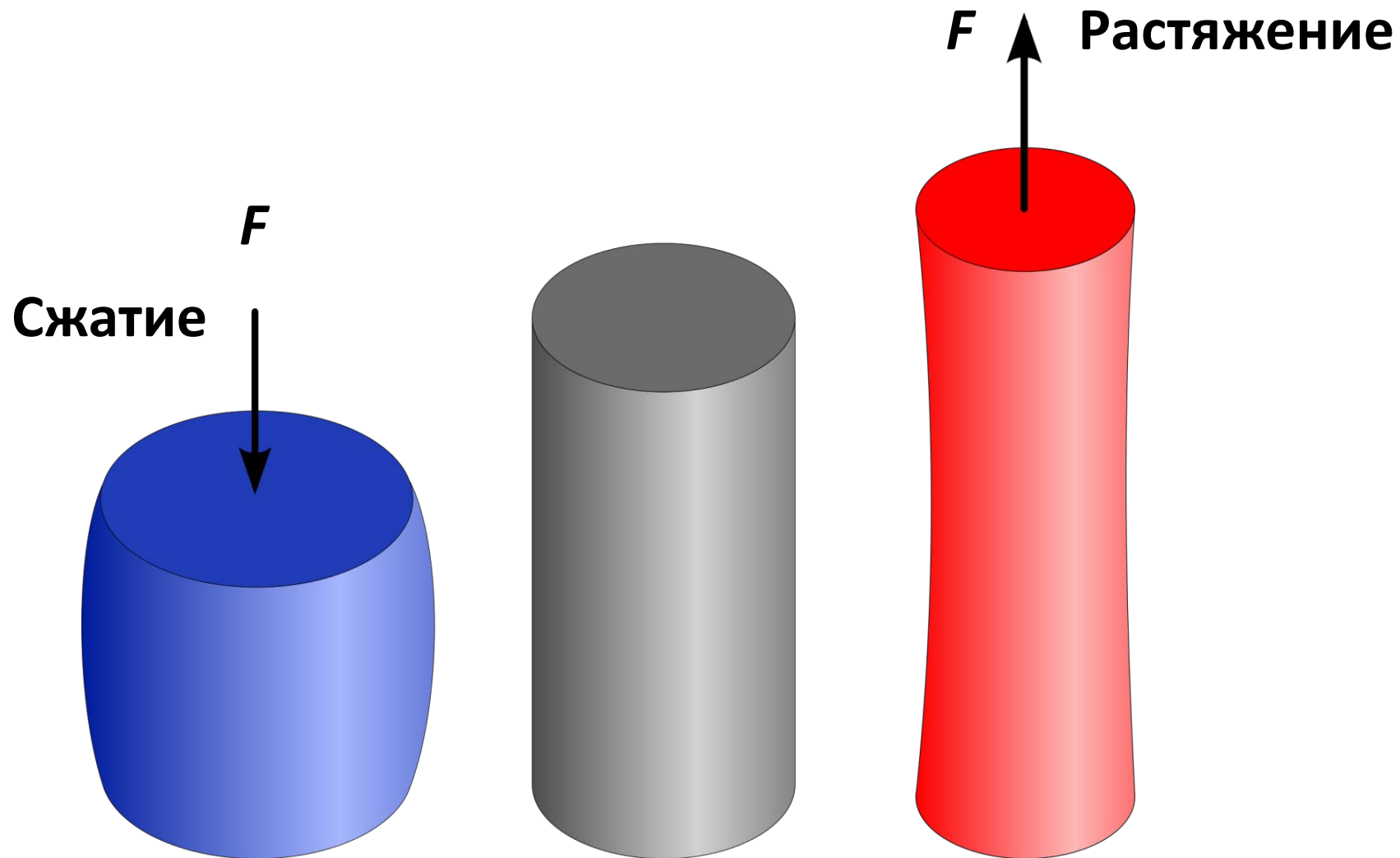
Кручение

Срез

Изгиб

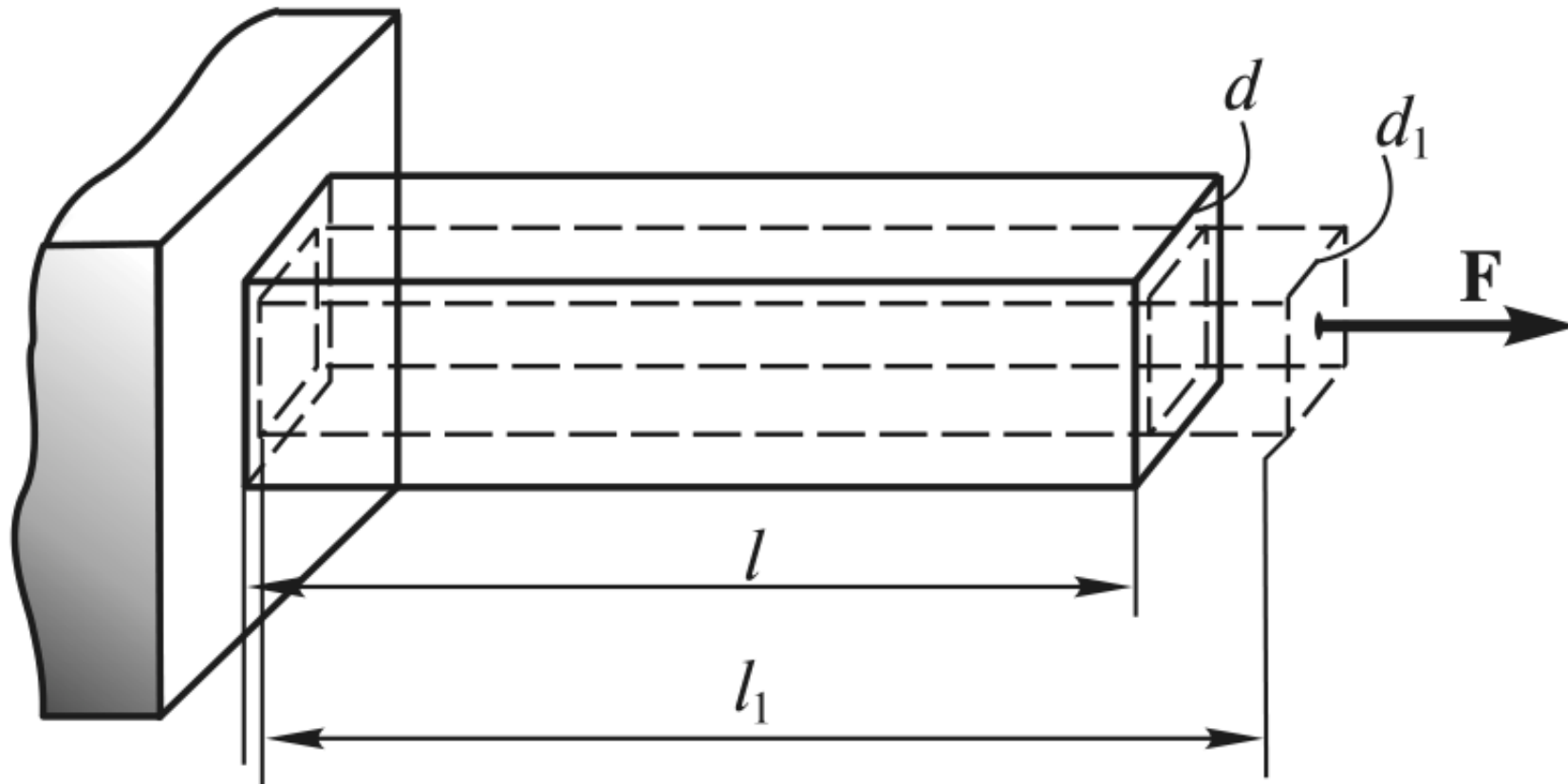


Деформация растяжение (сжатия)



Деформация растяжение (сжатия)

Закрепим один конец резинового бруска длиной l , имеющего квадратное сечение $d \times d$, и потянем за другой конец с постоянной силой \vec{F} .



