Олимпиада Ломоносов 2015 год (заключительный этап)

1. Как определяется вектор перемещения материальной точки? Каковы его проекции на координатные оси?

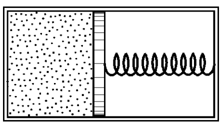
Задача. Мальчик стреляет маленьким шариком из закрепленной игрушечной пушки, стараясь попасть в цель, находящуюся на расстоянии L = 10 м по горизонтали от пушки и на некоторой высоте выше нее, причем шарик вылетает из ствола пушки с фиксированной начальной скоростью. Мальчик экспериментально определил, что попасть в цель можно, установив ствол пушки под единственно возможным углом $\alpha_0 = 67{,}5^{\circ}$ к горизонту. На какой высоте H находится цель? Сопротивлением воздуха и размерами пушки можно пренебречь. Ответ приведите в метрах, округлив до целых.

Решение. Для описания движения шарика будем использовать координатную систему XOY с началом в точке вылета шарика из пушки, ось OX направим горизонтально, а ось OY – вертикально. Уравнение траектории шарика в выбранной системе имеет вид: $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)$. Положив $x = L,\ y = H$ и введя обозначение $\xi = \mathrm{tg}\,\alpha$, получим квадратное уравнение относительно ξ, а именно $\xi^2 - \dfrac{2v_0^2}{gL}\xi + \left(1+\dfrac{2v_0^2 H}{gL^2}\right) = 0$. По теореме Виета корни этого уравнения удовлетворяют равенствам $\xi_1 + \xi_2 = \dfrac{2v_0^2}{gL}$, $\xi_1\xi_2 = 1+\dfrac{2v_0^2 H}{gL^2}$. Согласно условию данное уравнение имеет единственное положительное решение $\xi_1 = \xi_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_0$. Это возможно, если $\dfrac{v_0^2}{gL} = \mathrm{tg}\,\alpha_0$ и $1+\dfrac{2v_0^2 H}{gL^2} = \mathrm{tg}^2\,\alpha_0$. Отсюда $H = L\dfrac{\mathrm{tg}^2\,\alpha_0 - 1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0} = -L\,\mathrm{ctg}\,2\alpha_0 = 10$ м.

Ответ: $H = L\dfrac{\mathrm{tg}^2\,\alpha_0 - 1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0} = -L\,\mathrm{ctg}\,2\alpha_0 = 10$ м;

2. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

Задача. Гладкий поршень делит на две части закрытый с двух сторон цилиндр, лежащий горизонтально. В левой части цилиндра находится идеальный одноатомный газ, а в правой – вакуум и упирающаяся в поршень пружина, причем ее длина в недеформированном состоянии равна расстоянию между внутренними сторонами торцевых стенок цилиндра за вычетом толщины поршня. В начальном состоянии объем газа равен V_1 = 1 л, а давление равно $p_1 = 10^5$ Па. Определите количество теплоты Q, которое нужно передать газу, чтобы его объём увеличился в n = 2 раза.

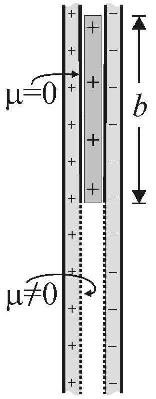


Решение. $p = kV/S^2$, где k – жёсткость пружины, а S – площадь сечения поршня. При этом деформация пружины $x = V/S$. При $V_2 = nV_1$ деформация пружины станет в n раз большей, давление газа станет $p_2 = np_1$, а его температура от первоначальной $T_1 = p_1V_1/\nu R$ должна увеличится до $T_2 = n^2T_1$. Поэтому согласно первому закону термодинамики газ должен получить $Q = 1{,}5\nu R\left(T_2 - T_1\right) + 0{,}5k\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \left(1{,}5+0{,}5\right)p_1V_1\left(n^2-1\right)$.

Ответ: $Q = 2p_1V_1\left(n^2-1\right)$= 600 Дж.

