Умеете ли Вы правильно округлять?

Митин И.В.

При проведении экспериментальных исследований результат измерения физической величины x обычно принято записывать в виде:

$$x = \hat{x} \pm \Delta x, \tag{1}$$

где $\hat{x}$ - оценка истинного значения физической величины;

Δx - оценка погрешности измерения (стандартного отклонения или доверительного интервала).

При расчетах с использованием современных технических средств каждое из этих чисел в десятичной записи состоит из большого числа цифр, поэтому чрезвычайно важно провести корректное округление полученного результата. Ведь при данной процедуре вносится дополнительная погрешность, называемая погрешностью округления, которая, понятно, не должна превосходить остальных погрешностей. Но при этом важно также исключить в записи те цифры, которые являются избыточными и не несут никакой информации.

Попробуем сначала на небольших примерах сформировать собственные представления об округлении на основе «соображений здравого смысла», а потом уже укажем, что об этом говорится в литературе. При этом попутно дадим некоторые важные определения.

1. Пусть, например, в процессе измерений путем расчета по «умным» формулам (такие формулы можно найти в [1]) были получены следующие результаты:

$$\hat{x} = 21{,}497263; \qquad \Delta x = 0{,}6294302.$$

Подставим эти данные в формулу (1):

$$x = 21{,}497263 \pm 0{,}6294302.$$

Последовательное применение операций сложения и вычитания позволяет найти интервал изменения величины x от $x_1 = \hat{x} - \Delta x$ до $x_2 = \hat{x} + \Delta x$:

$$x_1 = 20{,}8678328; \qquad x_2 = 22{,}1266932$$

(не будем сейчас обсуждать вопрос о том, можно ли достоверно утверждать, что истинное значение лежит именно в этом интервале, сейчас речь идет только о правилах округления). Укажем полученный интервал на числовой оси (рис. 1*а*).

Сравнивая записи чисел, обозначающих граничные точки интервала x_1 и x_2, видим, что в них на первом месте слева стоит одна и та же цифра «2», показывающая число десятков. Следовательно, эта цифра, скорее всего, верная. На втором месте в итоговом результате может стоять либо «0» либо «1», либо «2», цифра на этой позиции показывает число единиц. Здравый смысл подсказывает, что на третьем месте (первом после запятой) может уже стоять любая из цифр от «0» до «9». Он же (здравый смысл) указывает, что говорить и записывать какие-либо цифры на последующих местах абсолютно бессмысленно, вся основная информация об интервале содержится в начальных трех цифрах.

Попробуем определить, сколько же цифр следует оставить после округления. Например, будем максималистами и скажем: раз повторяется только первая цифра, а остальные же под сомнением, то поэтому отбросим их. Но тогда придется записать:

$$x = 20,$$

что никуда не годится, ведь это число вообще не входит в интервал (рис. 1*б*). Значит, вторая цифра, хотя она и изменяется, тоже нужна? Попробуем оставить ее. Как же тогда записать результат? Например, так: x изменяется от 20 до 22, или с использованием знака «плюс-минус»:

$$x = 21 \pm 1.$$

Опять нехорошо! Ведь x_1=20,8678328, что гораздо ближе к 21, чем к 20. А x_2, напротив, больше, чем 22. Иными словами, получившийся в результате округления интервал сместился в сторону меньших значений по сравнению с первоначальным (рис. 1*в*), рассчитанным по «умным» формулам! Значит, нужна и третья цифра, хотя она, как мы отмечали, может быть любой.

