

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ МЕХАНИКА

**А. Л. Клавсюк, Е. А. Никанорова, А. М. Салецкий,  
А. И. Слепков**

## ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ



Москва – 2011

## **Введение**

В реальном мире, который и является предметом изучения физики, связи между явлениями, материальными объектами столь разнообразны, что их принципиально невозможно описать во всех деталях. Так же как человек в повседневной жизни пользуется построенными им моделями поведения, общения, модельными (общими) представлениями о происходящих событиях, так и физика при анализе реального мира создает и использует модели физической действительности. При создании моделей принимаются только существенные для данного круга явлений и объектов свойства и связи.

Созданию моделей предшествует формирование понятий, относящихся к объекту исследования. Например, для обозначения физических тел, размеры которых несущественны в условиях данной задачи, вводится понятие «*материальная точка*». Тогда при формировании моделей более сложных явлений можно задавать положение материальной точки ее радиус-вектором.

Важнейшим понятием в механике является понятие об *инерциальной системе отсчета* – такой системе отсчета, относительно которой тела остаются в состоянии покоя или продолжают двигаться равномерно и прямолинейно, если на них не действуют другие тела.

Именно для *инерциальных систем отсчета* формулируются основные законы классической механики.

### **1. Основные определения.**

*Система отсчета* – это совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов, синхронизованных в каждой точке пространства.

*Тело отсчета* – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

*Система координат* – совокупность трех некопланарных осей, пересекающихся в одной точке с указанием масштаба на них. Декартова система координат – это прямоугольная система координат, оси которой – три взаимно перпендикулярные прямые линии, пересекающиеся в одной точке – начале системы координат.

*Часы* – прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

**Радиус-вектор** – вектор, начало которого лежит в начале системы координат, а конец – в той точке, где в данный момент находится материальная точка.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  – орты системы отсчета  $S$  –  $|\mathbf{i}|=1$ ,  $|\mathbf{j}|=1$ ,  $|\mathbf{k}|=1$ ;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты материальной точки в выбранной системе отсчета.

**Закон движения** – зависимость радиус-вектора от времени или в проекциях на оси координат – координат материальной точки от времени.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (1.2)$$

**Траектория** – кривая, по которой движется материальная точка.

**Путь** – длина траектории от начальной до конечной точки движения.

**Перемещение материальной точки**  $\Delta\mathbf{r}(t)$  – вектор, начало которого находится в начальной, а конец – в конечной точке движения.

**Скорость материальной точки**

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} . \quad (1.3)$$

**Ускорение материальной точки**

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt} . \quad (1.4)$$

Для определения угловой скорости определим вначале вектор элементарного углового перемещения:

$$d\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)]}{|\mathbf{r}(t)|^2} . \quad (1.5)$$

Очевидно, что введенное таким образом элементарное угловое перемещение равно по величине углу  $d\varphi$  (см. рис.1.1).

Действительно

$$|d\varphi| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(t)| \cdot |\mathbf{r}(t + dt)| \cdot \sin d\varphi}{|\mathbf{r}(t)|^2} = d\varphi . \quad (1.6)$$

Заметим что  $\Delta\varphi$  – псевдовектор или аксиальный вектор, его направление определяется выбором правой или левой тройки базисных векторов системы координат.

**Угловая скорость** также является векторной величиной:

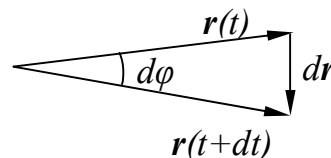


Рис. 1.1. Элементарное угловое перемещение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.7)$$

*Угловое ускорение*

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.8)$$

*Уравнения кинематической связи* – уравнения, связывающие кинематические характеристики тел системы.

## 2. Законы Ньютона

*Первый закон Ньютона.* Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка (на которую не действуют силы) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называются *инерциальными*.