Деформация растяжение (сжатия)

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

Относительное
удлинение

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}$$

Поперечное
сжатие

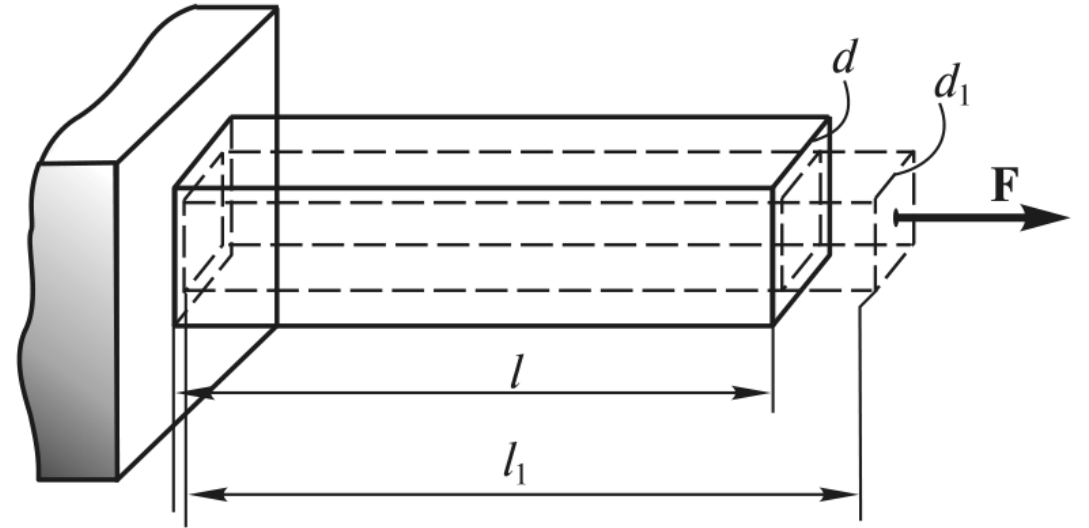
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Напряжение

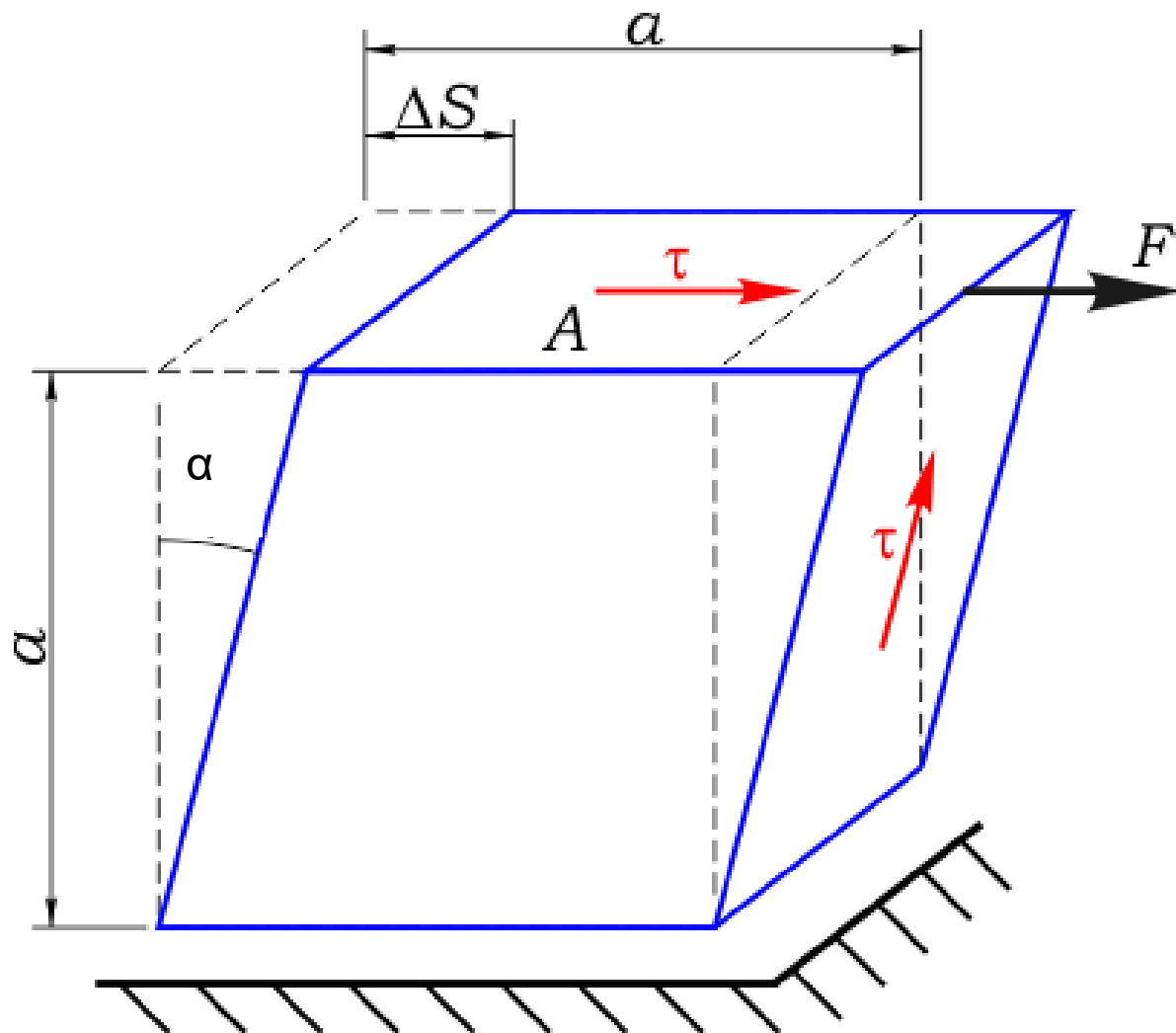
$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} > 0$$

