ЗАДАЧА 103
ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Использование законов сохранения импульса и механической энергии для решения практических задач механики.

Идея эксперимента

Использование абсолютно неупругого удара пули и тела баллистического маятника для определения скорости пули.

Теоретическое введение

Принципиальная схема баллистического маятника показана на рис 1. Будем предполагать, что движение пули и тела маятника происходит в одной (вертикальной) плоскости. Точкой О обозначена горизонтальная ось, вокруг которой происходит движение маятника. Точка С – центр масс тела маятника, имеющего цилиндрическую форму.

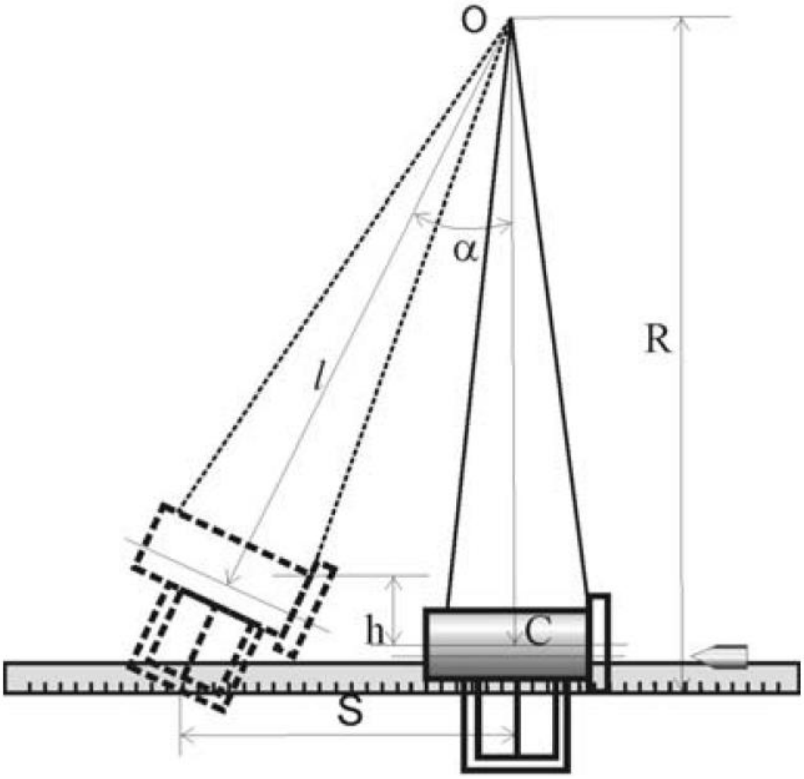

Рис. 1. Принципиальная схема баллистического маятника

Для простоты рассмотрения будем считать, что пуля застревает в теле маятника таким образом, что ее центр масс находится на прямой ОС. Размерами пули будем пренебрегать. Существенной особенностью баллистического маятника является то, что время действия силы со стороны пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебания маятника. Такие кратковременные силы, имеющие конечный импульс силы, называются ударными силами, а процесс взаимодействия пули и маятника – ударным процессом. Ударный характер взаимодействия приводит к тому, что к концу удара маятник, приобретя некоторую скорость, практически не успевает отклониться на какую-либо заметную величину.

При соударении ударные силы достигают больших значений, так как за малое время действия изменяют импульс тела на заметную величину. Если за время удара со стороны нити не действуют ударные силы, то для анализа движения цилиндра сразу после удара достаточно учесть лишь силу, действующую со стороны пули. Движение цилиндра при этом можно будет представить, как вращение вокруг мгновенной оси. Но для того, чтобы не возникали ударные силы натяжения нити, необходимо, чтобы такое движение не приводило к изменению длины нитей. А это означает, что мгновенная ось должна совпадать с осью вращения маятника (точка O на рис. 1). Точку пересечения линии действия ударной силы с прямой OC в этом случае называют центром удара, а сам удар – центральным ударом.

В случае центрального удара натяжения нитей в процессе соударения меняются, так как возникают центростремительные ускорения элементов цилиндра. Однако эти изменения натяжений имеют конечные значения при стремлении времени удара к нулю, поэтому их в процессе соударения можно не учитывать. В этом случае, считая в процессе удара систему «пуля+тело маятника» замкнутой, можно применить закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_п + \vec{p}_м = const \; ; \qquad (1)$$