*Второй закон Ньютона.* В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно сумме всех сил, действующих на эту материальную точку со стороны других тел:

$$ma = \sum_i F_i. \quad (1.9)$$

*Третий закон Ньютона.* Силы взаимодействия двух материальных точек:

- 1) парные и приложены к разным материальным точкам,
- 2) одной природы,
- 3) равны по модулю,
- 4) противоположны по направлению,
- 5) направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

*Уравнение движения* – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$ma = \sum_i F_i \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix}, \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Заметим, что уравнение движения можно записать в проекциях на любую, в том числе и произвольно движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, ось. Для этого достаточно умножить скалярно левую и правую части векторного уравнения движения (1.10)

на единичный вектор (орт), задающий направление этой оси. Например, на направление скорости  $\boldsymbol{\tau}$  и на направление, перпендикулярное скорости  $\boldsymbol{n}$ :

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a}_n &= \sum_i \boldsymbol{F}_{in}, \\ m\boldsymbol{a}_\tau &= \sum_i \boldsymbol{F}_{i\tau}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $\boldsymbol{a}_n(t) = a_n(t)\boldsymbol{n}(t)$  и  $\boldsymbol{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t)$  – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения материальной точки.

**Законы динамики** – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

## Лабораторная работа № 1

### КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВДОЛЬ СКАМЬИ С ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКОЙ

#### Цель работы

*Изучение законов равноускоренного движения.*

#### Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения тела по наклонной плоскости. Используется скамья с воздушной подушкой, с помощью которой можно практически полностью устранить силу трения между движущимся телом и поверхностью.

#### Теоретическое введение

При движении тела вдоль наклонной плоскости на него, в общем случае, в направлении движения действуют проекция силы тяжести и сила трения (см. рис. 1.2).

Выберем инерциальную лабораторную систему отсчета, жестко связанную с наклонной поверхностью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим вниз по наклонной плоскости (рис. 1.2).

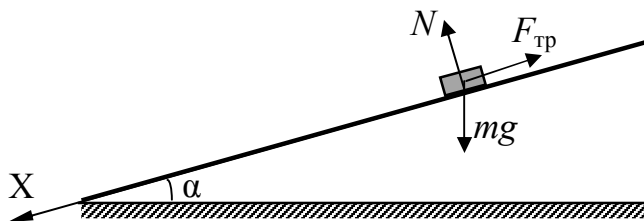


Рис. 1.2. Силы, действующие на тело при движении вдоль наклонной плоскости.

Уравнение движения тела в проекции на ось  $X$  имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (1.12)$$

При использовании скамьи с воздушной подушкой можно пренебречь силой трения. В этом случае из уравнения движения (1.12) получаем следующее значение ускорения тела:

$$\ddot{x} = g \sin \alpha. \quad (1.13)$$

Для нахождения закона движения необходимо дважды проинтегрировать по времени выражение (1.13) при заданных

начальных условиях. Зададим начальные условия – координату и скорость тела в начальный момент времени:

$$x(t=0) = x_0, \quad (1.14)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0. \quad (1.15)$$

Интегрируя (1.13) по времени с учетом (1.15), получаем закон изменения скорости тела:

$$v(t) = \int g \sin \alpha dt = g \sin \alpha t + v_0. \quad (1.16)$$

Интегрируя (1.16) с учетом (1.14), находим закон движения тела:

$$x(t) = \int (g \sin \alpha t + v_0) dt = \frac{g \sin \alpha t^2}{2} + v_0 t + x_0. \quad (1.17)$$

Исключая время из выражений (1.16), (1.17), легко получить связь скорости тела с его координатой в любой момент времени:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (1.18)$$

где  $a = g \sin \alpha$ .

Как видим, зависимость квадрата скорости тела от его координаты является линейной функцией, следовательно, построив график зависимости  $v^2(x)$  можно определить ускорение тела по углу наклона графика, причем на значении угла наклона не сказываются ни начальная координата, ни начальная скорость.

### Экспериментальная установка

Скамья с воздушной подушкой представляет собой полую тонкостенную дюралюминиевую трубу 1 треугольного сечения, установленную на горизонтальном основании так, как показано на рис. 1.3. Торцы трубы закрыты заглушками. В одной из заглушек имеется отверстие, соединенное с гибким шлангом 2, через который в трубу при помощи компрессора нагнетается воздух, выходящий затем через множество маленьких отверстий, просверленных в двух гранях трубы, ориентированных вверх. Благодаря потоку воздуха через мелкие отверстия между трубой и специально изготовленной тележкой 3 создается воздушная подушка, благодаря которой тележка «зависает» над скамьей и движется по ней практически без трения.

