Статистика фотоотсчетов ФЭУ

Статистический подход

Очень часто значение физической величины, являющейся результатом одиночного опыта, произведенного с достаточно сложной системой, не может быть предсказано с полной определенностью, т.к. зависит от ряда случайных факторов и является *случайной величиной*. Несмотря на это, мы можем сделать важные выводы о поведении системы, производя большое число идентичных опытов. В таком случае мы говорим о статистическом описании системы и используем для такого описания методы теории вероятностей. Статистическая теория позволяет предсказать не результат конкретного опыта, а *вероятность* появления каждого из возможных результатов опыта. Предсказанные вероятности можно сравнить с вероятностями, измеренными на опыте с большим числом одинаковых систем (ансамблем). Если состояние системы не зависит от времени, то с равным успехом можно многократно повторить один и тот же опыт над одной системой. Статистический подход оказался чрезвычайно плодотворным в физике при рассмотрении таких проблем как радиоактивный распад, падение космических лучей на Землю, испускание электронов и фотонов, при квантовом описании атомов и молекул.

В настоящей задаче нас будет интересовать число импульсов n на выходе ФЭУ за некоторое время τ (время накопления). Предположим, что мы регистрируем в среднем 10 импульсов в секунду. Повторим процесс измерений N раз. Всегда ли мы будем иметь 10 отсчетов и с какой вероятностью мы можем получить другой результат?

Распределение вероятности

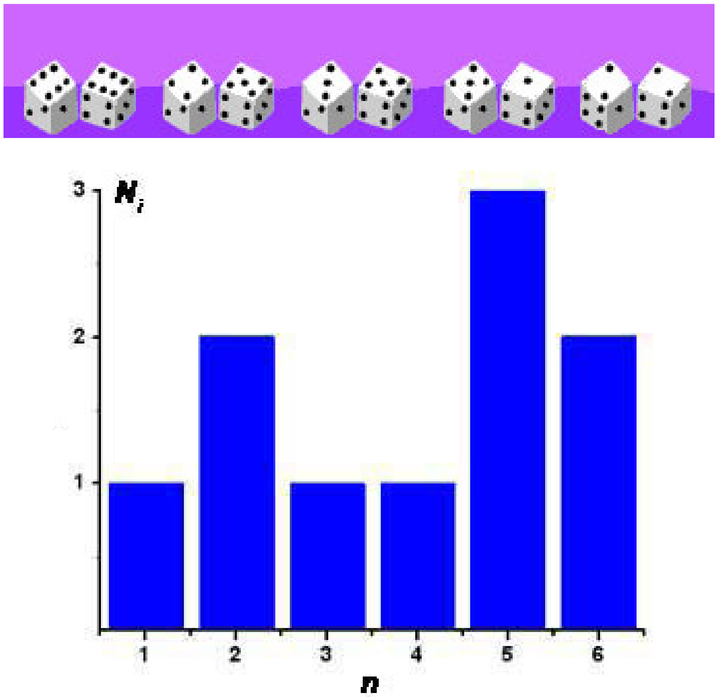


Рис.1. Представление результатов опыта в виде гистограммы

Рассмотрим в качестве примера случайной величины n количество очков, которое выпадает при бросании игральной кости. На рис.1 представлен результат бросания десяти игральных костей (или N=10 бросаний одной кости). Результаты опыта удобно представить в виде графика – *гистограммы*. Для построения гистограммы область значений случайной величины n (в нашем случае n = *1, 2, 3, 4, 5, 6)* разбивают на одинаковые интервалы (*бины*), откладывая по оси X значения переменной n_i для i*-того* интервала, а по оси Y откладывают N_i - количество попаданий случайной величины в этот интервал (рис.1)**.**

Представленная на рисунке комбинация кубиков является *выборкой* - одной из многих возможных реализаций опыта. Вычислим по данной выборке среднее количество очков $\bar{n}_в$, выпадающее на одном кубике (*выборочное среднее*) и среднеквадратичное отклонение от среднего $\sigma_в$ (*выборочное стандартное отклонение*):

$$\bar{n}_в = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i N_i}{N} = \sum_{i=1}^{6} n_i P_в(n_i)\,, \qquad (1)$$

$$\sigma_{в} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(n_i - \bar{n})^2 N_i}{N}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{6}(n_i - \bar{n})^2 P_{в}(n_i)}\,, \qquad (2)$$

где $$P_{в}(n_i) = \frac{N_i}{N}\,, \qquad (3)$$

а суммирование идет по всей области значений переменной n_i (i=1, 2, …6). Учитывая, что $P_в(1)=1/10$, $P_в(2)=2/10$, $P_в(3)=1/10$, $P_в(4)=1/10$, $P_в(5)=3/10$, $P_в(6)=2/10$, получаем: $\bar{n}_в=3.9$, $\sigma_в=1.7$. Величина $P_в(n_i)$ показывает долю случаев, в которых выпадает n_i, и при $N\to\infty$ будет равна $P(n_i)$ - вероятности получить n_i. Таким образом, при $N\to\infty$ выборочные величины стремятся к своим предельным значениям, которые и будут, соответственно, *вероятностью* - $P(n_i)$, *средним* - $\bar{n}$ и *стандартным отклонением* - σ.

Пример: для идеального кубика все грани равновероятны, поэтому для любой грани вероятность $P(n_i) = 1/6$. Именно к этому значению будет стремиться выборочное значение $P_в(n_i) = \frac{N_i}{N}$ при $N\to\infty$. При этом расчеты по формулам (1)-(2) дают $\bar{n}=3.5$, $\sigma=1.71$.

