Рекомендации по выполнению задачи №117 «Оборотный маятник»

Митин И.В.

Данные рекомендации адресованы тем студентам, кто предпочитает не просто действовать по пунктам методички, а подумать (и, возможно, придумать!): можно ли сделать еще лучше и точнее?

В учебниках часто пишут, что оборотный маятник позволяет очень точно оценить значение ускорения свободного падения. А студенты, выполняя эту задачу, зачастую опровергают данное положение, получая относительную погрешность в несколько процентов. Как правило, это связано с неаккуратностью измерений и несовершенством обработки результатов.

Даю несколько подсказок.

Упражнение 1. Работа с цилиндрическим стержнем.

Пусть Вы провели достаточно большое число измерений и построили требуемый график зависимости T от a. На. рис.3 он выглядит очень симпатично, т.к. построен по теоретической зависимости. У вас же получится набор экспериментальных точек с погрешностями, через которую не так просто провести непрерывную кривую. Но от Вас этого и не требуют, предлагают просто взять несколько точек. Но точка с минимальным периодом, вообще говоря, вследствие погрешности измерений «размазана по пространству». Значения времен 10 колебаний в соседних точках отличаются на миллисекунды! Как при таких результатах точно выбрать минимум? И реальная погрешность может оказаться большей, чем указанная в описании 0,5 см. А при выборе парных точек вряд ли найдутся такие, чтобы периоды колебаний оказались абсолютно одинаковыми, поэтому опять придется что-то придумывать. Как же быть?

На самом деле, в любом эксперименте выбор **точек** экстремума или точек по каким-либо другим критериям, всегда грозит большими неточностями. Но!!! Ведь в данном случае есть же конкретная теоретическая формула, описывающая экспериментальные данные:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(a_0^2 + a^2\right)}{ag}} \qquad (18)$$

В ней как раз, кроме экспериментально измеренных величин T и a, присутствуют два параметра, которые и требуется оценить: радиус инерции a_0 и ускорение свободного падения g. А когда есть теоретическая формула, то при обработке необходимо использовать **ВСЕ** экспериментальные точки для оценки параметров, а не только выбранные по каким-либо критериям.

Но как же найти оценки параметров, ведь зависимость $T(a)$ (18) имеет неочевидную структуру? Понятно, что в современных математических пакетах обработки можно найти все, но для студента первого курса это, скорее всего, непосильная задача. Студент первого курса, как правило, знает (или считает, что знает) только один метод обработки – метод наименьших квадратов (МНК), да и то только для линейной зависимости. Давайте попробуем свести задачу к известному МНК.

Возведем (18) в квадрат и чуть переставим слагаемые:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\left(a_0^2 + a^2\right)}{ag};$$

$$T^2 \cdot a = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \left(a_0^2 + a^2\right). \tag{18а}$$

Введем обозначения: $y = T^2 \cdot a$; $x = a^2$; $A = \frac{4\pi^2}{g}$.

В итоге получим:

$$y = A \cdot \left(x + a_0^2\right).$$

А ведь это же уравнение прямой линии! И если по точкам зависимости $y(x)$ провести прямую по МНК, то можно получить оценку и для коэффициента наклона А (и тем самым и для g), и для параметра a_0.

Но ведь надо оценить и погрешности! Вспомним, что применение МНК требует абсолютно точного значения переменной x, т.е. в данном случае a^2. Это, конечно, невозможно, но!!! В описании указано, что опорную призму закрепляют так, чтобы винт крепления попал точно в углубление на теле стержня. Это необходимое действие, но не всегда получается попасть. Но ведь на теле стержня есть метки через 1 см, а размер призмы позволяет четко установить ее так, чтобы винт с первого раза точно попал куда надо. Просто надо чуть подумать, и тогда координату a можно определить довольно точно.