На основании конструкции имеются регулировочные винты 4 и 5, позволяющие изменять угол  $\alpha$  наклона трубы к горизонту. В работе предполагается все регулировки проводить винтом 4.

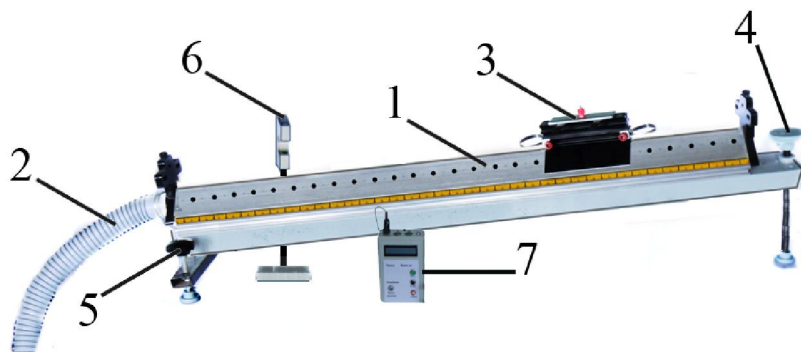


Рис. 1.3. Экспериментальная установка

При описании движения тележки ее можно считать абсолютно твердым телом. Такое тело рассматривается как система материальных точек, взаимное расположение которых друг относительно друга строго фиксировано.

Прямолинейное движение абсолютно твердого тела является поступательным движением, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям. Скорости и ускорения всех точек тела равны между собой, поэтому прямолинейное движение твердого тела может быть описано как движение материальной точки, масса которой равна массе всего тела.

На тележке имеется специальная насадка, с закрепленными на ней двумя тонкими пластинами, расположенными на небольшом расстоянии  $l$  друг от друга. Когда тележка проходит под датчиком времени 6, пластины последовательно перекрывают и открывают световой поток, соответственно, запуская и останавливая таймер 7. Таким образом, датчики работают как «световые ворота» и фиксируют время  $\tau_i$ , в течение которого тележка проходит малое расстояние  $l$ , равное расстоянию между пластинами (см. рис. 1.4). Измеряя время  $\tau_i$ , можно вычислить среднюю скорость движения на малом участке пути  $l$ :

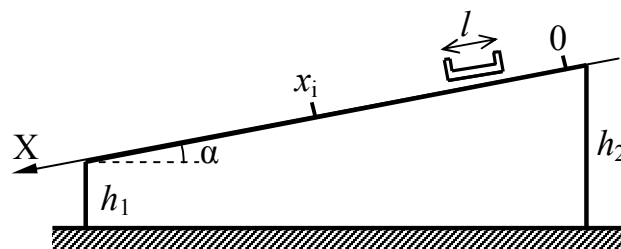


Рис. 1.4. Обозначение размеров и координат тележки.

$$\langle v_i \rangle = \frac{l}{\tau_i}. \quad (1.19)$$



Поскольку расстояние между пластинами мало, можно считать среднюю скорость  $\langle v_i \rangle$  на интервале времени  $\tau_i$  мгновенной скоростью тележки в точке траектории с координатой  $x_i$ .

### **Проведение эксперимента**

#### **Упражнение 1. Юстировка скамьи с воздушной подушкой и определение ее параметров**

1. С помощью *регулирующего винта 4* установить скамью горизонтально ( $\alpha=0$ ). Для этого включить вентилятор, аккуратно установить тележку на скамью и, вращая регулировочный винт, добиться, чтобы тележка не перемещалась по скамье. Устанавливая тележку в разные точки скамьи, убедиться, что тележка остается неподвижной в любом месте.

2. Оценить точность установки горизонтального положения. Для этого, вращая регулировочный винт определить пределы изменения высоты  $h_2$ , при которых тележка будет оставаться неподвижной. Учесть, что шаг резьбы регулировочного винта равен 1 мм (один оборот винта изменяет высоту на 1 мм).

