МЕТОД АНАЛОГИЙ В ЗАДАЧАХ О МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Грачев А.В.

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, кафедра общей физики

grachev_av61@list.ru

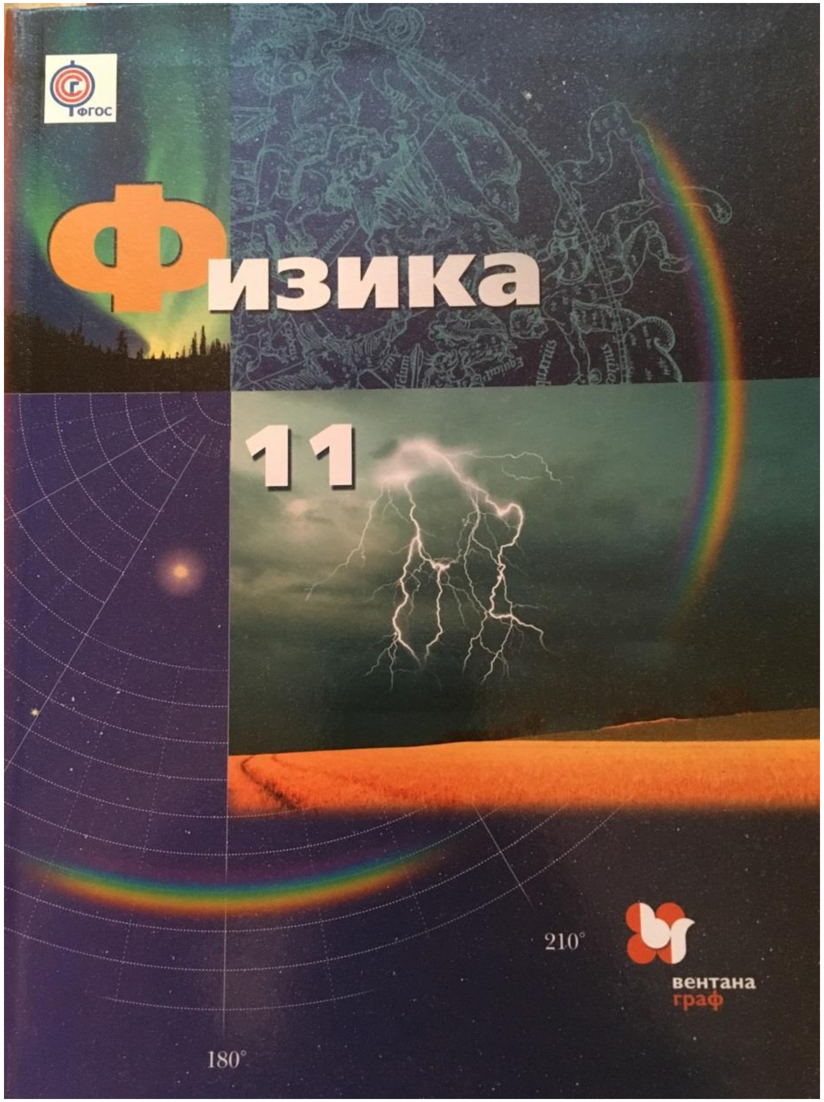
Как достичь успеха в изучении физики?

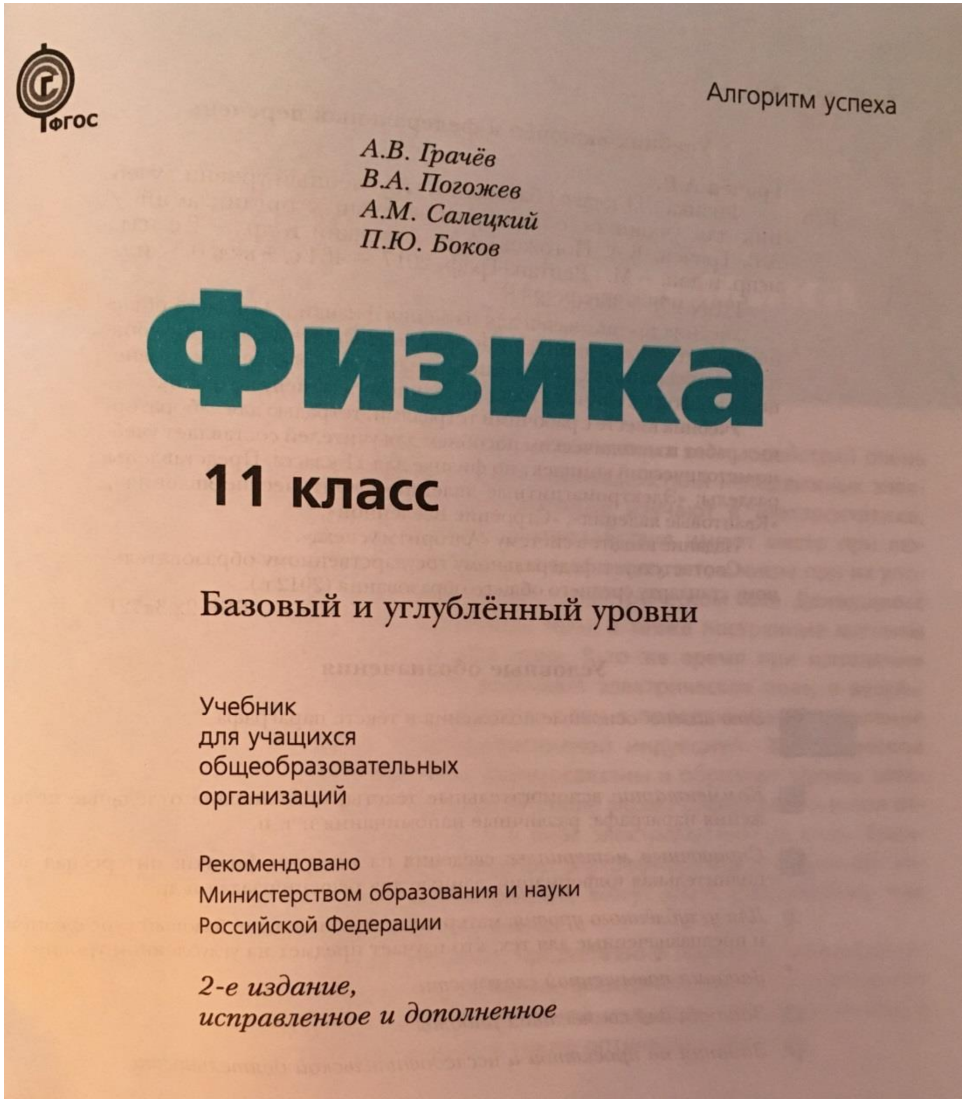
Либо учить

Либо понимать

Выбор за Вами

Есть УМК по физике, который поможет Вашим ученикам ее понимать





Решение задач о гармонических механических колебаниях

Динамический способ

При колебаниях тела массой m вдоль оси X ИСО, начало которой совмещено с положением равновесия, в отсутствие сил трения проекция возвращающей силы $\vec{F}$ противоположна по знаку и пропорциональна его смещению x:

$$F = -k \cdot x.$$

Второй закон Ньютона в проекции на ось X:

$$-k \cdot x = m \cdot a_x = m \cdot \ddot{x}$$

Энергетический способ

Потенциальная энергия системы равна взятой с обратным знаком работе возвращающей силы: $П = \dfrac{k \cdot x^2}{2}$.

Кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}.$$

Механическая энергия системы постоянна:

$$П + K = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} = \text{const}.$$

После *взятия производной* получаем: $k \cdot x + m \cdot \ddot{x} = 0$

Уравнение гармонических колебаний: $\ddot{x} + \dfrac{k}{m} \cdot x = 0$ или $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ — циклическая частота

Решение уравнения гармонических колебаний: $x(t) = x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где x_m — амплитуда, $(\omega \cdot t + \varphi)$ — фаза, φ_0 — начальная фаза колебаний

Зависимости от времени t проекций на ось X скорости, ускорения, потенциальной, кинетической и механической энергий при гармонических колебаниях:

$$v_x(t) = -x_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -v_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$a_x(t) = -x_m \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -a_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$П(t) = \frac{k \cdot x^2(t)}{2} = \frac{k \cdot x_m^2}{2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi), \qquad K(t) = \frac{m \cdot v_x^2(t)}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$E(t) = П(t) + K(t) = \frac{k \cdot x_m^2}{2} \cdot \left[\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\right] = \frac{k \cdot x_m^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2}{2} = \text{const}$$

Решение задач о свободных гармонических электромагнитных колебаниях двумя способами

Пусть заряд пластины конденсатора равен q, сила тока в контуре равна I и потери энергии в контуре пренебрежимо малы.

Тогда

напряжение между пластинами конденсатора равно ЭДС самоиндукции катушки:

$$\frac{q}{C} = -L \cdot \dot{I}.$$

Так как $\dot{I} = \ddot{q}$, то $\frac{q}{C} = -L \cdot \ddot{q}$

энергия электрического поля конденсатора $W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$, энергия магнитного поля катушки $W_м = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{L \cdot \dot{q}^2}{2}$, электромагнитная энергия контура $W = W_м + W_{эл} = \frac{q^2}{2C} + \frac{L \cdot \dot{q}^2}{2} = \text{const}$.

После взятия производной по времени от этого выражения получаем: $L \cdot \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

Уравнение гармонических электромагнитных колебаний: $\ddot{q} + \frac{q}{L \cdot C} = 0$ или $\ddot{q} + \omega^2 \cdot q = 0$,

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ – циклическая частота

Решение уравнения гармонических электромагнитных колебаний (зависимость заряда пластины конденсатора от времени): $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, где q_m – амплитуда заряда

Зависимости от времени силы тока, электрической, магнитной и электромагнитной энергий при гармонических электромагнитных колебаниях: $I(t) = -q_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$,

$$W_{эл} = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi), \qquad W_м = \frac{L \cdot I^2(t)}{2} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$W = W_{эл} + W_м = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \left[\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\right] = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \text{const}$$

$$\boldsymbol{x(t) \rightarrow q(t)}$$

$$\boldsymbol{v(t) = \dot{x}(t) \rightarrow I(t) = \dot{q}(t)}$$

$$\boldsymbol{a(t) = \dot{v}(t) \rightarrow \dot{I}(t) = \ddot{q}(t)}$$

$$-kx = ma = m\ddot{x}$$

$$\frac{q}{C} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$

$$k \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$m \rightarrow L$$

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}$$

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

Графический подход (свободные колебания)

характерные точки $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3}{4}T$ и T.

При $t = 0$ энергия электрического поля максимальна, а энергия магнитного поля равна нулю. Поэтому энергия всей системы равна:

$$W = W_{эл} + W_{магн} = \frac{q_m^2}{2C} + 0 = \frac{q_m^2}{2C}. \quad (1)$$

В промежутке времени от $t = 0$ до $\frac{T}{4}$ заряд q конденсатора уменьшается от q_m до нуля. Напротив, модуль силы тока за это время нарастает от 0 до I_m. Обратим внимание на то, что сила тока в течение этого промежутка времени отрицательна. Такой ток уменьшает заряд q пластины конденсатора. При этом энергия электрического поля уменьшается, а энергия магнитного поля тока увеличивается.

В момент $\frac{T}{4}$ заряд конденсатора становится равным нулю, а модуль

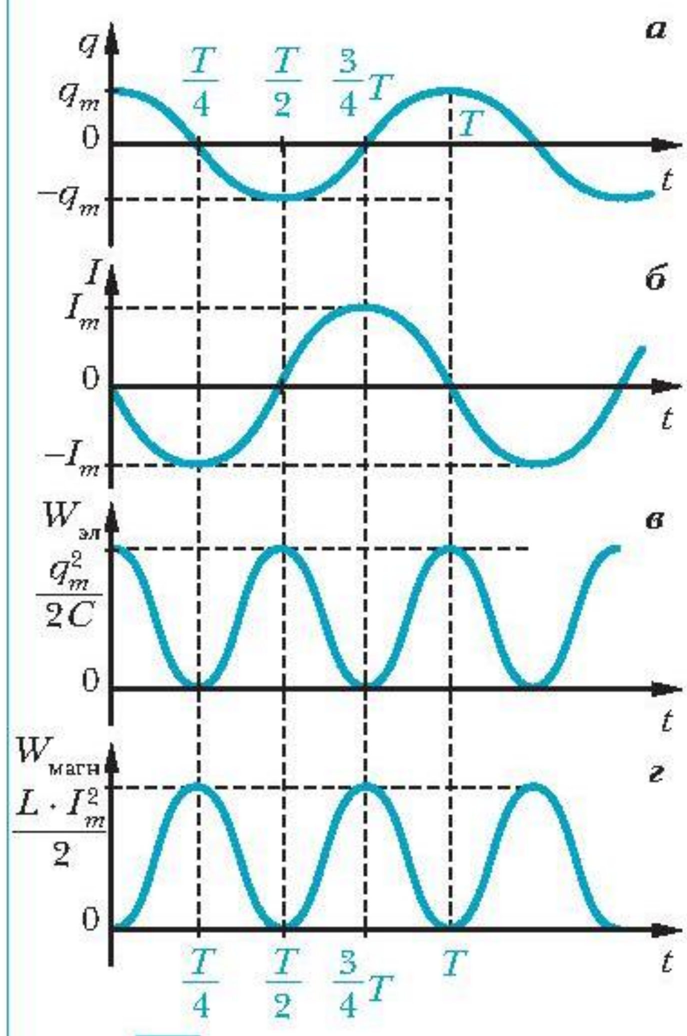


Рис. 139

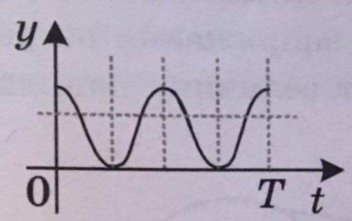
18. В идеальном колебательном контуре происходят электромагнитные колебания. В момент $t = 0$ заряд конденсатора максимален, а сила тока равна нулю. T — период колебаний. Графики А и Б представляют изменения физических величин, характеризующих электромагнитные колебания в контуре.

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

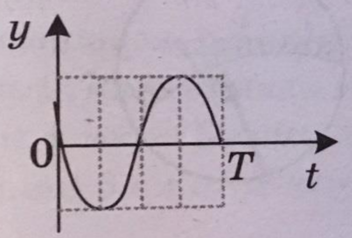
К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами

ГРАФИКИ

А)



Б)



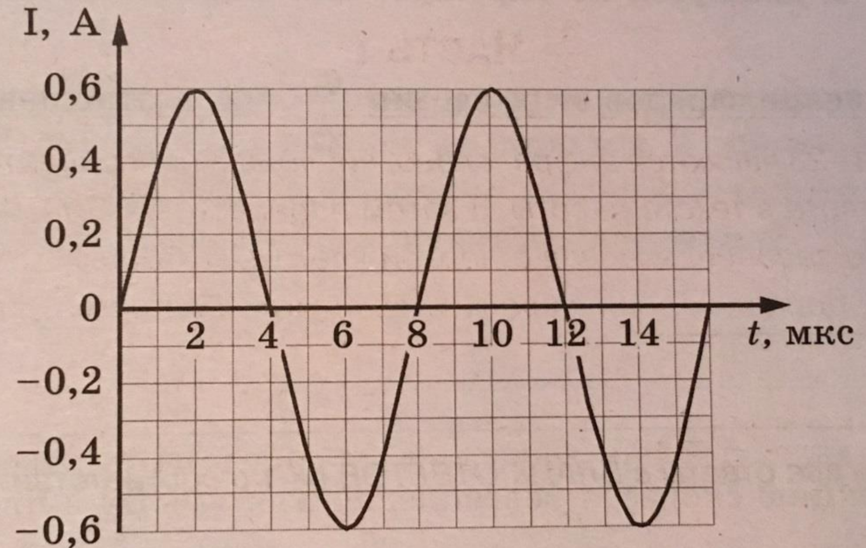
ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1) энергия заряженного конденсатора
2) энергия катушки с током
3) сила тока в контуре
4) заряд на обкладке конденсатора

Ответ:

А	Б

30. Сила тока в идеальном колебательном контуре меняется со временем так, как показано на рисунке. Определите заряд конденсатора в момент времени $t = 3$ мкс.