Коэффициент
Пуассона

$$0 < \mu \leq 1/2$$



Деформация сдвига

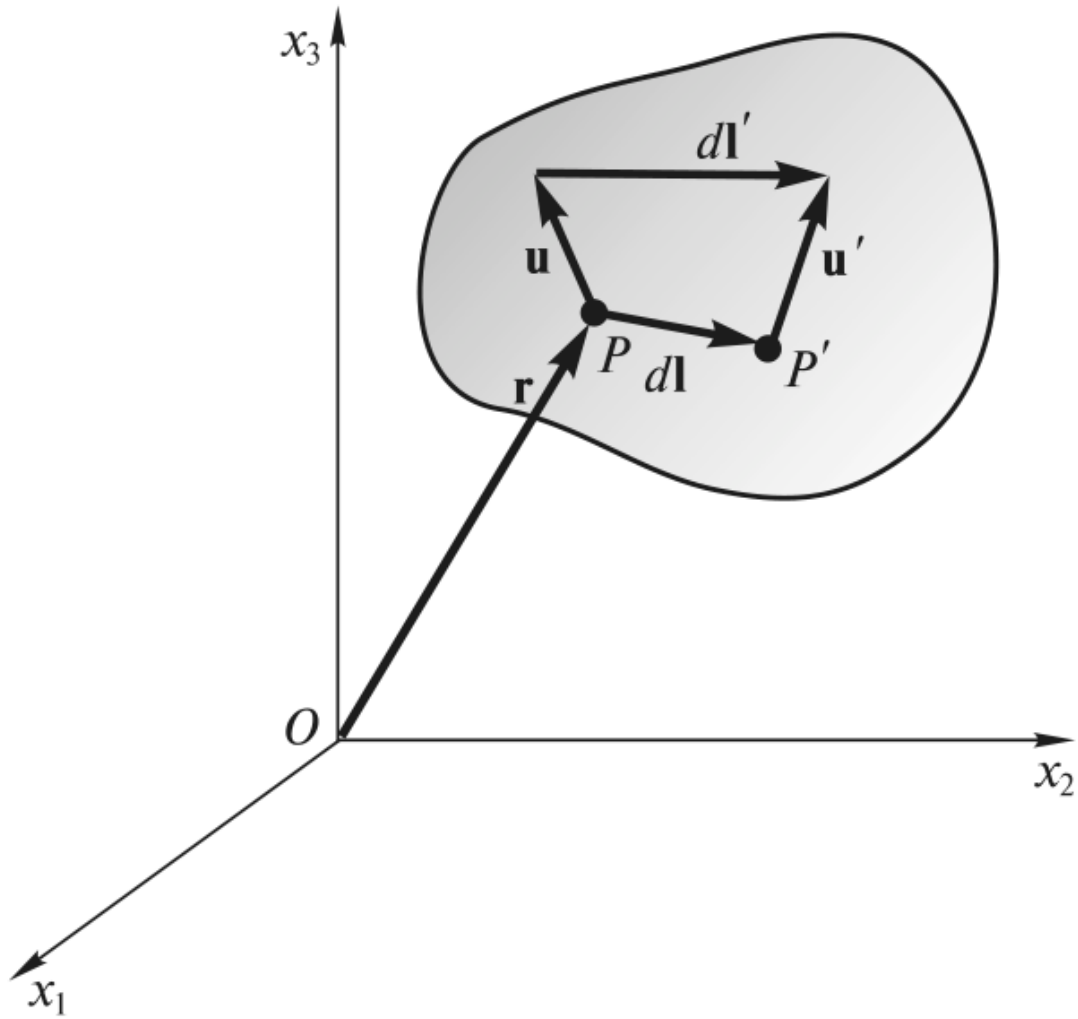


$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha$$

Относительный сдвиг

Обычно угол α мал,
поэтому $\gamma \approx \alpha$

Тензор деформаций

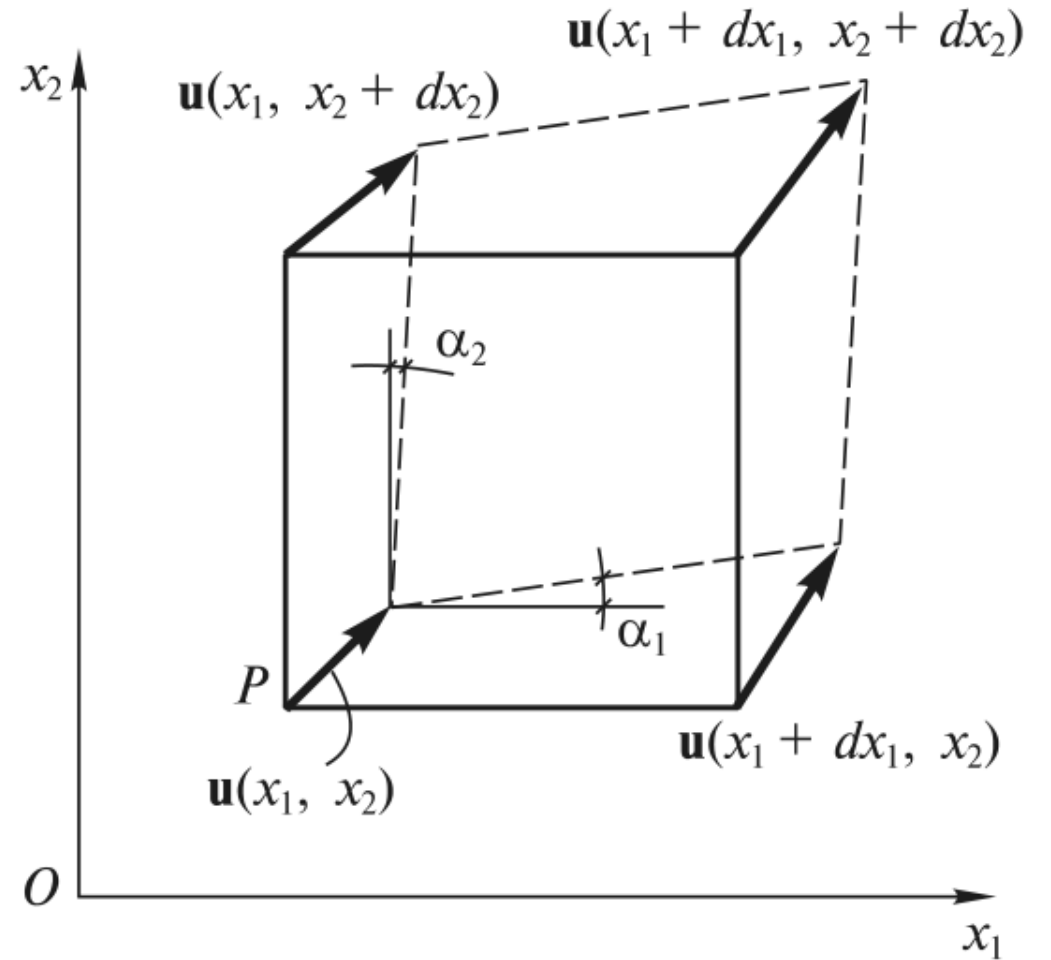
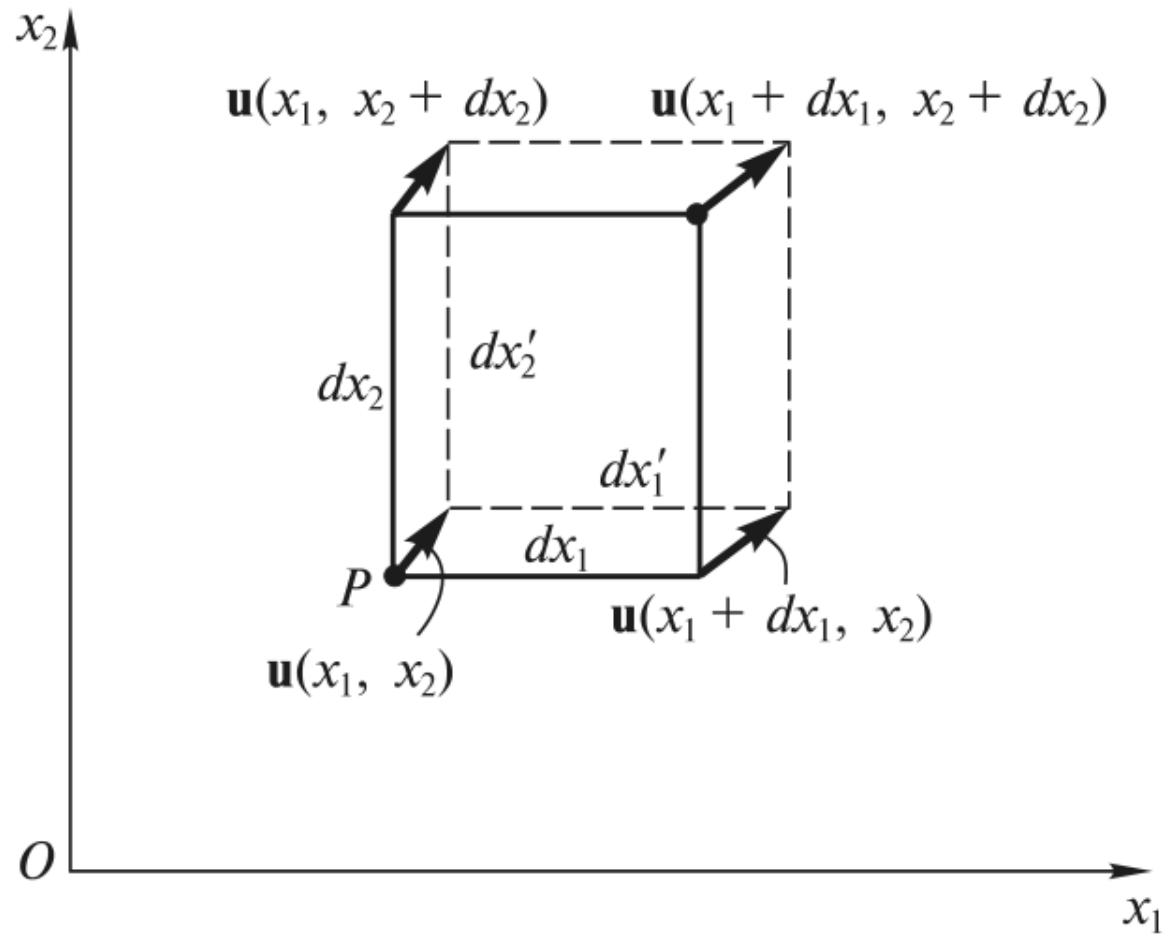


$$d\vec{l} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$d\vec{l}' = d\vec{l} + \vec{u}' - \vec{u} = d\vec{l} - d\vec{u}$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Тензор деформацій



Тензор деформаций

Выводы:

$$\text{Tr}(\hat{U}) = 0$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{21}) & \frac{1}{2}(\gamma_{13} + \gamma_{31}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{12}) & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{32}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{13}) & \frac{1}{2}(\gamma_{32} + \gamma_{23}) & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Упругие деформации

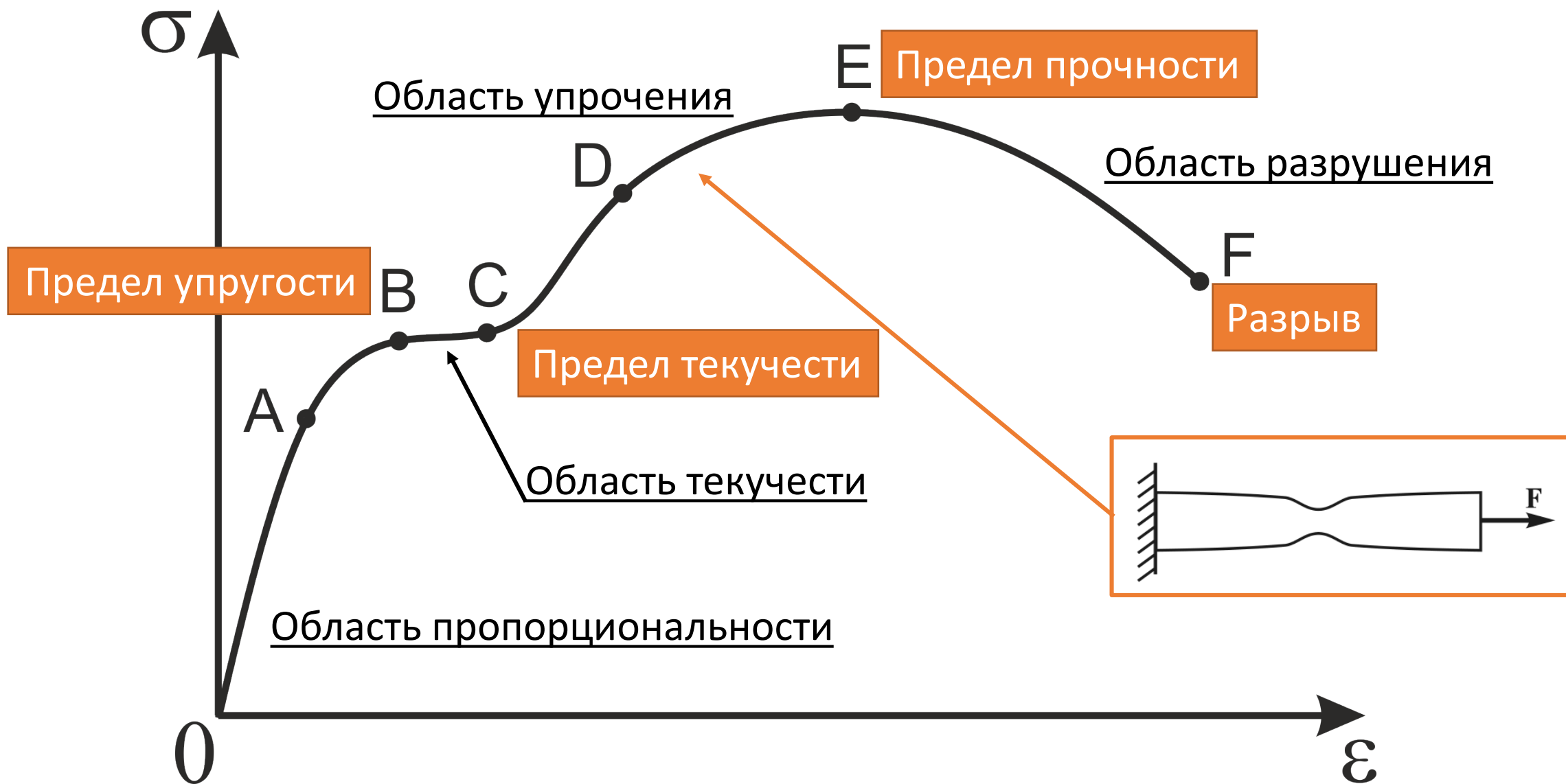
$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \chi \frac{F}{S} = \chi \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = E \varepsilon$$

