Механика

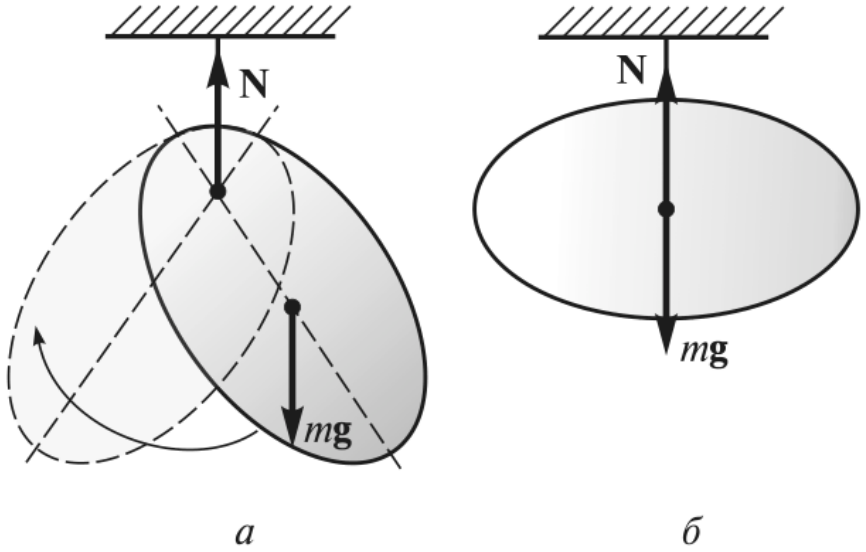
Лекция 9

План лекции

- Центр удара
- Кинетическая энергия. Теорема Кенига
- Движение твердого тела с закрепленной точкой.
- Гироскопы. Свободная и вынужденная прецессия гироскопа.
- Угловая скорость вынужденной прецессии.
- Гироскопические силы.
- Волчки.
- Свободное движение твердого тела.

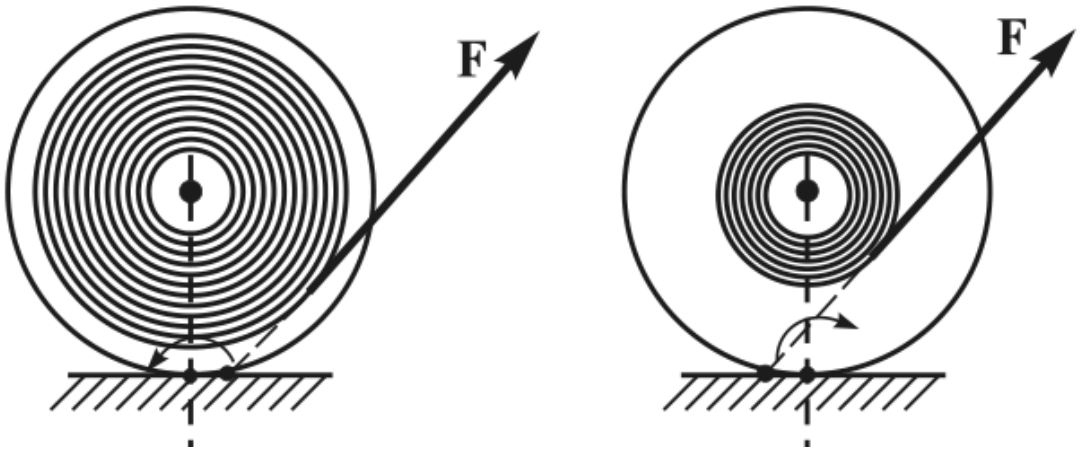
Уравнения динамики твердого тела

В общем случае у твердого тела 6 степеней свободы, следовательно для описания его движения необходимо 6 уравнений!



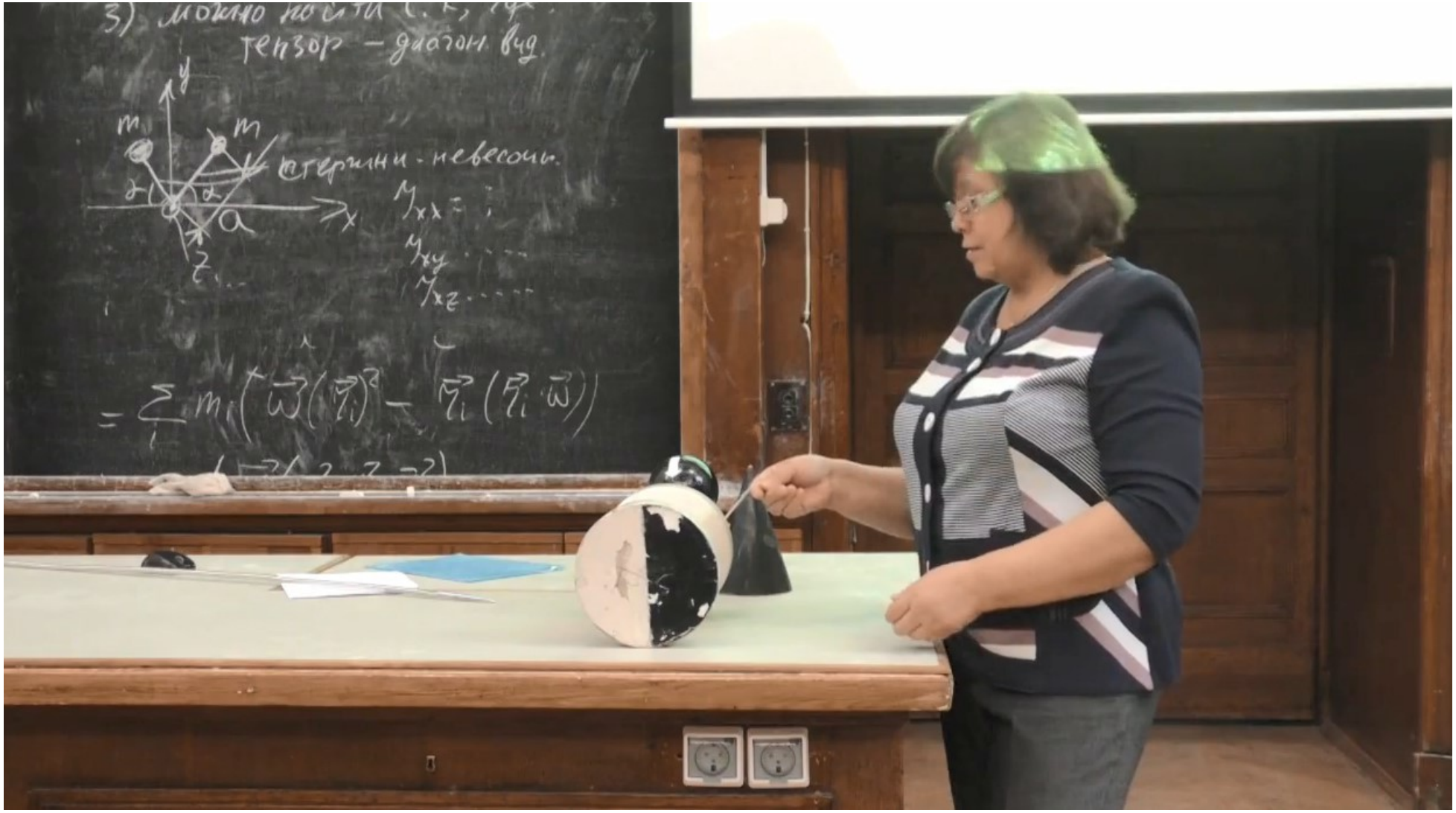
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\beta = M_z$$



«непослушная» катушка

Непослушная катушка



Уравнения динамики твердого тела

Уравнение движения центра масс

$$m\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \sum \vec{F}$$

Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

Пусть ось вращения тела закреплена. Тогда

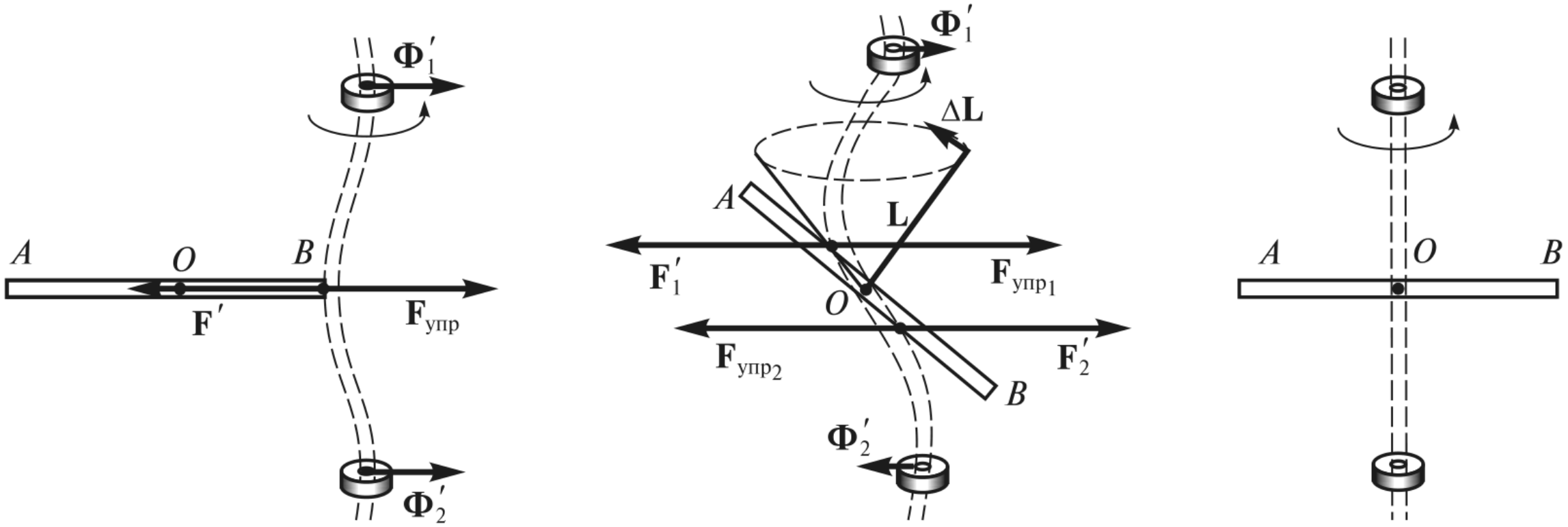
$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