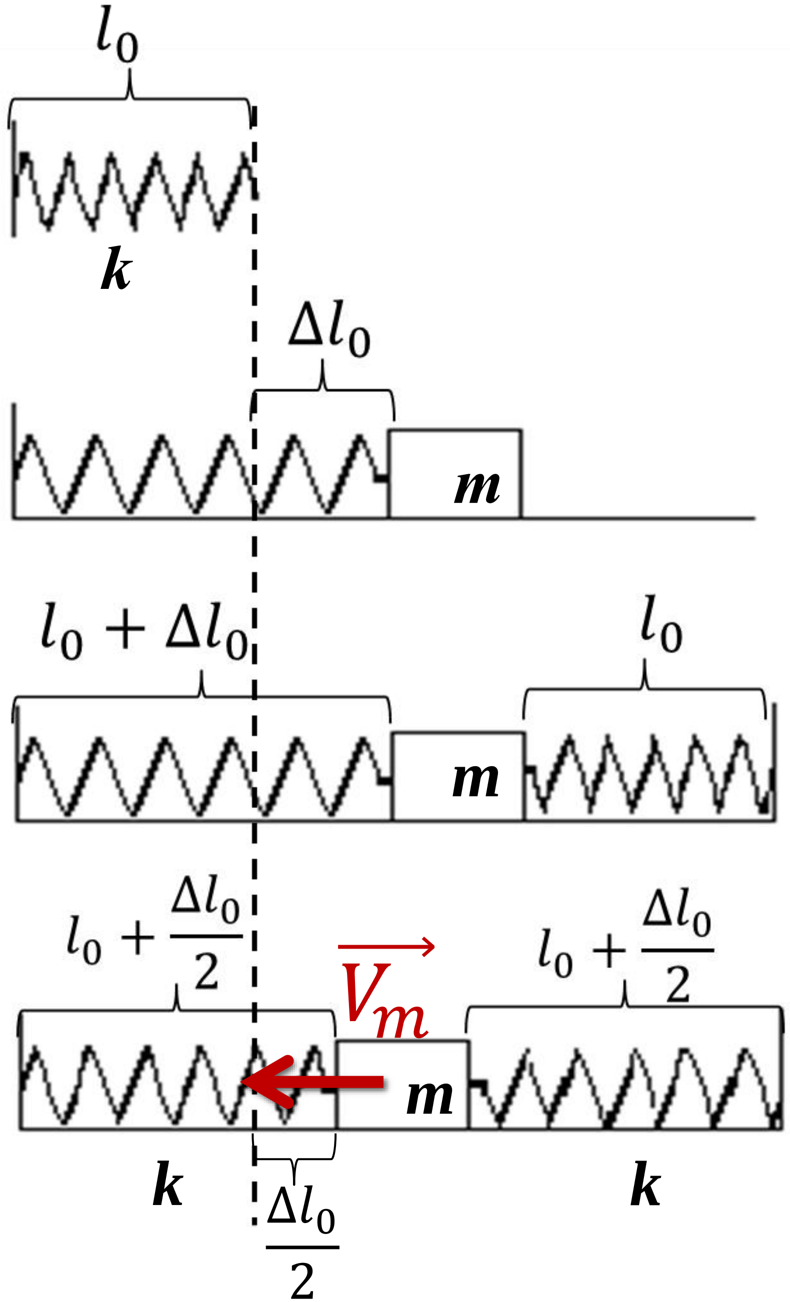


$$П_{\mathbf{0}} + К_{\mathbf{0}} + А_{\boldsymbol{ex}} + А_{тр} = П_{К} + К_{К}$$

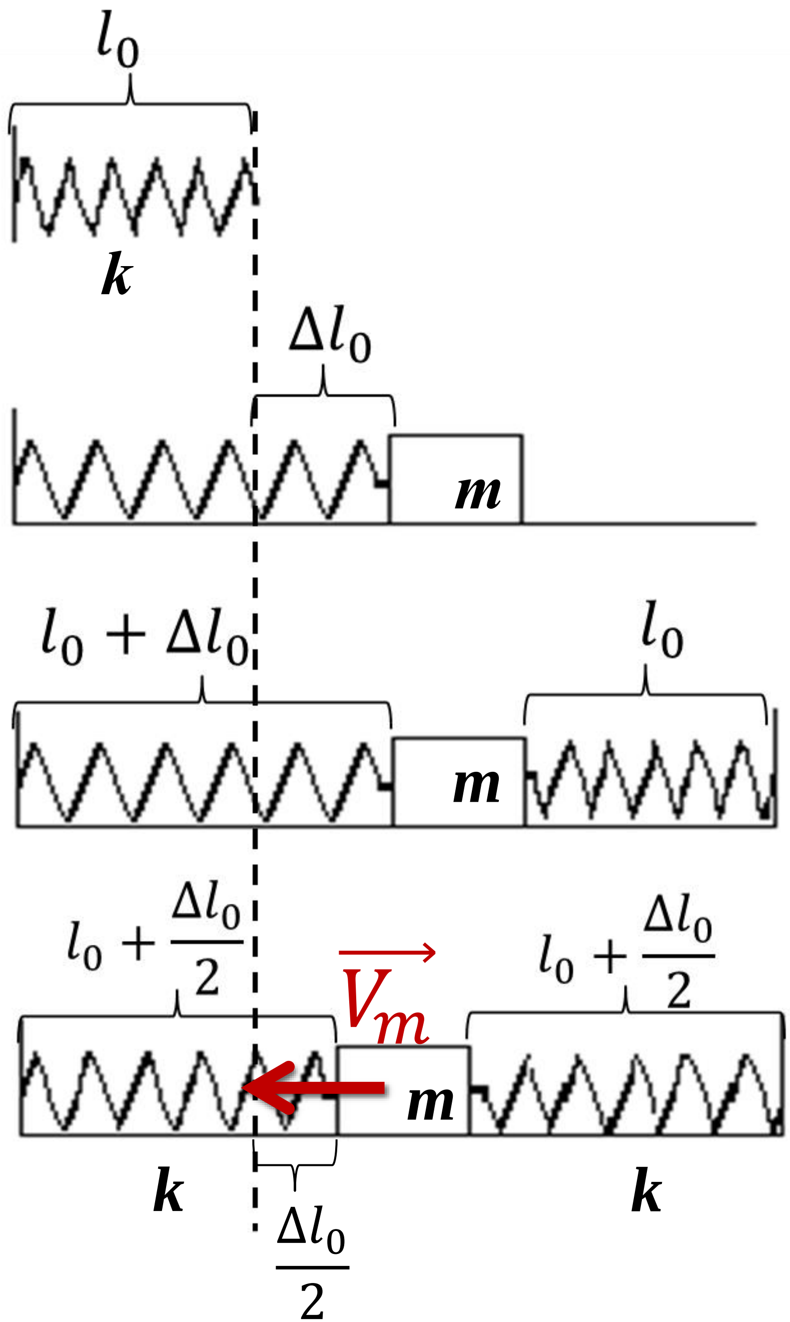
Устанавливаются вынужденные колебания

если $А_{\boldsymbol{ex}} + А_{тр} = \mathbf{0}$, то $\dfrac{\boldsymbol{kx^2}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\boldsymbol{mv^2}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{const}$

если $А_{ист} = \boldsymbol{Q}_{Дж}$, то $\dfrac{\boldsymbol{q^2}}{\mathbf{2}\boldsymbol{C}} + \dfrac{\boldsymbol{LI^2}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{const}$



l_0
k
Δl_0
m
$l_0 + \Delta l_0$
l_0
m
$l_0 + \frac{\Delta l_0}{2}$
$\overrightarrow{V_m}$
$l_0 + \frac{\Delta l_0}{2}$
m
k
$\frac{\Delta l_0}{2}$
k