где $\vec{p}_п$- импульс пули, $\vec{p}_м$- импульс маятника-мишени. Вообще говоря, начальная скорость пули (при выходе из ствола) отличается от скорости, с которой она попадает в мишень, поскольку во время полета на нее действует сила сопротивления воздуха. В нашей задаче, в силу малости проходимого пулей расстояния, будем пренебрегать таким изменением ее скорости, скорость пули на всем пути от ствола до мишени обозначим *V*. После удара пуля застревает в мишени, т.е. удар является абсолютно неупругим. Скорость мишени с пулей после удара обозначим *v*. Выражая в (1) импульсы через скорости и массы, получаем:

$$mV = \left(m + M\right)\cdot v \; ; \qquad (2)$$

где m и M - массы пули и маятника соответственно. Нетрудно выразить скорость движения маятника сразу после соударения:

$$v = \frac{mV}{m+M}. \qquad (3)$$

Найдем максимальную высоту, на которую поднимется центр масс мишени с пулей. На систему действуют две внешние силы: сила тяжести, являющаяся потенциальной, и сила натяжения нити (силу воздушного сопротивления движению маятника считаем пренебрежимо малой). Так как маятник движется по дуге окружности, то его перемещение за бесконечно малое время всегда перпендикулярно силе натяжения нити. Следовательно, работа силы натяжения равна нулю, что позволяет воспользоваться законом сохранения механической энергии:

$$E_k + E_p = const \ ; \tag{4}$$

где E_k и E_p - кинетическая и потенциальная энергии маятника-мишени соответственно. Если считать, что в положении равновесия маятника потенциальная энергия равна нулю, то соотношение (4) можно записать как равенство кинетической энергии маятника-мишени в момент после попадания в него пули и его потенциальной энергии в наивысшей точке (когда скорость равна нулю):

$$\frac{(m+M)\cdot v^2}{2} = (m+M)gh \ . \tag{5}$$

После несложных преобразований имеем:

$$h = \frac{v^2}{2g}. \tag{6}$$

Непосредственное измерение высоты h поднятия центра масс маятника в данной задаче затруднительно, однако можно измерить горизонтальное смещение S. Связь величин h и S можно получить из теоремы Пифагора (рис.2):

$$h = l - \sqrt{l^2 - S^2} \ ; \tag{7}$$

где l - расстояние от точки подвеса до центра масс маятника.

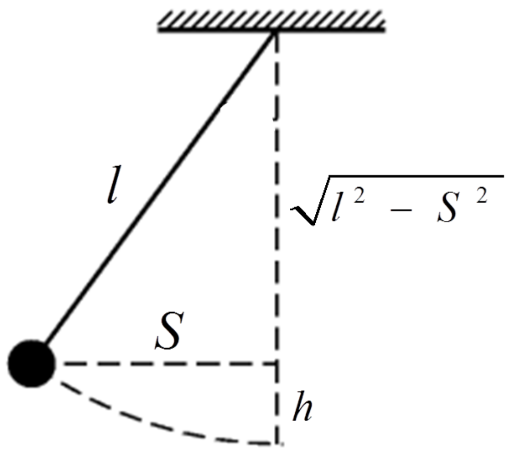

Рис. 2. К определению вертикального смещения маятника

Поскольку длина нитей l составляет порядка двух метров, а смещение маятника S – всего несколько сантиметров, можно записать:

$$h = l - l\sqrt{1 - \frac{S^2}{l^2}} \approx l - l\left(1 - \frac{S^2}{2l^2}\right) = \frac{S^2}{2l}. \tag{8}$$

Из (6) и (8) для скорости v после удара получим:

$$v^2 = \frac{gS^2}{l}, \tag{9}$$

откуда с учетом (3) найдем связь скорости V пули до удара с горизонтальным смещением S баллистического маятника:

$$V = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot S\,. \qquad (10)$$

Формула (10) используется в данной работе для определения скорости пули.

Экспериментальная установка

Установка для определения скорости пули состоит из баллистического маятника 1, шкалы 2 для отсчета отклонений маятника, пружинной пушки 3, набора пуль 4 (рис.3). Баллистический маятник представляет собой цилиндр массой M, частично заполненный пластилином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и легких нитях 5. Масса M и длина нитей l с учетом погрешностей указаны на установке. В маятник в горизонтальном направлении стреляют из пружинной пушки 3 пулей, имеющей массу m и скорость V. Пуля входит в пластилин и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется в процессе колебания на некоторое расстояние, которое может быть измерено. Шкалу 2, предназначенную для определения отклонения маятника, устанавливают параллельно отсчетной рамке 6 маятника на расстоянии примерно 1-2 см от нее.

