

Какая математика нужна студенту–физику

А. В. Селиверстов



Физический факультет Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

О проблеме

Готовая математическая теория строится (излагается) как здание: каждый следующий результат опирается на предыдущие и служит надежной основой для последующих.

Возникает иллюзия, что можно так и преподавать:

изложить что-то, проверить, что это усвоено, и затем на это опираться.

Хотя на самом деле обучение ... скорее напоминает перекрытие реки:

первые брошенные камни уходят без следа под воду, ...

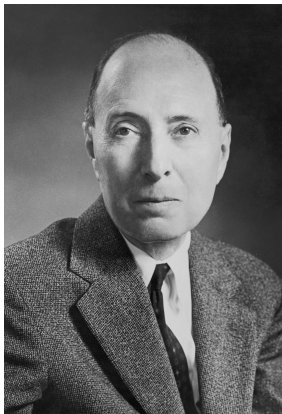
но постепенно русло заполняется и наконец возникает (должна возникать) плотина, надежно удерживающая воду.

О непостижимой (не)эффективности преподавания математики

Александр Шень, с.н.с. ИППИ РАН (Москва), «ТрВ — Наука» № 11, 2021 г.



Непереводимая игра слов



Юджин Пол Вигнер (Eugene Paul Wigner, 1902–1995).
Венгерско-американский физик-теоретик.
Нобелевская премия по физике (1963 г.) «за вклад
в теорию атомного ядра и элементарных частиц,
в частности, за открытие и применение
фундаментальных принципов симметрии».

**«Непостижимая эффективность математики
в естественных науках»** (1960 г.) — статья в журнале
Communications on Pure and Applied Mathematics.



Из эссе *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*

Математические понятия применимы далеко за пределами контекста, в котором они были первоначально разработаны.



Из эссе *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*

Математические понятия применимы далеко за пределами контекста, в котором они были первоначально разработаны.

«Математическая формулировка результатов наблюдений физика, часто довольно грубых, приводит в неправдоподобно многочисленных случаях к удивительно точному описанию большого класса явлений.»



Из эссе *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*

Математические понятия применимы далеко за пределами контекста, в котором они были первоначально разработаны.

«Математическая формулировка результатов наблюдений физика, часто довольно грубых, приводит в неправдоподобно многочисленных случаях к удивительно точному описанию большого класса явлений.»

«Невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет.»



Из эссе *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*

«Математическая формулировка результатов наблюдений физика, часто довольно грубых, приводит в неправдоподобно многочисленных случаях к удивительно точному описанию большого класса явлений.»

«Невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет.»

«Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны.

Мы должны испытывать чувство благодарности за этот дар.»



Из эссе *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*

«Невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет.»

«Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны.

Мы должны испытывать чувство благодарности за этот дар.»

«Это чудо можно сравнить ещё с двумя чудесами:
существованием законов природы
и способностью человеческого мышления раскрывать их.»



Мнение первокурсников физфака



Анкетирование первокурсников

Анкетирование проходило зимой 2024 г. и зимой 2026 г.

На вопросы отвечали 40–55 первокурсников
(примерно 10–15% от численности студентов).

Основной вопрос анкеты:

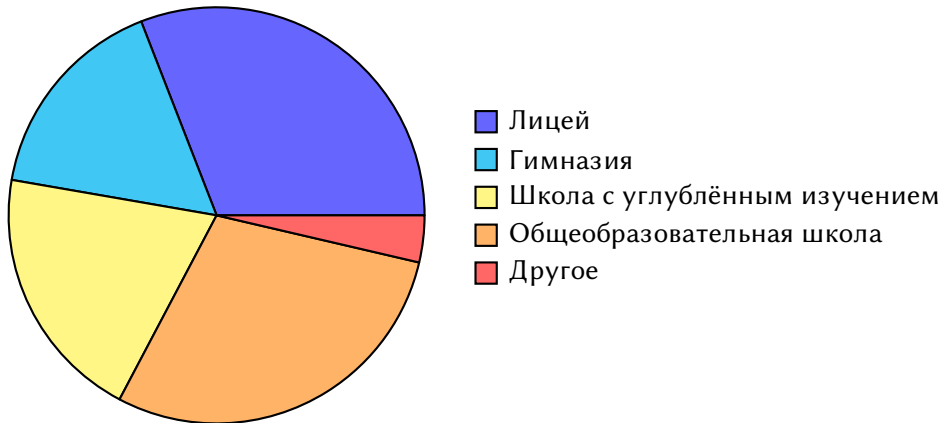
«Какие новые математические факты, приёмы и методы вы узнали в курсе общей физики (по темам)?».