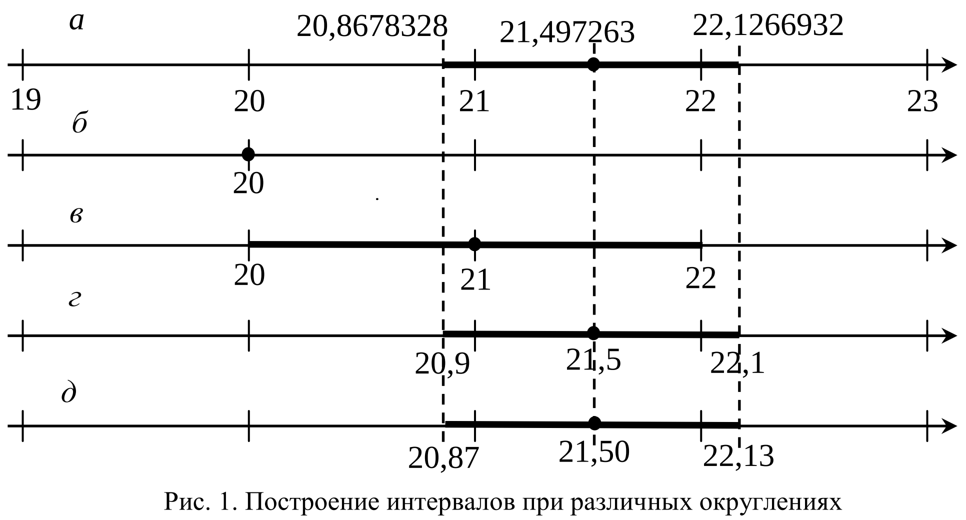

Рис. 1. Построение интервалов при различных округлениях

Итак, оставляем в x_1 и x_2 по три цифры:

$$x_1=20,9; \qquad x_2=22,1.$$

(здесь мы воспользовались правилом округления, которое будет сформулировано ниже, хотя большинству, надеюсь, оно знакомо). Тогда с использованием знака «плюс-минус» запишем:

$$x = 21{,}5 \pm 0{,}6.$$

Вроде неплохо получилось, интервалы до и после округления практически совпадают (рис. 1*г*).

А, может, если добавить еще одну цифру, станет еще лучше? Добавляем (рис. 1*д*) и получаем:

$$x_1 = 20{,}87; \qquad x_2 = 22{,}13.$$

$$x = 21{,}50 \pm 0{,}63.$$

Что изменилось? Интервал стал «точнее», но на сколько? На 0,03, что составляет 5 (пять) процентов от «точного», рассчитанного по «умным» формулам, значения Δx. Но эти «умные» формулы, применяемые для оценивания погрешностей, на самом деле являются приближенными. Например, чтобы оценить погрешность в серии прямых измерений, проведенных в одинаковых условиях, надо провести довольно много измерений, не меньше десятка. А если проводится всего 3 или даже 5 измерений, то погрешность рассчитанной при этом погрешности (да, именно так ее надо называть!) будет составлять, скорее всего, десятки процентов! Для косвенных измерений оценка погрешности находится через частные производные, что также не гарантирует точного значения.

Вывод: четвертая цифра в записи оценки $\hat{x}$ не нужна, она не вносит новой существенной информации. А для оценки погрешности Δx тоже достаточно ограничиться одной цифрой и записать:

$$\Delta x \approx 0{,}6.$$

Казалось, появилась ясность в процедуре округления. Но!!! Мы рассмотрели один конкретный пример. А, может, в других случаях все будет не так? Попробуем чуть поэкспериментировать с числами.

2. Например, чуть изменим $\hat{x}$ (уменьшим на единицу), не изменяя Δx:

$$\hat{x} = 20{,}497263; \qquad \Delta x = 0{,}6294302.$$

Тогда изменится и интервал:

$$x_1 = 19{,}8678328; \qquad x_2 = 21{,}1266932.$$

Смотрите: не повторяется даже первая цифра! Катастрофа!!! Или все же нет? Не повторяя всех слов, сказанных выше, просто запишем новую цепочку получающихся результатов:

x=20 или x=10 (полный кошмар!!!);

$x = 20 \pm 1$ (кошмар чуть уменьшился, но остался кошмаром);

$x = 20{,}5 \pm 0{,}6$ (хорошо);

$x = 20{,}50 \pm 0{,}63$ (а стало ли лучше?).

Есть ощущения, что все интуитивно понятые (но пока не сформулированные!) правила остались на своих местах.

3. Теперь изменим погрешность Δx (уменьшим на 0,3), не изменяя $\hat{x}$:

$$\hat{x} = 21{,}497263; \qquad \Delta x = 0{,}3294302.$$

Вновь строим цепочку:

$$x_1 = 21{,}1678328; \qquad x_2 = 21{,}8266932.$$

Ого, теперь уже первые две цифры совпадают! Поэтому, оставляя только их, получим:

$$x = 21 \pm 0 \text{ (идеальная точность!)};$$

$$x = 21{,}5 \pm 0{,}3 \text{ (хорошо)};$$

$$x = 21{,}50 \pm 0{,}33 \text{ (опять перебор)}.$$

Оснований изменять правило не появилось.

