Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра общей физики
Лабораторный практикум по общей физике
(молекулярная физика)

Лабораторная работа

НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Москва 2020

Цель работы

Изучение нестационарной теплопроводности в твердом теле при заданных начальных и граничных условиях. Нахождение коэффициента температуропроводности веществ в процессе установления стационарного теплового потока через образец.

Идея эксперимента

Измеряется зависимость температуры от времени в геометрическом центре образца в виде шайбы, расположенной между нагревателем и холодильником. Коэффициент температуропроводности рассчитывается с использованием одномерной модели нестационарной теплопроводности.

Теоретическое введение

В твердом теле, находящемся в термодинамическом равновесии с окружающей его средой, устанавливается стационарное распределение температуры, т.е. температура любой точки тела не зависит от времени и равна температуре окружающей среды.

Если какую-либо часть тела нагреть, то начинается процесс переноса тепла от более нагретой части тела к менее нагретым, приводящий к постепенному выравниванию температуры. Этот процесс называется теплопроводностью и обусловлен непосредственной передачей энергии от частиц тела (молекул, атомов, электронов), обладающих большей энергией, частицам тела с меньшей энергией. Если относительное изменение температуры T на расстоянии средней длины свободного пробега частиц λ мало, то выполняется основной закон теплопроводности (закон Фурье):

$$\mathbf{j} = -\kappa \,\mathrm{grad} T \tag{1}$$

где $\mathbf{j}$ – вектор плотности потока теплоты (численно равен тепловой энергии, переносимой в единицу времени через сечение единичной площади, нормальное к направлению распространения теплоты); κ – коэффициент теплопроводности (не зависит от grad$T$, а зависит от агрегатного состояния вещества, его атомно-молекулярного строения, температуры, давления, состава и т.д.);

grad$T$ – вектор градиента температуры, направленный в сторону повышения температуры. В одномерном случае, если вектор направлен вдоль оси z

$$\mathrm{grad}\, T = \frac{dT}{dz}.$$

Теплопроводность твердых тел имеет различную природу. В металлах, полуметаллах и полупроводниках процесс переноса тепла осуществляется как коллективными колебаниями решетки (фононами), так и электронами проводимости. В диэлектриках, не имеющих свободных электрических зарядов, перенос энергии теплового движения осуществляется фононами. В этом случае $\kappa \sim c\upsilon\lambda$, где c – теплоемкость диэлектрика, совпадающая с теплоемкостью газа фононов, υ – средняя скорость фононов, приблизительно равная скорости звука, λ – средняя длина свободного пробега фононов. Существование определенного конечного значения λ обусловлено рассеянием фононов на фононах из-за дефектов кристаллической решетки (в частности, на границах кристаллитов и на границах образца).

Рассмотрим одномерную задачу по изучению процесса переноса тепла в твердом теле (рис.1). Поместим слой вещества конечной толщины с плоскопараллельными границами между холодильником и нагревателем (двумя телами с бесконечно большой теплоемкостью, имеющими постоянные температуры T_0 и T_1 соответственно, причем $T_0 < T_1$). Тогда в веществе возникает поток тепла (например, вдоль оси z), при этом температура во всех точках любой выбранной плоскости, перпендикулярной к оси z, одинакова, т. е. $T = T(z)$ (изотермическая плоскость). Выделим в этом слое малый цилиндр площадью поперечного сечения S, ось которого параллельна оси z.

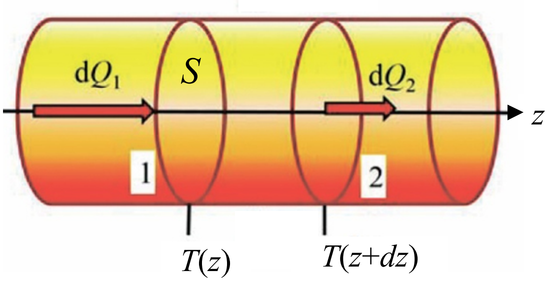

Рис.1. Тепловой баланс в участке стержня.