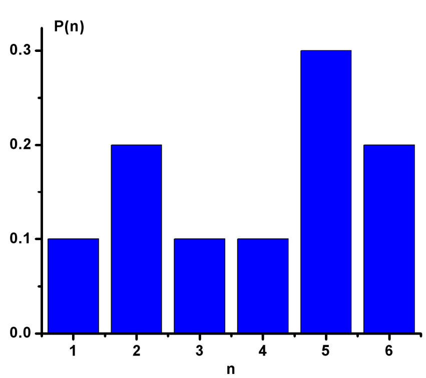


Рис.2. Нормированная гистограмма выборки.

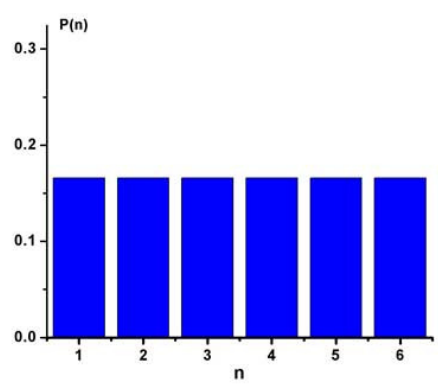


Рис.3. Распределение вероятности *P(n)*

На рис.2 показана *нормированная* гистограмма, у которой по оси *Y* отложены значения $P(n_i) = \frac{N_i}{N}$. При $N\to\infty$ эта гистограмма показывает *распределение вероятности,* которое характеризуется функцией $P(n_i)$ (рис.3). С помощью этой функции можно найти вероятность появления значений n_i в некотором интервале, например от a до b. Эта вероятность равна сумме вероятностей $P(n_i)$ для всех значений n_i, лежащих в заданном интервале $P(a \le n \le b) = \sum_{n_i=a}^{b} P(n_i)$. Если интервал включает всю область значений n, то эта вероятность равна единице, так как в результате опыта обязательно появится одно из возможных значений n. Таким образом, сумма $P(n_i)$ по всей области значений n равна единице $\sum_{i=1}^{\alpha} P(n_i) = 1$. Это соотношение называется условием нормировки.

Пример. Если случайная величина n является натуральным числом (n = 0, 1, 2, 3,…..), т.е. может принимать целые значения от 0 до ∞, то нумеровать бины удобно самим числом n. В этом случае приведенные выше формулы будут иметь следующий вид: $P(a \le n \le b) = \sum_{n=a}^{b} P(n)$; $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$, где $P(n)$ – вероятность получить значение n.

Стандартное отклонение среднего

Как уже отмечалось выше, $\bar{n}$ и σ характеризуют *предельное распределение,* которое получается при бесконечном числе измерений N. На практике имеется конечное число измеренных значений n_1 , n_2 ,…n_N, т.е. выборка $\{n_i\}$(i= 1, 2,... N). Можно показать, что для данной выборки наилучшей оценкой для n и σ будут их *выборочные значения,* которые можно записать следующим образом:

$$\bar{n} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i$$

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(n_i - \bar{n})^2}$$

Выборочное стандартное отклонение характеризует разброс измеренных значений относительно среднего и при $N \to \infty$ стремится к своему предельному значению σ.

Очевидно, что для другой выборки мы получим другое среднее. Получив несколько выборок, мы могли бы найти среднее для каждой выборки и получить, таким образом, выборку для средних. По этой выборке можно найти среднее (его можно взять в качестве наилучшего приближения для *истинного* значения) и стандартное отклонение $\sigma_{\bar{n}}$ (*стандартное отклонение среднего),* которое будет характеризовать разброс средних значений относительно *истинного* значения.

Так как $\bar{n}$ есть функция измеренных значений n_i, то для данной выборки $\{n_i\}$ мы можем оценить *стандартное отклонение среднего* с помощью формулы для расчета ошибок при косвенных измерениях:

$$\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial n_i} \sigma_i\right)^2}$$

Так как n_i представляют собой результаты измерения одной и той же величины n, то $\sigma_i = \sigma$, откуда:

$$\sigma_{\bar{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Следует отметить, что, в отличии от σ, стандартное отклонение среднего убывает с ростом числа измерений: $\sigma_n \to 0$ при $N \to \infty$.

Функция плотности вероятности

Рассмотрение вероятностных проблем в случае непрерывной переменной u легко свести к более простому случаю, когда переменная принимает дискретные значения и является, таким образом, счетной. Для этого всю область изменения переменной u следует разбить на бесконечно малые и равные интервалы величиной δu (бины). Каждый такой интервал обозначается соответствующим индексом i. Значение u в этом интервале обозначим через u_i, а вероятность того, что u лежит в этом интервале, через P_i или $P(u_i)$.

Такая операция дает нам возможность иметь дело со счетным числом значений переменной u_i; каждое такое значение отвечает одному из интервалов i =1, 2, 3, ...

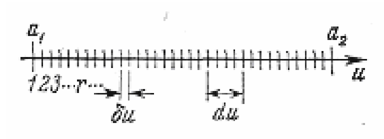


Рис.4. Разбиение непрерывной переменной на дискретные интервалы δu *(бины).*

Макроскопически малый интервал du включает достаточно много бинов, но является настолько малым, что изменением функции $P(u_i)$ на этом интервале можно пренебречь.