4. Еще уменьшим погрешность Δx (на 0,2), не изменяя $\hat{x}$:

$$\hat{x} = 21{,}497263; \qquad \Delta x = 0{,}1294302.$$

Снова строим цепочку:

$$x_1 = 21{,}3678328; \qquad x_2 = 21{,}6266932.$$

По-прежнему первые две цифры совпадают, поэтому:

$$x = 21 \pm 0 \text{ (вновь идеальная точность!)};$$

$$x = 21{,}5 \pm 0{,}1;$$

$$x = 21{,}50 \pm 0{,}13.$$

Хм, а ведь теперь последняя запись уже не избыточна, она гораздо точнее воспроизводит интервал, заданный числами x_1 и x_2, чем в предыдущем случае. Получается, что именно эта запись стала лучшей!

Наверное, уже можно, проанализировав результаты, попытаться сделать выводы. При изменении оценки $\hat{x}$ истинного значения никаких существенных (и несущественных!) изменений в округлении не происходит. А с изменением оценки погрешности Δx чуть по-другому. Сравним два округления:

$$\Delta x = 0{,}1294302 \approx 0{,}1;$$

$$\Delta x = 0{,}1294302 \approx 0{,}13.$$

В первом случае при округлении до 0,1 значение изменяется (уменьшается) на 30 процентов. А это уже немало! И интервал, как мы видели, может «поехать». Во втором же случае относительная погрешность округления, вносимая в погрешность Δx, менее процента - все хорошо.

Все приведенные выше рассуждения приводят к мысли, что округление надо начинать именно с погрешности Δx. Но перед тем, как сформулировать правила округления, следует дать одно важное определение.

Значащие цифры *данного числа - все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа. При этом нули, следующие из множителя 10^n (n – целое число), не учитывают.*

Примеры:

1) 0,2396 – 4 значащие цифры, первая цифра – 2;
2) 0,00173 – 3 значащие цифры, первая цифра – 1;
3) 30170 – 5 значащих цифр, первая цифра – 3, последний нуль – также значащая цифра;
4) $301{,}7\cdot 10^2$ – 4 значащие –цифры, первая цифра – 3, последняя – 7;
5) 20000 – 5 значащих цифр, первая цифра – 2, все последующие нули – также значащие цифры;
6) $20\cdot 10^3$ – 2 значащие цифры, первая цифра – 2, вторая цифра – 0, нули, следующие из множителя 10^3 , не учитывают;
7) $0{,}02\cdot 10^6$ – одна и единственная значащая цифра – 2.

Примеры показывают, что, хотя с точки зрения математики, записи под номерами 3 и 4 идентичны, обозначают одно и то же число, но количество значащих цифр в них различно! То же самое можно сказать и про записи под номерами 5, 6 и 7. Этот факт чрезвычайно важен для корректной записи результата, получаемого после округления.

А теперь приступаем к формулировке **правил округления**.

1) Округление следует начинать с погрешности, оставляя 1 (**одну**) или 2 (**две**) значащие цифры. Если первая значащая цифра – **единица** или **двойка**, то после округления оставляют **две** значащие цифры. Если же первая значащая цифра – тройка и более, то оставляют **одну** значащую цифру.

Примеры.

До округления	После округления
0,17295	0,17
4,8329	5
0,97283	1,0 (*именно так, а не просто 1, чтобы подчеркнуть, что погрешность погрешности в первом знаке после запятой*)
0,006298	0,006 или $0{,}6\cdot 10^{-2}$ или $6\cdot 10^{-3}$
384,53	$0{,}4\cdot 10^3$ или $4\cdot 10^2$ (*но не 400 –ведь это 3 значащие цифры*)

2) Далее округляется сама величина, причем ее последняя значащая цифра должна находиться на той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности.

Примеры.

До округления	После округления
3,4874±0,17295	3,49±0,17
285,396±4,8329	285±5
12,482±0,97283	12,5±1,0
19,98281±0,8138	20,0±0,8 (*нули должны быть указаны обязательно – это значащие цифры*)

Видно, что если в погрешности присутствуют всего одна или две значащие цифры, то в самом результате после округления количество значащих цифр **не меньше**, чем в погрешности, причем последние значащие цифры в обоих числах стоят **на одной и той же** позиции.

3) Если при округлении погрешности указан порядок, т.е. 10^n, то такой же порядок должен быть и у самой величины, при этом оба числа заключаются в скобки, и множитель 10^n указывается один раз.

Примеры.