Дополнительные вопросы анкеты:

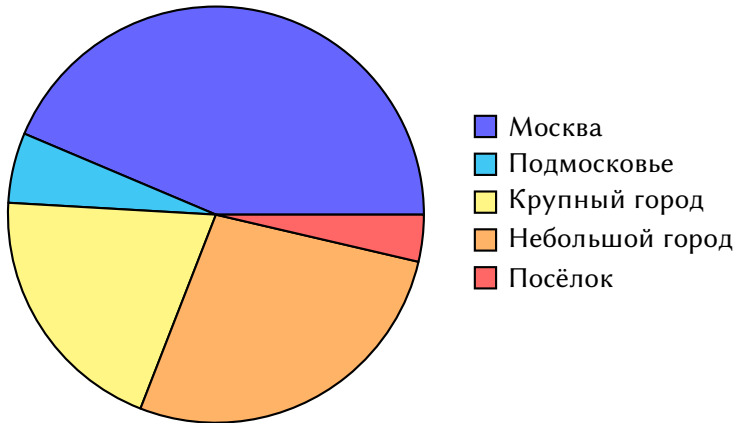
где учился (город, тип школы), как изучал физику и математику.



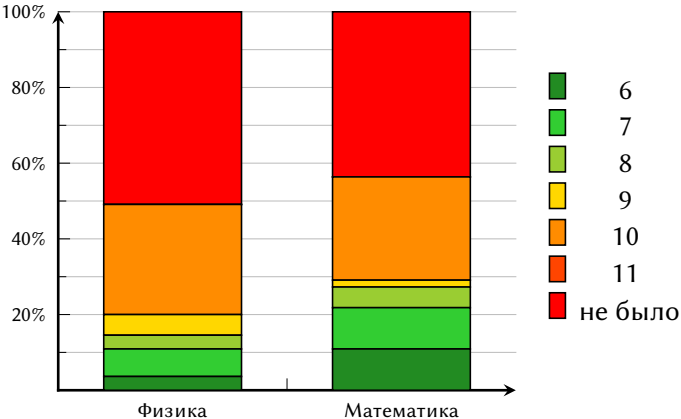
Какую школу заканчивал



Где заканчивал школу



В каком классе началось углубление предметов

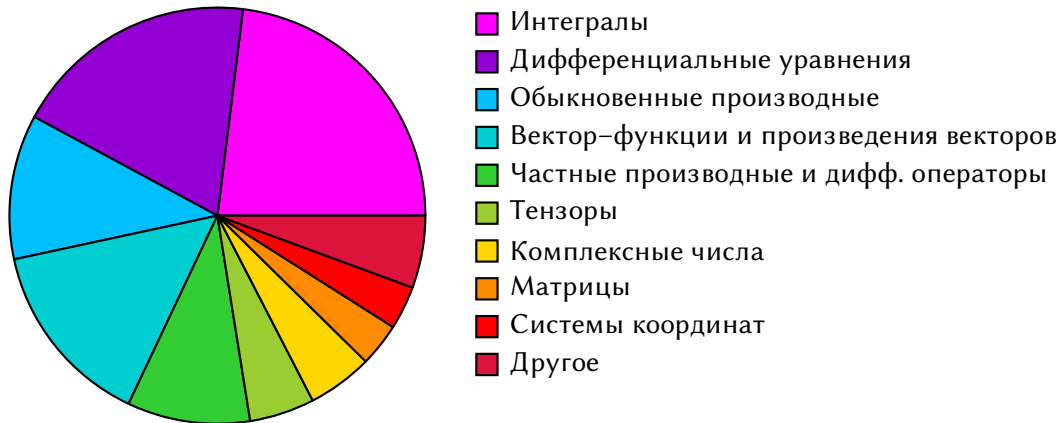


Топ-5 математических проблем

- ▶ **дифференциальное исчисление:**
пределы, обыкновенные производные;
- ▶ **интегральное исчисление:**
обыкновенные, кратные, криволинейные интегралы;
- ▶ **дифференциальные уравнения;**
- ▶ **векторы:**
вектор-функции, векторное и двойное векторное произведение;
- ▶ **функции многих переменных:**
частные производные, дифференциальные операторы.



Проблемы



Кинематика — пролегомен матанализа



Прологомены

(др.-греч. *προλεγόμενα* «предисловие, введение») — рассуждения, готовящие к изучению дисциплины без углубления в сложные детали:

- ▶ формулируют исходные базовые понятия о предмете обучения;
- ▶ дают предварительные сведения о нём;
- ▶ вводят в изучение некоторой дисциплины;
- ▶ показывают, зачем, почему и как она устроена;
- ▶ предварительно знакомят с её методами и задачами;
- ▶ поясняют её статус в системе рационального знания.