Вероятность dP того, что переменная u находится в интервале значений между u и $u + du$ будет равна сумме вероятностей $P(u_i)$ *для* всех u_i которые входят в этот интервал. *Е*сли du достаточно мало, то изменением функции $P(u_i)$ на этом интервале можно пренебречь и считать, что все $P(u_i)$ равны и имеют значение, которое мы обозначим P. *Тогда искомая вероятность* $dP = Pm$, *где* $m=du/\delta u$ *– число бинов, входящих в рассматриваемый интервал.* Т.к. dP пропорциональна величине du, то ее можно записать в виде $dP = f(u)du$, где $f(u)$ называется *плотностью вероятности* и не зависит от величины интервала du. Следует отметить, что *в*ероятность того, что переменная u находится в интервале значений между u и $u + du$ равна площади под кривой $f(u)$ ограниченной интервалом du: $dP = f(u)du$. Это справедливо и для конечного интервала - *в*ероятность того, что переменная u находится в интервале значений от a до b равна площади под кривой $f(u)$ ограниченной этим интервалом: $P(a \le u \le b) = \int_a^b f(u)du$.

Очевидно, что соотношения между вероятностями, полученные в случае дискретной переменной, остаются в силе и для переменных, принимающих непрерывные значения. Например, формулы (1) и (2), описывающие свойства среднего, применимы также и для непрерывной переменной u, если суммы, которые входят в эти формулы, заменить на интегралы (суммирование и интегрирование проводится по всем возможным значениям n):

	Дискретная случайная величина n принимает значения n_1, n_2,...n_α .	Непрерывная случайная величина u принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.
Вероятность	$P(n_i) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$	$dP = f(u)du$
Условие нормировки	$\sum\limits_{i=1}^{\alpha} P(n_i) = 1$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$
Среднее значение	$\bar{n} = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} n_i P(n_i)$	$\bar{u} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$
Дисперсия	$\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} (\bar{n} - n_i)^2 P(n_i)$	$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\bar{u} - u)^2 f(u)du$
Среднеквадратичное отклонение (стандартное)	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\alpha} (\bar{n} - n_i)^2 P(n_i)}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\bar{u} - u)^2 f(u)du}$
Среднее значение функции Φ от случайной переменной	$\bar{\Phi} = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} \Phi(n_i) P(n_i)$	$\bar{\Phi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u)\, f(u)du$

Биномиальное распределение

В рассмотренном выше примере с бросанием кубика нас интересовало нахождение по выборке из N=10 испытаний выборочного среднего значения и выборочной дисперсии (формулы (1)-(2)). Можно поставить и иную задачу: какова вероятность того, что в данной серии из N=10 испытаний выпадет, например, n=4 «единиц»?

Как показано в элементарных курсах статистической физики [см. например 1, 2] при использовании *статистического подхода* целый ряд важных физических моделей приводит к *биномиальному распределению,* которое позволяет рассчитать вероятность появления n

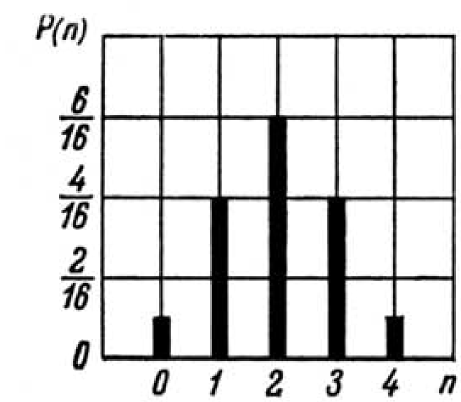


Рис.5. Биномиальное распределение для N=4, p=q=1/2

«благоприятных» событий при N испытаниях, если известно, что вероятность появления «благоприятного» события при каждом испытании равна p :

$$P(n) = p^n (1-p)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{4}$$

Можно показать, что среднее значение (1) числа «благоприятных» событий в серии и стандартное отклонение (2) для биномиального распределения рассчитываются по формулам:

$$\bar{n} = Np, \qquad \sigma = \sqrt{Npq}, \tag{5}$$

где q=1-p – вероятность «неблагоприятного» события.

Пример. Для решения приведенной выше задачи о нахождении вероятности того, что в серии из N=10 испытаний выпадет n=4 «единицы», следует воспользоваться биномиальным распределением, в котором «благоприятным» событием считается выпадение «единицы», вероятность этого события p=1/6, а вероятность «неблагоприятного» события (невыпадение «единицы») равна q=1-p =5/6. Расчеты по формуле (4) дают следующий результат:

$$P(4) = p^4 (1-p)^{10-4} \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6} \cdot \frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 0{,}054.$$

Среднее число успехов в серии из N=10 испытаний и дисперсия рассчитываются по формулам (5):

$$\bar{n} = {}^{10}\!/_{6} = 1{,}667; \qquad \sigma = \sqrt{10 \cdot {}^{1}\!/_{6} \cdot {}^{5}\!/_{6}} = 1{,}179;$$

Распределение Пуассона

Если N велико (N>>1), то определение $P(n)$ по формуле (4) оказывается затруднительным, т.к. необходимо вычислять факториалы больших чисел. При этом, однако, оказывается возможным использовать приближения, которые приводят формулу (4) к более простому виду [1, приложения П.1, П.2].

В случае когда вероятность p достаточно мала (p<<1), а числа n, представляющие интерес, также малы (n<<N), т.е. при N>>1, $\bar{n} = Np << N$, для вычисления $P\,(n)$ можно использовать *распределение Пуассона*

$$P(n) = (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!} = \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} \tag{6}$$

где $\bar{n} = \lambda$ - среднее число успехов в серии измерений.