Пусть температура левого конца цилиндра выше, чем правого, и равна T. Тогда, в соответствии с (1), через сечение 1 с координатой z за время dt в выделенный объем поступает количество теплоты

$$dQ_1(z) = -\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_z S \cdot dt\,, \tag{2}$$

а из правого конца выходит количество теплоты

$$dQ_2 = -\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+dz} \cdot S \cdot dt = -\kappa \frac{\partial}{\partial z}\left(T(z) + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right) S \cdot dt = \tag{3}$$

$$= -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \right) S \cdot dt\,.$$

Различают стационарный и нестационарный процессы теплопроводности. При стационарном процессе поток теплоты, проходящий через любое сечение цилиндра, один и тот же, т.е. $\mathrm{d}Q(z) = \mathrm{d}Q(z + \mathrm{d}z)$. При нестационарном процессе эти величины различны, поскольку часть тепла, входящего через сечение с координатой z, идет на нагрев массы вещества $\mathrm{d}M = \rho S \mathrm{d}z$ с плотностью ρ в объеме $S\mathrm{d}z$, а остальное тепло идет дальше на нагрев вещества в следующих слоях образца.

Количество теплоты, поступившее в выделенный объем, можно найти по изменению его температуры

$$dQ = c\rho \cdot dV \cdot dT = \rho c \cdot dT \cdot S\,dz\ ,$$

Это же количество теплоты должно быть равно алгебраической сумме вошедшей и вышедшей теплоты:

$$dQ = dQ_1 - dQ_2$$

или

$$\rho c\, dT\, S_\perp dz\, dt = \ = -S_\perp \kappa \frac{\partial T}{\partial z} dt + S_\perp \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx \right) dt\,.$$

Отсюда приходим к одномерному уравнению нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \tag{4}$$

где $a = \dfrac{\kappa}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности, характеризующий теплоинерционные свойства вещества: чем больше a, тем быстрее происходит изменение температурного поля в веществе.

Коэффициент температуропроводности измеряется в м^2/с.

Рассмотрим задачу о нестационарном процессе теплопроводности в плоском слое, толщина которого вдоль оси z равна d, а размеры по осям x и y не ограничены. Как известно, для решения уравнения (4) необходимы начальные и граничные условия. Пусть в момент времени $t = 0$ температура слоя во всех точках была равна T_0 (начальное условие). Граничные условия определяются температурами холодильника T_0 (при $z = 0$) и нагревателя T_1 (при $z = d$), остающимися неизменными в течение всего эксперимента. Запишем эти условия:

$$\begin{aligned} &T(z,0) = T_0; \\ &T(0, t) = T_0; \\ &T(d, t) = T_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение уравнения (4) при условиях (5) можно представить в виде бесконечного ряда:

$$T(z,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\left[\frac{z}{d} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left(-\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 at\right)\sin\frac{\pi n z}{d}\right] \tag{6}$$

Вывод этой формулы приведен в Приложении.

Введем обозначения для разности температур:

$$\begin{aligned} &\tau(z, t) = T(z, t) - T_0; \\ &\tau_1 = T_1 - T_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда выражение (6) можно записать в виде

$$\tau(z,t) = \tau_1\left[\frac{z}{d} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left(-\left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 at\right)\sin\frac{\pi n z}{d}\right]$$

Значения экспоненциальных множителей ряда быстро уменьшаются с ростом n, поэтому в решении можно ограничиться первым членом ряда $n = 1$ (за исключением начальной стадии, пока еще справедливо соотношение $\frac{at}{d^2} << 1$:

$$\tau(z,t) = \tau_1\left[\frac{z}{d} - \frac{2}{\pi}\exp\left(-\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 at\right)\sin\frac{\pi z}{d}\right]. \tag{8}$$

Как видно из (8) величина d^2 / a имеет размерность времени и является характерным временем установления температуры в системе (временем релаксации): $t_{уст} = \frac{d^2}{\pi^2 a}$.

Выражение (8) можно использовать для нахождения значения коэффициента температуропроводности a. Положив в формуле (8) $z = d/2$, получим

$$\tau(d/2,\ t)=\tau_1\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\exp\left(-\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 at\right)\right]. \qquad (10)$$

После преобразований получим

$$\ln\left(1-2\frac{\tau}{\tau_1}\right)=\ln\frac{4}{\pi}-\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 at. \qquad (11)$$

Очевидно, что величина $\ln(1-2\tau/\tau_1)$ является линейной функцией времени с угловым коэффициентом – тангенсом угла наклона прямой, равным $\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 a$. Таким образом, на основании экспериментальных данных по температурам $T(d/2,\ t)$, T_0, T_1 и по тангенсу угла наклона прямой (11) можно определить значение коэффициента температуропроводности a.