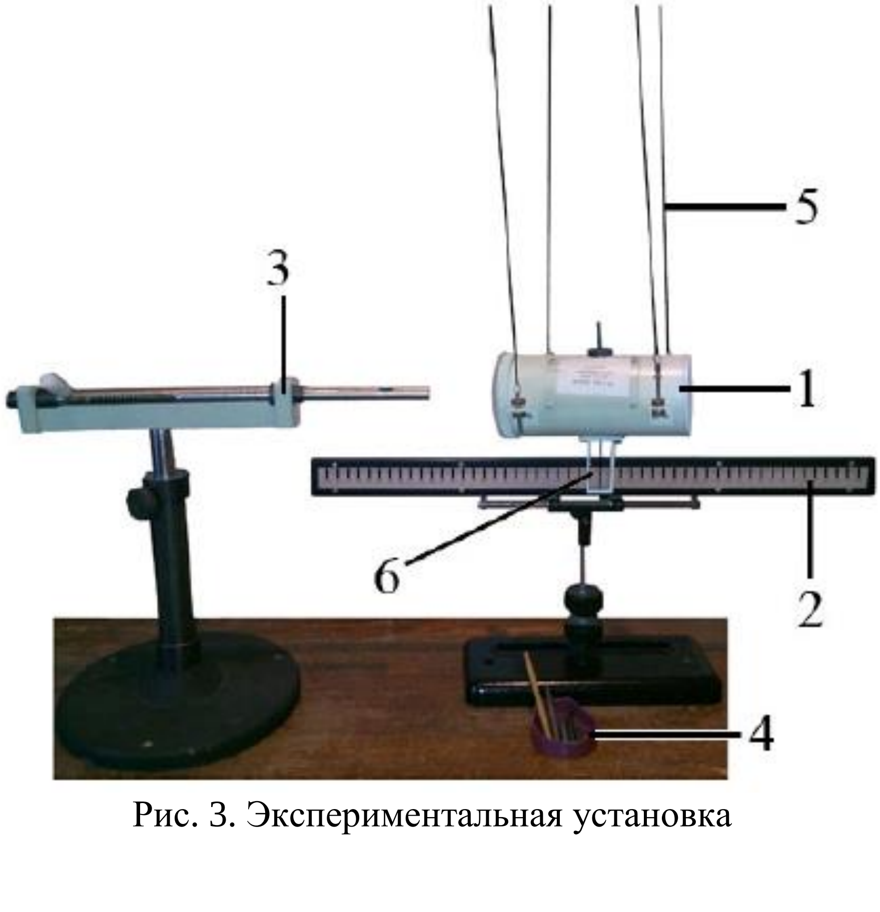

Рис. 3. Экспериментальная установка

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение скорости пуль

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что ось цилиндра в положении равновесия горизонтальна, а вертикальная плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии. Если эти условия не выполнены, то необходимо подрегулировать длину нитей. Для того, чтобы подготовить пистолет к выстрелу, отводят затвор назад в крайнее положение, сжимая расположенную внутри пружину, и приподнимают вверх курок затвора. Придерживая затвор, аккуратно вставляют пулю в дуло пистолета и задвигают ее шомполом до упора. Убедившись в том, что пуля после вылета из пистолета может попасть лишь в маятник, производят выстрел, для чего курок опускают вертикально вниз. Отклонение маятника определяют по шкале.

Измерения (результаты заносятся в табл.1)

1) Определить взвешиванием на электронных весах массы 5 пуль, используемых в задаче, погрешность считать равной единице последнего разряда шкалы;

2) Произвести по 5 выстрелов каждой из пуль, измеряя отклонения маятника.

Табл.1

Результаты измерений и обработки

масса пули (г)	№ выстрела	S (см)	$\langle S\rangle$ (см)	σ_S (см)	V (м/с)	σ_V (м/с)
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
…						
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Обработка результатов (результаты заносятся в табл.1):

1) Для каждой пули вычислить среднее значение $\langle S\rangle$ отклонения маятника

$$\langle S\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \; ; \tag{11}$$

где n - число измерений.

2) Рассчитать выборочное стандартное отклонение S_S среднего арифметического величины S, являющееся оценкой случайной погрешности:

$$S_S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(S_i - \langle S\rangle\right)^2}{n(n-1)}} \quad . \qquad (12)$$

3) Оценить величину суммарной погрешности σ_S:

$$\sigma_S = \sqrt{S_S^2 + \sigma_{S_{сист}}^2} \quad ; \qquad (13)$$

где $\sigma_{S_{сист}}$ - систематическая ошибка измерений, определяемая погрешностью прибора и погрешностью округления. В данной задаче измерения проводятся с помощью обычной линейки, систематическую погрешность которой будем считать равной половине цены деления.

4) Вычислить скорость V полета каждой пули по формуле (10) и занести в таблицу.

5) Оценить погрешность σ_V скорости полета пули. Вообще говоря, погрешности в определении скорости полета пули по формуле (10) будет вносить не только погрешность определения S, но и неточности измерения длины нитей, масс пули и мишени. В предположении, что погрешность определения горизонтального смещения маятника S преобладает над перечисленными выше погрешностями, погрешность скорости полета пули можно оценить по формуле:

$$\sigma_V = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{\langle S\rangle} \cdot \sigma_S = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sigma_S . \qquad (14)$$

Упражнение 2. Оценка потенциальной энергии сжатой пружины и исследование зависимости скорости пули от ее массы.