Сравните: **пропедевтика** — вводный учебный курс, дающий систематизированные базовые знания для дальнейшего обучения.

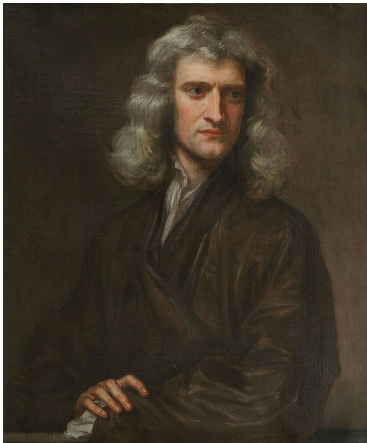


Связь механики и математики

- ▶ мгновенная скорость $v_x(t)$ — обыкновенная производная;
- ▶ измерение мгновенной скорости $\Delta x / \Delta t$ — предел последовательности;
- ▶ закон движения $x(t)$ — функция одной переменной;
- ▶ траектория как след движущейся точки $y(x)$ — уравнение линии;
- ▶ изменение координаты $\Delta x(t)$ и скорость $v_x(t)$ — обыкновенный интеграл;
- ▶ работа силы $A(\Delta x)$ — криволинейный интеграл.



Исаак Ньютон (1642–1727)



Физик, математик, механик и астроном.

Президент Королевского общества.

Управляющий Королевского монетного двора.

Один из создателей классической физики
и математического анализа.



Эпитафия Ньютону

Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, который с почти божественной силой разума первый объяснил с помощью своего математического метода движения и форму планет, пути комет и приливы океанов.

Он был тем, кто исследовал различия световых лучей и проистекающие из них различные свойства цветов, о которых прежде никто и не подозревал. Прилежный, хитроумный и верный истолкователь природы, древности и Святого Писания, он утверждал своей философией величие всемогущего Творца, а нравом насаждал требуемую Евангелием простоту.

Да возрадуются смертные, что среди них жило такое украшение рода человеческого.



Эдмунд Галлей (1656–1742)



Астроном, физик, геофизик, демограф.

Член Лондонского Королевского общества,
иностраный член Парижской Академии наук.
Королевский астроном.

В 1705 г. обнаружил сходство
параметров орбит комет 1531, 1607 и 1682 годов;
предположил, что это одна комета;
в 1716 г. предсказал её появление в 1758 году.



Комета Галлея



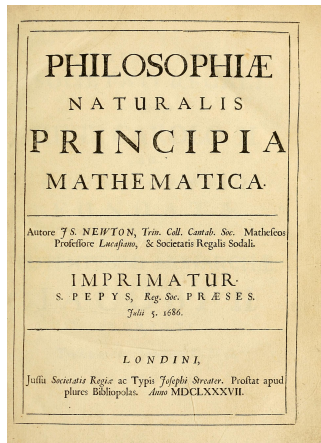
Первая комета, для которой установлена периодичность появления на небе и рассчитана вытянутая эллиптическая орбита:

- ▶ большая полуось 17,8 а.е.;
- ▶ перигелий 0,59 а.е.;
- ▶ афелий 35,1 а.е.;
- ▶ эксцентриситет орбиты 0,97.

Наблюдается с 240 г. до н. э. каждые 75,3 года. Стараниями Галлея её появление в 1682 г. привело к созданию Ньютоном основ современной механики.



«Математические начала натуральной философии» (1687 г.)



Opus magnum Ньютона.

Вырос из трактата «De motu» («О движении»), присланного Ньютоном Галлею в 1864 г., после просьбы Галлея опубликовать его.

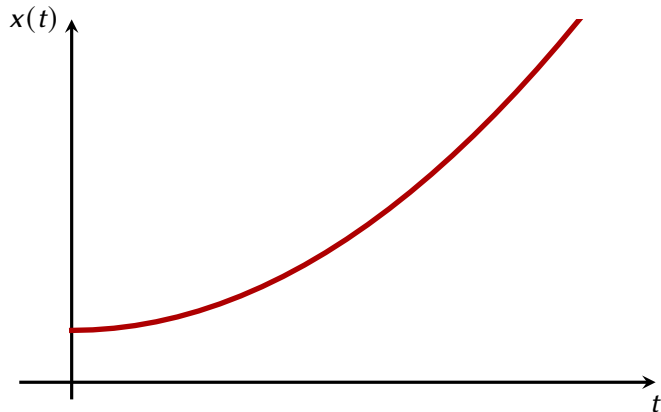
Первая часть представлена
Лондонскому Королевскому обществу в 1686 г.
Вторая и третья части закончены в год издания.