Закон Гука

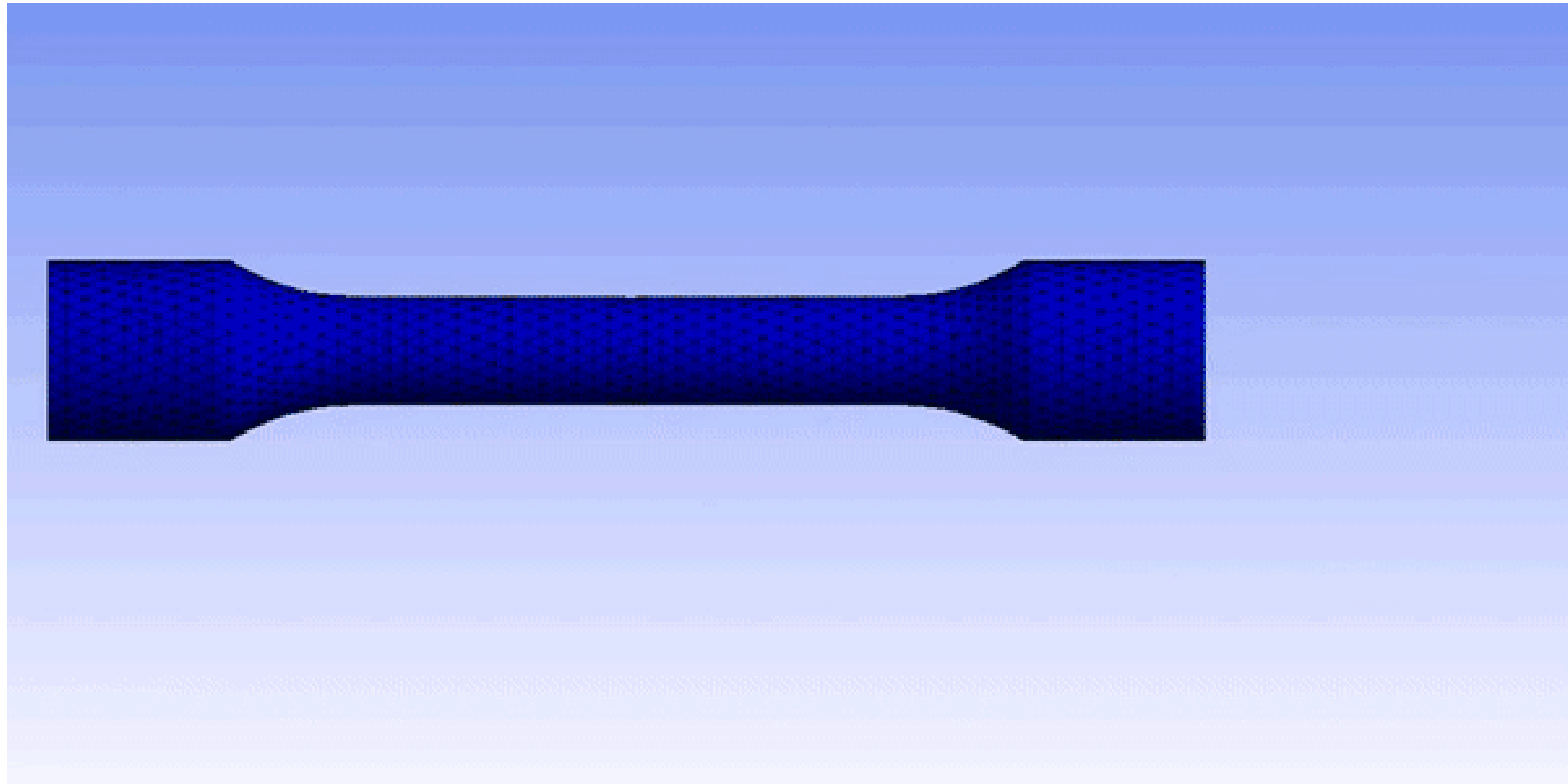
E – модуль Юнга [Па]

Материал	Модуль упругости E , ГПа	Модуль сдвига G , ГПа	Предел текучести σ_T , ГПа	Предел прочности при растяжении σ_M , ГПа
Сталь углеродистая обыкновенная	200 – 210	77 – 81	0,19 – 0,31	0,32 – 0,71
Сталь высокопрочная закаленная	200 – 210	77 – 81	1,2 – 1,95	1,5 – 2,0
Медь	110 – 130	41,5 – 44,0	0,07	0,22
Алюминий	69 – 72	25,0 – 26,5	0,022	0,05
Свинец	14 – 18	5,5 – 8,0	0,005	0,014 – 0,018