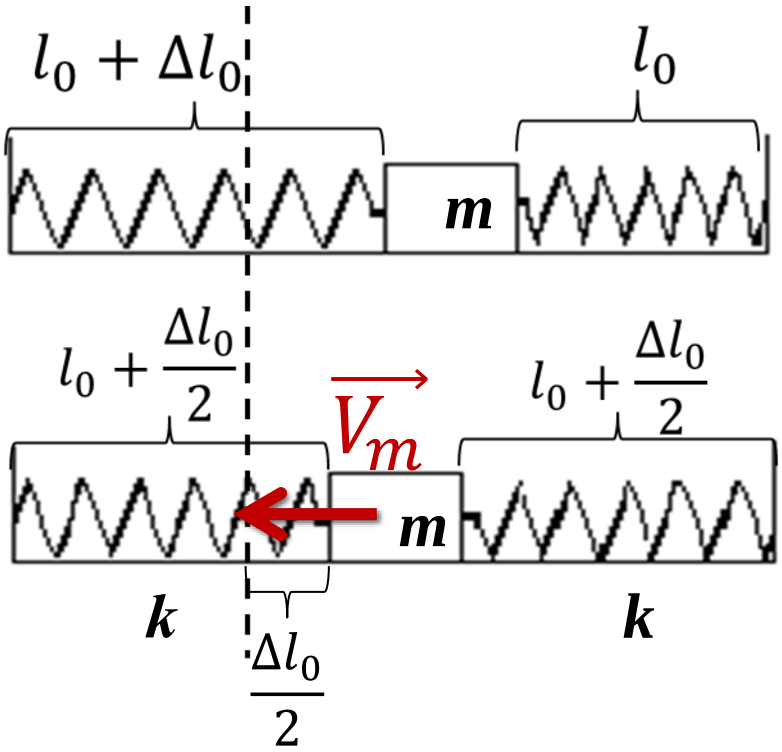


$$\frac{k\Delta l_0^2}{2} - 2\frac{k\left(\frac{\Delta l_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{mV_m^2}{2}$$

$$\Pi_{max} - \Pi_{min} = \frac{mV_m^2}{2} =$$

$$= \frac{2kx_m^2}{2}$$

$$\left(x_m = \frac{\Delta l_0}{2}\right)$$



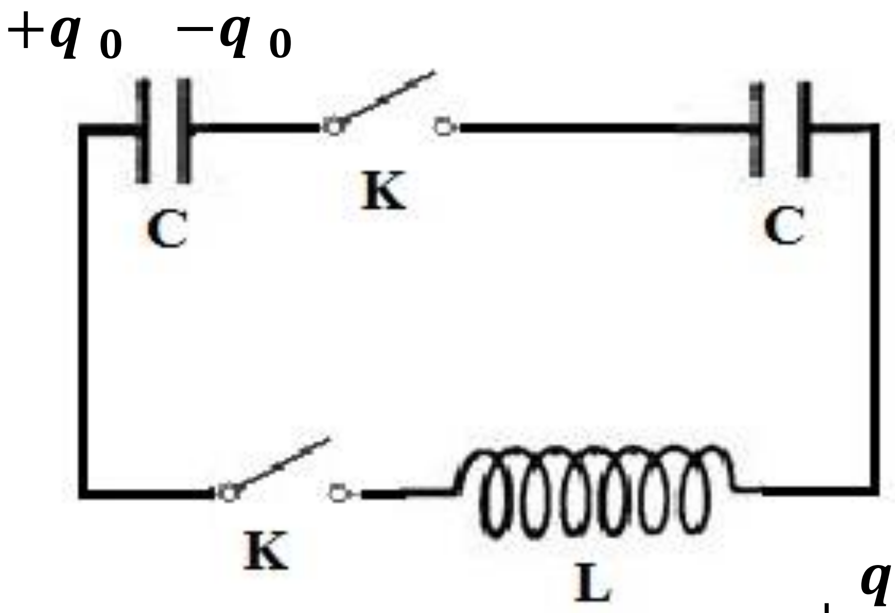
$$\frac{k\Delta l_0^2}{2} - 2\frac{k\left(\frac{\Delta l_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{mV_m^2}{2}$$

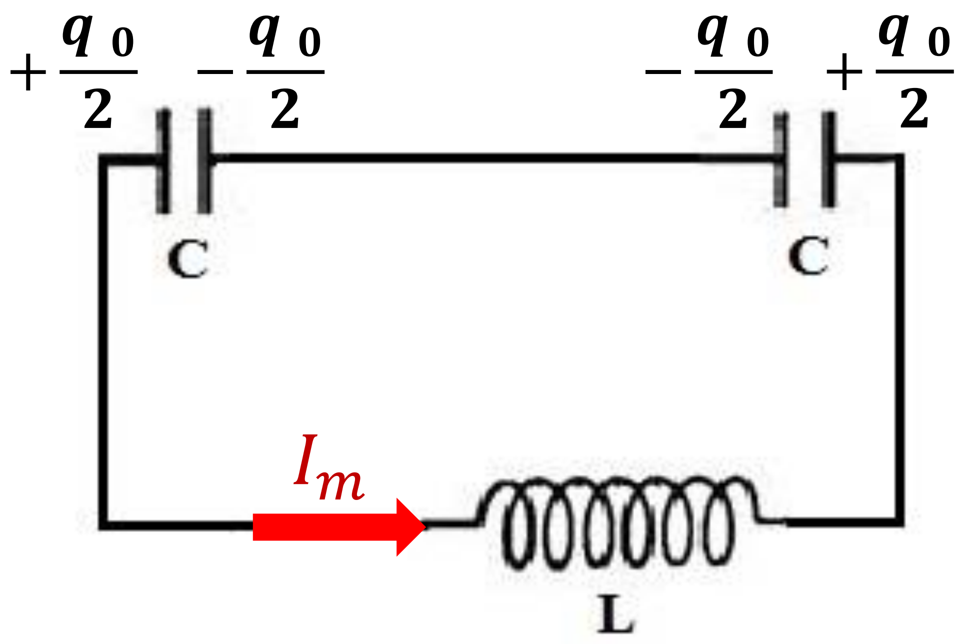
$$\Pi_{max} - \Pi_{min} = \frac{mV_m^2}{2} =$$