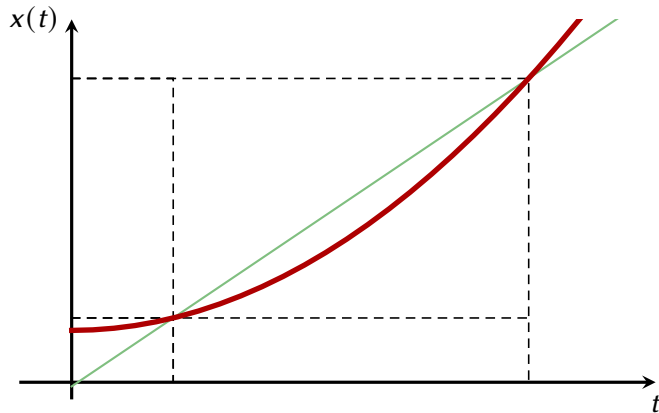
Производные, интегралы, дифференциалы...



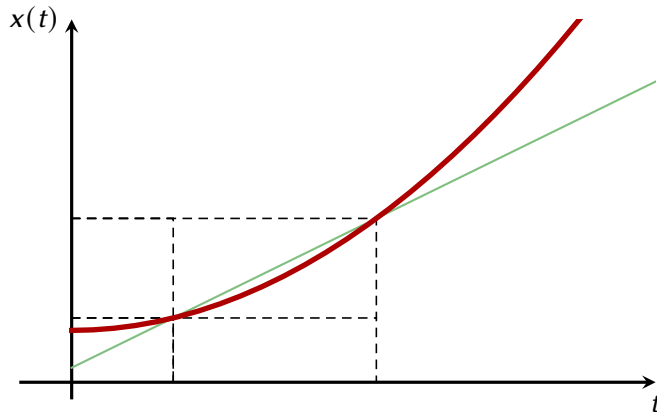
Производная: форма и содержание



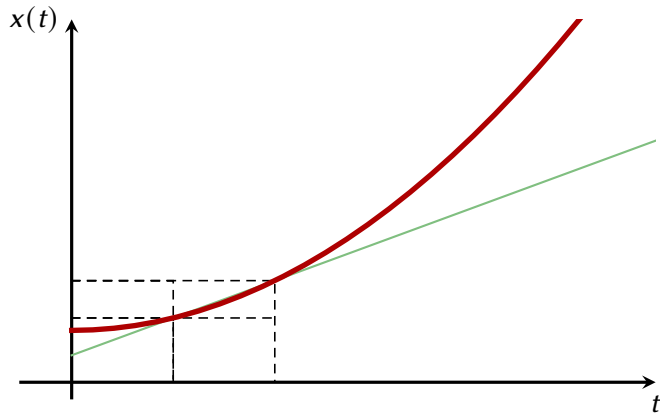
Производная: форма и содержание



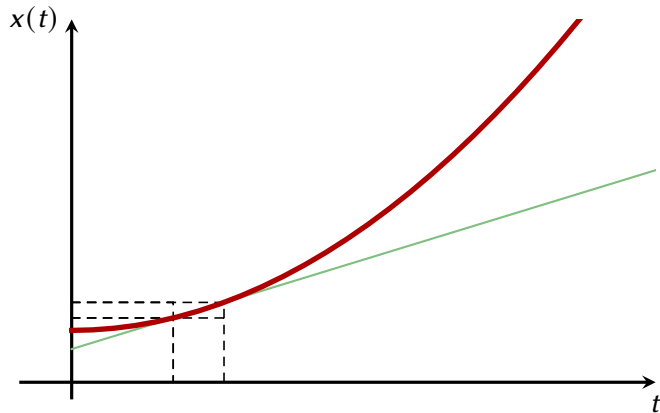
Производная: форма и содержание



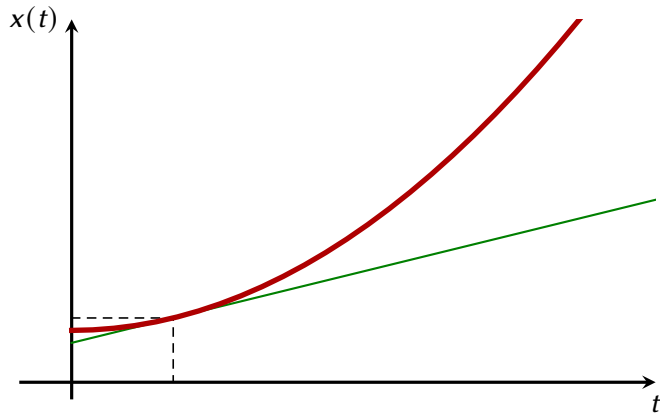
Производная: форма и содержание



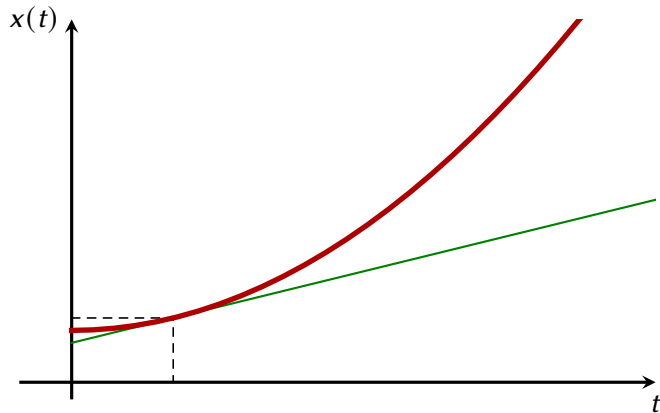
Производная: форма и содержание



Производная: форма и содержание



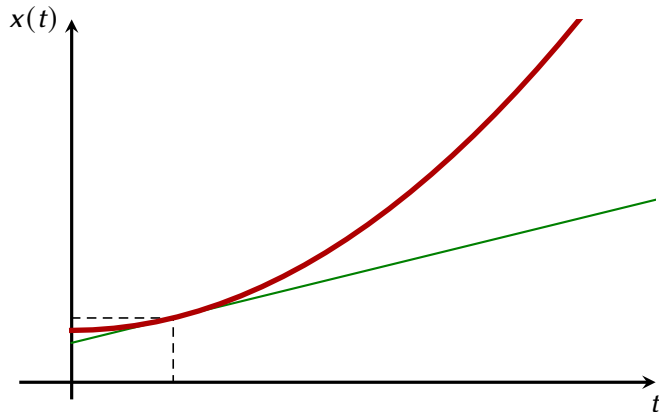
Производная: форма и содержание



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}$$



Производная: форма и содержание



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}$$

И сравните с x' ...



Функции и производные многообразны

$$y(x) \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$f(x) \rightarrow \frac{df}{dx}$$

$$f(t) \rightarrow \frac{df}{dt}$$

$$y(t) \rightarrow \frac{dy}{dt}$$

$$x(t) \rightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$v(t) \rightarrow \frac{dv}{dt}$$