Формула (10), полученная для расчета скорости пули, не определяет явную зависимость скорости пули от ее массы, поскольку величина горизонтального смещения маятника также зависит от массы пули.

Пуля приобретает скорость в результате выстрела из пружинного пистолета. Можно заметить, что при этом в движение приходит и довольно массивный затвор, который используется для сжатия пружины. Поэтому при выстреле потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули, пружин и затвора. Если пренебречь потерями энергии в результате действия силы трения, то можно записать закон сохранения механической энергии:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{m_0V^2}{2} \quad ; \qquad (15)$$

где $\frac{kx^2}{2}$ - потенциальная энергия сжатой пружины; m_0 - масса затвора, массой пружины в данном случае можно пренебречь. На стадии разгона пуля и затвор движутся вместе, т.е. их скорости одинаковы. Преобразуем формулу (15) к следующему виду:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{m + m_0}{kx^2} = \frac{1}{kx^2} \cdot m + \frac{m_0}{kx^2} \; . \tag{16}$$

Как видно из (16), зависимость величины $\frac{1}{V^2}$ от массы пули m должна быть линейной.

1. Постройте график зависимости $\frac{1}{V^2}$ от m, т.е. по горизонтальной оси отложите массы пуль m_i, а по вертикальной – величины, обратные квадрату скорости соответствующих пуль. Из (16) следует, что точки должны лежать на одной прямой, однако измеренные значения вследствие погрешностей эксперимента будут отличаться от истинных. Проведите с помощью линейки прямую линию, которая, на Ваш взгляд, будет проходить максимально близко к экспериментальным точкам.

2. Из математики известно, что уравнение прямой линии в координатах (x, y) задается формулой

$$y = ax + b \, .$$

Найдите по графику коэффициент a, отвечающий за наклон прямой. Обратите внимание, что, так как величины, отложенные по осям, имеют размерность, то и a будет размерной величиной. Из (16) следует, что

$$a = \frac{1}{kx^2} \, , \tag{17}$$

в итоге для потенциальной энергии $W_{пот}$ сжатой пружины получаем

$$W_{пот} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2a} \, . \tag{18}$$

Таким образом, определив по графику коэффициент a, рассчитайте потенциальную энергию сжатой пружины.

3. Рассчитайте для каждой пули механическую энергию системы «пуля+тело маятника» в двух случаях: сразу после вылета пули из пистолета и после попадания пули в маятник.

В первом случае

$$W_1 = W_{кин\_пули} = \frac{mV^2}{2} \, ; \tag{19}$$

во втором

$$W_2 = W_{кин\_сист} = \frac{(m+M)v^2}{2} = \frac{(m+M)(mV)^2}{2(m+M)^2} = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{mV^2}{2} \tag{20}$$

Результаты занесите в табл. 2.

Таблица 2.

Расчет энергетических характеристик

$W_{пот}$, Дж	Номер пули	W_1, Дж	σ_{W_1}, Дж	W_2, Дж	σ_{W_2}, Дж
	1				
	2				
	3				
	4				
	5				

Для оценки погрешностей будем считать, что главный вклад вносят погрешности в определении скорости v после удара, в этом случае

$$\sigma_{W_1} = \left.\frac{\partial W_1}{\partial V}\right|_V \cdot \sigma_V = \frac{2mV}{2} \cdot \sigma_V = 2W_1 \cdot \frac{\sigma_V}{V}; \tag{21}$$

$$\sigma_{W_2} = \left.\frac{\partial W_2}{\partial V}\right|_V \cdot \sigma_V = 2W_2 \cdot \frac{\sigma_V}{V}. \tag{22}$$

Из (21)-(22) следует, что в обоих случаях относительные погрешности энергии $\frac{\sigma_{W_1}}{W_1}$ и $\frac{\sigma_{W_2}}{W_2}$ в два раза больше относительной погрешности скорости $\frac{\sigma_V}{V}$. Это связано с тем, что энергия системы (19)-(20) пропорциональна квадрату скорости V.

4. Сравните энергию сжатой пружины $W_{пот}$ с энергиями W_1 и W_2. Сделайте вывод об эффективности использования энергии в данном пружинном пистолете.

5. ***В качестве самостоятельного упражнения предлагается по тому же графику оценить массу затвора m₀. Это можно сделать, оценив по графику коэффициент*** $b = \frac{m_0}{kx^2} = \frac{m_0}{2W_{пот}}$.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены скорости пяти пуль разной массы, оценена потенциальная энергия пружин и системы в разных положениях, а также масса затвора пружинного пистолета.

Контрольные вопросы и задания:

1) Сформулируйте закон сохранения импульса.
2) Сформулируйте закон сохранения механической энергии.