3. Измерить линейкой длину скамьи  $L$  между регулировочными винтами, высоты  $h_1$  и  $h_2$ , а также расстояние  $l$  между пластинами, закрепленными на тележке (см. рис. 1.4).

#### **Упражнение 2. Анализ закона движения и определение ускорения тележки**

1. С помощью регулировочного винта установить наклон скамьи, увеличив высоту  $h_2$  на 0,3 мм (три полных оборота регулировочного винта).

2. Взвесить тележку, записать значение ее массы. Установить тележку на скамью.

3. Установить датчик в положение  $x_i = 20$  см.

4. Измерить время  $\tau_i$  прохождения тележки мимо датчика.

Полученные значения занести в таблицу 1.1.

5. Измерить время прохождения тележки мимо датчика для различных положений датчика, каждый раз перемещая датчик на 20 см.

6. Повторить п. 3 – п. 5, для 6 и 9 полных оборотов регулировочного винта.

**Таблица 1.1**

$x, \text{ м}$	$\tau, 10^{-3} \text{ с}$	$v, \text{ м/с}$	$v^2, \text{ м}^2/\text{с}^2$
0,2			
0,4			
0,6			
0,8			
1,0			

### **Обработка результатов**

1. Вычислить значения скоростей тележки в соответствии с формулой (1.19) для каждого проведенного измерения.
2. Вычислить квадрат скорости  $v^2$ .
3. Построить график зависимости  $v^2(x)$ . Убедиться, что эта зависимость является линейной. С помощью метода наименьших квадратов (см. приложение) определить коэффициент наклона и, используя соотношение (1.18), определить ускорение тележки.
4. Оценить погрешность измерения ускорения.
5. Сравнить полученное значение ускорения с рассчитанным по формуле (1.13).

### **Упражнение 3. Проверка независимости ускорения тележки от ее массы**

1. Установить высоту  $h_2$ , соответствующую шести оборотам регулировочного винта.
2. Прикрепить груз к тележке. Взвесить тележку с грузом, записать значение ее массы. Установить тележку на скамью.
3. Установить датчик в положение  $x_i = 20 \text{ см}$ .
4. Измерить время  $\tau_i$  прохождения тележки мимо датчика. Полученные значения занести в таблицу 1.1.
5. Измерить время прохождения тележки мимо датчика для различных его положений, каждый раз перемещая датчик на 20 см.

6. Повторить п. 2 – п. 5 для тележки с грузом другой массы. Данные занести в таблицу.

### **Обработка результатов**

1. Вычислить значения скоростей тележки в соответствии с формулой (1.19) для каждого проведенного измерения.

2. Вычислить квадрат скорости  $v^2$ .

3. Построить график зависимости  $v^2(x)$ . Убедиться, что эта зависимость является линейной. С помощью метода наименьших квадратов (см. Приложение) определить коэффициент наклона и, используя соотношение (1.18), определить ускорение тележки.

4. Оценить погрешность измерения ускорения.

5. Сравнить полученное значение ускорения с полученным в упражнении 2 для соответствующего угла наклона. Убедиться, что ускорение не зависит от массы тележки.

### **Основные итоги работы**

*В результате выполнения работы должно быть показано, что движение тела вдоль наклонной плоскости является равноускоренным, причем его ускорение не зависит от массы.*

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое инерциальные системы отсчета? Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Что такое масса? Как ее измерить?
3. Что такое сила? Как ее измерить?
4. Сформулировать второй закон Ньютона.
5. Сформулировать третий закон Ньютона.
6. Что такое средняя скорость, мгновенная скорость?
7. Как изменятся экспериментальные зависимости, если будет заметной сила вязкого трения, пропорциональная скорости?

## Лабораторная работа № 2

### ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

#### Цель работы

*Изучение законов равноускоренного движения*

#### Идея эксперимента

Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для проведения такого анализа используется машина Атвуда, с помощью которой можно получать различные, не слишком большие (по сравнению с ускорением свободного падения) ускорения.