$$v(x) \rightarrow \frac{dv}{dx}$$

$$f(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$



Бесконечно малые в физике

- ▶ Материальная точка $dm = \rho dV$.
- ▶ Элементарное перемещение $d\vec{r}$ и его проекция dx .
- ▶ Элементарная работа $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$.
- ▶ Точечный заряд dq .
- ▶ Элемент тока $I d\vec{\ell}$.
- ▶ Элементарная теплота $dQ = cm dT$.

«С «изобретением» бесконечно малых математика стала естественной наукой.»



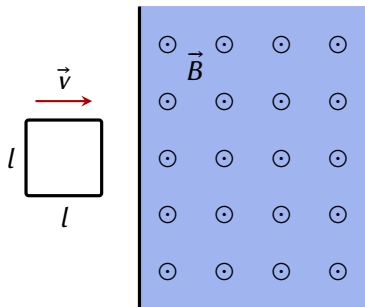
О записи малых величин

$$I = \frac{\Delta q}{t} \text{ или } I = \frac{\Delta q}{\Delta t}?$$



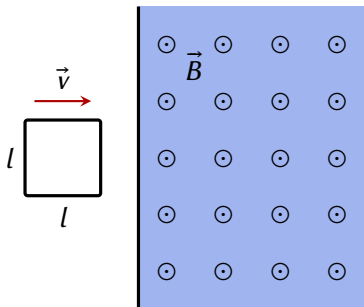
О записи малых величин

$$I = \frac{\Delta q}{t} \text{ или } I = \frac{\Delta q}{\Delta t}?$$



О записи малых величин

$$I = \frac{\Delta q}{t} \text{ или } I = \frac{\Delta q}{\Delta t}?$$

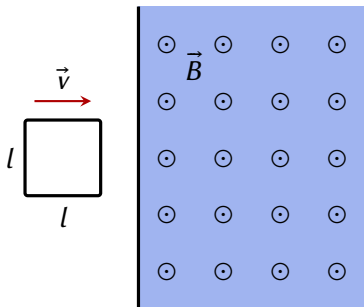


$$s = vt; \Delta S = ls; \Delta \Phi = B \Delta S; \mathcal{E} = \Delta \Phi / \Delta t \dots$$