При этом работа внешних сил при повороте тела на φ_0

$$\delta A = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = M_{\parallel} d\varphi$$

Свободные оси вращения

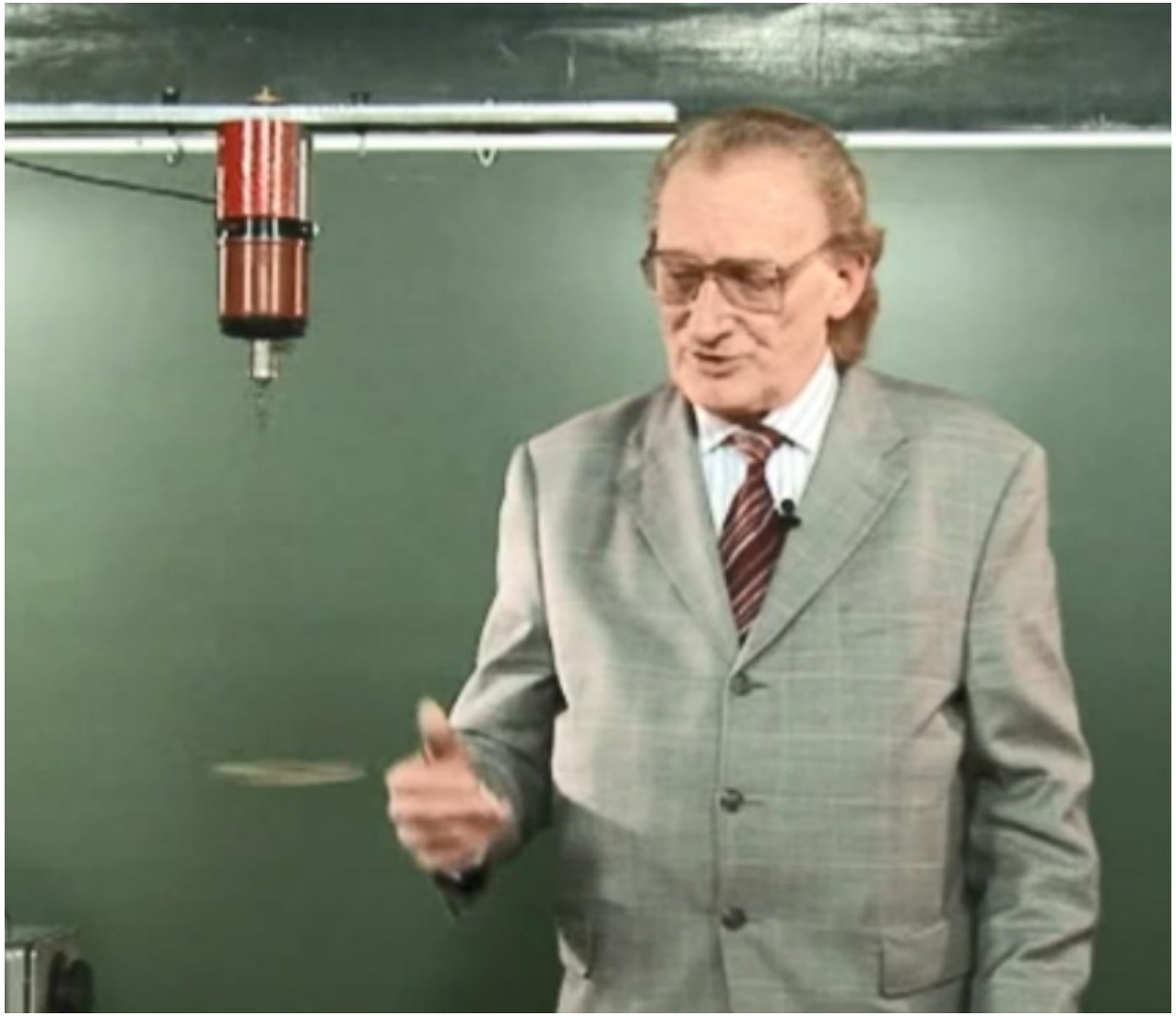
Свободная ось вращения – это такая ось, при вращении вокруг которой твердое тело не действует на эту ось.



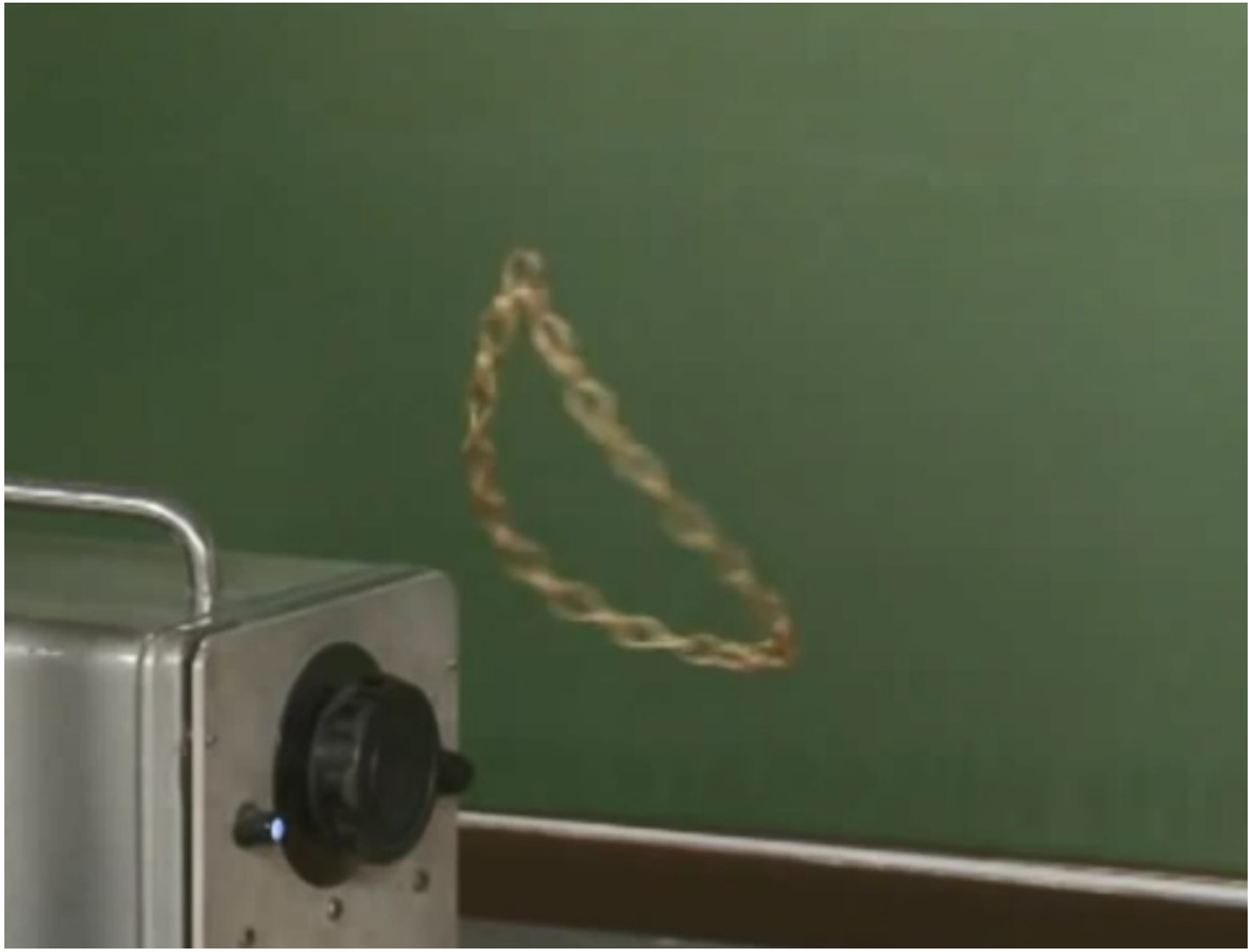
Свободные оси являются главными центральными осями вращения.