#### Теоретическое введение

Экспериментальная установка, получившая название «машина Атвуда», представляет собой вращающийся с малым трением легкий блок, через который перекинута тонкая нить с грузами массой  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 1.5).

Выберем систему координат так, как показано на рис. 1.5, и изобразим действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем модели тел и их движений. Грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось  $X$  и

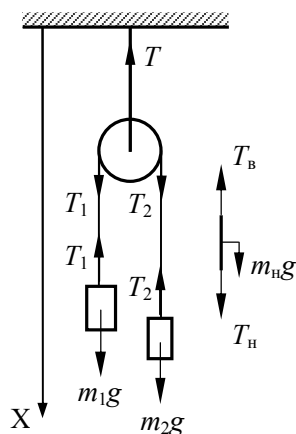


Рис. 1.5. Силы, действующие на грузы, блок и участок нити

уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (1.20)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (1.21)$$

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (1.22)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений грузов на ось  $X$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

Докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 1.5) и запишем уравнение его движения в проекции на ось  $X$ :

$$m_n a_n = T_n - T_b + m_n g, \quad (1.23)$$

где  $m_n$  – масса выделенного участка нити,  $a_n$  – проекция его ускорения на ось  $X$ ,  $T_n$  и  $T_b$  – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примыкающих к нему участков нити.

Поскольку нить по условию задачи невесома, то из (1.23) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити, а, следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка равны по модулю.

Запишем уравнение вращательного движения блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 1.5):

$$J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R + T_2 R + M_{тр}, \quad (1.24)$$

Здесь  $J$  – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно выбранной оси,  $\omega$  – угловая скорость вращения блока,  $M_{тр}$  – момент сил трения, действующих в оси блока.

Поскольку блок и нить невесома, нет трения в оси блока и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (1.24) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2. \quad (1.25)$$

Решим полученную систему уравнений (1.20) – (1.22), (1.25) относительно ускорений грузов:

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.26)$$

Пусть  $m_2 = m$ ,  $m_1 = m + \Delta m$ , тогда, выражение для модуля ускорений грузов  $a$  принимает вид:

$$a = g \frac{\Delta m}{2m + \Delta m}. \quad (1.27)$$

Ускорение тел системы всегда меньше ускорения свободного падения и меняется при изменении соотношения между массами грузов.

Для выбранной системы тел можно учесть влияние массы блока и силы трения в его оси. Система уравнений в этом случае дополняется уравнением вращательного движения блока и уравнением кинематической связи между угловым ускорением блока и ускорением одного из грузов. Очевидно, что силы натяжения нитей слева и справа от блока будут отличаться. Окончательно система уравнений имеет вид

$$(m + \Delta m)a_1 = (m + \Delta m)g - T_1, \quad (1.28)$$

$$ma_2 = mg - T_2, \quad (1.29)$$

$$J\varepsilon = (T_1 - T_2)R - M_{\text{тр}}, \quad (1.30)$$

$$a_1 = -a_2 = a, \quad (1.31)$$

$$a = \varepsilon R, \quad (1.32)$$

где  $J = \alpha m_0 R^2$  – момент инерции блока,  $m_0$  и  $R$  – его масса и радиус,  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от распределения массы (от формы блока),  $\varepsilon$  – угловое ускорение блока,  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в оси.

Решая систему уравнений (1.28) – (1.32), получаем значение ускорения

$$a = \frac{\Delta mg - M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_0 + 2m + \Delta m}. \quad (1.33)$$

В случае, когда блок имеет форму диска или цилиндра, момент инерции блока равен

$$J = \frac{m_0 R^2}{2}, \quad (1.34)$$

и, следовательно, коэффициент  $\alpha = 1/2$ .

Очевидно, что ненулевые значения силы трения в оси и массы блока уменьшают величину ускорения по сравнению с идеальным случаем.