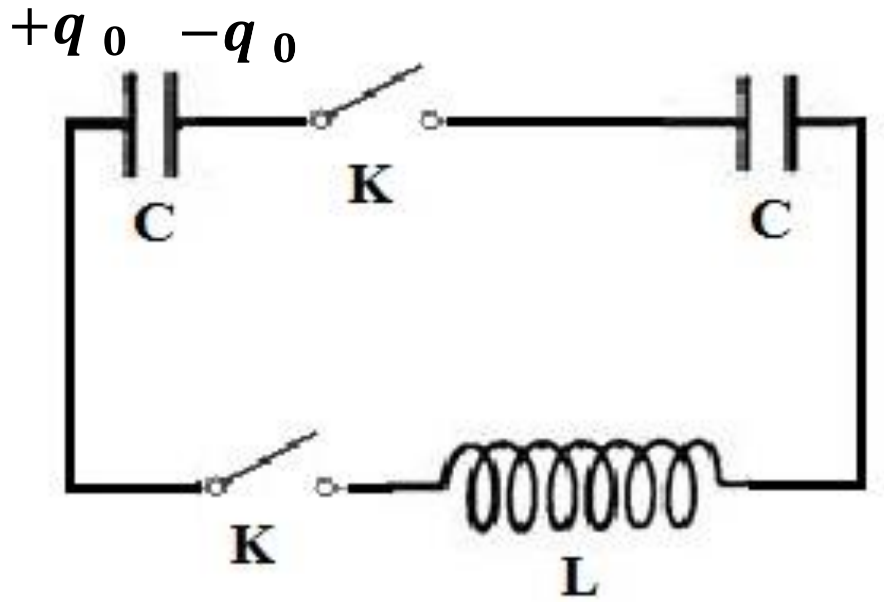
$$= \frac{2kx_m^2}{2}$$

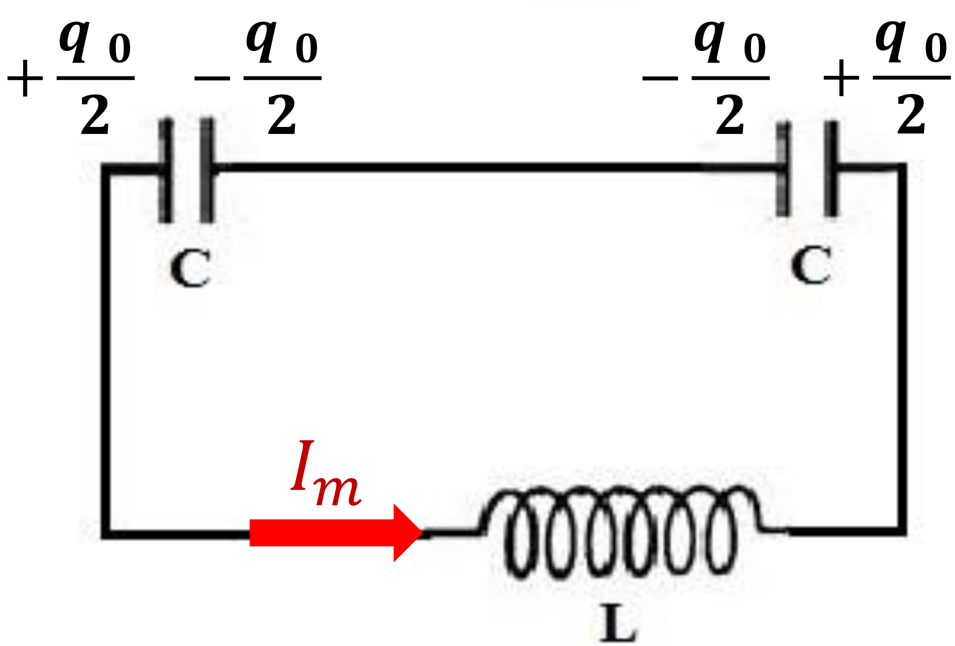
$$\left(x_m = \frac{\Delta l_0}{2}\right)$$

Если $\Pi_{min} = 0$, то $\dfrac{2kx^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{2kx_m^2}{2} = \dfrac{mV_m^2}{2}$


$+q_0$
$-q_0$
C
K
C
K
L

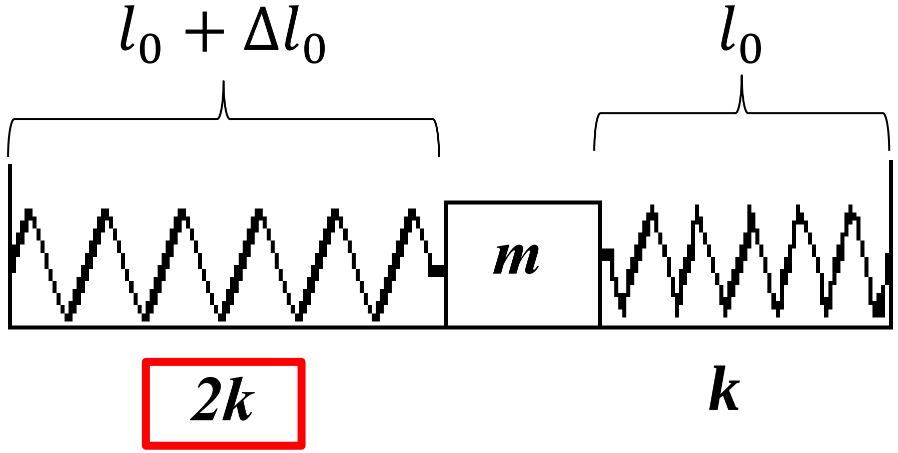

$+\frac{q_0}{2}$
$-\frac{q_0}{2}$
$-\frac{q_0}{2}$
$+\frac{q_0}{2}$
C
C
I_m
L





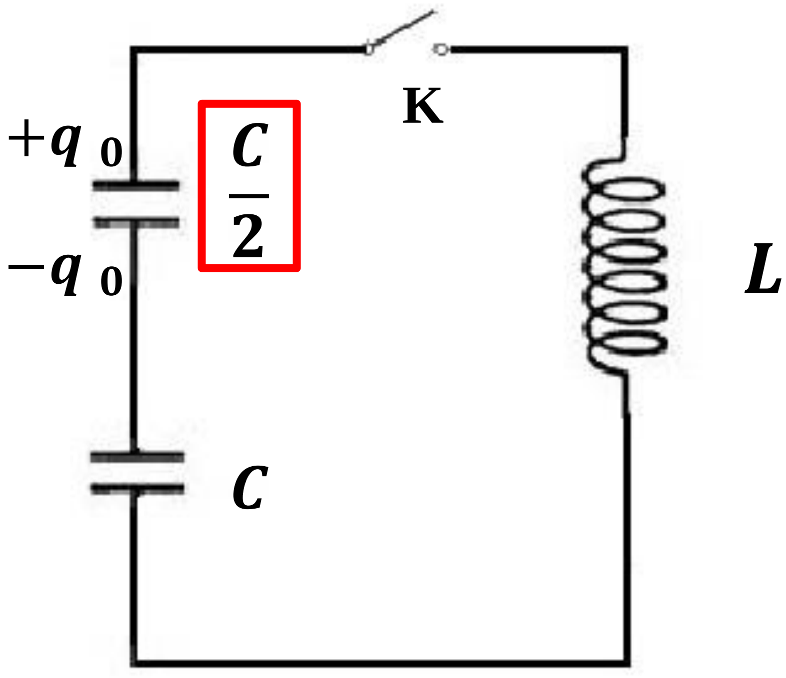
$$\frac{q_0^2}{2C} - 2\frac{\left(\frac{q_0}{2}\right)^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

$$W_{эл\,max} - W_{эл\,min} = \frac{LI_m^2}{2}$$



$$V_0 = 0, V_m = ?$$

По аналогии



$$I_0 = 0, I_m = ?$$

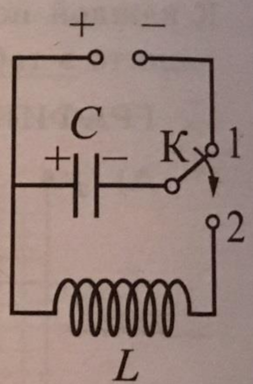
5. Груз массой 0,1 кг подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной 40 см. В результате небольшого толчка груз пришел в движение. В таблице приведена зависимость высоты груза h относительно положения равновесия от времени t. На основании данных, приведенных в таблице, выберите два верных утверждения о движении груза.

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h, см	0	12	20	12	0	12	20	12	0

1) Период колебаний груза 4 с.
2) В момент времени 2 с скорость груза максимальна.
3) В промежуток времени от 1 до 5 с кинетическая энергия груза достигла минимального значения 2 раза.
4) В момент 6 с кинетическая энергия груза равна 0.
5) Максимальная скорость груза равна 2 м/с.