Вращение стержня

Вращение диска

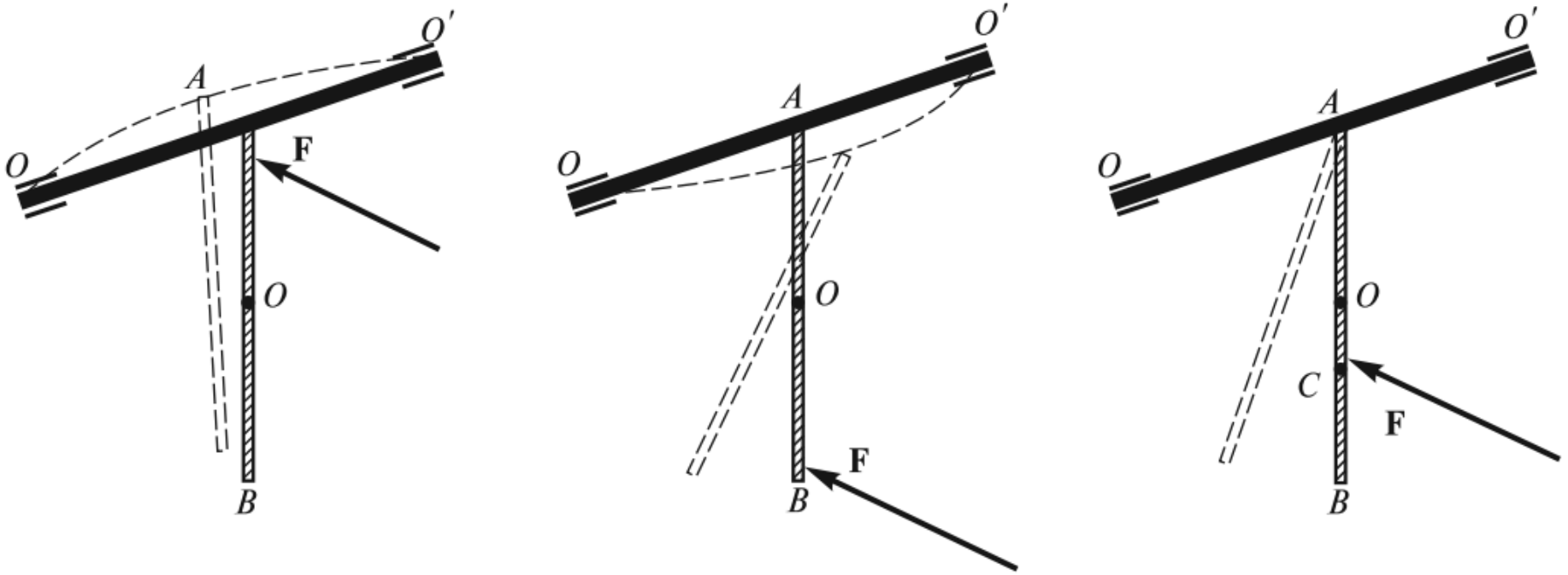


Вращение цепочки



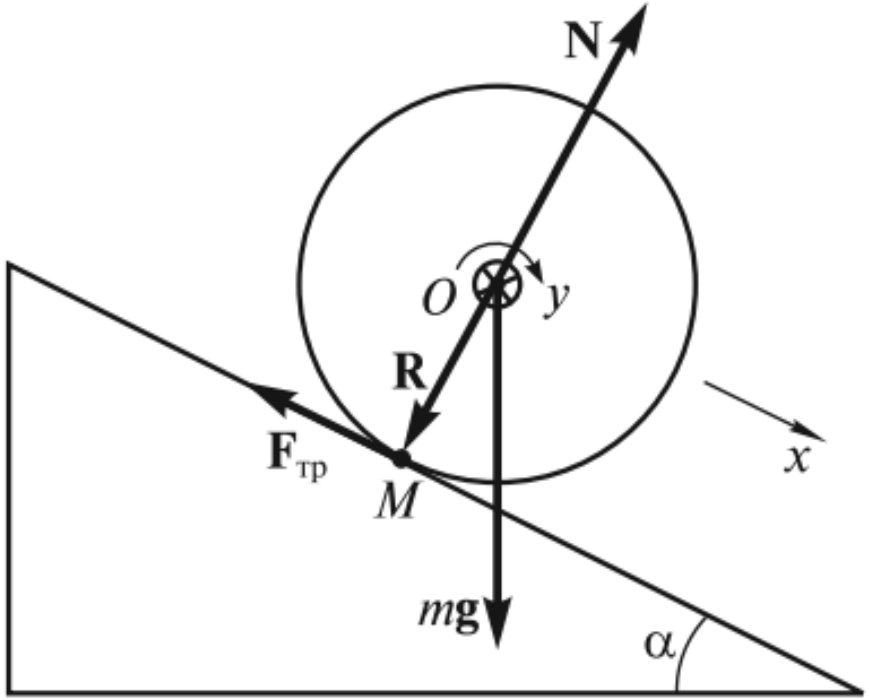
Центр удара

Опыт показывает, что если тело, закрепленное на оси вращения, испытывает удар, то действие удара в общем случае передается и на ось. Величина и направление силы, приложенной к оси, зависят от того, в какую точку тела нанесен удар.

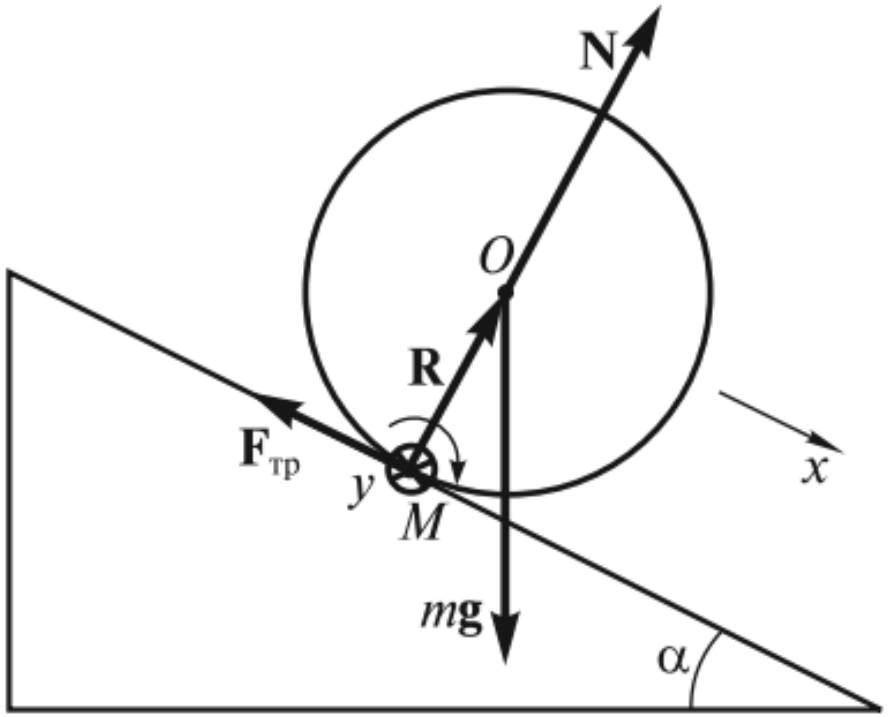


$$l = \frac{2}{3}L$$

Плоское движение твердого тела



$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mR^2}}$$



Приведем два способа решения этой задачи с использованием уравнений динамики твердого тела.

Кинетическая энергия. Теорема Кенига

Кинетическая энергия твердого тела представляет собой сумму кинетических энергий составляющих собой сумму кинетических энергий составляющих ее материальных точек.

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2}$$

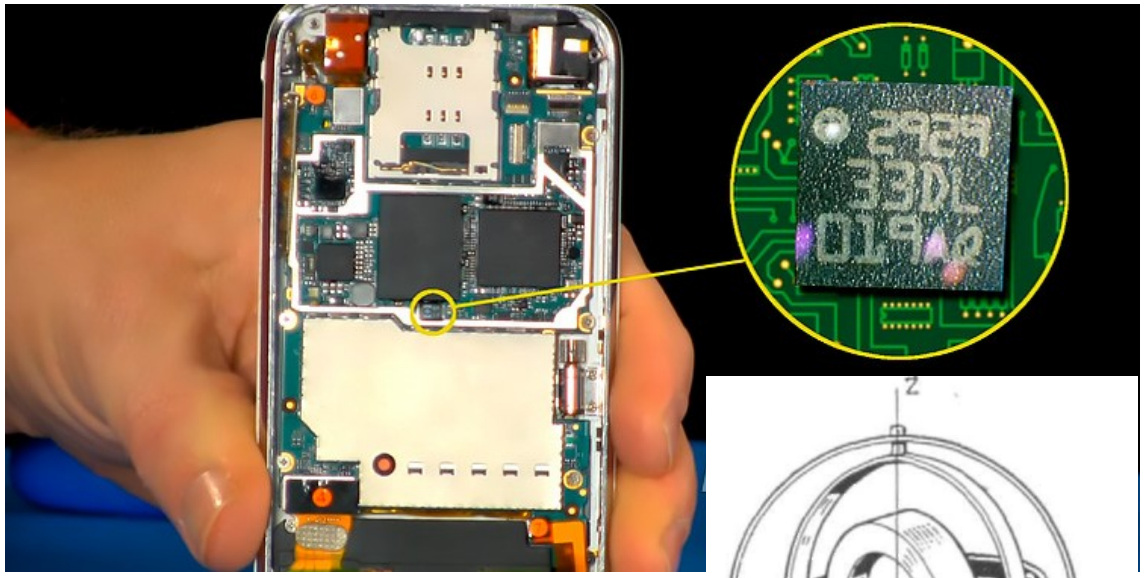
Теорема Кенига. При плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

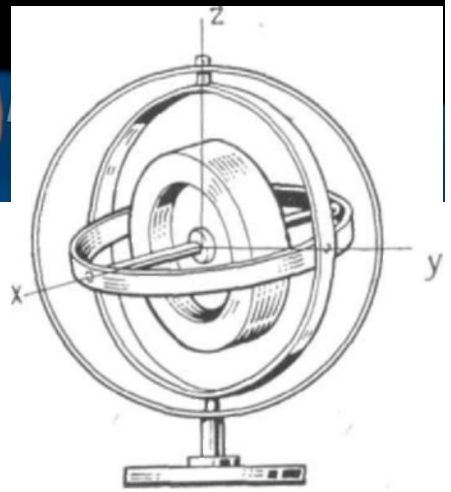
Скамья Жуковского

Скамья Жуковского

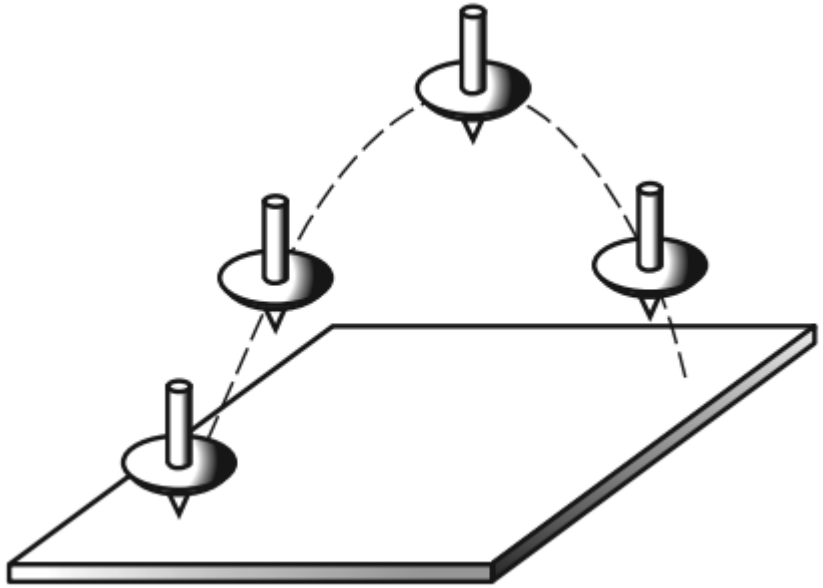
Гироскопы

Гироскоп – это аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии.