Упругие деформации

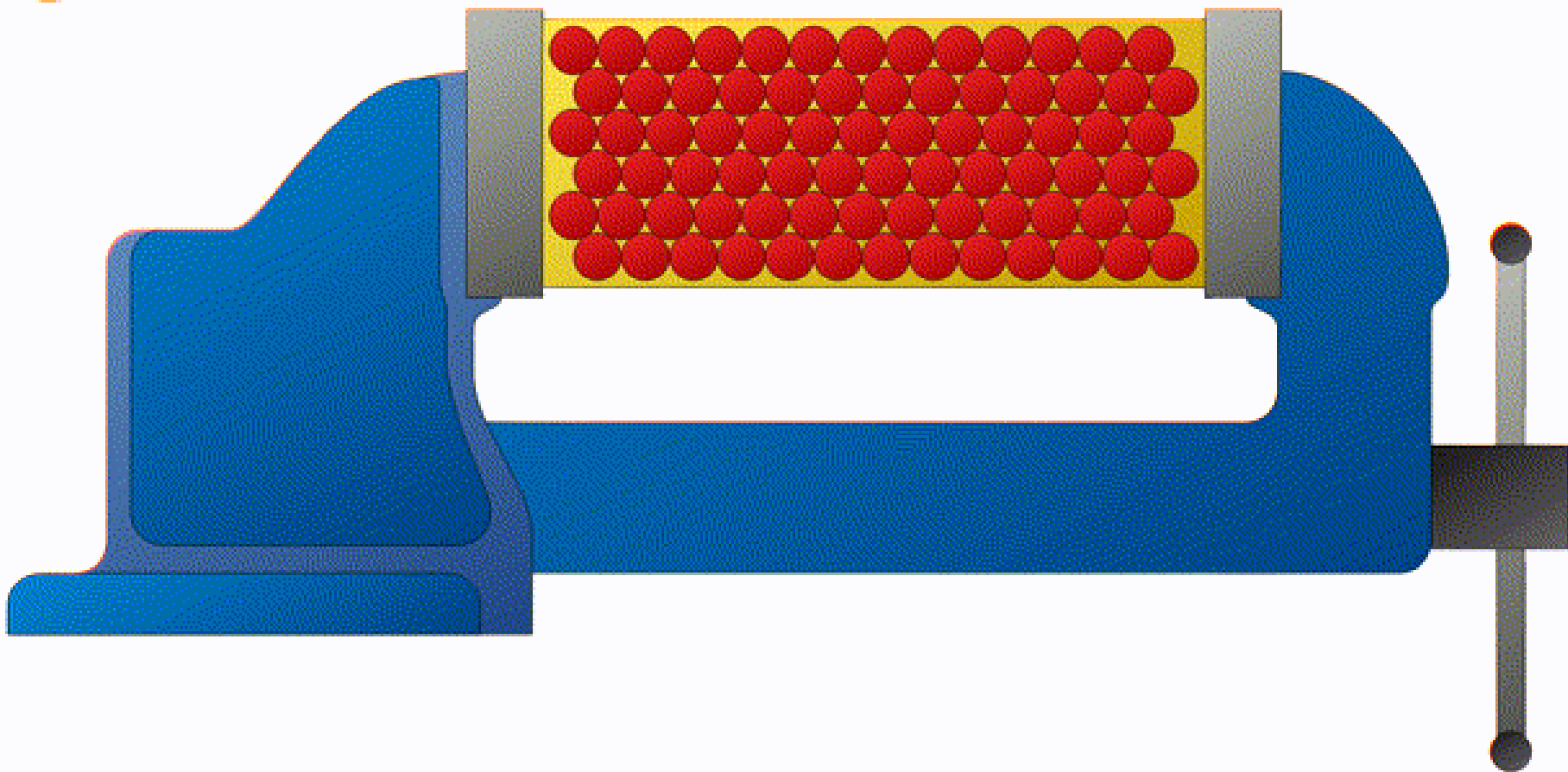


Образование шейки и разрыв



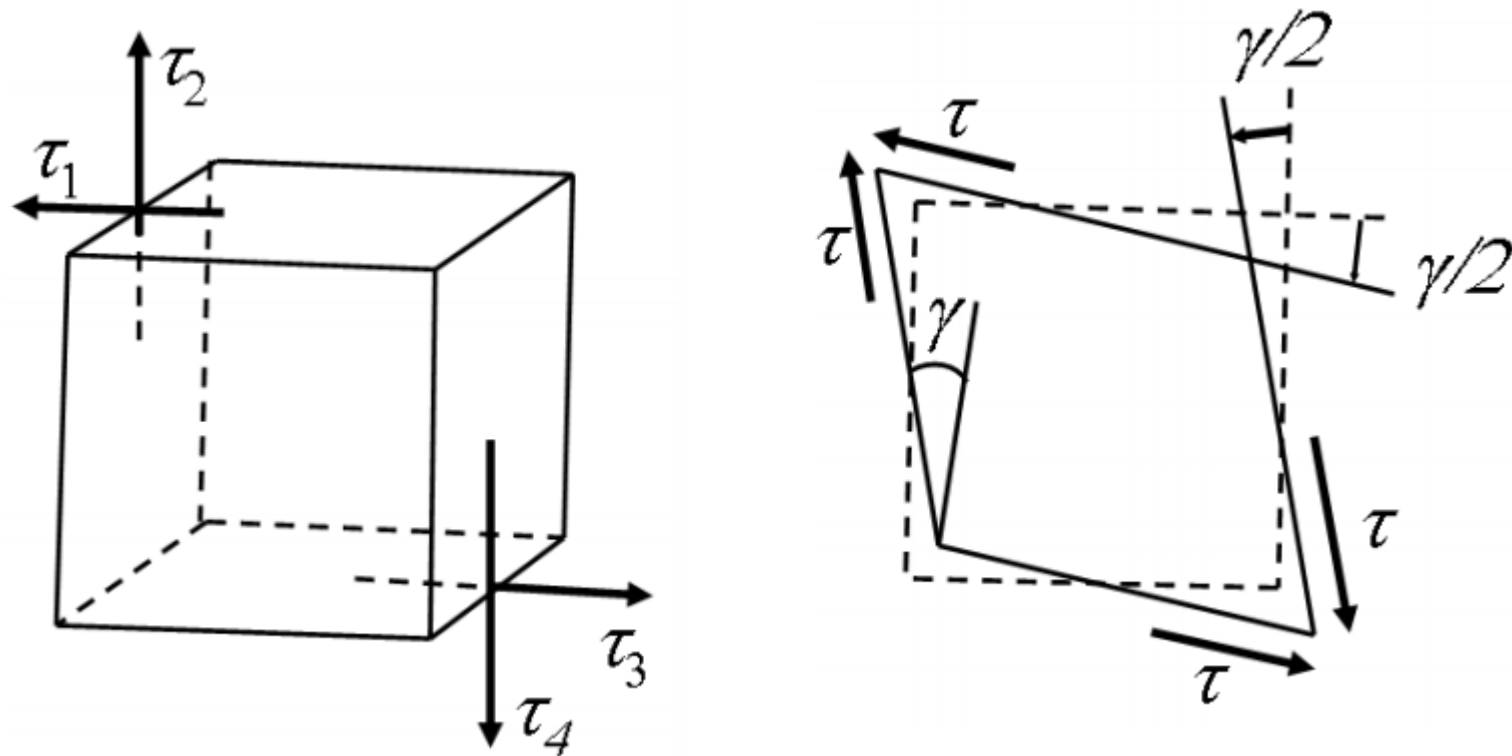
Сжатие стержня на микроуровне

TEC-SCIENCE.COM



Деформация сдвига

При изменении напряжений будут меняться только углы между гранями кубика. Объем при этом остается постоянным. Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол γ .



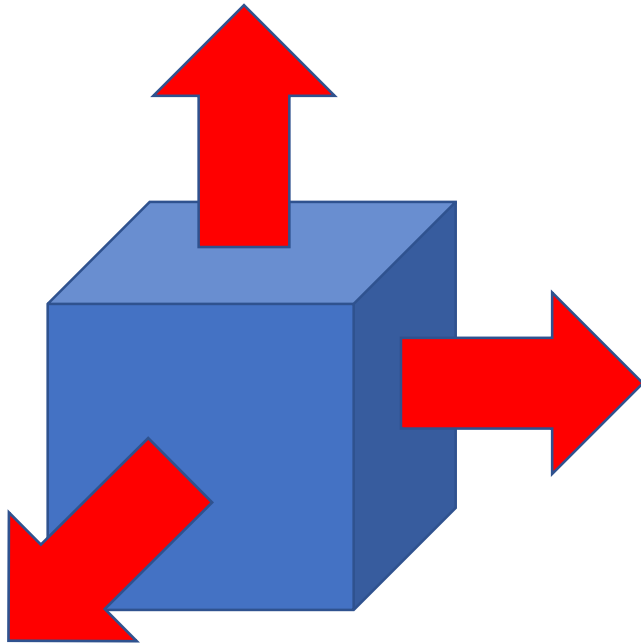
$$\tau = G\gamma$$

Закон Гука для сдвига

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Модуль сдвига

Всестороннее сжатие



Будем резиновый куб растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней.

При всестороннем сжатии, когда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \sigma = \frac{\sigma}{K}$$

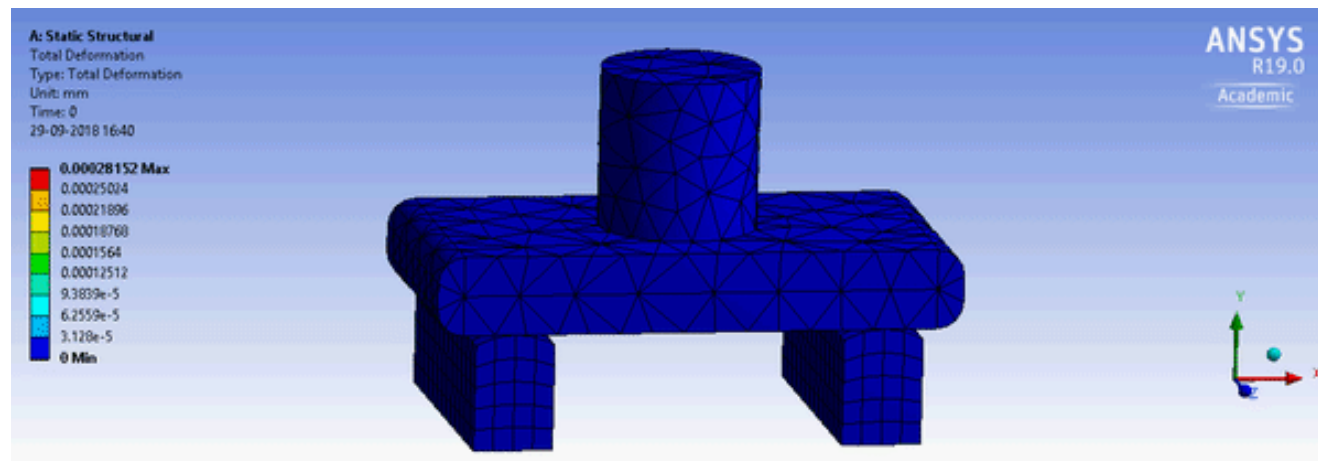
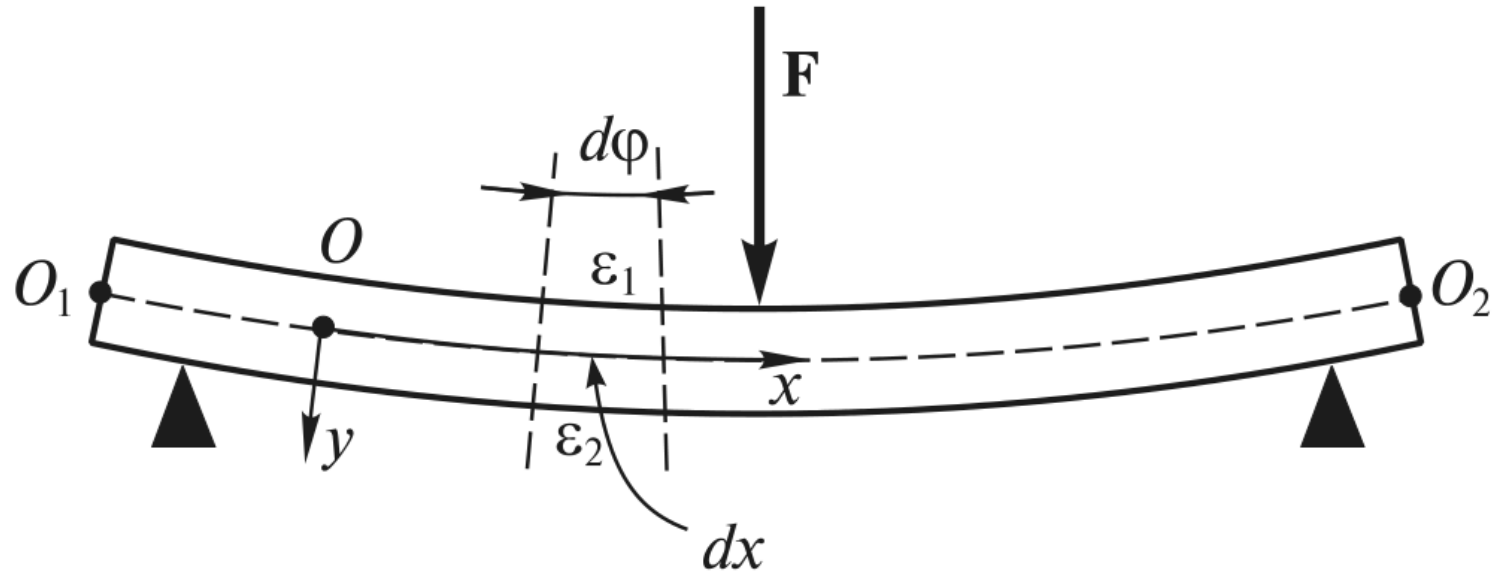
Модуль всестороннего сжатия