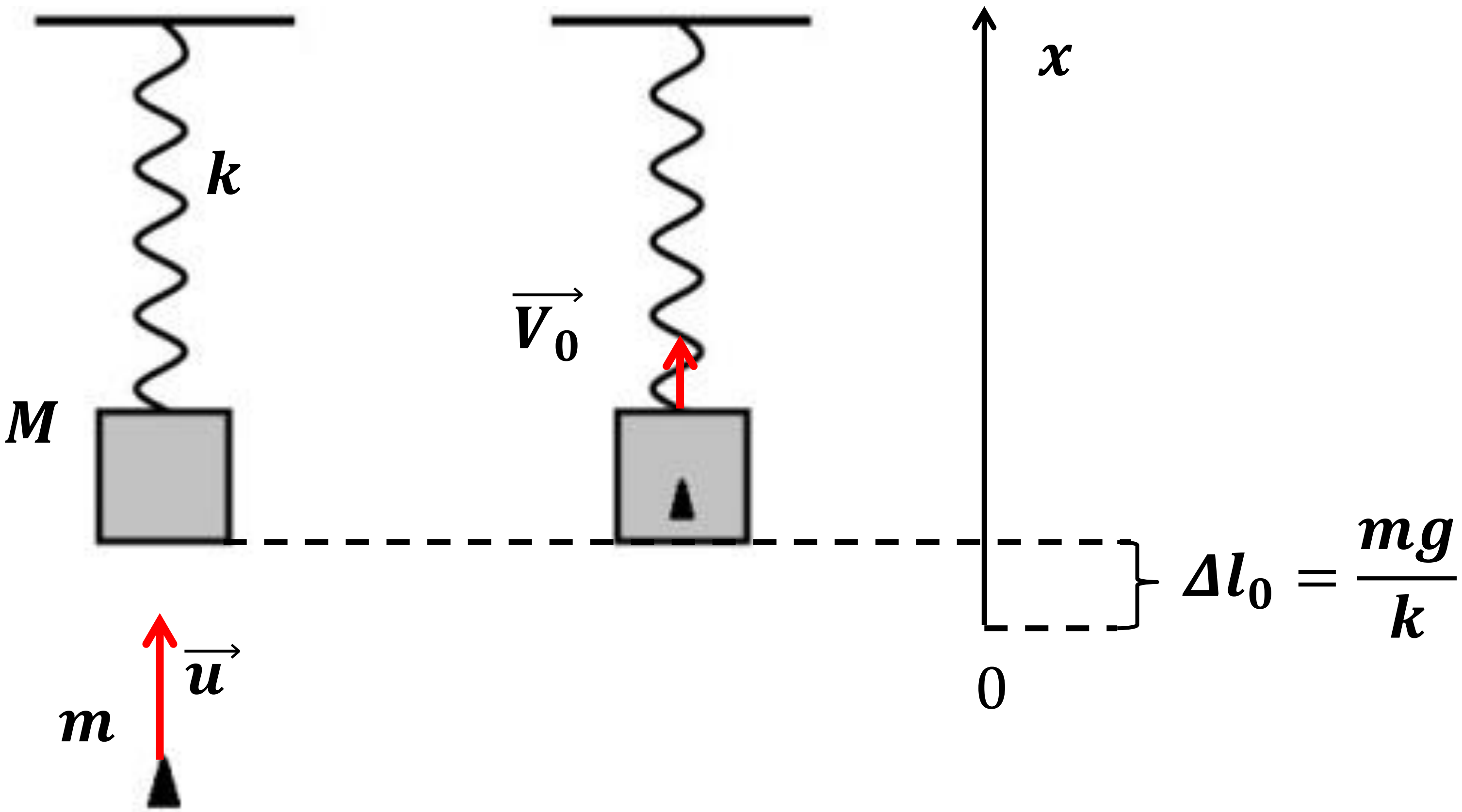
Ответ: | | |

16. Конденсатор колебательного контура длительное время подключен к источнику постоянного напряжения (см. рис.). В момент времени $t = 0$ переключатель К переводят из положения 1 в положение 2. Выберите два верных утверждения о процессах, которые будут происходить в контуре после переключения ключа в положение 2. Сопротивлением контура пренебречь.

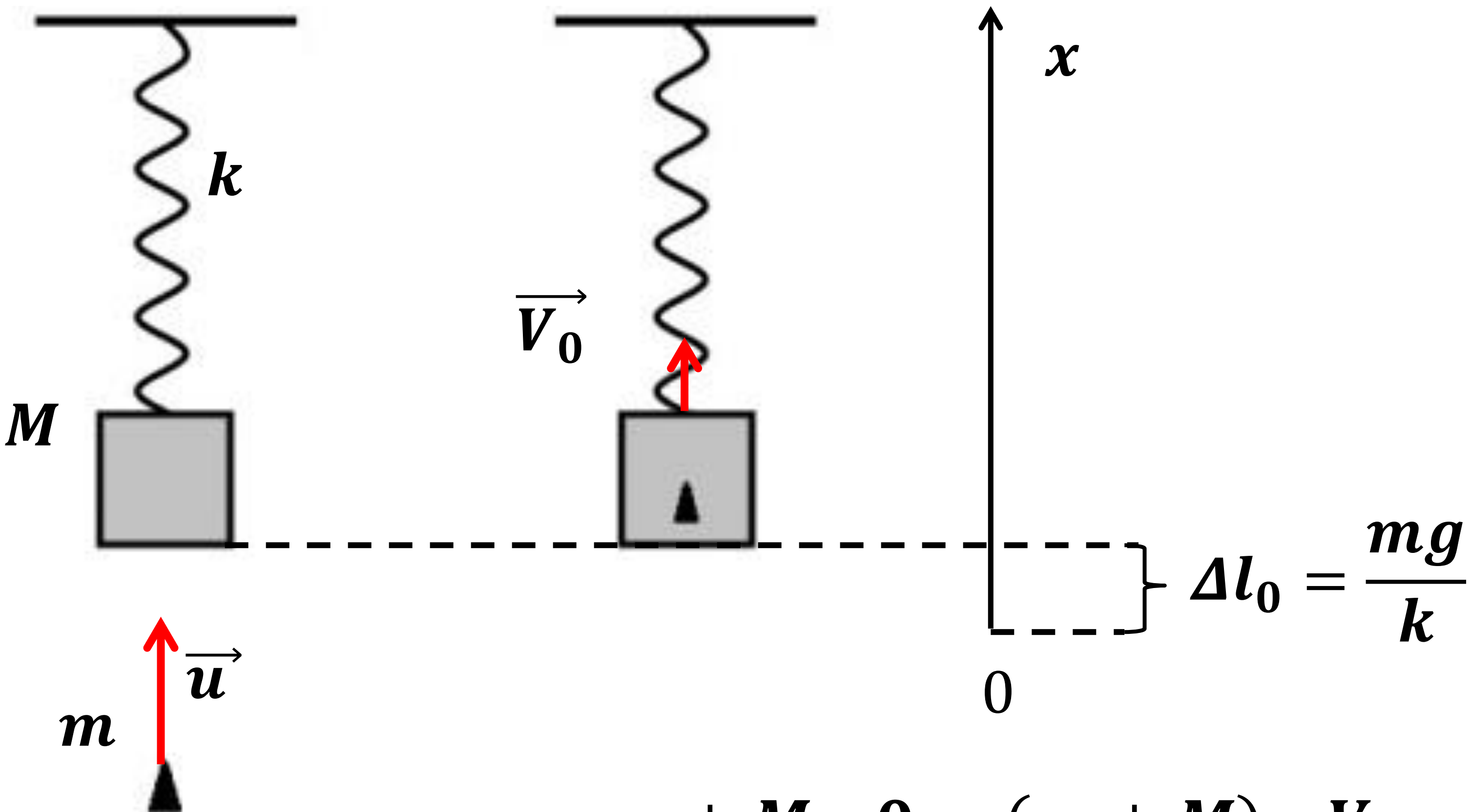


1) Сила тока через катушку будет постоянной.
2) В контуре начнутся электромагнитные колебания.
3) В контуре будет выделяться тепло.
4) Заряд на левой обкладке конденсатора сразу после переключения начнет уменьшаться.
5) Энергия конденсатора сразу после переключения ключа начнет увеличиваться.