### Экспериментальная установка

Машина Атвуда состоит из прикрепленной к основанию вертикальной стойки, на которую нанесена *шкала 1* (рис. 1.6). На верхнем конце стойки имеется легкий *блок 2*, способный вращаться с малым трением. Через блок перекинута легкая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза *3*. На правый груз можно помещать добавочные *грузы 4* в виде тонких пластин (перегрузки), в результате этого система грузов начинает двигаться с некоторым ускорением. Меняя массу перегрузка, можно менять ускорение системы. После того, как груз с перегрузком проходит некоторое расстояние  $L_1$ , перегрузок снимается с помощью *кронштейна 5*. После этого грузы начинают двигаться равномерно. На стойке укреплены два *фотоэлектрических датчика 6*, соединенные с *таймером 7*. При этом верхний фотодатчик соединен с *кронштейном 5*. Фотодатчики могут крепиться на стойке в разных положениях. Система грузов удерживается в состоянии покоя специальной фрикционной муфтой, управляемой с помощью электромагнита.

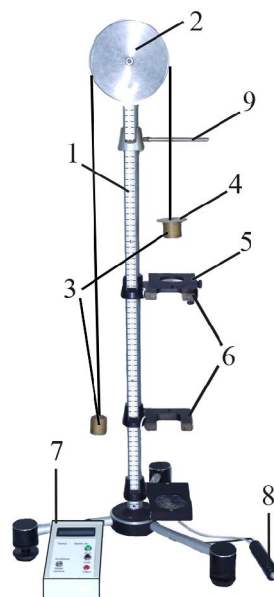


Рис. 1.6. Схема экспериментальной установки

Для измерения времени равномерного движения и управления фрикционной муфтой установка снабжена электронным блоком, в состав которого входят *таймер 7* и *система управления электромагнитом 8*.

При нажатии на клавишу "сброс" происходит обнуление табло таймера. В исходном состоянии система блокируется фрикционной муфтой. При нажатии на *кнопку системы управления*

электромагнитом  $\delta$  происходит разблокировка системы. Во время прохождения правым грузом верхнего фотодатчика запускается таймер. Импульс от нижнего фотоэлектрического датчика останавливает работу таймера, результат высвечивается на табло. При этом снова замыкается цепь электромагнита и система затормаживается фрикционной муфтой.

Перед выполнением эксперимента следует убедиться, что правый груз может свободно опускаться, не касаясь кронштейна и фотодатчиков. В противном случае при помощи винтов, крепящих кронштейн и фотодатчики, следует провести необходимые регулировки.

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Анализ закона движения и определение ускорения

Исходя из анализа движения системы тел, проведенного в теоретическом введении, можно предположить, что реальное движение тел на участке  $L_1$  будет равнопеременным. В этом случае закон движения, т.е. зависимость координаты тела от времени, будет иметь вид:

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}, \quad (1.35)$$

где  $x_0$  – координата, от которой груз начинает свое движение. Учитывая, что при равнопеременном движении (с нулевой начальной скоростью) скорость меняется по закону

$$v = at,$$

получаем

$$L_1 = x_1 - x_0 = \frac{v_1^2}{2a}, \quad (1.36)$$

где  $v_1$  – скорость груза в момент снятия перегрузка и включения таймера,  $x_1$  – координата верхнего фотодатчика. Если в системе отсутствуют силы трения, то с этой же скоростью груз будет проходить расстояние между фотодатчиками после снятия с него перегрузка:

$$v_1 = \frac{L_2}{t_2}, \quad (1.37)$$



Здесь  $L_2 = x_2 - x_1$  – расстояние между двумя фотодатчиками ( $x_2$  – координата нижнего фотодатчика),  $t_2$  – время движения на этом участке пути.

### Измерения

1. Установить правый груз в верхнем положении  $x_0$  и положить на него один из перегрузков. Затем установить верхний фотодатчик с закрепленным на нем кронштейном на отметке  $x_1$  так, чтобы расстояние между датчиками  $L_2$  составляло 15–20 см. В дальнейшем величина  $L_2$  не изменяется.

2. Систему тел привести в движение и определить время пролета  $t_2$  груза между фотодатчиками. Результаты измерений занести в таблицу 1.2.

**Таблица 1.2**

$n$	$L_1$	$t_2$	$v_1$	$v_1^2$
1				
2				
3				
4				
...				