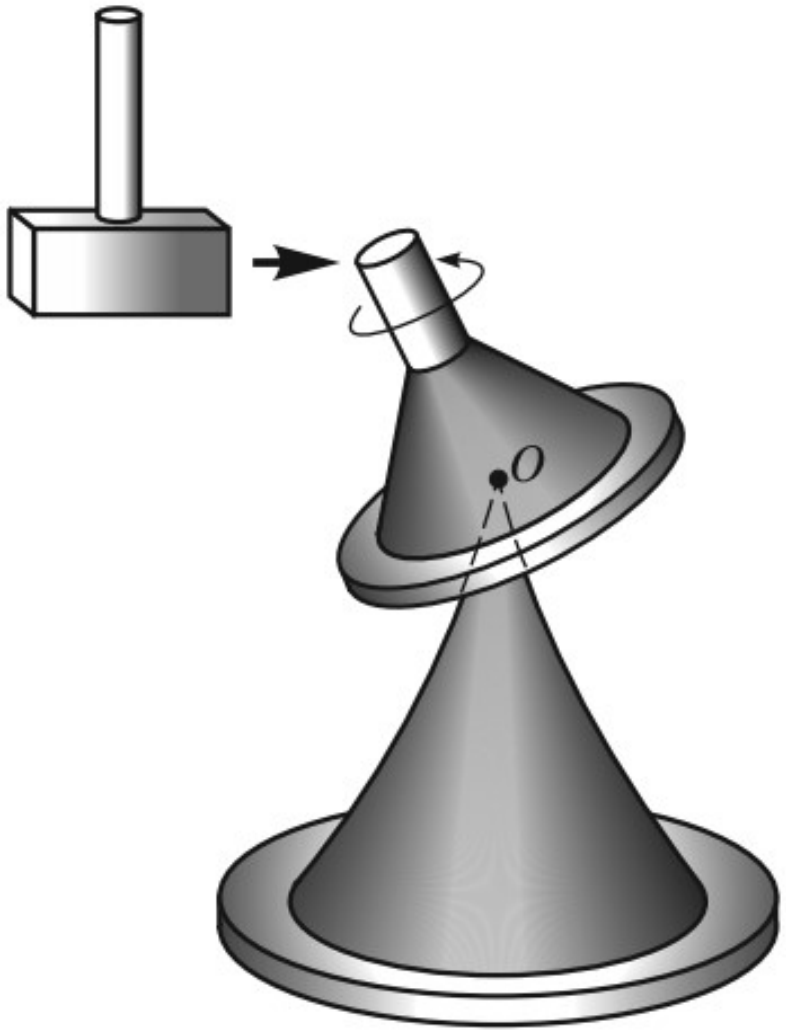




Устойчивость гироскопа



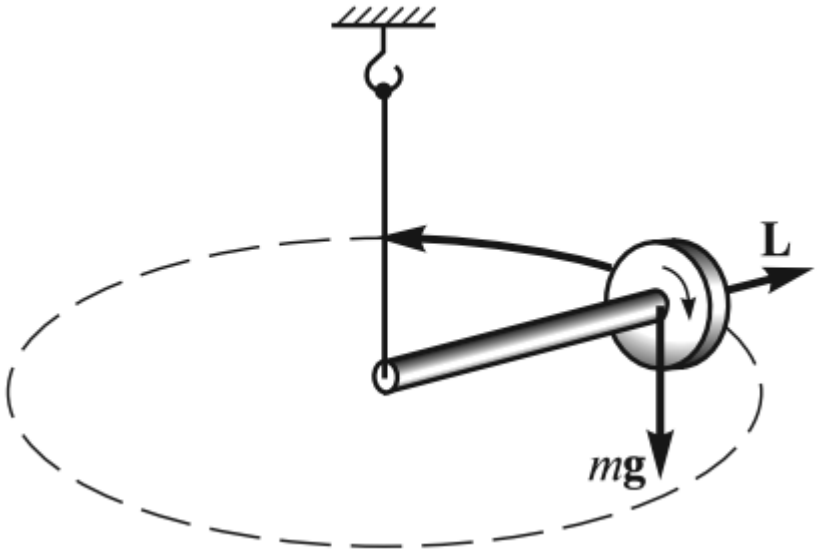
$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{M}\,\mathrm{dt}$$



Свободный гироскоп, раскрученный вокруг оси симметрии, обладает большой устойчивостью.

Если свободный гироскоп, раскрученный так, что вектор угловой скорости и ось симметрии гироскопа не совпадают, то наблюдается движение, которое называется **нутацией**.

Гироскопы



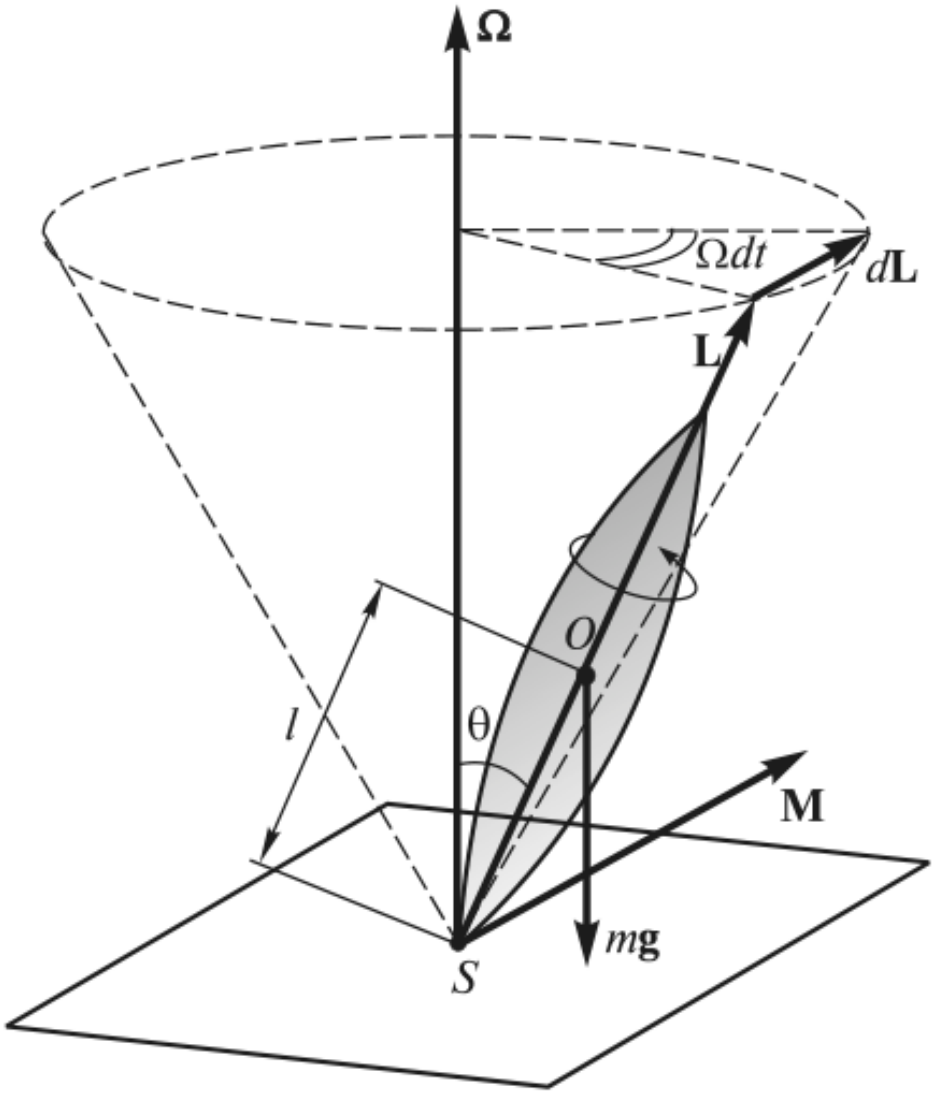
Точное решение задачи о движении гироскопа в поле внешних сил весьма сложно.

Рассмотрим элементарную теорию гироскопа. В рамках этой теории делается допущение: $\omega \gg \Omega$.

Тогда момент импульса равен $\vec{L} = J_z \vec{\omega}$.

Так как векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают по направлению, то тело гироскопа будет совершать вращательное движение вокруг вертикальной оси. Говорят, что гироскоп совершает прецессию.

Гироскопы



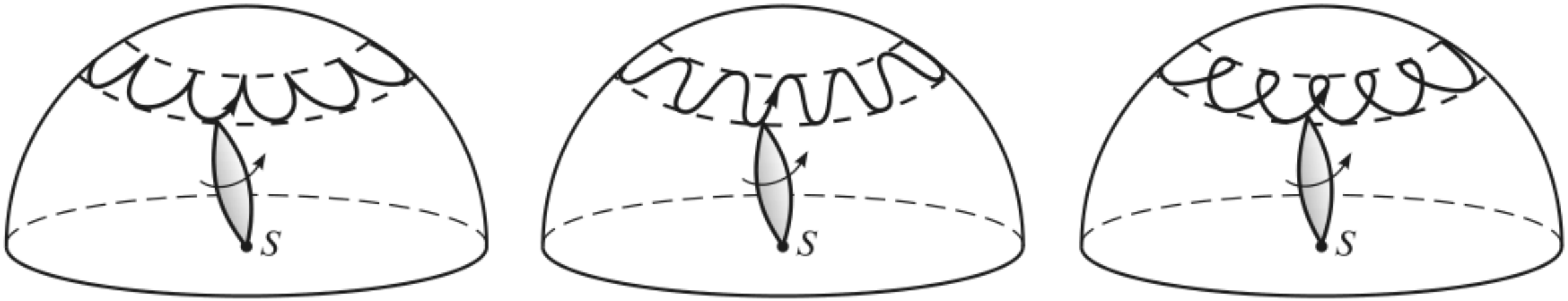
Прецессия гироскопа – вращение оси симметрии гироскопа с угловой скоростью Ω под действием момента внешних сил наряду с его собственным вращением вокруг оси симметрии.