Как видно, в формуле (6) содержится только один параметр – среднее число успехов $\bar{n} = \lambda$ (в отличие от биномиального распределения (4), в котором задаются отдельно как вероятность успеха *p*, так и объем выборки *N*). Это распределение используется в случаях, когда требуется рассчитать вероятность какого-либо числа событий в серии измерений, если известно, что в среднем в такой серии это событие происходит $\bar{n} = \lambda$ раз.

Для распределения Пуассона среднее число успехов в серии и дисперсия равны друг другу: $\bar{n} = \sigma^2 = \lambda$.

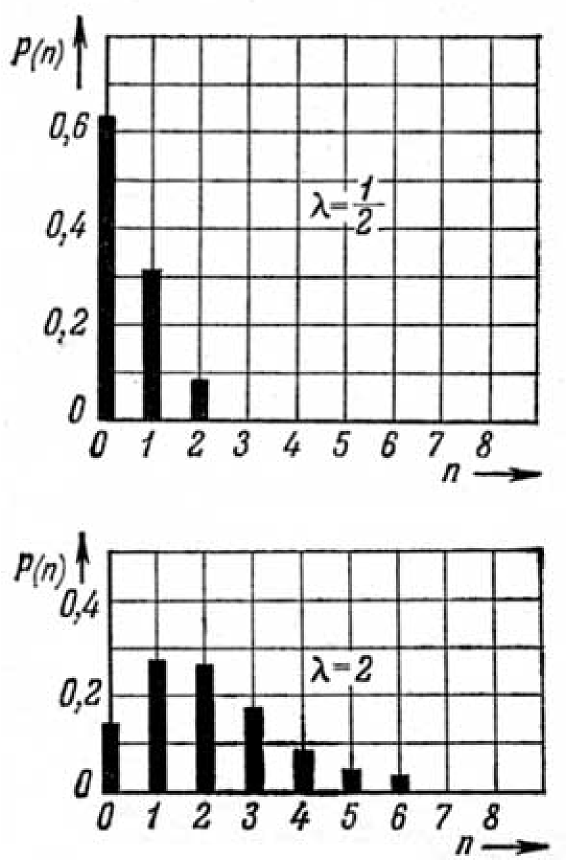


Рис.6. Распределение Пуассона *P(n)* как функция *n* для $\bar{n} = \lambda = 1/2$ и 2.

Пример. Известно, что на фотоприемник за *T*= 1 секунду прилетает *M*=1000 фотонов. Какова вероятность, что за *t*= 1 миллисекунду прилетит n=5 фотонов?

Среднее число фотонов λ, попадающих на фотоприемник за время *t*, равно $\lambda = \frac{t}{T} \cdot M$=1. Подставляя этот результат в (6), получаем искомую вероятность:

$$P(5) = 1^5 \cdot \frac{e^{-1}}{5!} = 0{,}003.$$

Распределение Гаусса

Вероятность $P(n)$ (4) для биномиального распределения имеет максимум, соответствующий значениям *n*, близким к среднему значению $\bar{n}$. В области значений переменной *n*, для которой $P(n)$ не является пренебрежимо малой, т.е. для *n*, не слишком удаленных от значения $\bar{n}$, (N>>1, $\bar{n} = Np >> 1$) можно использовать *распределение Гаусса:*

$$P(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \tag{7}$$

где $\bar{n}$ и σ - соответственно, среднее значение и стандартное отклонение, найденные по формулам (2) для биномиального распределения.

Распределение Гаусса при больших значениях *n* можно считать непрерывным, т.е. формула (7) дает выражение для *плотности вероятности* распределения Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \quad . \tag{7a}$$

Тогда для вычисления вероятности попадания случайной величины в какой-либо интервал следует прибегать к интегрированию:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx . \tag{8}$$

Интегралы вида (8) для распределения Гаусса не вычисляются аналитически, для них существуют таблицы (такие интегралы часто называют интегралами ошибок). Полезно помнить значения интегралов для интервалов, кратных стандартному отклонению:

$$P(\bar{x} - \sigma \le x \le \bar{x} + \sigma) = 0{,}683;$$

$$P(\bar{x} - 2\sigma \le x \le \bar{x} + 2\sigma) = 0{,}954;$$

$$P(\bar{x} - 3\sigma \le x \le \bar{x} + 3\sigma) = 0{,}997$$

которые определяют вероятности попадания x в интервал $\bar{x} \pm \sigma$, $\bar{x} \pm 2\sigma$ и $\bar{x} \pm 3\sigma$.

Для распределения Гаусса среднее значение равно $\bar{x}$, а стандартное отклонение равно σ. Для кривой распределения Гаусса σ есть полуширина кривой на высоте $e^{-1/2} \approx 0,607$ от максимального значения.

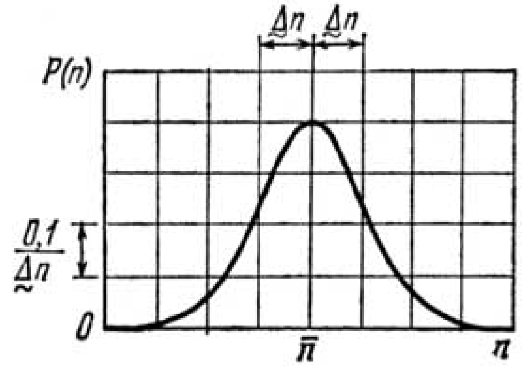


Рис.7. Гауссово распределение плотности вероятности *P(n)* как функция *n*. Вероятность того, что *n* принимает значения, лежащие между *n-Δn* и *n+Δn* определяется площадью под кривой, ограниченной этим интервалом. Если *Δn* равно стандартному отклонению, то эта площадь равна 0.683.