До округления	После округления
0,283984±0,006298	0,284±0,006 или $(28,4±0,6)\cdot 10^{-2}$ или $(284±6)\cdot 10^{-3}$
72903±384,53	$(72,9±0,4)\cdot 10^{3}$ или $(729±4)\cdot 10^{2}$
2374±48	$(2,37±0,05)\cdot 10^{3}$ или $(23,7±0,5)\cdot 10^{2}$

Как видно, использование записи с порядком 10^n не является однозначным, ведь одно и то же число можно записать с одним и тем же количеством значащих цифр, но с разными порядками.

Пример.

$$0,004=0,04\cdot 10^{-1}=0,4\cdot 10^{-2}=4\cdot 10^{-3}$$

(во всех случаях одна значащая цифра).

Какую же форму записи предпочесть? Здесь нет однозначного толкования, но можно вновь воспользоваться соображениями здравого смысла.

Вспомним, что запись с порядком используют обычно, чтобы избежать необходимости указания большого числа нулей. Согласитесь, что запись

$$3\cdot 10^{7}$$

выглядит гораздо приятнее и понятнее, чем

$$30000000.$$

То же самое можно сказать и про записи

$$0{,}6\cdot 10^{-5} \text{ и } 0{,}000006.$$

Однако нонсенсом выглядят записи

$$0{,}2\cdot 10^{-1} \text{ вместо } 0{,}02.$$

или

$$4\cdot 10^{1} \text{ вместо } 40.$$

Кроме этого, вспомним, что достаточно часто используются приставки кило-, мега- или милли- и особенно модное нано-. Они обозначают степени, кратные трем, т.е. 10^3, 10^6 , 10^{-3}, 10^{-9}. Реже используются приставки санти- и деци- (10^{-2} и 10^{-1}), обычно только для единиц длины (слышали ли вы когда-нибудь: два дециграмма или пять сантисекунд?).

Поэтому следует всячески **НЕ** приветствовать записи с порядками 10^{-1} и 10^{1} - это только затрудняет понимание. Да и записи 10^{-2} и 10^{2} вряд ли слишком удобны, хотя и вполне допустимы. Поэтому лучше начинать со степеней 10^{-3} и 10^{3}, а для размерных величин гораздо приятнее переходить к размерностям с указанием той или иной приставки.

Сравните, например, записи одного и того же значения массы тела:

$$0{,}06\cdot 10^{7} \text{ г, или } 6\cdot 10^{2} \text{ кг, или } 0{,}6 \text{ т.}$$

У всех – одна значащая цифра, следовательно, все они могут быть использованы для записи погрешностей. Но какую из них можно признать наиболее понятной?

Или такие две записи для скорости:

$$1{,}3\cdot 10^{4} \text{ м/с или } 13 \text{ км/с.}$$

Но с формальной точки зрения, допустима и та и другая формы записи. «Думайте сами, решайте сами»!

Отметим еще следующее. Все приведенные выше рассуждения об округлении следует применять для записи окончательного результата, фиксируемого в отчете. Если же выполняются промежуточные расчеты, результаты которых будут в дальнейшем использоваться в других формулах, то следует всегда оставлять на две-три значащих цифры больше.

Ах да! Давайте-ка приведем выдержку из официального документа (неважно, какого). Надеюсь, что самостоятельно разберетесь, о чем идет речь.

Правила округления чисел по СТ СЭВ 543 - 77

1. Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

2. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) менее 5, то последнюю сохраняемую цифру не меняют.

Пример: Округление числа 12,23 до трех значащих цифр дает 12,2.

3. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

Пример: Округление числа 0,145 до двух цифр дает 0,15.

Примечание. В тех случаях, когда следует учитывать результаты предыдущих округлений, поступают следующим образом.

Если отбрасываемая цифра получена в результате округления в меньшую сторону, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу (с переходом при необходимости в следующие разряды).

Пример: Округление числа 0,25 (полученного в результате предыдущего округления числа 0,252) дает 0,3 .

4. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) более 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

Пример: Округление числа 0,156 до двух значащих цифр дает 0,16.

5. Округление выполняют сразу до желаемого количества значащих цифр, а не по этапам.

Пример: Округление числа 565,46 до трех значащих цифр дает 565.

6. Целые числа округляют по тем же правилам , что и дробные.

Пример: Округление числа 23456 до двух значащих цифр дает $23 \cdot 10^3$

Вот так пишут официальные документы. Привыкайте!

Есть желание потренироваться? Приступайте!

41.4960±0,38930
84344.24±642.47
0.072432±0.0005947
825.7865±3.806321
4999,97±42.73

И в заключение, один неожиданный пример:

23,69897±621.73

Литература.

1. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. М. Физический факультет МГУ, 2012.