Ответ: | | |



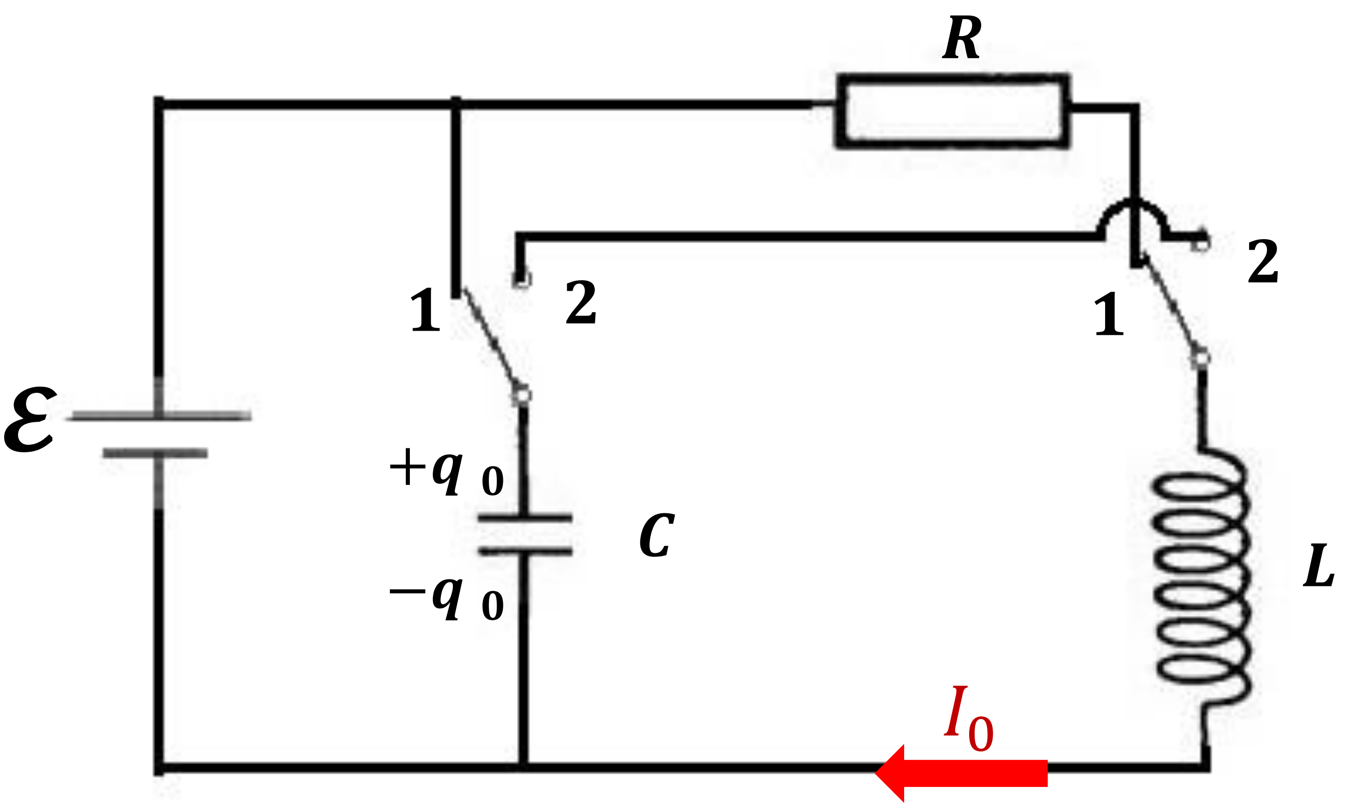
k
M
$\overrightarrow{V_0}$
$\overrightarrow{u}$
m
x
0
$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$



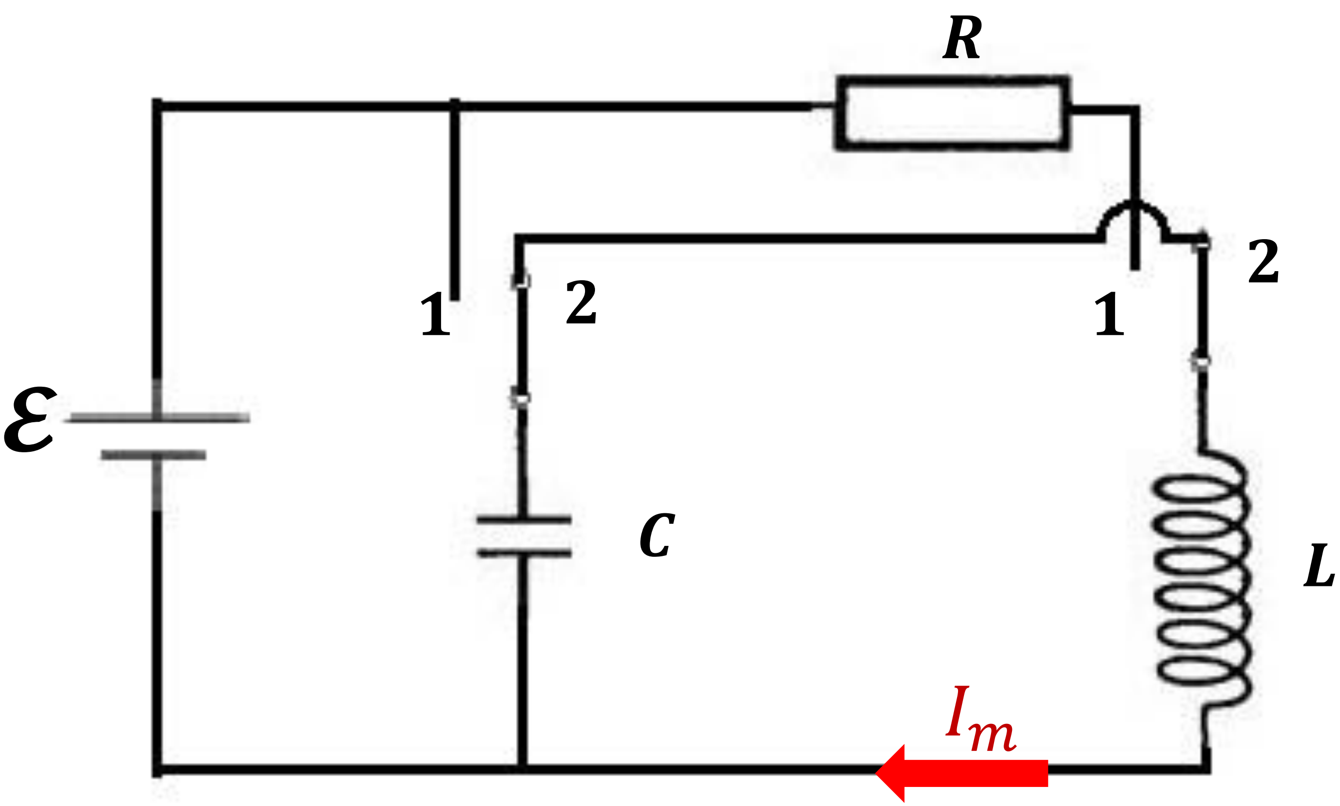
$$mu + M * 0 = (m + M) * V_0$$

$$\Pi_0 + \text{К}_0 = \frac{k\Delta l_0^2}{2} + \frac{(m + M)V_0^2}{2} = const =$$