Прецессия гироскопа описывается уравнением

$$\left[\vec{\Omega} \times \vec{L}\right] = \vec{M}$$

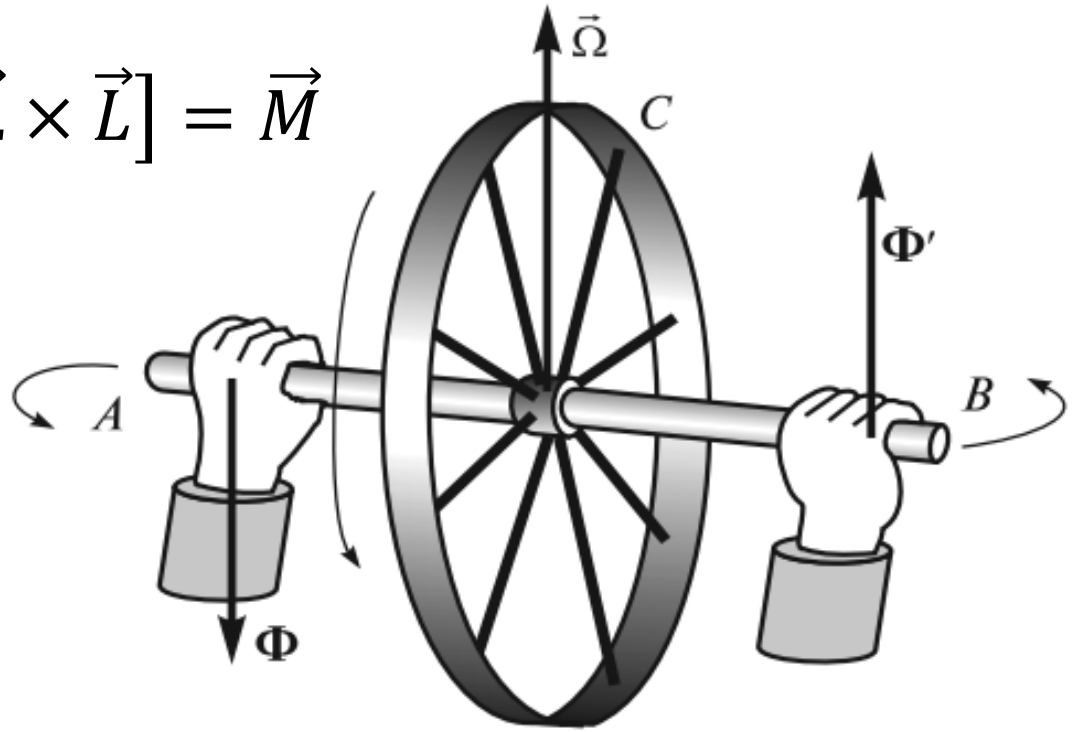
Устойчивость гироскопа

Нутации



Гироскопические силы

$$[\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$$

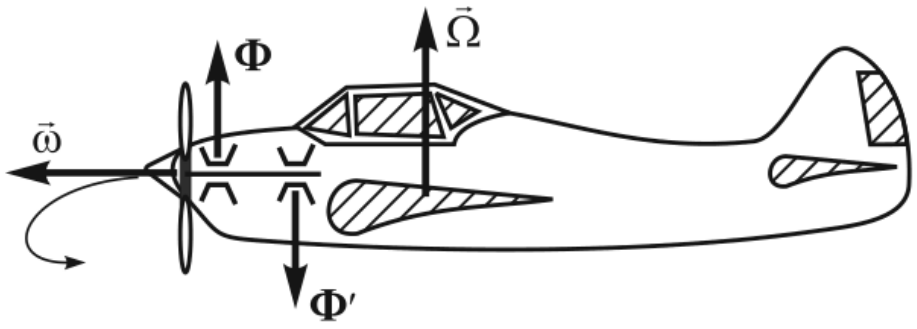


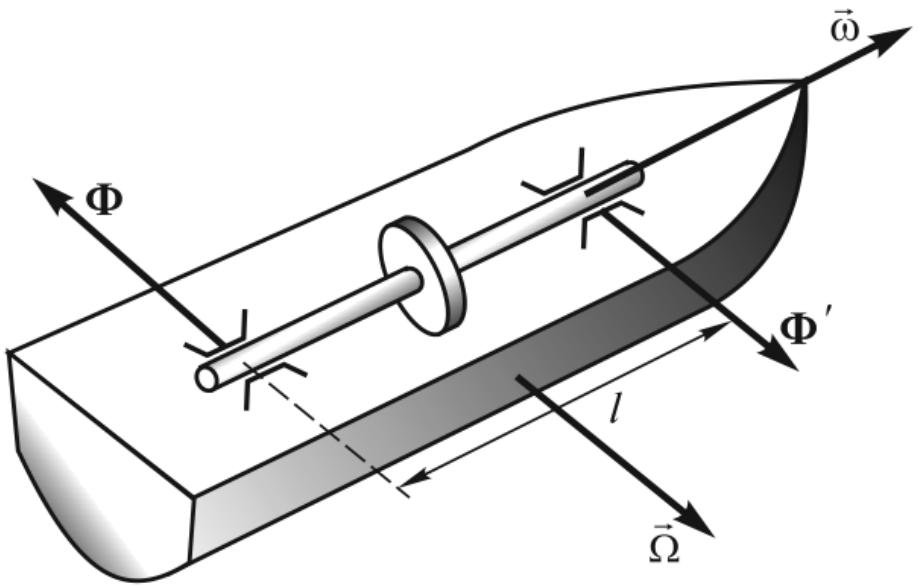
Гироскопические силы – силы, действующие на крепление (рамку, подшипник, руки экспериментатора и т.д.) несвободного гироскопа при вынужденном вращении оси (вынужденной прецессии) гироскопа.

Направление гироскопических сил легко найти с помощью правила.

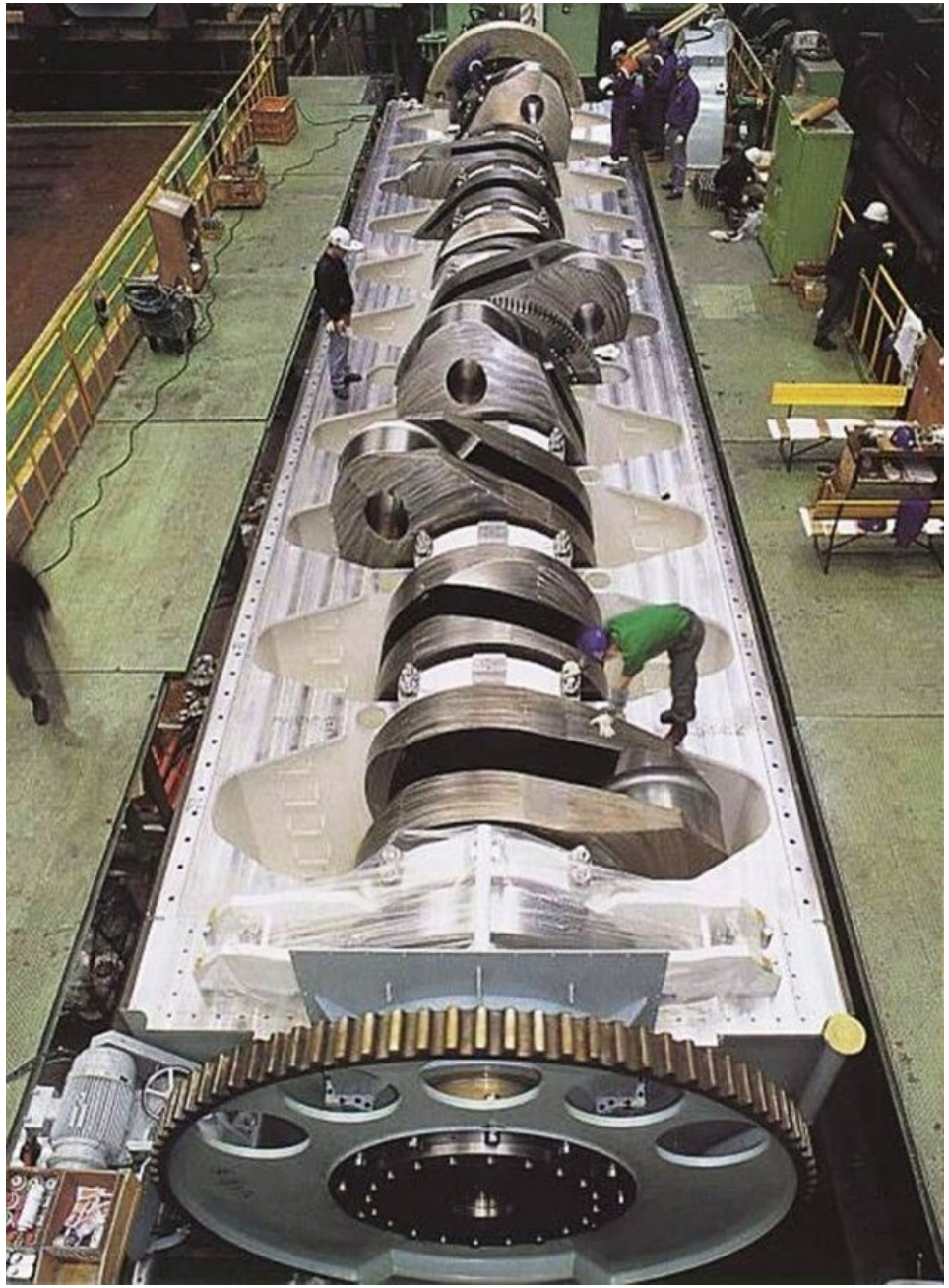
Правило Н.Е. Жуковского – гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота.

Гироскопические силы





1. Легкий одномоторный самолет совершает левый вираж. Гироскопический момент передается через подшипники на корпус самолета и действует на него. Самолет начинает задирать нос к верху.
2. При движении корабля ротор турбины участвует в двух движениях: вращается вокруг своей оси и поворачивается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной валу турбины. Корабль будет поворачивать то направо, то налево.