3. Дайте определение напряженности электрического поля. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Задача. Две тонкие непроводящие плиты большого размера расположены вертикально и закреплены параллельно друг другу. Верхняя часть боковых сторон плит, обращенных к друг к другу, гладкая, а нижняя − шероховатая. Стороны плит, обращенные друг к другу, равномерно заряжены равными по модулю и противоположными по знаку зарядами с поверхностной плотностью $\sigma = \pm 60$ мкКл/м^2. В зазор между плитами помещена равномерно заряженная диэлектрическая пластинка массой m = 50 г и длиной b = 10 см, несущая заряд q = 0,3 мкКл. Толщина пластинки чуть меньше ширины зазора между плитами. Пластинку отпускают без начальной скорости из положения, при котором ее нижний край находится на границе шероховатой части плит (см. рисунок). С какой скоростью v будет двигаться пластинка в тот момент, когда она окажется целиком между шероховатой частью боковых плит? Коэффициент трения между пластинкой и плитами в их шероховатой части $\mu = 0{,}25$. Электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Поляризационными эффектами можно пренебречь.



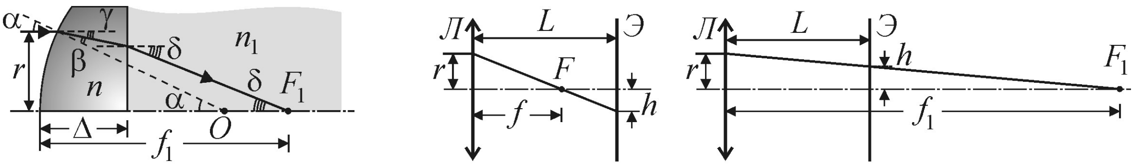
Решение. Напряженность электрического поля, созданного заряженными плитами в зазоре между ними, по модулю равна $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Поэтому пластинка прижимается к правой плите с силой $F = \dfrac{q\sigma}{\varepsilon_0}$. Сила трения скольжения между пластинкой и плитой изменяется по линейному закону от нуля в верхнем положении пластинки до μF в ее нижнем положении. Следовательно, работа силы трения на перемещении пластинки из верхнего в нижнее положение равна $A_{\text{тр}} = -\dfrac{1}{2}\mu F \cdot b = -\dfrac{\mu q \sigma b}{2\varepsilon_0}$. По закону изменения механической энергии имеем равенство $\dfrac{mv^2}{2} - mgb = A_{\text{тр}}$. Из записанных равенств находим, что $v = \sqrt{b\left(2g - \dfrac{\mu q \sigma}{\varepsilon_0 m}\right)}$.

Ответ: $v = \sqrt{b\left(2g - \dfrac{\mu q \sigma}{\varepsilon_0 m}\right)} = 1$ м/с.

4. Какие линзы называются тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Тонкая собирающая плосковыпуклая линза с радиусом кривизны сферической поверхности R изготовлена из стекла с абсолютным показателем преломления n и размещена в воздухе так, что её плоская поверхность параллельна экрану, находящемуся от неё на расстоянии L. На сферическую поверхность линзы падает узкий параллельный пучок света, ось симметрии которого совпадает с главной оптической осью линзы. Определите абсолютный показатель преломления n_1 прозрачного вещества, которым следует заполнить пространство между линзой и экраном, чтобы диаметр светлого пятна от прошедшего через линзу света на экране не изменился.

Решение. На рисунке *а* показан ход крайнего луча падающего на линзу пучка света в случае, когда показатель преломления среды за линзой равен n_1, а перед линзой находится воздух. Так как по условию пучок света узкий и линза тонкая, то все углы на рисунке являются малыми, мала и толщина Δ линзы по сравнению с её фокусным расстоянием. Согласно закону преломления $\beta = \frac{\alpha}{n}$, $\delta = \gamma \frac{n}{n_1}$. Поскольку $\gamma = \alpha - \beta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha$, то $\delta = \frac{n-1}{n_1}\alpha$. Учитывая, что $r = \alpha R = \delta f_1$, получаем, что в рассматриваемом случае падающий пучок должен собираться за линзой на расстоянии $f_1 = R\frac{n_1}{n-1}$. Если же линза находится в воздухе, то её фокусное расстояние равно $f = \frac{R}{n-1}$. Согласно рисункам *б* и *в* $\frac{h}{r} = \frac{L-f}{f} = \frac{f_1 - L}{f_1}$, а потому $\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{L}$. Следовательно, $n_1 = \frac{L(n-1)}{2R - L(n-1)}$, если $L < \frac{2R}{n-1}$, иначе решения нет.



а *б* *в*

Ответ: $n_1 = \frac{L(n-1)}{2R - L(n-1)}$, если $L < \frac{2R}{n-1}$, иначе решения нет.