Статистика фотоотсчетов ФЭУ

Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) - это фотоэлектрический приемник излучения, преобразующий световой сигнал в электрический. Он состоит из откаченного небольшого баллончика со стеклянным или кварцевым окошком, через которое свет падает на фотокатод ФК (рис.8). В баллон впаяны электроды, между которыми приложено напряжение. Фотоэлектроны, эмитируемые при освещении фотокатода, ускоряются электрическим полем и попадают на первый электрод (динод Д1), вызывая эмиссию вторичных электронов. Большинство вторичных электронов после ускорения попадают на следующий динод, где процесс повторяется, и т.д. Вторичные электроны с

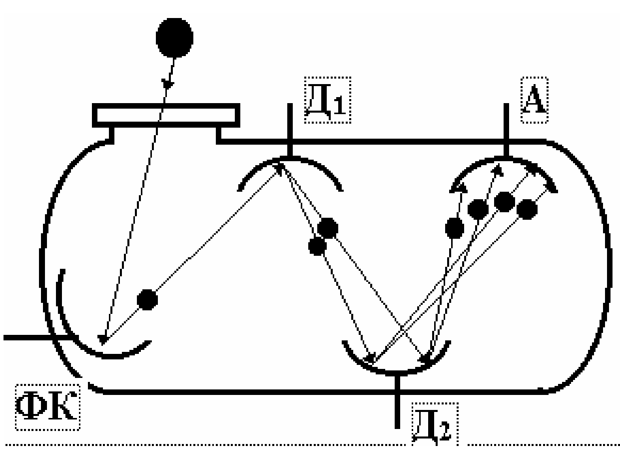


Рис.8. Принципиальная схема ФЭУ.

последнего из динодов собираются на аноде А. В результате, сила тока на выходе ФЭУ будет пропорциональна интенсивности падающего на фотокатод излучения. Общий коэффициент усиления такой системы, имеющей 10-15 динодов, достигает $10^6 - 10^8$, что позволяет измерять очень малые световые потоки.

При измерении малых световых потоков, когда на фотокатод ФЭУ в единицу времени попадают отдельные фотоны, оказывается выгоднее измерять не силу тока в анодной цепи ФЭУ, а считать отдельные импульсы тока, образующиеся на выходе ФЭУ в результате попадания фотонов на фотокатод. Подсчитав число импульсов (фотонов), можно определить световой поток и интенсивность падающего на фотокатод излучения. Этот метод измерения световых потоков называется *счетом фотонов*.

В этой работе мы будем рассматривать появление импульсов на выходе *фотоэлектронного умножителя* (ФЭУ), работающего в *режиме счета фотонов*, как случайный процесс, включающий большое число событий. Пусть в среднем в единицу времени на фотокатод попадает ν фотонов. Покажем, что вероятность $P(n)$ того, что за время τ будет зарегистрировано n фотонов, определяется распределением Пуассона. Для этого разделим мысленно временной интервал τ на большое число малых интервалов dt. Вследствие случайного характера процессов фото- и вторичной электронной эмиссии вероятность появления импульса на выходе ФЭУ (фотоотсчета) в течение любого из интервалов dt не зависит от его появления в другие интервалы dt. Интервал dt возьмем настолько малым, что вероятность появления фотона за это время очень мала. Например, учитывая что в среднем за $1/\nu$ секунд на фотокатод падает одна частица, возьмем $dt=0.001/\nu$. Таким образом, в каждом интервале dt производится независимое испытание на появление частицы, а число испытаний, $N=\tau/dt$. При этом среднее значение $\bar{n}=\nu\cdot\tau<<N$, а вероятность $p\approx\bar{n}/N=0.001<<1$. Следовательно, применимо распределение Пуассона.

Следует понимать, однако, что ответ на вопрос: какое распределение имеет место в действительности, может дать только эксперимент.

Экспериментальная установка

Нас будет интересовать число импульсов на выходе ФЭУ за некоторое время τ (время накопления). Предположим, что мы регистрируем в среднем 10 импульсов в секунду. Повторим процесс измерений N раз. Всегда ли мы будем иметь 10 отсчетов и с какой вероятностью мы можем получить другой результат? Для ответа на эти вопросы следует построить гистограмму $P(n)$.

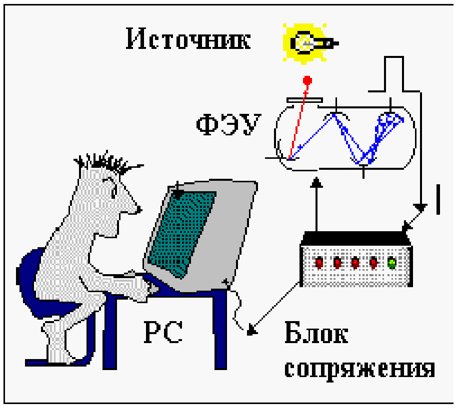


Рис.9. Блок-схема установки.

Статистические закономерности будут проявляться при больших значениях $N>>1$. Поэтому для проведения эксперимента была разработана автоматизированная установка, блок-схема которой приведена на рис.9.