Эксперимент

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой автоматизированную систему, состоящую из компьютера, экспериментального модуля и универсального микропроцессорного блока сопряжения. Данная система позволяет управлять ходом эксперимента, проводить измерения, накапливать и обрабатывать экспериментальные данные.

Экспериментальный модуль (рис.1) – это каркас из оргстекла, смонтированный на массивном основании и разделенный на два объема. Нижний объем (холодильник) I содержит три вентилятора с радиаторами, на которых расположены латунные диски с датчиками для измерения температуры холодильника. Верхний объем II содержит:

- программно-управляемый нагреватель (Н) на подъемном механизме (ПМ) с ручкой, укрепленном на подвижной платформе;
- три образца цилиндрической формы (О1-О3) с плоскопараллельными основаниями;
- семь датчиков для измерения температуры (3 датчика расположены в холодильнике, 3 датчика расположены в геометрических центрах исследуемых образцов и 1 датчик – в нагревателе);

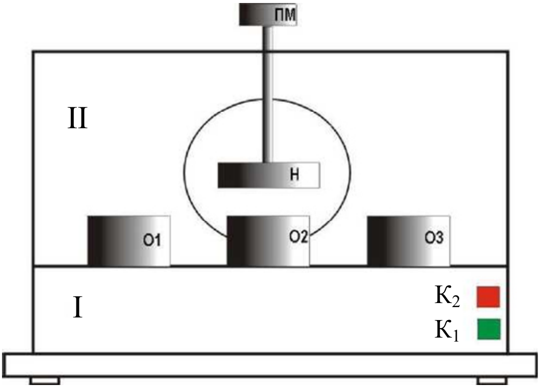

Рис. 2. Схематическое изображение экспериментального модуля

- вентилятор форсированного охлаждения, расположенный на задней панели каркаса.

Вентиляторы подключены штекерным разъемом к отдельному блоку питания и включаются кнопками, расположенными на лицевой панели каркаса; кнопка $К_1$ зеленого цвета (рис.2) включает вентиляторы холодильника, а кнопка $К_2$ красного цвета – вентилятор форсированного охлаждения образцов.

Общий вид установки приведен на рис.2

Эксперименты проводятся с тремя образцами: один из оргстекла и два – из древесины (сосна), причем в одном из деревянных образцов волокна древесины параллельны оси цилиндра, а в другом – перпендикулярны. Это позволяет исследовать анизотропию температуропроводности древесины.

Изменение температуры нагревателя осуществляется регулировкой силы тока, протекающего через резисторы, вмонтированные в тело нагревателя. Температура нагревателя задается программно в пределах от 30°С до 70°С и измеряется вмонтированным в нагреватель датчиком температуры. Система стабилизации автоматически поддерживает заданное значение температуры. Измерение и стабилизация температуры нагревателя производятся с точностью не хуже 0,1°С.

В качестве холодильников используются три латунных диска, которые нижней стороной приклеены хорошо проводящей тепло пастой к радиаторам с обдувающими их вентиляторами. На верхней стороне дисков располагаются изучаемые образцы. В начальный момент времени холодильник имеет температуру окружающего воз-