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Связь модулей упругости

	(E, G)	(G, μ)	(E, μ)
E	×	?	×
G	×	×	$\frac{E}{2(1 + \mu)}$
μ	?	×	×
K	?	?	$\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$

Изгиб балок



46/136:DISP

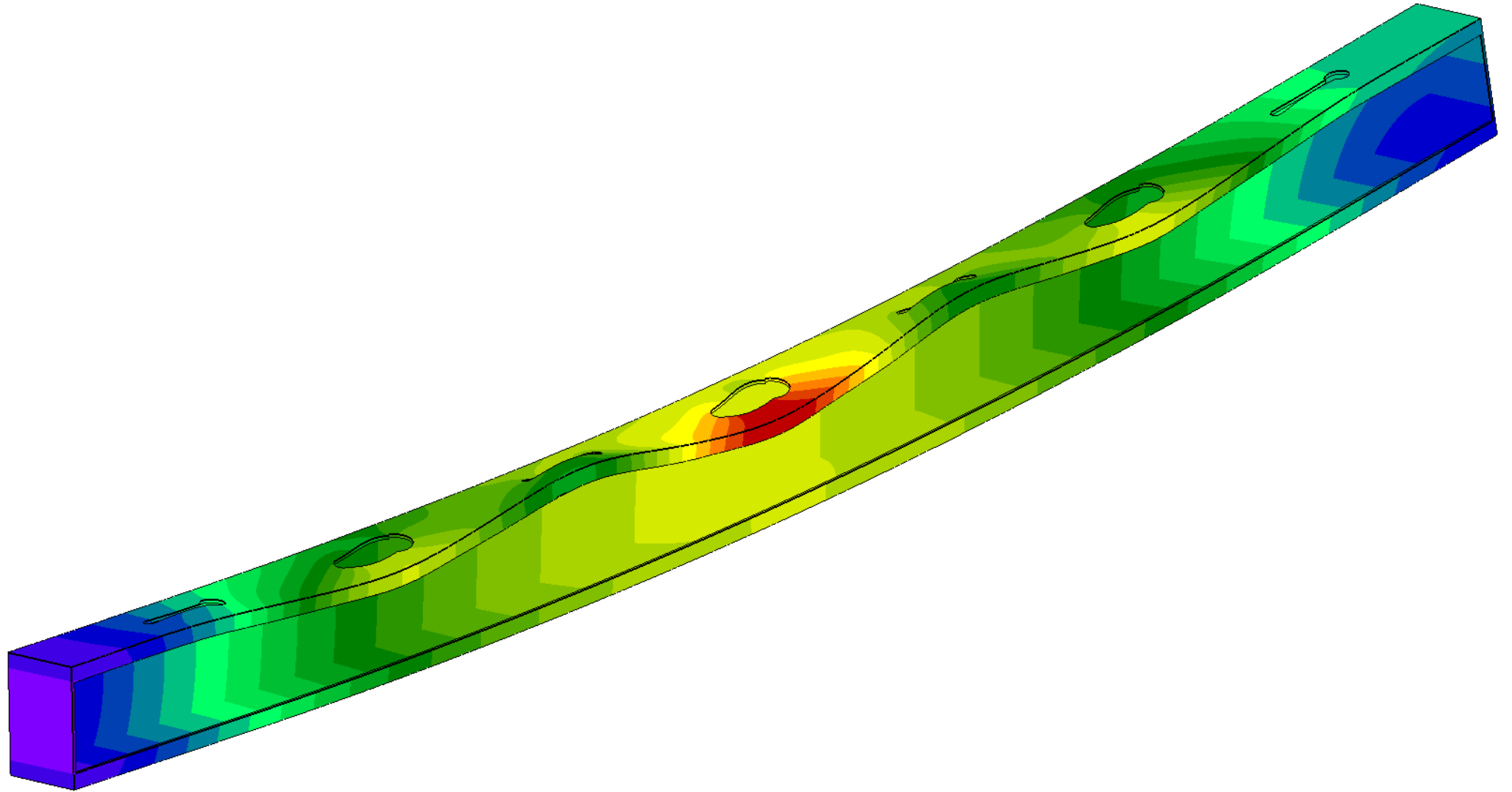
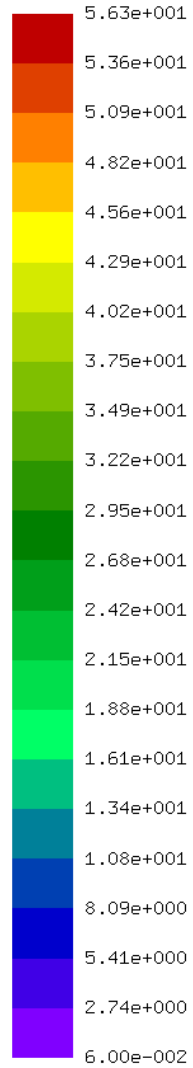
Time:0.994307