3. Изменить координату начального положения  $x_0$  груза. Для нового значения  $L_1$  провести измерения в соответствии с п. 2. Необходимо произвести измерения времени движения груза между двумя фотодатчиками не менее, чем для пяти различных значений  $L_1$ .

4. Выполнить п. 1 – 3 для трех перегрузков с различными массами.

### Обработка результатов

1. Для каждого значения  $L_1$  определить значение скорости  $v_1 = \frac{L_2}{t_2}$

и квадрата скорости  $v_1^2$ . Результаты вычислений занести в таблицу 1.2.

2. По результатам измерений построить график зависимости  $v_1^2(L_1)$ . Убедиться, что эта зависимость близка к пропорциональной зависимости, т.е. движение груза на участке  $x_0-x_1$  является равноускоренным и выполняется соотношение (1.36). С помощью метода наименьших квадратов (см. Приложение) определить наклон

прямой  $v_1^2(L_1)$ . По наклону прямой найти значение ускорения  $a$  и погрешность его определения. Сравнить полученное значение ускорения с найденным по формуле (1.27).

### **Упражнение 2. Определение момента силы трения в оси блока (I метод)**

В случае малых значениях масс перегрузков  $\Delta m$  по сравнению с массой грузов и блока выражение (1.33) для ускорения груза принимает вид:

$$a \approx \frac{\Delta mg}{\alpha m_0 + 2m} - \frac{M_{\text{тр}} / R}{\alpha m_0 + 2m}. \quad (1.38)$$

Будем считать, что блок представляет собой однородный диск, тогда коэффициент  $\alpha$ , зависящий от распределения массы (от формы блока), следует принять равным  $\alpha=1/2$ .

Как видим, ускорение является линейной функцией массы перегрузка. В данном упражнении следует построить график зависимости ускорения груза от массы перегрузка  $a(\Delta m)$  и по точке пересечения графика с осью ускорений определить значение момента силы трения в оси блока.

Для экспериментального определения ускорения  $a$  можно воспользоваться соотношениями (1.36) и (1.37), из которых следует, что

$$a = \frac{v_1^2}{2L_1} = \frac{L_2^2}{2t_2^2 L_1} \quad (1.39)$$

### **Измерения**

1. Установить верхний фотодатчик в среднем положении (по шкале, нанесенной на стойку). Нижний датчик установить так, чтобы расстояние  $L_2$  составляло 15–20 сантиметров.

2. Поместить на правый груз один из перегрузков, входящих в комплект установки.

3. Определить 3–5 раз время  $t_2$  прохождения расстояния  $L_2$  между фотодатчиками. Результаты измерений занесите в таблицу 1.3.

4. Провести аналогичные измерения с перегрузками различных масс, а также для их комбинаций, положив на груз два, а затем три перегрузка. Результаты измерений также внесите в таблицу 1.3.

6. В комплект установки входит незакрепленный блок, имеющий такие же размеры и массу, как и блок, закрепленный на вертикальной стойке. Масса блока определяется взвешиванием.

7. Штангенциркулем определите радиус блока.

**Таблица 1.3**

$\Delta m, \text{ г}$	$n$	$t_2, \text{ с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{ с}$	$S_{t_2}$	$a, \text{ м/с}^2$	$S_a$
	1					
	2					
	3					
	1					
	2					
	3					
	1					
	2					
	3					

### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого из перегрузков определить среднее значение времени пролета между фотодатчиками  $\langle t_2 \rangle$  с использованием формулы

$$\langle t_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_{2n}, \quad (1.40)$$

где  $N$  – число измерений.

2. Вычислить выборочное стандартное отклонение среднего арифметического значения  $\langle t_2 \rangle$

$$S_{t_2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (t_{2n} - \langle t_2 \rangle)^2}. \quad (1.41)$$

Результаты вычислений внести в таблицу 1.3.

3. Используя (1.39) для каждого  $\Delta m$  вычислить значение ускорения  $a$ :

$$a = \frac{L_2^2}{2 \langle t_2 \rangle^2 L_1}. \quad (1.42)$$

4. Вычислить стандартное отклонение величины ускорения  $S_a$

$$S_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial L_2} S_{L_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial L_1} S_{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t_2} S_{t_2}\right)^2}. \quad (1.43)$$

и внести результат в таблицу 1.3.