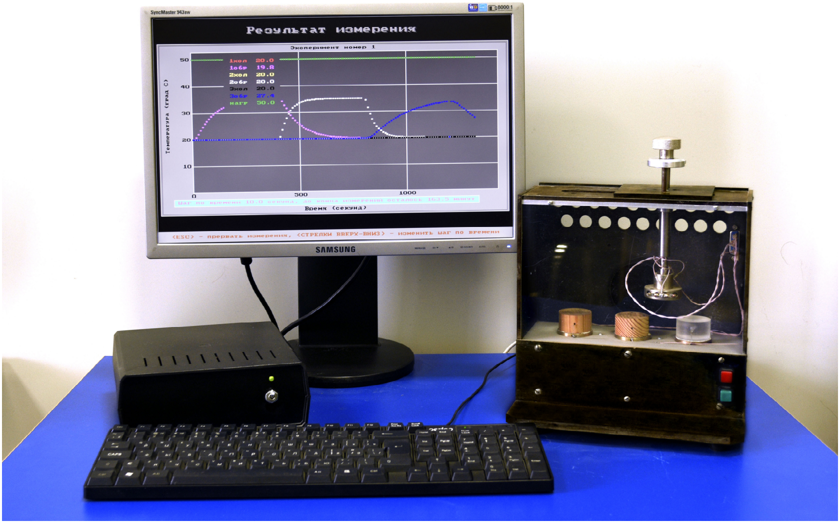

Рис.3 Общий вид установки

духа. В процессе измерений температура холодильника повышается (за счет тепла, идущего от нагревателя), но работающие вентиляторы позволяют сделать повышение температуры незначительным. В каждый из дисков вмонтировано по датчику температуры. Еще три датчика температуры находится в геометрических центрах изучаемых образцов.

Для измерения температуры в физических системах подобного типа разработан и создан на базе универсального микропроцессорного блока сопряжения 8-канальный термометр, измеряющий температуру в диапазоне 0-100°С с точностью не хуже 0.1°С. Термометр содержит 8 датчиков, систему задания стабильного тока в каждый датчик, 8 усилителей сигнала с системой калибровки выходного напряжения каждого усилителя пропорционального изменению температуры. В качестве датчиков температуры выбраны малогабаритные кремниевые полупроводниковые диоды типа КД514. Для упрощения схемы калибровки термометров и уменьшения величины статической погрешности при измерениях температуры диоды подбираются с одинаковыми вольтамперными характеристиками. Малые размеры датчиков необходимы для сведения к минимуму искажений температурных полей в образцах. Все датчики вставлены в сквозные отверстия диаметра 1.6 мм, и от них идут тонкие провода через разъем к измерительной системе.

Микропроцессорный блок сопряжения выполняет следующие функции:

- связь с компьютером по линейному порту RS-232;
- управление нагревателем (нагрев до заданной температуры и ее стабилизация);
- измерение температуры по семи каналам;
- передачи полученных экспериментальных данных в память компьютера для отображения их на экране монитора в виде графической и числовой информации, накопления и последующей обработки результатов экспериментов.

Управление работой установки осуществляется программой, запускаемой на персональном компьютере.

Описание работы программы и выполнение эксперимента.

Головная программа многоуровневая и работает в режиме "МЕНЮ", когда на экране монитора предлагается список подпрограмм, из которых надо выбрать одну для продолжения работы. Меню содержит несколько окон, одно из которых выделено другим цветом (так называемое "активное окно"). При нажатии клавиши ENTER будет выполняться директива именно этого окна. Смена активного окна осуществляется клавишами СТРЕЛКА ВВЕРХ и СТРЕЛКА ВНИЗ. При отказе от работы с данной подпрограммой надо нажать клавишу ESC, при этом программа возвращается на предыдущий уровень работы. Простейшие подсказки по режиму работы, выбранной подпрограммы, содержатся в выделенной строке внизу экрана монитора.

Кроме «командных» окон в меню есть «числовые» окна, в которых можно задавать или изменять значения некоторых параметров, а значит изменять режим работы установки или условия проведения эксперимента. Для изменения какого-либо значения необходимо сделать соответствующее «числовое» окно активным и перейти в режим редактирования текста этого окна. Для этого надо нажать любую цифровую клавишу, после чего в данном окне можно работать как в обычном текстовом редакторе. Выход из режима редактирования и ввод измененного параметра в программу осуществляется нажатием клавиши ENTER.

После загрузки программы на экране монитора появляется основное меню, содержащее следующие команды (подпрограммы):

НАСТРОЙКА
ЭКСПЕРИМЕНТ
ОБРАБОТКА
ВЫХОД

Рассмотрим подробнее работу этих подпрограмм.

НАСТРОЙКА. В этой подпрограмме задаются исходные значения параметров установки. В соответствующих «числовых окнах» необходимо задать температуру нагревателя (выбирается по указанию преподавателя), температуру холодильника (равна комнатной температуре), толщину образца в сантиметрах. Затем следует подтвердить введенные значения параметров, после чего программа предложит перейти к выполнению эксперимента.