Entity:ALL

+Dispf:1.000000

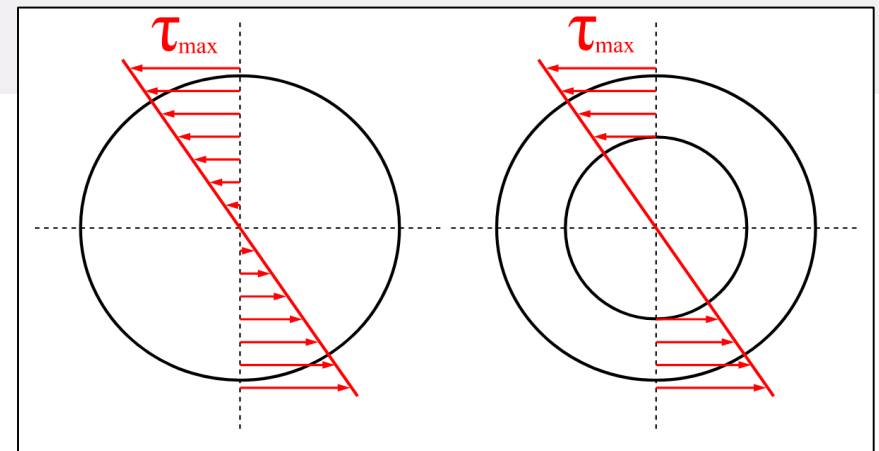
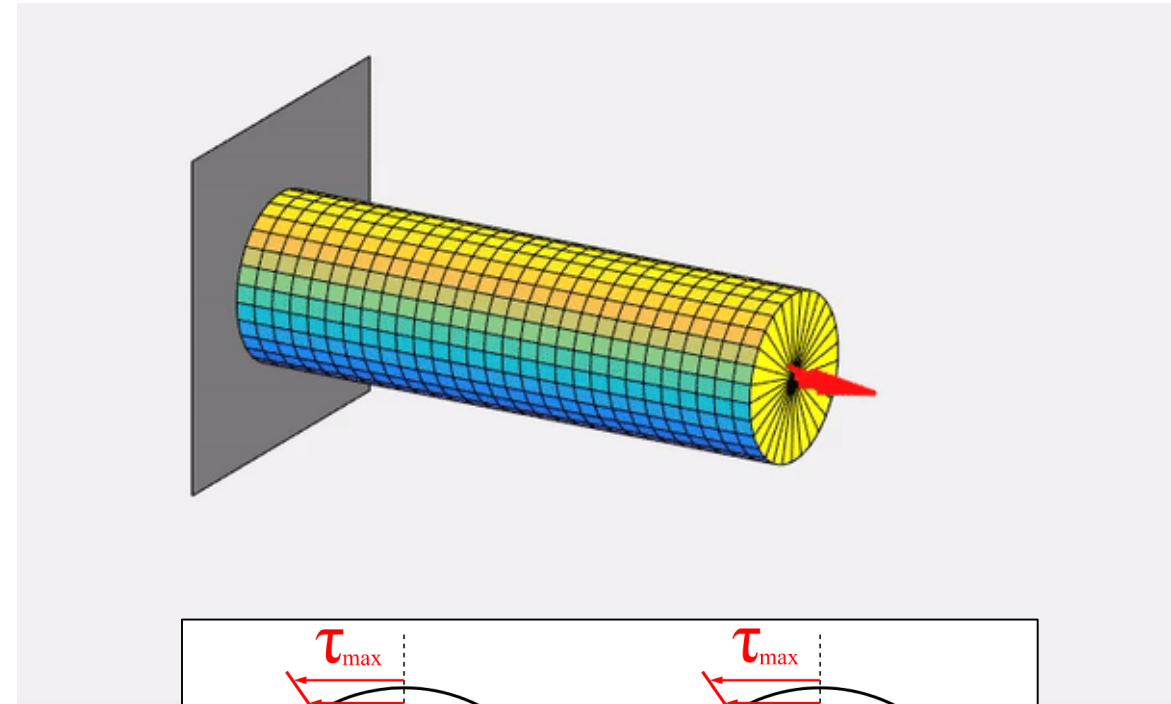
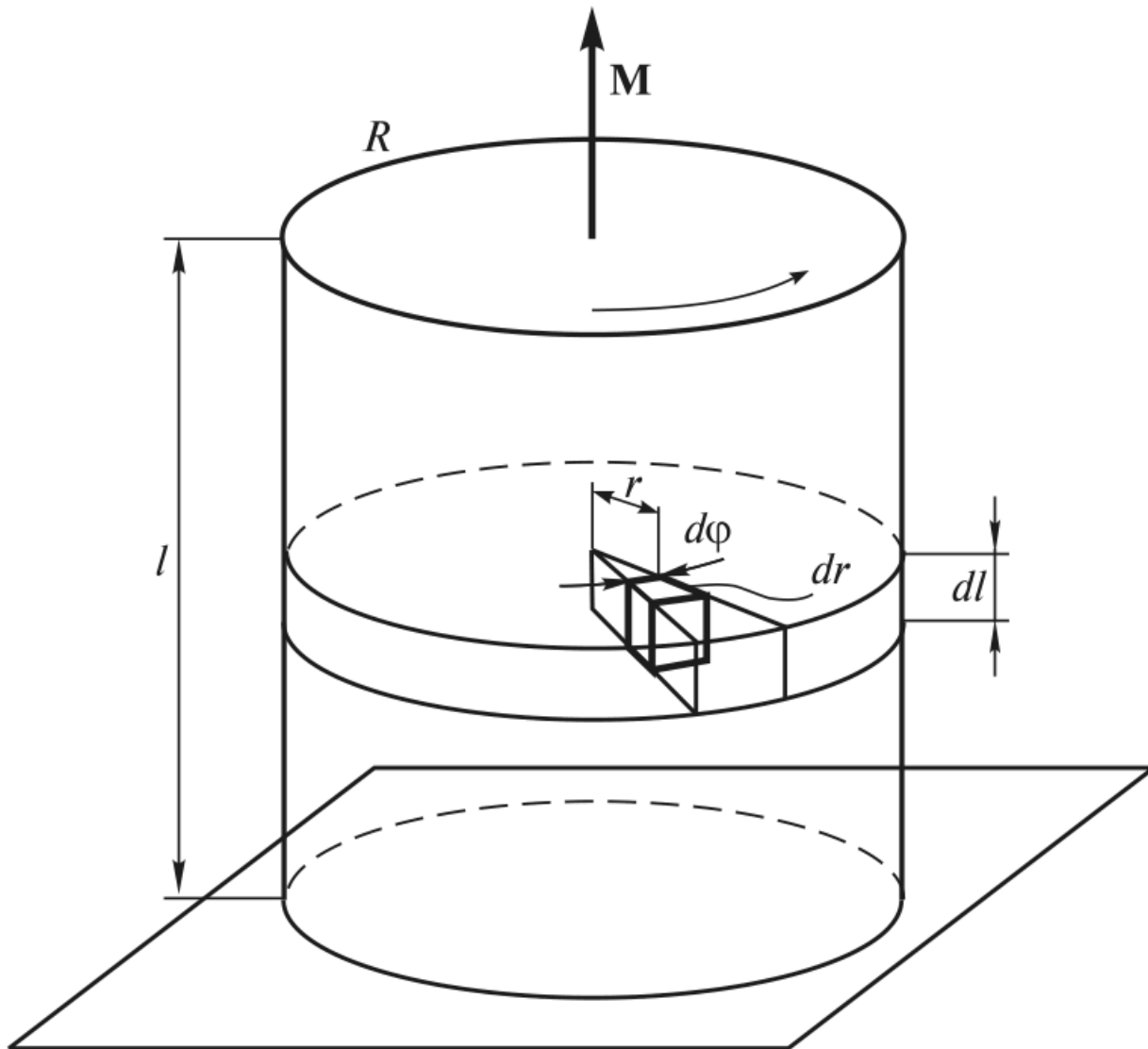
max: 5.63e+001

min: 6.00e-002



S

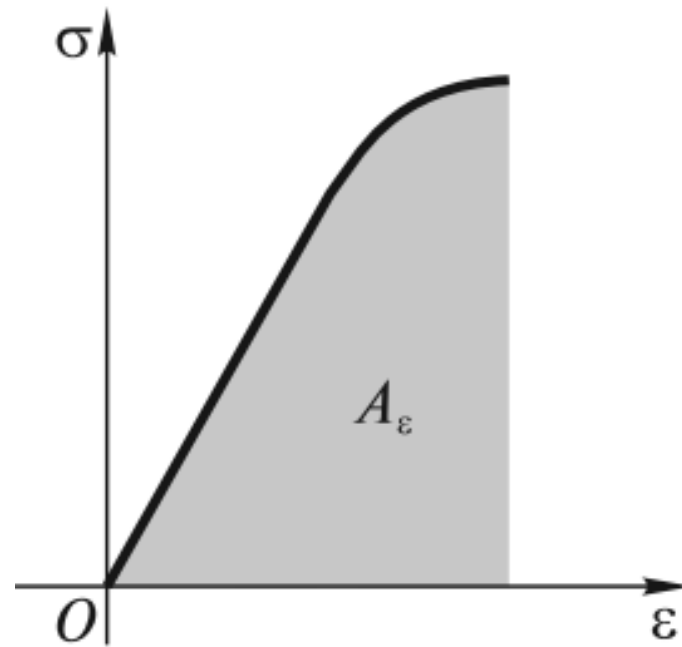
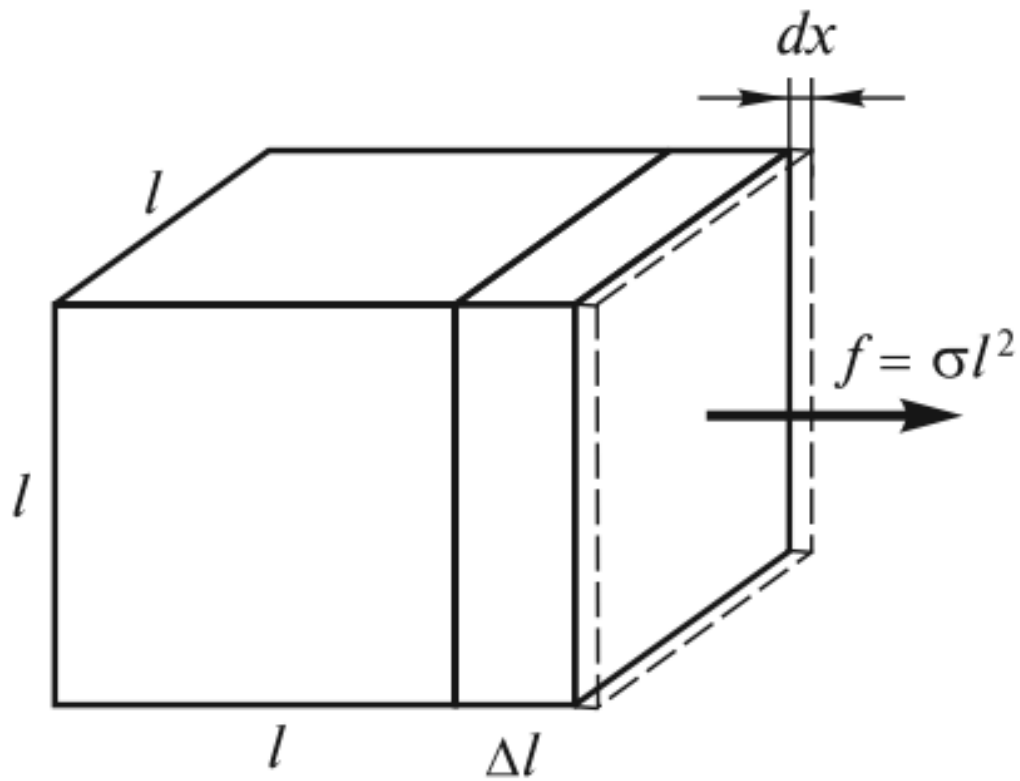
Кручение валов