О записи малых величин

$$I = \frac{\Delta q}{t} \text{ или } I = \frac{\Delta q}{\Delta t}?$$

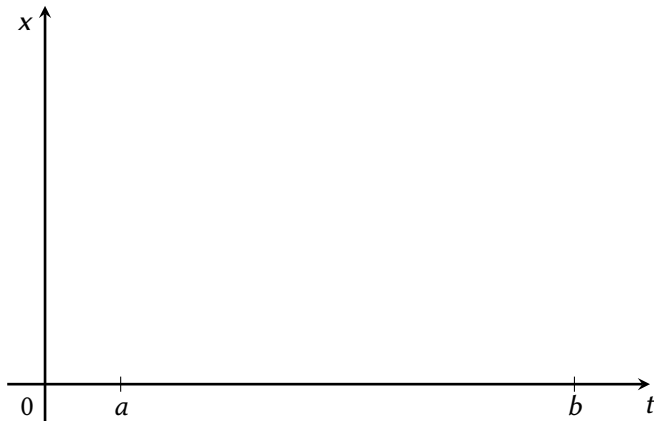


$$s = vt; \Delta S = ls; \Delta \Phi = B \Delta S; \mathcal{E} = \Delta \Phi / \Delta t \dots$$

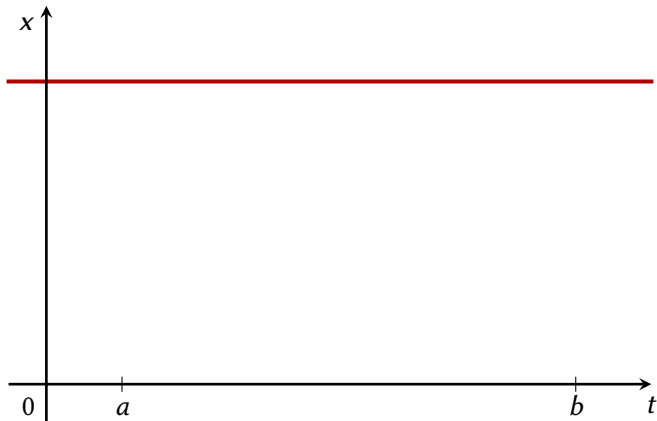
$$\Delta x = v \Delta t; \Delta S = l \Delta x; \Delta \Phi = B \Delta S; \mathcal{E} = \Delta \Phi / \Delta t$$