Следует отметить, что программа содержит подпрограмму моделирования измерений, для чего требуется выбрать соответствующий пункт меню. Этот режим полезен для знакомства с работой программы без подключения экспериментального модуля. При моделировании, кроме перечисленных выше величин, следует задать значение коэффициента температуропроводности исследуемого (модельного) образца. Из режима моделирования можно вернуться в режим реальных измерений.

ЭКСПЕРИМЕНТ. Данной подпрограммой осуществляется измерение температуры по семи каналам в процессе эксперимента с представлением графической и числовой информации на экране монитора. При запуске подпрограммы нагреватель начинает прогреваться до заданной температуры, после чего его температура поддерживается постоянной в процессе всего эксперимента.

Внимание!!! *Перед началом эксперимента следует проверить, что нагреватель поднят над образцами. Это необходимо для того, чтобы нагреватель прогрелся до температуры, заданной при настройке, и при этом температура самих образцов оставалась неизменной и равной температуре холодильника. Если это условие не выполнено, то следует дождаться охлаждения образцов до комнатной температуры.*

При запуске эксперимента на экране монитора появляются графики зависимости температуры от времени, измеряемые семью термометрами, и колонка из семи чисел – показания термометров, причем одинаковые цвета графика и числа соответствуют показаниям одного и того же термометра. В начальный момент времени значения температур должны быть одинаковыми (вследствие нестабильности параметров возможны отклонения до 0,5°C).

Измерения температуры производятся сразу по семи каналам периодично, при этом промежуток времени между измерениями можно изменять в пределах от 5 до 20 секунд, с помощью клавиш СТРЕЛКА ВВЕРХ (ВНИЗ). Поскольку программой предусмотрено измерение 1000 точек по временной шкале, то время эксперимента изменяется в пределах от 5000 до 20000 секунд.

Для прекращения измерений следует нажать клавишу ESC, после чего результаты эксперимента можно внести в память для последующей обработки.

ОБРАБОТКА. С помощью этой подпрограммы по результатам проведенного эксперимента рассчитываются коэффициенты температуропроводности каждого из образцов.

- Сначала следует указать номер образца для обработки, при этом на экране отображаются результаты эксперимента только с этим образцом. Так как температура холодильника в процессе измерений постепенно повышается, то подпрограмма рассчитывает усредненное по времени значение температуры холодильника в процессе прогревания выбранного образца и по формулам (7) находит значения температур τ и τ_1.
- Затем в соответствии с формулой (11) программа рассчитывает и отображает на графике зависимость величины $\ln(1-2\tau/\tau_1)$ от времени.
- На графике следует выбрать линейный участок для расчета коэффициента температуропроводности. Для этого на экране появляются два курсора в виде вертикальных линий, положение одного из которых (активного курсора) можно менять нажатием клавиш СТРЕЛКА ВЛЕВО (ВПРАВО). Скорость перемещения курсора можно увеличить, если одновременно со стрелками нажать клавишу CTRL. Смена активного курсора осуществляется нажатием клавиши TAB. По завершении выбора следует нажать ENTER.

  Отметим, что полученная зависимость может немного отличаться от линейной из-за потерь тепла, не предусмотренных моделью, в соответствии с которой проводится обработка (отвод тепла через боковую поверхность образца и по проводам датчика температуры).

- Затем по выбранному участку методом наименьших квадратов проводится прямая линия, по углу наклона которой рассчитывается коэффициент температуропроводности и оценивается погрешность.

Подготовительные операции

Так как в нашем случае температура холодильника равна комнатной, то для выполнения условий эксперимента температура нагревателя должна быть задана выше комнатной температуры.

1) Включите блок питания вентиляторов в сеть 220 В. Включите вентиляторы холодильника нажатием кнопки зеленого цвета на лицевой панели каркаса. Вентилятор форсированного охлаждения, установленный на задней панели каркаса, следует перекрыть размещенной там же выдвижной шторкой.