Свет от источника попадает на ФЭУ, который работает в режиме счета фотонов. Импульсы с выхода ФЭУ поступают на блок сопряжения, который содержит формирователь и счетчик импульсов. Блок сопряжения преобразует электрические сигналы, необходимые для работы экспериментальной установки в цифровой код, и передает его компьютеру по последовательному каналу. Время счета импульсов τ задается программно. Управление экспериментальной установкой осуществляется с помощью программы, являющейся многооконным приложением в среде Windows, что позволяет реализовать многозадачный режим работы и предоставляет пользователю удобный графический интерфейс.

Установка позволяет снимать гистограммы $P(n)$ при различных $\bar{n}$, определять параметры полученных распределений и проводить сравнение теории и эксперимента с помощью встроенных электронных таблиц и метода наименьших квадратов (МНК).

После загрузки программы на экране монитора появляется главное окно, позволяющее выбрать один из трех возможных режимов работы: **Эксперимент, Обработка, Анализ.**

Режим работы *Эксперимент.*

Этот режим (рис.10) позволяет снимать гистограммы *P(n)* при

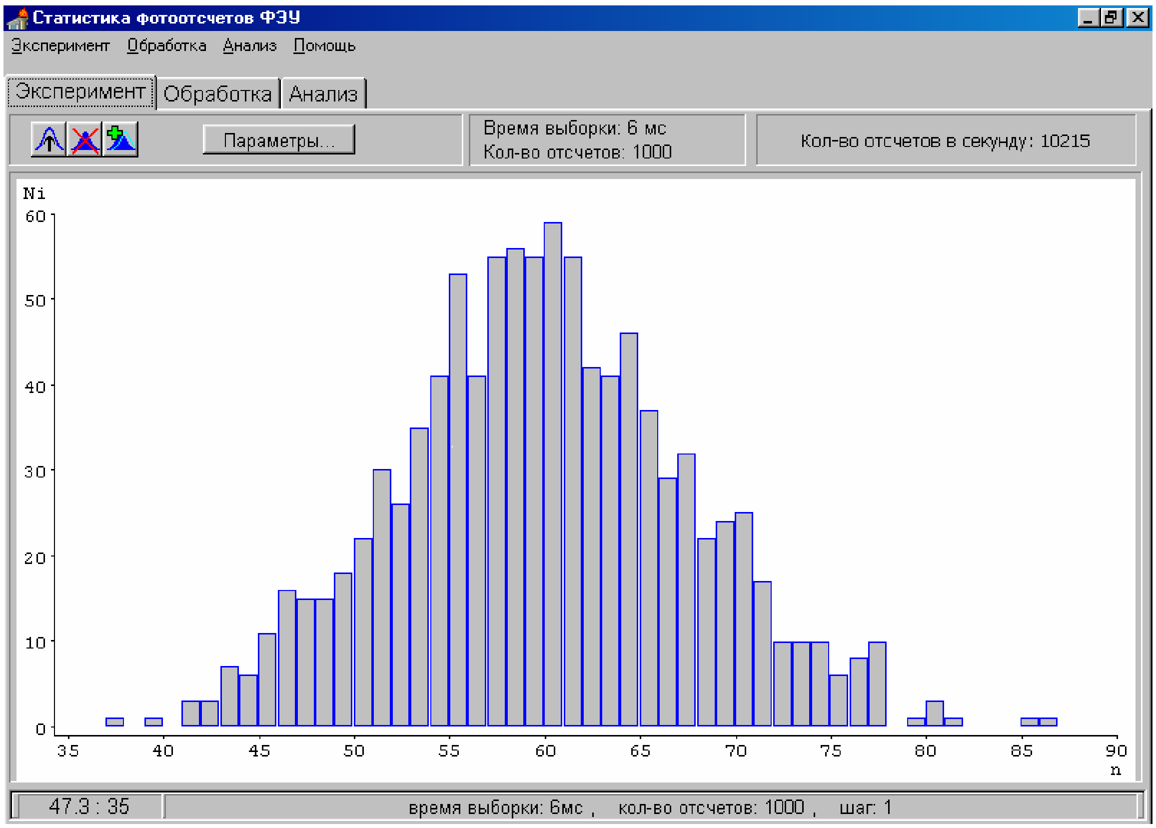
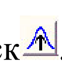


Рис 10. Главное окно программы в режиме **Эксперимент**

различных параметрах. В данном режиме до начала эксперимента автоматически запускается счетчик, подсчитывающий число импульсов, зафиксированных за одну секунду (это число высвечивается в окне, расположенном в правой верхней части экрана). Для того, чтобы снять гистограмму, надо нажать кнопку **Эксперимент**, затем **Параметры**, установить в открывшемся окне время накопления, число опытов *N,* шаг гистограммы (обычно шаг выбирают равным 1) и нажать кнопку Пуск. Программа автоматически выполнит *N* опытов и на экране появится гистограмма, которая может быть занесена в архив данных нажатием кнопки **Добавить в обработку****.**

***Режим работы** Обработка.*

Сохраненные гистограммы можно просмотреть в режиме **Обработка**.