Распределение напряжений в круглом валу

Энергия упругих деформаций

Будем растягивать уже деформированный резиновый куб.



$$dA_\varepsilon = f dx = \sigma l^3 d\varepsilon$$

$$A_\varepsilon = l^3 \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

Энергия упругих деформаций

Аналогично несложно показать, что результирующая работа при деформации сдвига кубика равна

$$A_{\tau} = l^3 \int_0^{\varepsilon} \tau(\gamma) d\gamma$$

На линейном участке $\sigma(\varepsilon)$

$$A_{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 l^3$$

$$w_{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

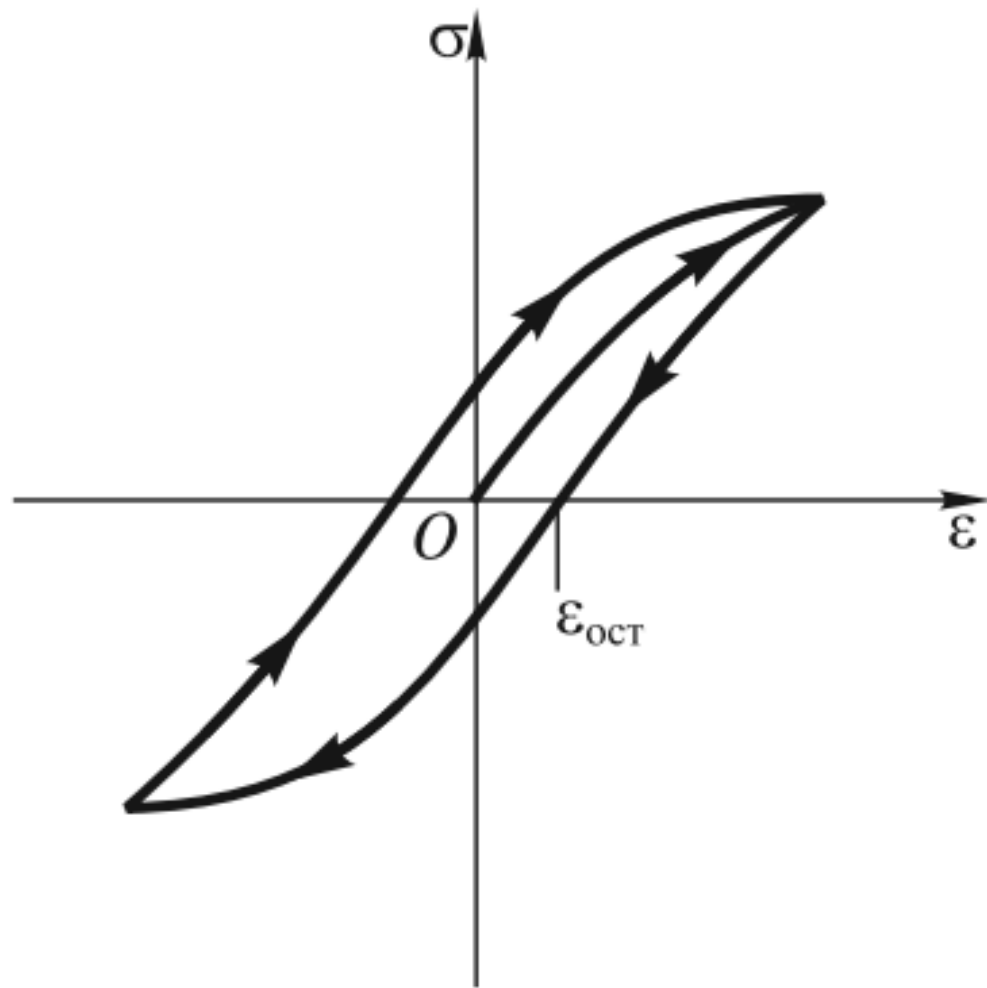
$$\sigma = E \varepsilon$$

$$A_{\tau} = \frac{1}{2} G \gamma^2 l^3$$

$$w_{\tau} = \frac{1}{2} G \gamma^2$$

$$\sigma = G \gamma$$

Упругий гистерезис



Если деформации выйдут за область упругости, то при снятии внешних нагрузок в теле будут существовать остаточные деформации. Чтобы их устранить, надо приложить сжимающую силу. Такая зависимость от приложенных напряжений носит название **упругого гистерезиса**.

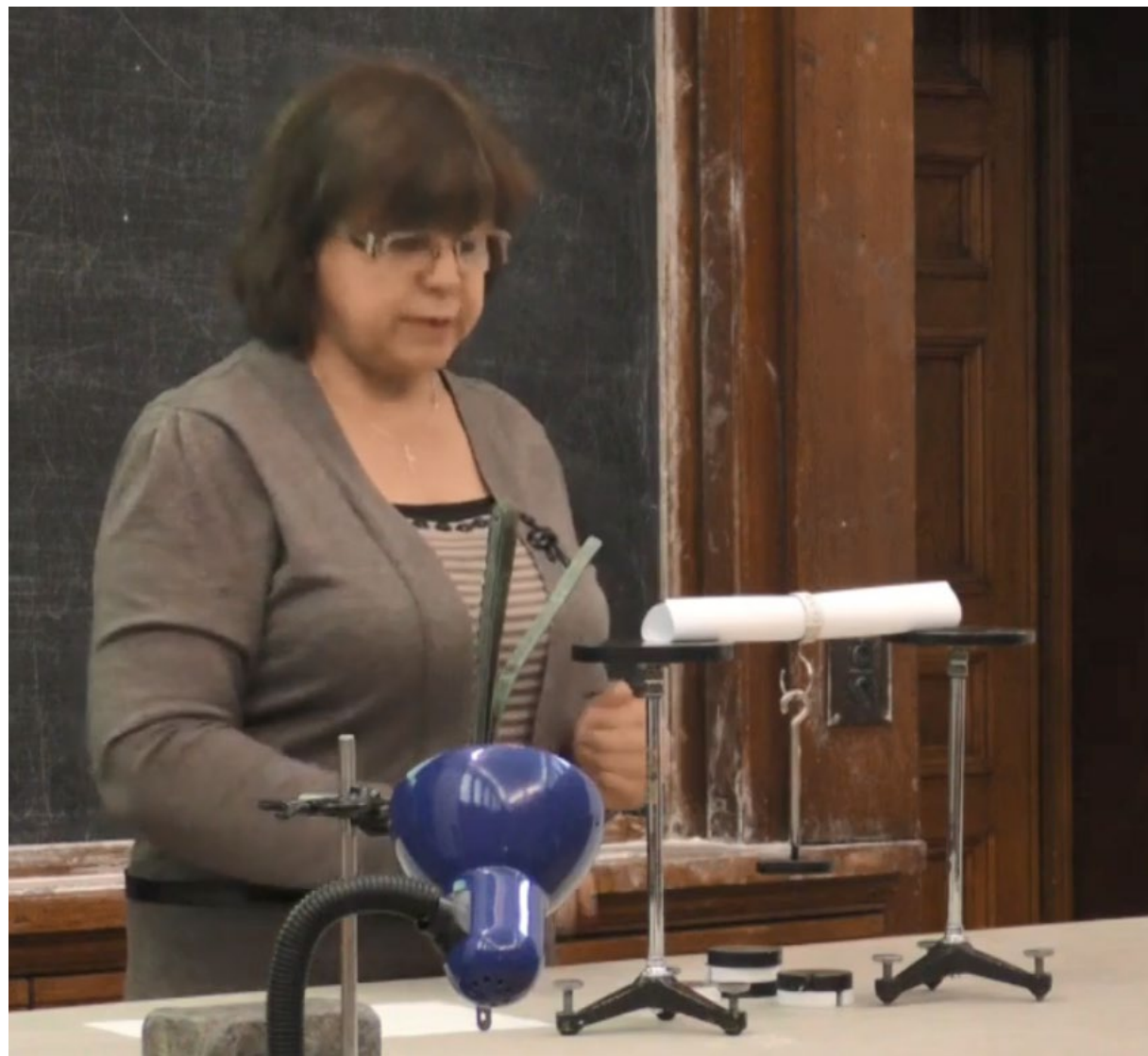
Упругая и остаточная деформация



Закон Гука



Пустотелая трубка (опыт Умова)



Коэффициент Пуассона