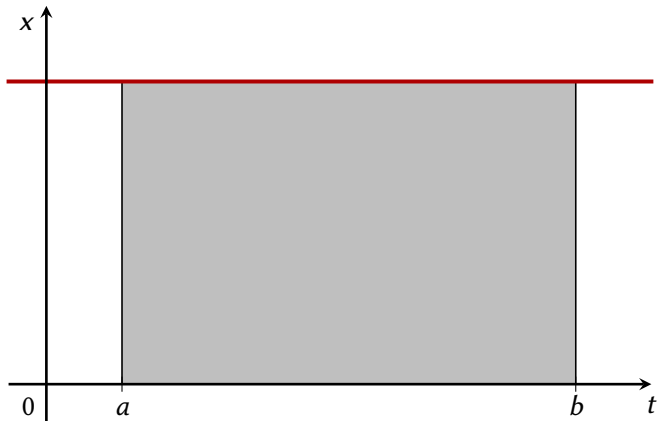
Интегралы



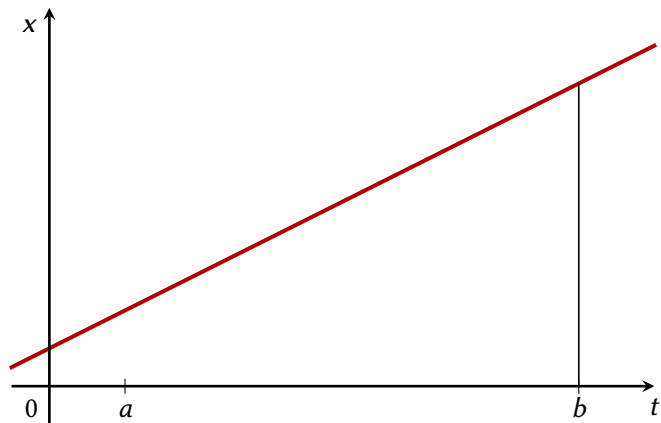
Интегралы



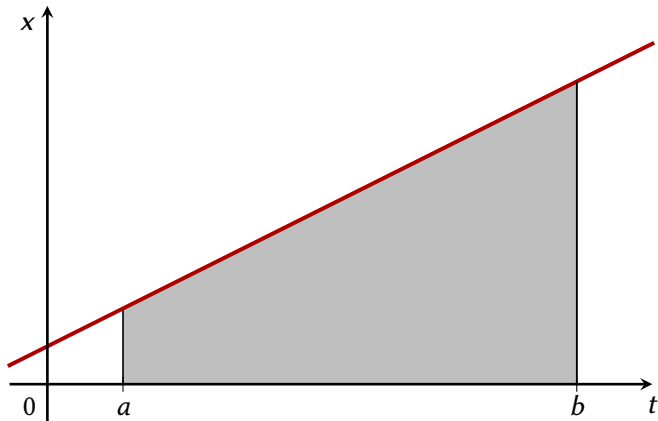
Интегралы



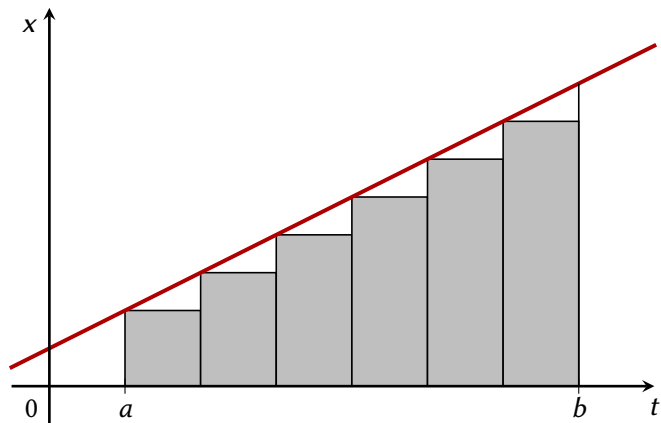
Интегралы



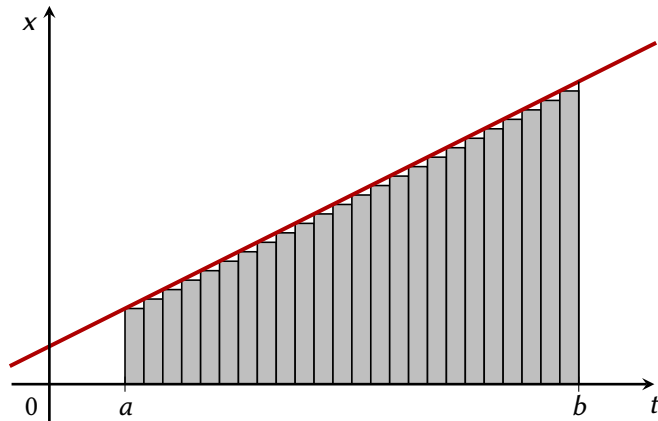
Интегралы



Интегралы



Интегралы



Приближения



Модели



Модели в теории

Для малых углов синус угла равен самому углу в радианах.



Модели в теории

Для малых углов синус угла равен самому углу в радианах.
Что такое «малый угол»?



Модели в теории

Для малых углов синус угла равен самому углу в радианах.

Что такое «малый угол»?

$x, ^\circ$	$x, \text{рад}$	$\sin(x)$	$x - \sin(x)$	$(x - \sin(x))/x$
1	0,01745	0,01745	8,86e-07	5,08e-05
5	0,08727	0,08716	1,11e-04	1,27e-03
10	0,17453	0,17365	8,85e-04	5,07e-03
15	0,26180	0,25882	2,98e-03	1,14e-02
20	0,34907	0,34202	7,05e-03	2,02e-02
30	0,52360	0,50000	2,36e-02	4,51e-02
45	0,78540	0,70711	7,83e-02	9,97e-02





Математик, поработавший с физиками,
научился оценивать, округлять, пренебрегать.

А математика — наука точная...

Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010)



Функции и графики



Физические явления: процесс или результат?



Физические явления: процесс или результат?

Физическое явление — изменение состояния физической системы.



Физические явления: процесс или результат?

Физическое явление — изменение состояния физической системы.

Как отразить это в записи?



Физические явления: процесс или результат?

Физическое явление — изменение состояния физической системы.

Как отразить это в записи?

Дано: $x(t)$; $x(0) = x_0$; $v(0) = v_0$.



Анализ ответа



Запись и анализ ответов

- ▶ Решение в общем виде
- ▶ Размерности производных и интегралов
- ▶ Значение и предел: к чему и как стремится функция.
Например: при $x \rightarrow \infty$ к чему стремится $y = 1/(x + a)$?



Запись и анализ ответов

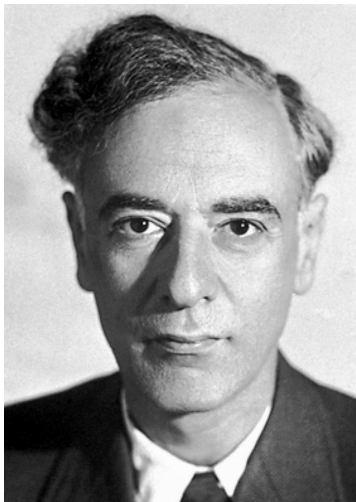
- ▶ Решение в общем виде
- ▶ Размерности производных и интегралов
- ▶ Значение и предел: к чему и как стремится функция.
Например: при $x \rightarrow \infty$ к чему стремится $y = 1/(x + a)$?