2) Убедитесь, что нагреватель поднят над образцами и максимально удален от них. Если нагреватель находится на одном из образцов, следует, придерживая одной рукой основание установки, другой потянуть ручку подъемного механизма (ПМ) вверх, пока направляющие штыри не выйдут полностью из отверстий в верхней крышке установки. После этого нагреватели можно свободно передвигать влево-вправо.

3) Запустите компьютерную программу. В подпрограмме НАСТРОЙКА задайте температуру нагревателя, холодильника (по комнатному термометру) и толщину образца, запишите эти значения и перейдите в подпрограмму ЭКСПЕРИМЕНТ.

С переходом в подпрограмму автоматически включается нагреватель. На экране монитора можно наблюдать за ростом температуры нагревателя, которая по достижении заданного значения автоматически поддерживается с точностью не хуже 0.1 К.

Измерения

После установления необходимой температуры нагревателя:

4) подвиньте платформу с ПМ так, чтобы нагреватель оказался точно над первым образцом. Придерживая ручку ПМ, найдите положение, при котором направляющие штыри попадут в отверстия в верхней крышке, после чего аккуратно опустите нагреватель на образец.

Наблюдайте на экране монитора за процессом изменения температуры в средней точке первого образца и температуры соответствующего холодильника и нагревателя.

При достижении стационарного режима переноса тепла в образце (температура в средней точке образца практически не изменяется):

5) поднимите нагреватель. Не прерывая измерений, переместите нагреватель ко второму образцу и повторите все операции (1)-(4), которые были проделаны с первым образцом. По окончании измерений со вторым образцом перейти к третьему.
6) По окончании измерений на третьем образце снимите с него нагреватель и прекратите эксперимент однократным нажатием клавиши ESC. Одновременно с этим отключается и система стабилизации температуры нагревателя.
7) Результаты измерений следует занести в память компьютера, нажав клавишу ENTER.
8) Выдвинете размещенную на задней панели шторку, перекрывающую вентилятор форсированного охлаждения, и включите вентилятор нажатием кнопки красного цвета на лицевой панели каркаса.

Обработка результатов

9) Перейдите в подпрограмму ОБРАБОТКА, и в соответствии с приведенным выше описанием проведите обработку результатов для каждого из образцов. Если прямая линия, проведенная на линейном участке графика, не очень хорошо аппроксимирует экспериментальные данные, то обработку результатов можно повторить, выбрав другой участок.
10) По результатам обработки запишите в рабочую тетрадь рассчитанные значения коэффициентов температуропроводности каждого из образцов и погрешности измерения.
11) По формуле (9) для каждого из образцов рассчитайте характерное время установления $t_{уст}$ в системе. Зарисуйте качественно графики зависимости температуры средней точки образцов от времени и отметьте на них значение $t_{уст}$.

12) По окончании всех измерений и обработки выключите вентилятор форсированного охлаждения, перекройте его шторкой, при этом нагреватель должен быть поднят над образцами.

Представление результатов

Тетрадь с результатами измерений предоставьте на подпись преподавателю.

Основные итоги работы

В работе должны быть измерены коэффициенты температуропроводности трех образцов, рассчитаны величины времен релаксации, качественно зарисована зависимость температуры средней точки образцов от времени.

Контрольные вопросы

1. Что такое теплопроводность, чем переносится тепловая энергия в диэлектриках и металлах?
2. Что такое коэффициент теплопроводности, его размерность.
3. Выведите одномерное уравнение нестационарной теплопроводности.
4. В каком приближении найдено решение уравнения нестационарной теплопроводности в данной работе?
5. Что такое время тепловой релаксации системы, от чего оно зависит?
6. Объясните устройство экспериментальной установки и принцип ее работы.

Литература

1. *Сивухин Д. В*. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2006. Глава V, §52-54, 57.
2. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. §52, 53.