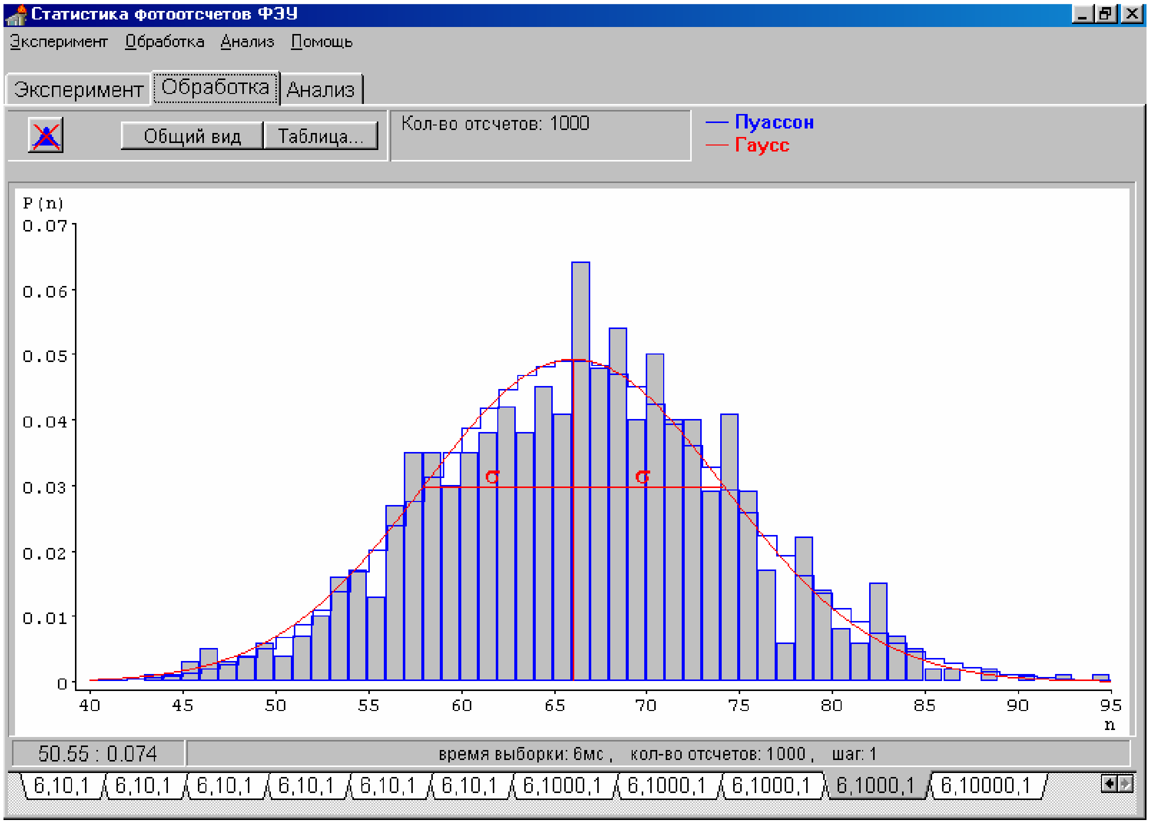


Рис 11. Вид окна программы в режиме Обработка

В нижнем левом углу окна **Обработка** выводятся координаты курсора (n, P(n)), что дает возможность найти среднее значение n и стандартное отклонение σ по формулам (1-3). Найденные значения заносят в таблицу (рис.12), которая появляется при нажатии кнопки **Таблица**.

При проведении первого эксперимента необходимо самостоятельно провести расчеты среднего значения $\bar{n}$ и стандартного отклонения σ и внести их в таблицу. Программа также самостоятельно проводит расчеты этих параметров и в случае совпадения результатов (с точностью до 5 %) на экране появятся теоретические графики распределений Пуассона и Гаусса, соответствующие рассчитанным значениям. Если же совпадения не будет, то необходимо повторять расчеты до получения правильного результата.

Для последующих экспериментов теоретические графики будут появляться на экране сразу, что позволит довольно просто по этим графикам рассчитывать искомые значения параметров для их последующего ввода в таблицу.

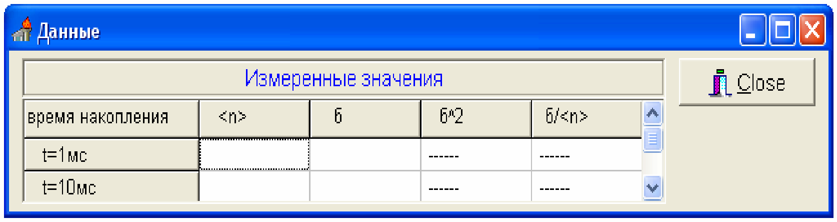


Рис. 12. Таблица, в которую заносятся результаты обработки

Режим Анализ.

Этот режим позволяет построить графики $\sigma^2(\bar{n}), \sigma(\bar{n}), \sigma/\bar{n}$ по данным, занесенным в таблицу. Для анализа зависимости $\sigma^2(\bar{n})$ используется метод наименьших квадратов (МНК). Для каждого из графиков приводится теоретическая зависимость и экспериментальные точки, внесенные в таблицу.

Упражнение 1

В режиме Эксперимент-Параметры установите в пункте «Количество отсчетов» значение N=1000, а время выборки выберите таким, чтобы среднее число импульсов, регистрируемых за это время, лежало в диапазоне от 3 до 7 импульсов (для расчета времени выборки используйте данные в окне, указывающем число импульсов, пришедших за 1 секунду).