Примеры: $a/b \rightarrow 0, 1, \infty, c$; $a \rightarrow a + da$.



Векторы





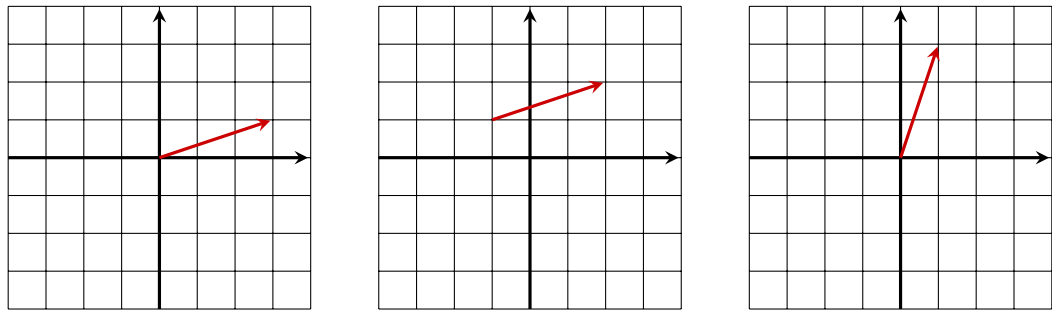
Величайшим достижением
человеческого гения является то,
что человек может понять вещи,
которые он уже не в силах вообразить.

Лев Давидович Ландау (1908–1968)



Что такое вектор?

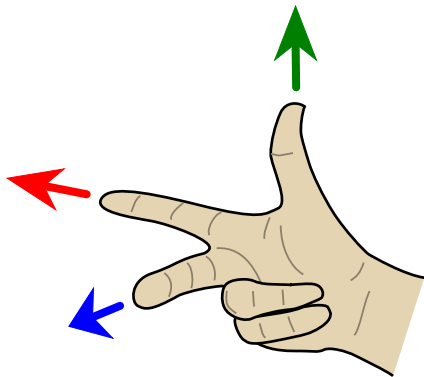
Правда ли, что вектор — это направленный отрезок?



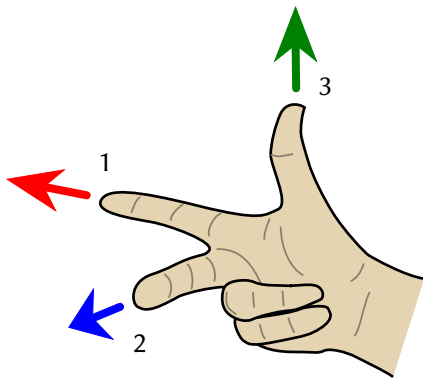
Правило руки



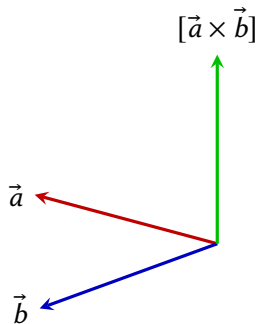
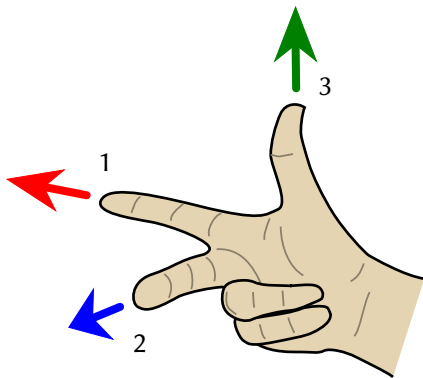
Правило руки



Правило руки



Правило руки



Порядок сомножителей

Сила Лоренца:

сила, действующая на **заряд**, движущийся в магнитном поле.

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Сила Ампера:

сила, действующая на **проводник с током** в магнитном поле.

$$\vec{F} = L[\vec{l} \times \vec{B}].$$

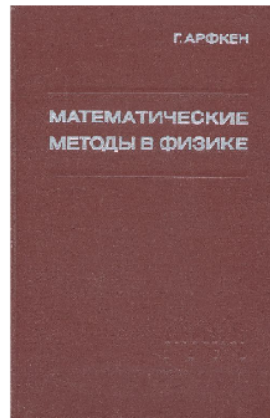


Какие бывают произведения векторов

- ▶ скалярное;
- ▶ векторное;
- ▶ двойное векторное;
- ▶ тройное скалярное (смешанное);
- ▶ псевдоскалярное, тензорное, геометрическое, внешнее...



Что может помочь



Благодарю за внимание!