5. Используя метод наименьших квадратов (см. Приложение), построить график зависимости ускорения от массы перегрузка  $a(\Delta m)$ .

6. Определить значение момента силы трения в оси блока по точке пересечения графика  $a(\Delta m)$  с осью ускорений.

### **Упражнение 3. Определение момента силы трения в оси блока (II метод)**

В данном упражнении для определения значения силы трения необходимо постепенно увеличивать массу одного из грузов на  $\Delta m_{\min}$  (добавляя на него маленькие перегрузки) до того момента, когда система придет в движение. В соответствии с формулой (1.33) при  $a = 0$  момент силы трения равен:

$$M = \Delta m_{\min} gR. \quad (1.44)$$

### **Измерения**

В комплект установки входит набор разновесов – маленьких предметов, которые следует использовать для определения минимальной массы перегрузка, необходимой для вычисления силы трения в оси блока. Измерения повторить три раза.

### **Обработка результатов**

1. По экспериментальным данным определить среднее значение  $\Delta m_{\min}$  и выборочное стандартное отклонение среднего арифметического.

2. Вычислить значение момента силы трения в оси блока в соответствии с формулой (1.44), используя значение радиуса блока, определенное в упражнении 2.

3. Оценить погрешность измерения момента силы трения.

4. Сравнить полученное значение момента силы трения с определенным в упражнении 2.

5. Используя выражение (1.33), рассчитать ускорения для трех значений масс перегрузков, использовавшихся в упражнении 1.

6. Сравнить значения ускорений, измеренных в упражнении 1 с рассчитанными с учетом силы трения в оси блока и ненулевой массы блока.

### **Основные итоги работы**

*На основании проведенных экспериментов и выполненных расчетов должно быть показано, что движение системы тел под действием постоянной силы является равноускоренным, а также проанализировано влияние момента силы трения в оси блока и массы блока на точность определения ускорения.*

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое инерциальные и неинерциальные системы отсчета?  
Сформулировать первый закон Ньютона.
2. Что такое масса, как ее измерить?
3. Что такое сила, как ее измерить?
4. Сформулировать второй закон Ньютона.
5. Сформулировать третий закон Ньютона.

## Приложение. Метод наименьших квадратов

### 1. Случай пропорциональной зависимости

Пусть  $\{x_i; y_i; \sigma_i\}$  – совокупность  $n$  независимых измерений  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = ax, \quad (1.45)$$

где  $a$  – константа, значение которой необходимо оценить,  $\sigma_i^2$  – дисперсии прямо измеренных величин  $y_i$ . В соответствии с методом наименьших квадратов для оценки истинного значения  $a$  используем выражение:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \quad (1.46)$$

Оценка дисперсии величины  $a$  находится по формуле:

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \quad (1.47)$$

В случае одинаковых по величине дисперсий  $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$  формулы (1.46) и (1.47) упрощаются:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (1.48)$$

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.49)$$

### 2. Случай линейной зависимости

Пусть  $\{x_i; y_i; \sigma_i\}$  – совокупность  $n$  независимых измерений  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = ax + b, \quad (1.50)$$

где  $a$  – константа, значение которой необходимо оценить,  $\sigma_i^2$  – дисперсии прямо измеренных величин  $y_i$ .

В соответствии с методом наименьших квадратов для оценки истинного значения  $a$  используем выражение

$$\hat{a} = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad (1.51)$$

в котором введены следующие обозначения:

$$\Delta_a = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}. \quad (1.52)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2, \quad (1.53)$$

Оценка дисперсии величины  $a$  находится по формуле:

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}{\Delta}. \quad (1.54)$$

### Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – 432 с. Гл. 1, 2.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 480 с. Лекции 1 – 3.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. – 560 с. Гл. 1, 2.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. – 559 с. Гл. 1, 2.
5. В. С. Русаков, А. И. Слепков, Е. А. Никанорова, Н. И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с. Гл. 1, 2.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002, гл.V.