Получите гистограмму с шагом s=1. В режиме «Обработка» рассчитайте самостоятельно значения $\bar{n}$ и σ, введите их в таблицу для получения подтверждения правильности расчетов. В этом случае на экране появятся теоретически рассчитанные графики распределений Пуассона и Гаусса, что позволит при дальнейших экспериментах упростить процедуру расчетов значений $\bar{n}$ и σ. Зарисуйте в рабочей тетради полученные экспериментальную и теоретическую (Пуассон) гистограммы. По обеим полученным гистограммам и формулам (1)-(3) рассчитайте и занесите в тетрадь следующие вероятности: $P(\bar{n})$, $P(\bar{n},\bar{n}+1)$, $P(\bar{n}-\sigma,\bar{n}+\sigma)$, $P(\bar{n}-2\sigma,\bar{n}+2\sigma)$, где $P(a,b)$ означает вероятность попадания количества отсчетов n в интервал от a до b. Так как полученные значения $\bar{n}$ и σ в общем случае не будут целыми числами, то для проведения расчетов вероятностей выполните разумное округление. Сравните полученные значения с соответствующими значениями для распределения Пуассона (данные для распределения Пуассона следует рассчитать самостоятельно).

Упражнение 2

Проверьте экспериментально, одинаковы ли вероятности получить n отсчетов за время Δt и $2n$ отсчетов за время $2\Delta t$? При экспериментах используйте значения N=1000, s=1, интервал времени Δt и число отсчетов n выберите самостоятельно. Измерения проведите для 3-5 различных значений Δt и n.

Объясните полученный результат, предполагая, что наблюдается распределение Пуассона.

Упражнение 3

В режиме Эксперимент-Параметры установите N=1000, s=1, время выборки τ выберите небольшим. Проведите серию измерений с временами выборки τ, 5τ, 10τ, 20τ, 40τ, 80τ. На полученных гистограммах измерьте $\bar{n}$ и σ с помощью курсора по теоретической кривой распределения Гаусса, учитывая, что ширина кривой на высоте 0.6 от пикового значения равна 2σ (обратите внимание на то, при каком значении $\bar{n}$ распределения Пуассона и Гаусса практически совпадают). Занесите полученные значения в Таблицу и в рабочую тетрадь.

По этим данным в режиме Анализ будут построены графики дисперсии - $\sigma^2(\bar{n})$, стандартного отклонения - $\sigma(\bar{n})$, (характеризующего величину абсолютной флуктуации) и график $\sigma(\bar{n})/\bar{n}$ - показывающий величину относительной флуктуации в зависимости от $\bar{n}$. Аналогичные графики необходимо построить также и на миллиметровой бумаге.

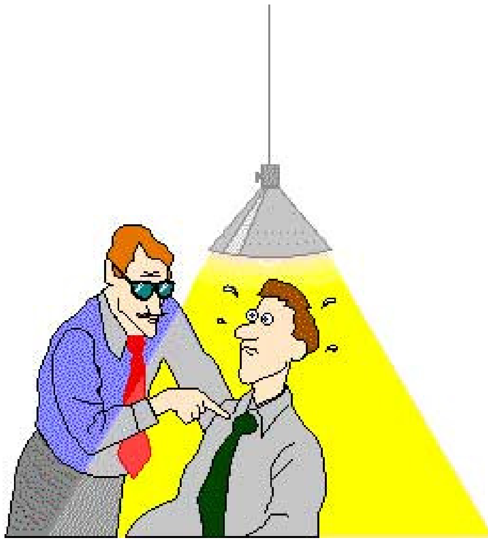
На основании анализа полученных графиков и формул для σ и $\bar{n}$ объясните поведение абсолютных и относительных флуктуаций случайной величины n при увеличении ее среднего значения $\bar{n}$.

Упражнение 4

В режиме Эксперимент-Параметры установите s=1, время выборки τ выберите таким, чтобы среднее число зарегистрированных за это время импульсов было около 100-200. Получите две серии гистограмм с N=10 и N=1000, проводя по *m* (*m*>5) измерений для каждой серии (при проведении измерений для каждой из серий условия освещенности ФЭУ не должны изменяться, т.е. средние значения $\bar{n}$ и стандартные отклонения σ должны быть примерно одинаковыми). Найдите для каждой серии среднее значение среднего $\tilde{n} = \frac{1}{m}\sum_i \bar{n}_i$ и его стандартное отклонение $\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\tilde{n} - \bar{n}_i)^2}$.

Проверьте, выполняется ли соотношение $\sigma_{\bar{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$?

Контрольные вопросы



Формула для оценки, которую Вы, вероятно, получите на допуске:

ОЦЕНКА = 2+*N*/3,

где *N* - количество вопросов, на которые Вы ответили правильно. (Стандартное отклонение для величины ОЦЕНКА равно 1).

1. Подбросьте три одинаковых монетки и постройте гистограмму, считая, что случайная величина имеет значение 1 при выпадении "орла " и 0 при выпадении "решки". (Если не хватает стипендии, подбросьте одну монетку три раза.)

2. Вычислите выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение по гистограмме, полученной в предыдущем задании.

3. Проверьте условие нормировки по гистограмме, полученной в первом задании.

4. Найдите значения вероятности $P(n)$, среднего и стандартного отклонения для случайной величины n первого задания. Совпадают ли они со значениями, полученными во втором задании?

5. Дайте определение функции плотности вероятности.

6. Как найти вероятность попадания дискретной (непрерывной) случайной величины в интервал от a до b.

7. Как связаны стандартное отклонение и стандартное отклонение среднего?

8. Напишите формулы для биномиального распределения, распределения Пуассона и нормального распределения (Гаусса).

9. Напишите формулы для среднего и дисперсии для биномиального распределения, распределения Пуассона и нормального распределения (Гаусса).

Литература

1. Ф.Рейф, Статистическая физика, Наука, 1972.

2. Дж.Сквайрс, Практическая физика, М.: Мир, 1971.