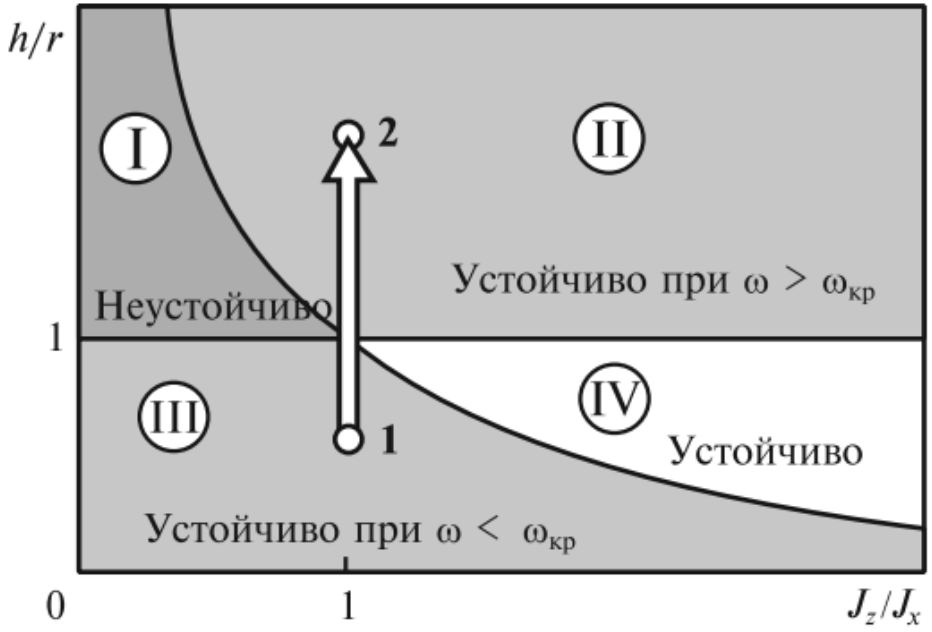
BAUMANN

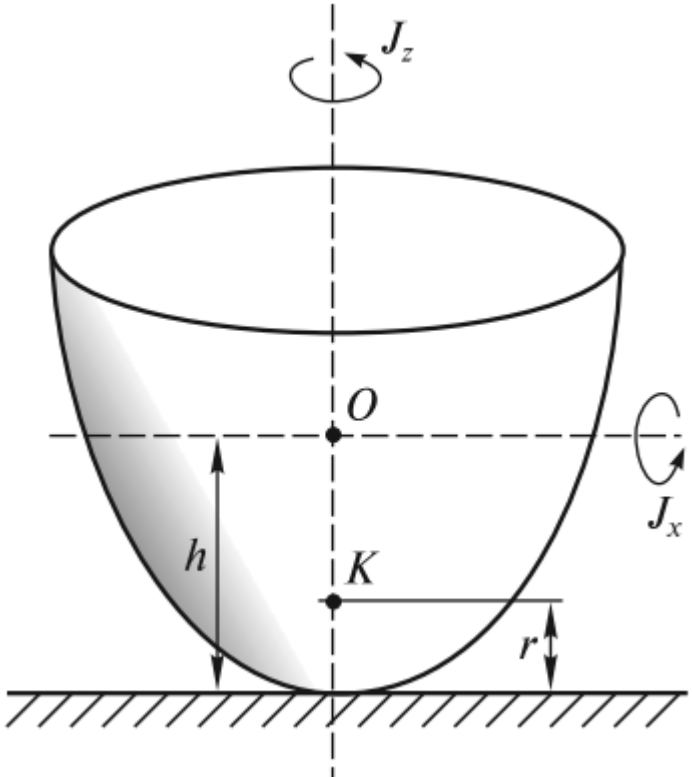
Волчки

- Волчки отличаются от гироскопов тем, что в общем случае они не имеют ни одной неподвижной точки.
- Опыт показывает, что если волчок привести во вращение вокруг оси симметрии и установить на плоскость в вертикальном положении, то это вращение в зависимости от формы волчка и угловой скорости вращения будет либо устойчивым, либо неустойчивым.

Устойчивость вращения симметричного волчка

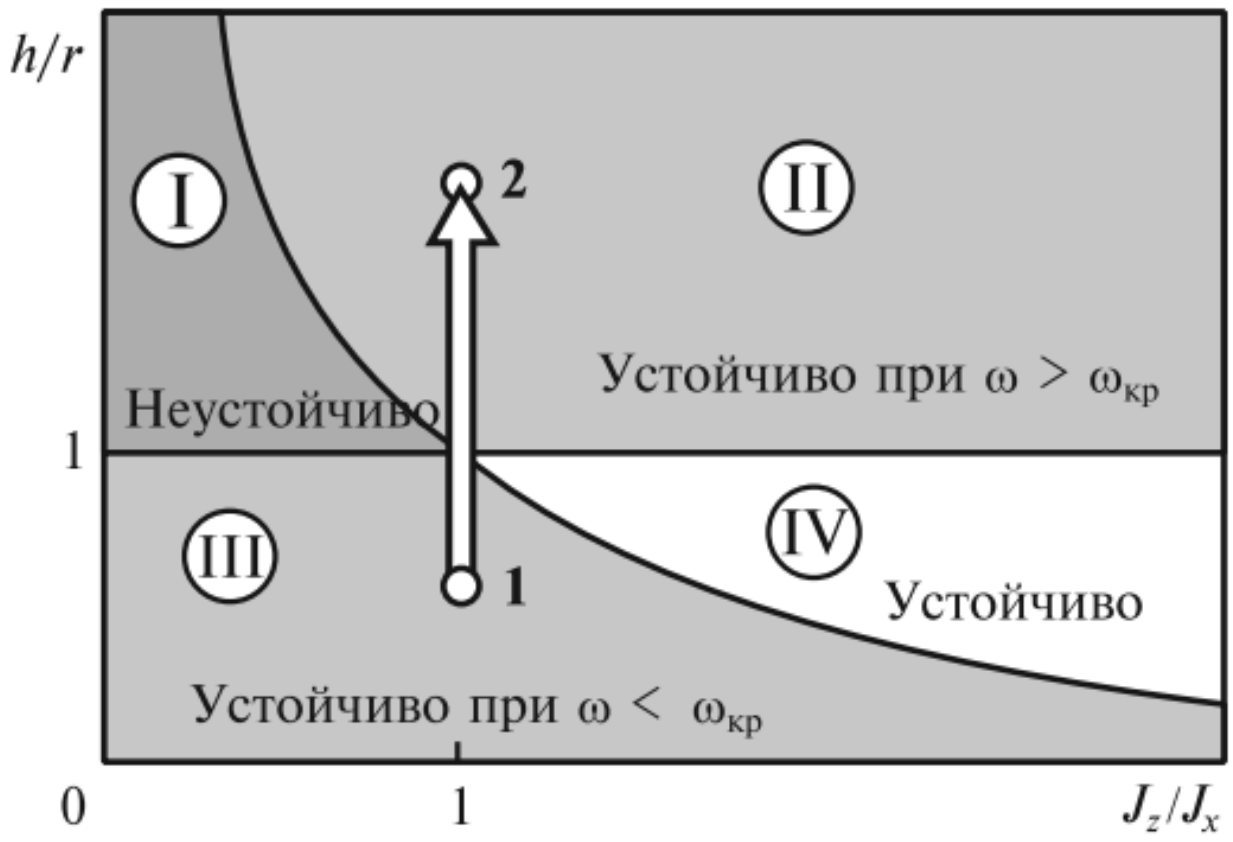
О – центр масс
К – центр кривизны волчка в точке опоры
J_z – момент инерции относительно оси симметрии
J_x – момент инерции относительно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии

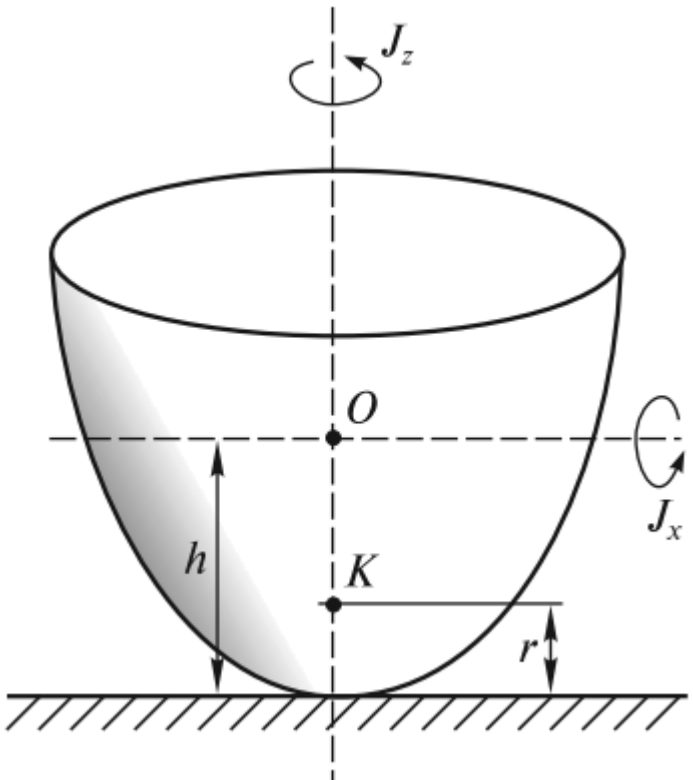




Устойчивость вращения симметричного волчка

$$\omega_{\text{крит}} = \sqrt{\frac{(h-r)mg}{J_x \frac{r}{h}\left(\frac{J_z}{J_x} - \frac{r}{h}\right)}}$$