Приложение
Решение одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу о нестационарном одномерном процессе теплопроводности в плоском слое, толщина которого вдоль оси z равна d, а размеры по осям x и у не ограничены. Пусть до момента времени $t = 0$ температура слоя во всех точках была равна T_0 (начальное условие). Условия на границах слоя задаются температурами холодильника T_0 (при $z = 0$) и нагревателя T_1 (при $z = d$), остающимися неизменными. Эти условия вместе с уравнением теплопроводности (4) дают следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, \tag{12}$$

$$T(0, t) = T_0, \tag{12a}$$

$$T(d, t) = T_1. \tag{12b}$$

$$T(z,0) = T_0, \tag{12c}$$

В стационарном случае $\partial T / \partial t = 0$ и уравнение (12) переходит в

$$\frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} = 0.$$

Его решение с граничными условиями (12a,b) имеет вид:

$$T_{\text{ст}}(z) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d} z = T_0 + Az, \tag{13}$$

т.е. температура линейно растет от T_0 до T_1 с коэффициентом наклона $A = (T_1 - T_0)/d$. К этому распределению температур приходит система при $t \to \infty$.

При решении нестационарной задачи в качестве переменной удобно взять величину отклонения текущей температуры от стационарной температуры

$$\tau(z,t) = T(z,t) - T_{\text{ст}}(z) = T(z,t) - T_0 - Az. \tag{14}$$

Для этой переменной уравнение теплопроводности сохранит свой вид

$$\frac{\partial \tau(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \tau(z,t)}{\partial z^2}, \tag{15}$$

но граничные условия упростятся и станут однородными

$$\tau(0, t) = 0; \tag{15a}$$

$$\tau(d, t) = 0. \tag{15b}$$

Начальное условие при этом будет

$$\tau(z, 0) = -Az; \tag{15c}$$

Решение (15) можно найти методом разделения переменных. Положим

$$\tau(z,t) = Z(z)\cdot\Theta(t)\,. \qquad (16)$$

Подставим это решение в (15) и поделим обе части уравнения на $Z(z)\cdot\Theta(t)$. Получится

$$\frac{1}{a}\frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2 = \text{const}\,, \qquad (17)$$

где штрихи обозначают производные по соответствующему аргументу. Отсюда следует отдельное уравнение для функции времени

$$\Theta' + ak^2\Theta = 0\,, \qquad (18)$$

решение которого имеет вид

$$\Theta(t) = e^{-ak^2 t}\,. \qquad (19)$$

Выбор отрицательного знака константы в (17) обеспечивает убывание экспоненты с течением времени.
Для функции координаты z получается уравнение

$$Z'' + k^2 Z = 0 \qquad (20)$$

с граничными условиями

$$Z(0) = 0\,, \qquad (20a)$$

$$Z(d) = 0\,. \qquad (20b)$$

Решением (20) являются функции $Z(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$. Из граничного условия (20a) следует $C_2 = 0$, а возможные значения k определяются из условия (20b) $C_1 \sin kd = 0$, откуда следует

$$k_n = \frac{\pi n}{d}\,, \qquad (21)$$

$$Z_n(z) = C_n \sin\frac{\pi n z}{d}\,. \qquad (22)$$

Полное решение для $\tau(z,t)$ можно представить бесконечной суммой найденных частных решений (16), (19), (22):

$$\tau(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 k_n^2 t} \sin\frac{\pi n z}{d}\,.$$

Это решение удовлетворяет однородным граничным условиям (15a,b), так как им удовлетворяют все члены ряда. Подставим его в начальное условие (15c):

$$\tau(z,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n z}{d} = \varphi(z) = -Az\,.$$

Коэффициенты C_n по сути являются коэффициентами Фурье при разложении функции $\varphi(z) = -Az$ в ряд по синусам на отрезке ($0 < z < d$). Как известно из теории рядов Фурье,

$$C_n = \frac{2}{d}\int_0^d \varphi(z)\sin\frac{\pi n z}{d}\cdot dz .$$

В данном случае

$$C_n = -\frac{2}{d}\int_0^d Az\cdot\sin\frac{\pi n z}{d}\cdot dz = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}(T_1 - T_0) .$$

Таким образом

$$\tau(z,t) = (T_1 - T_0)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-a^2k_n^2t}\sin\frac{\pi n}{d}z .$$

Чтобы перейти от $\tau(z,t)$ к исходной температурной шкале, воспользуемся (13):

$$T(z,t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d}z + \tau(z,t) =$$

$$= T_0 + (T_1 - T_0)\left(\frac{z}{d} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-a^2k_n^2t}\sin\frac{\pi n}{d}z\right).$$