$$= \frac{kx_m^2}{2} = \frac{(m + M)V_m^2}{2}$$

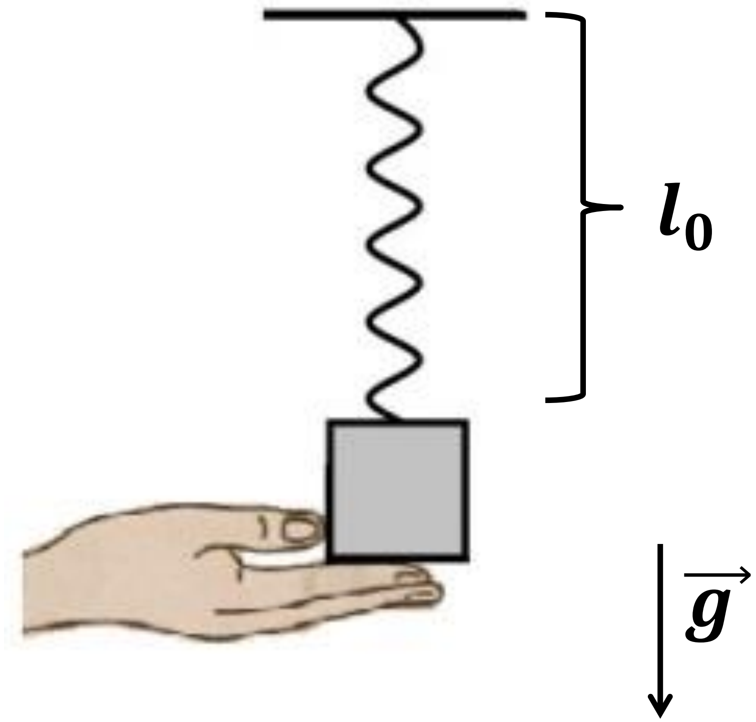


$$\mathcal{E} = \frac{q_0}{C} = I_0 R$$

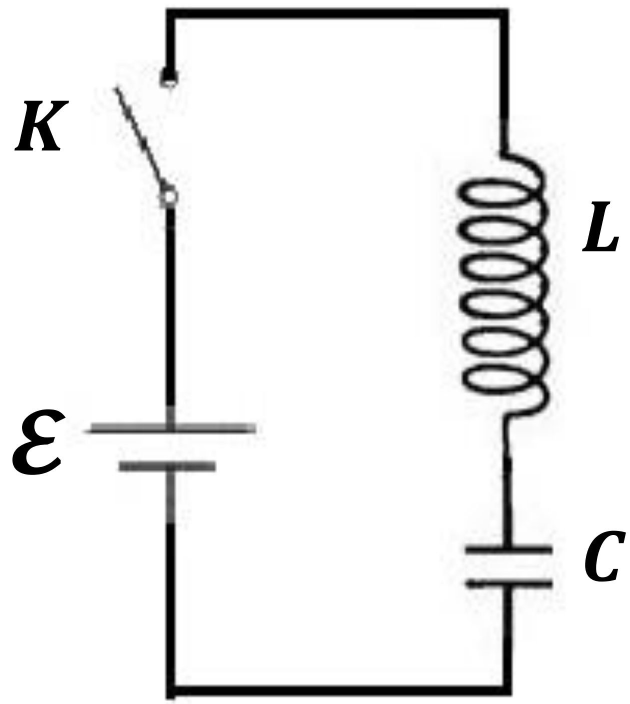


$$\mathcal{E} = \frac{q_0}{C} = I_0 R$$

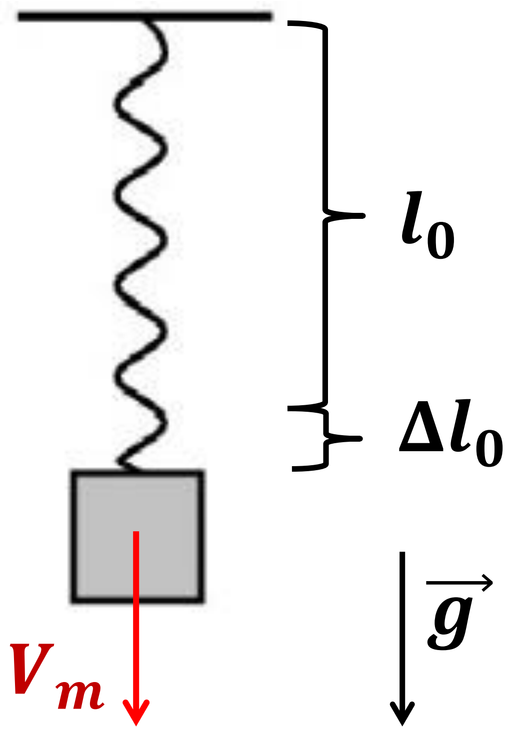
$$\frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

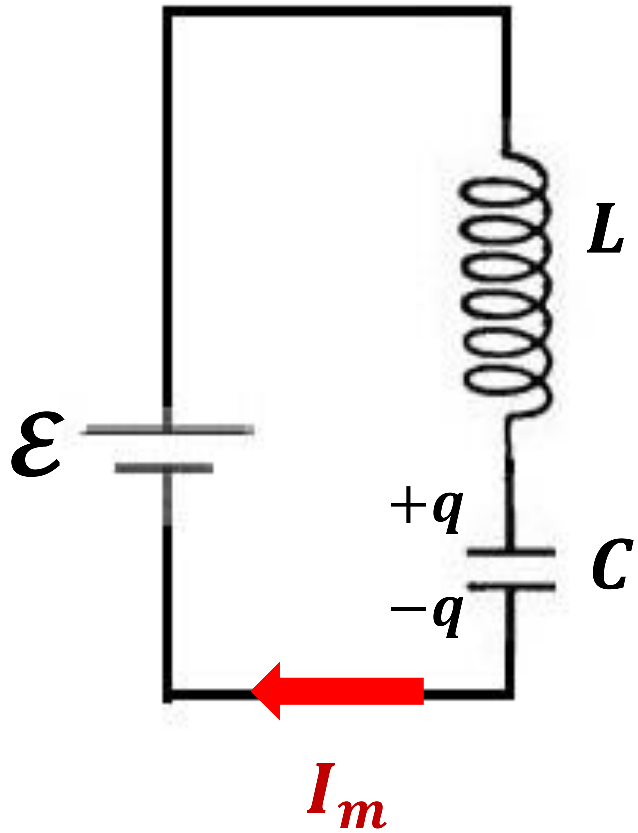


Отпускаем



Замыкаем



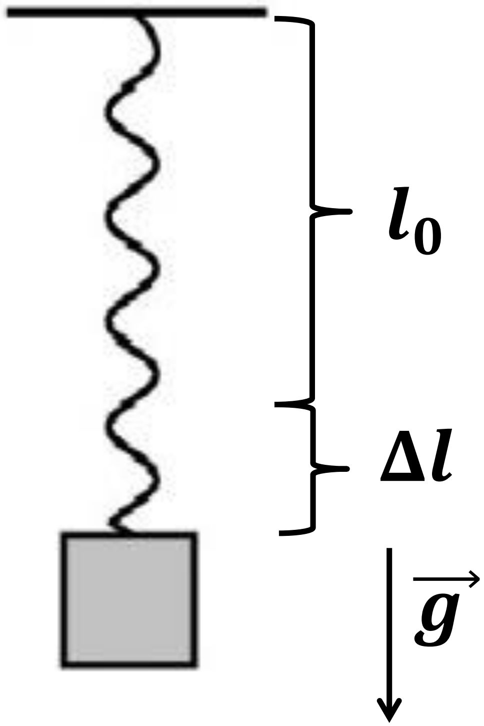


$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$$

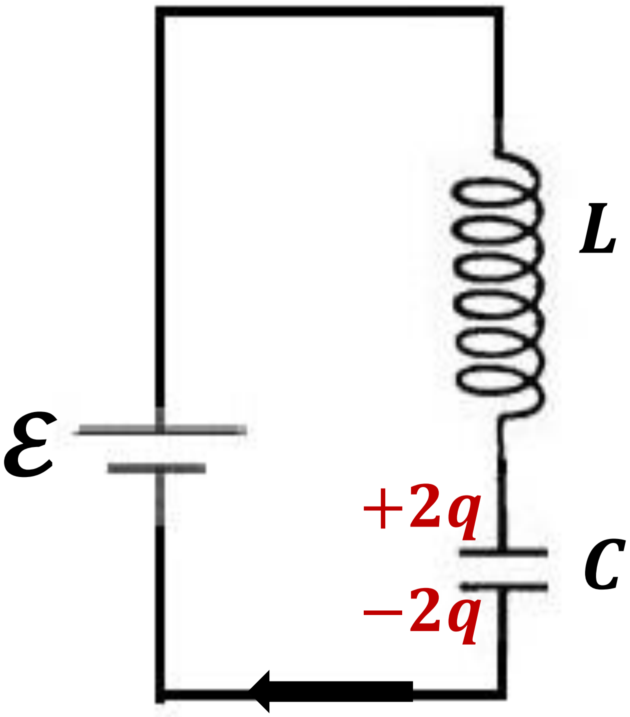
Положение равновесия!

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C}$$

Положение равновесия!



$V = 0$



$I = 0$