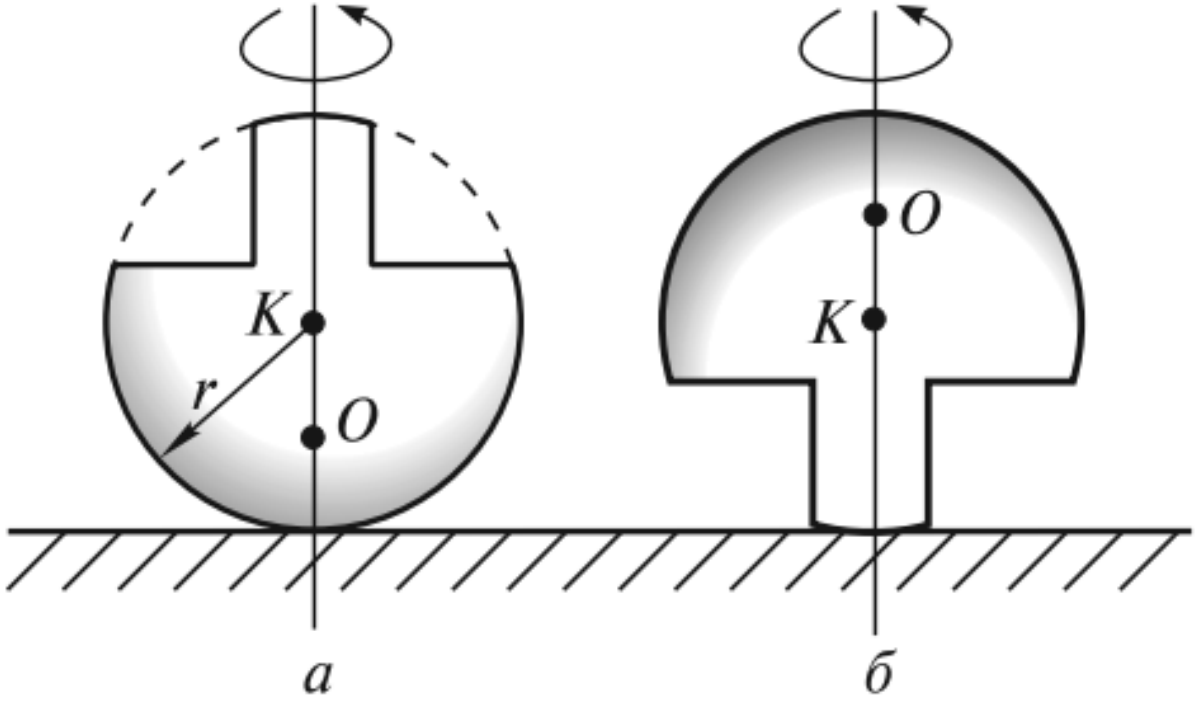




Устойчивость вращения симметричного волчка

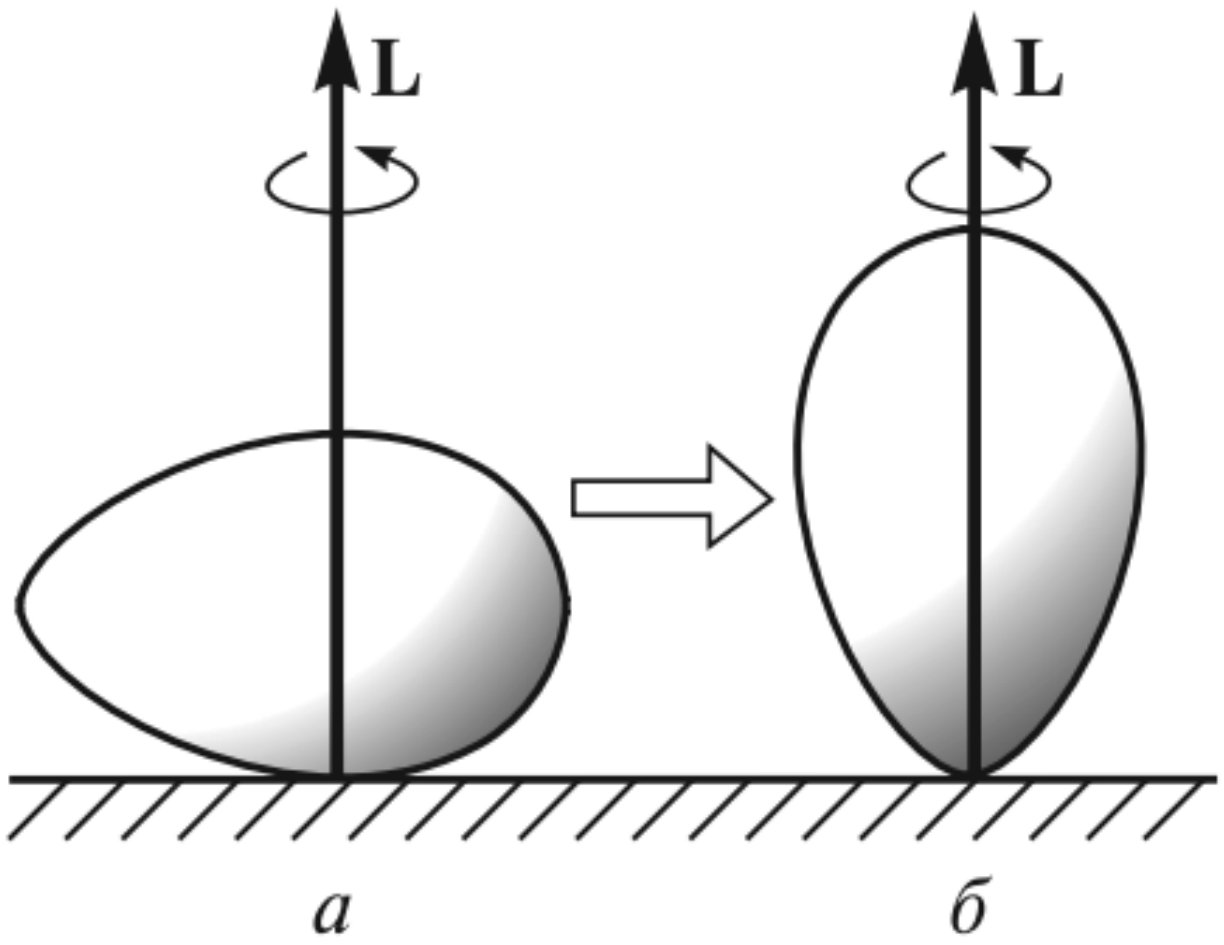
Рассмотрим китайский волчок с $\omega > \omega_{\text{кр}}$ и поставленный на плоскость вертикально. Пусть $J_z = J_x$. Поскольку $h < r$, то этому соответствует точка 1 в области III, а это область устойчива только для $\omega < \omega_{\text{кр}}$.
Вектор $\vec{L}$ всегда направлен вверх!!!

Рассмотрим китайский волчок с $\omega > \omega_{\text{кр}}$ и поставленный на плоскость вертикально. Пусть $J_z = J_x$. Поскольку $h < r$, то этому соответствует точка 1 в области III, а это область устойчива только для $\omega < \omega_{\text{кр}}$.
Вектор $\vec{L}$ всегда направлен вверх!!!



Устойчивость вращения симметричного волчка

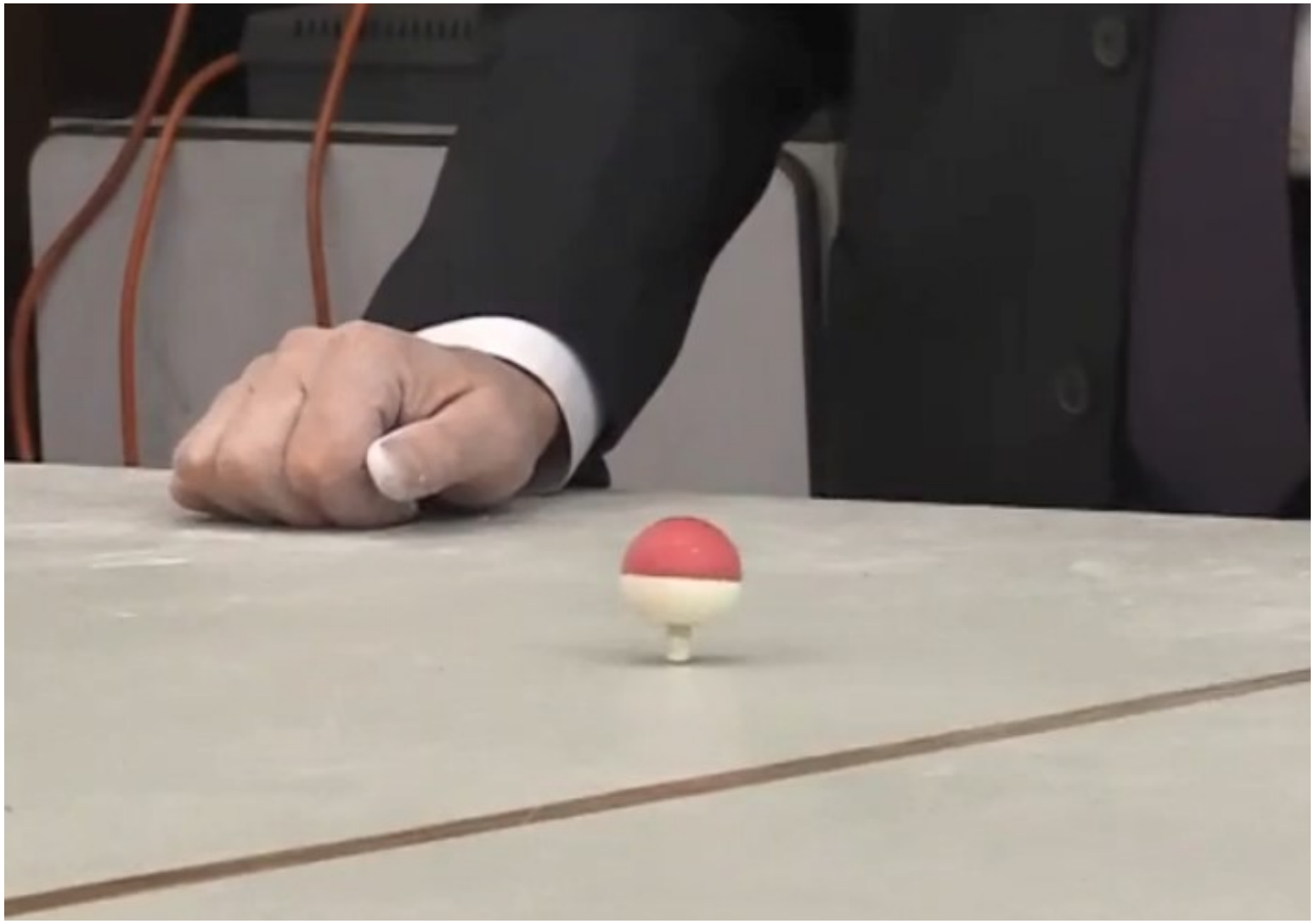
Неустойчивое



Устойчивое

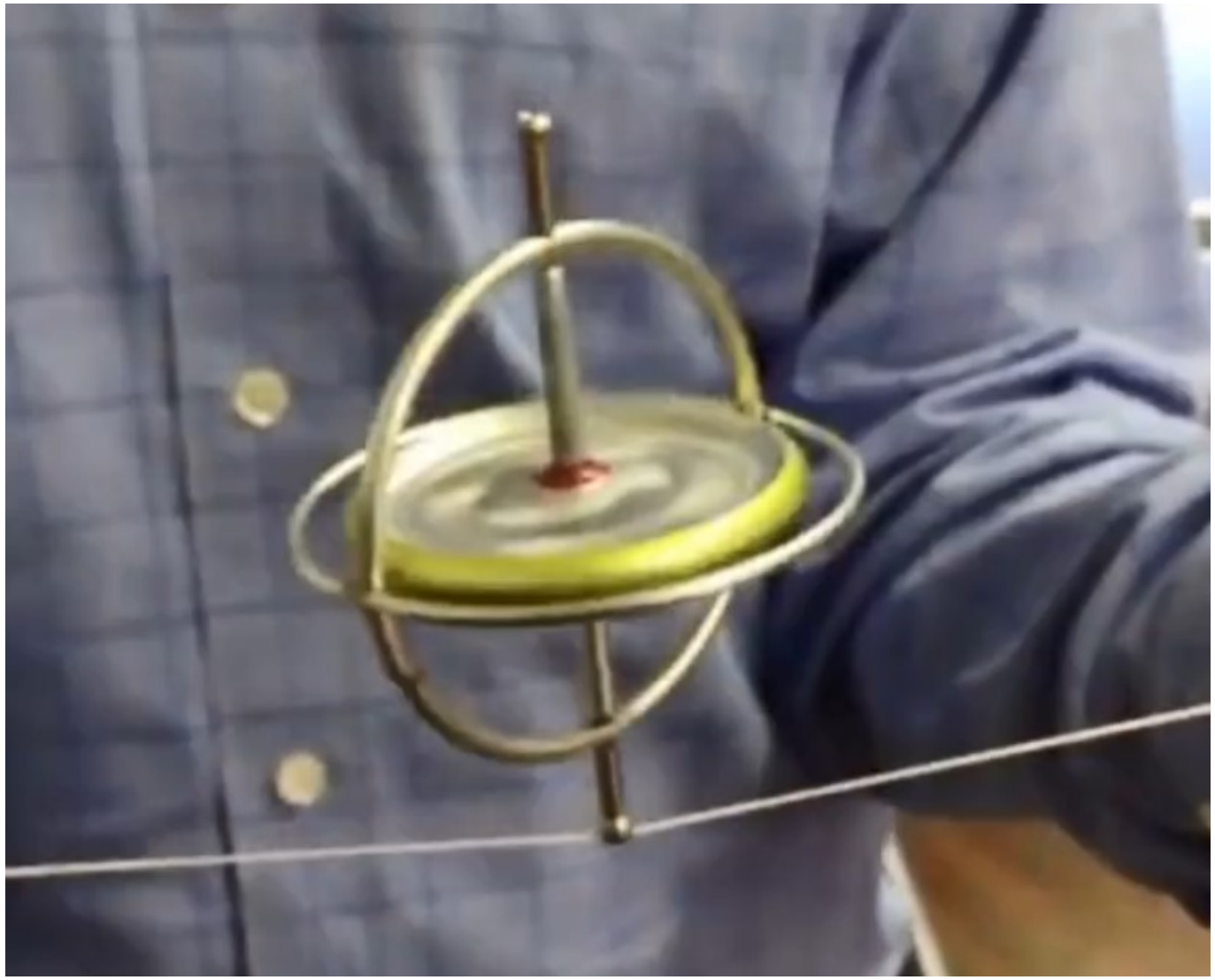
Юла

Китайский волчок

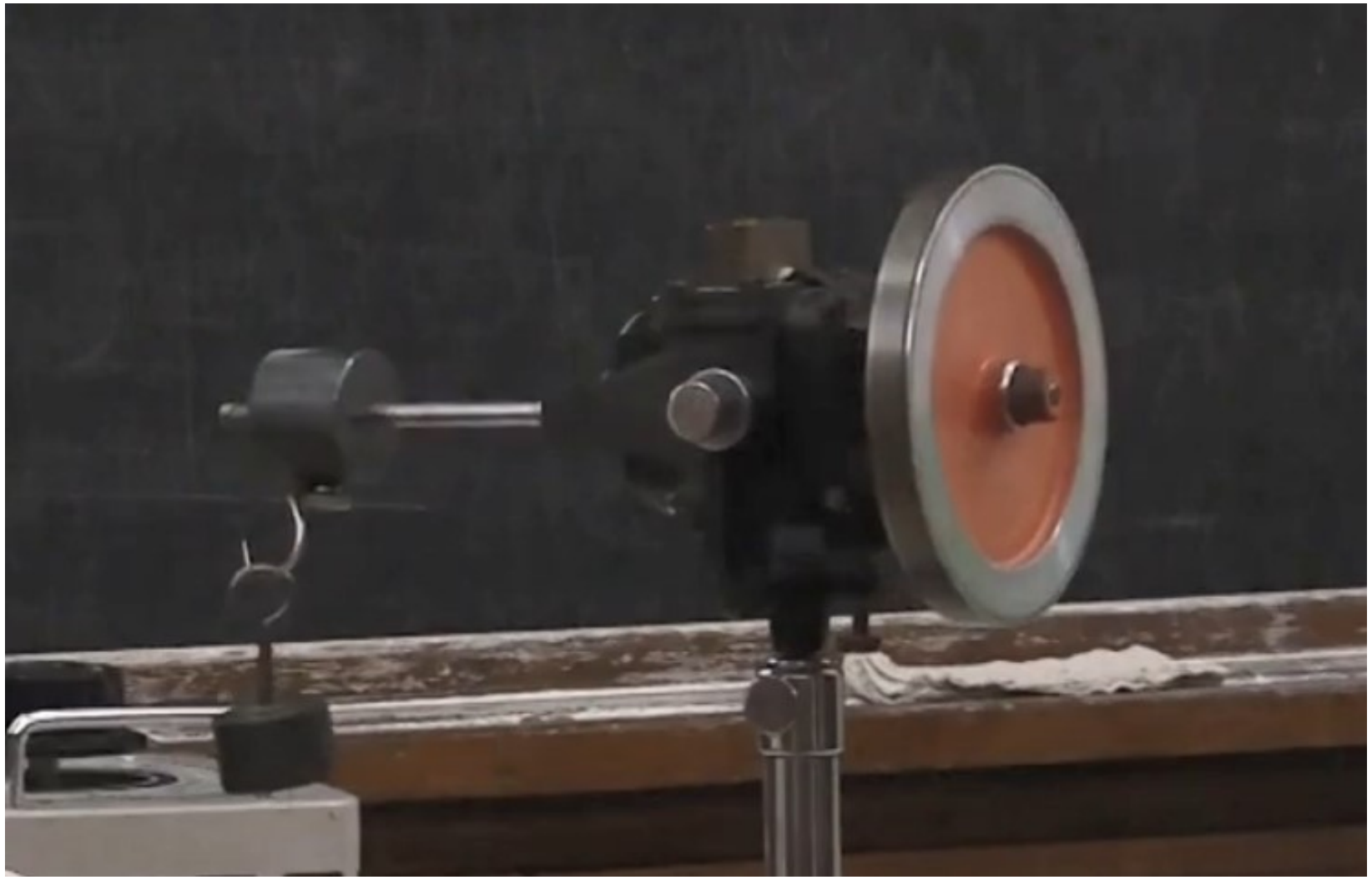


Колумбово яйцо

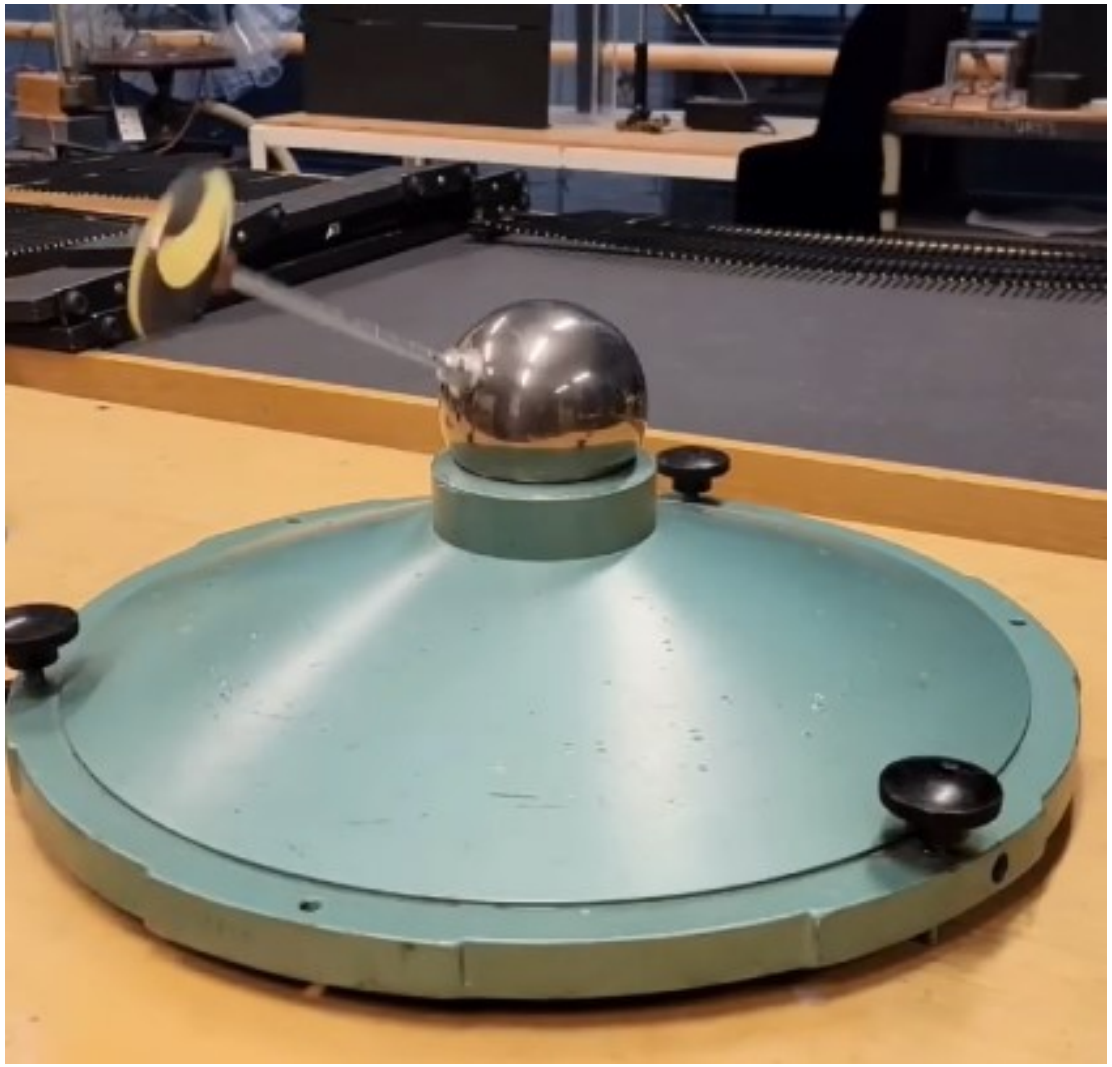
Свободный гироскоп



Гироскоп с грузом – нутации



Тележка с гироскопом

Кельтский камень

Прецессия гироскопа