К тому же, опыт показывает, что если полученная по МНК прямая хорошо проходит по экспериментальным точкам, коэффициент корреляции 0,99 и больше, то, скорее всего, погрешность x можно считать малой. В свою очередь, погрешность величины y необходимо оценить, ведь в МНК именно она и позволяет оценить погрешность коэффициентов.

Еще один подход. Формулу (18) можно преобразовать и к другому виду:

$$\frac{g}{4\pi^2} T^2 \cdot a = \left(a_0^2 + a^2\right);$$

$$a^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 \cdot a - a_0^2. \tag{18б}$$

И если ввести обозначения:; $y = a^2$; $x = T^2 \cdot a$, $A = \frac{g}{4\pi^2}$, то опять получим уравнение прямой линии

$$y = Ax + a_0^2.$$

Иными словами, переменные x и y поменялись местами, а модель все равно осталась линейной. И какой же из двух подходов выбрать? На самом деле, вопрос непростой. И для того, чтобы набираться опыта, порекомендовал бы сделать и так, и эдак. И посмотреть, и подумать. Но если после обработки оценки искомых величин окажутся близки, то Вы точно очень хорошо провели эксперимент.

Конечно, предлагаемый метод требует существенно больших усилий, чем простой выбор нескольких точек. Но ведь при таком подходе для нахождения оценок Вы будете использовать **ВСЕ** экспериментальные точки! И к тому же, если точки на построенном графике будет лежать на прямой линии, то и у Вас появится уверенность в правильности проведения эксперимента. Если же прямая не получится, то необходимо задуматься, где же в эксперименте допущена ошибка? Может, координата a измерялась не по ребру призмы?

Не буду ничего говорить о выборе парных точек, подумайте самостоятельно.

Упражнение 3. Работа с оборотным маятником.

Обычно задачу с оборотным маятником ставят таким образом: задана точка подвеса, надо найти центр качаний, т.е. точку, для которой период колебаний будет таким же, как и для точки подвеса.

Но в данном случае эксперимент ставится гораздо хитрее, и именно это и позволяет надеяться на высокую точность.

Опорные призмы жестко зафиксированы, т.е. сопряженные точки (точка подвеса и центр качаний) заданы, и расстояние между ними (а это есть приведенная длина маятника $l_{пр}$) известно точно. А перемещают одну из чечевиц, при этом абсолютно неважно, на сколько ее подвинули, как при этом изменилось положение центра масс и прочие вопросы. Главное – найти такое положение, чтобы периоды колебаний маятника относительно двух сопряженных точек были максимально близки друг к другу. Ведь в формулу для нахождения ускорения свободного падения

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{пр}}{T_0^2} \qquad (26)$$

входят только приведенная длина и период колебаний! И точность будет определяться только точностью нахождения данных величин. В используемых в работе маятниках значение приведенной длины лежит в диапазоне 700-800 мм, но погрешность ее нахождения не может быть менее 1 мм, т.к. реальные ребра призм чуть скруглены. Т.е. относительная погрешность для приведенной длины составляет доли процента.

Поэтому необходимо добиться примерно такой же относительной погрешности для периода колебаний. В описании приведены рекомендации, как этого добиться, не буду повторять.

Пусть сняты зависимости периодов колебаний от положения чечевицы при прямом и обратном маятника, примерный вид которых показан на рис. 5а. И пусть найдены два положения чечевицы, как показано на рис. 5б. В описании рекомендуется найти координату чечевицы d_0 точки пересечения, затем установить ее в найденное положение и вновь провести измерения с прямым и обратным положениями маятника. Но ведь с таким же успехом по графику 5а можно найти и координату T_0 точки пересечения, а это и есть искомый период колебаний. И чем ближе будут два положения чечевицы d_1 и d_2 , тем точнее можно найти период.

Надеюсь, что задачу по геометрии для нахождения координаты T_0 точки пересечения двух прямых Вы сможете решить самостоятельно. При этом обратите внимание, что знание конкретных значений d_1 и d_2 абсолютно не требуется.

Упражнение 2. Работа с оборотным маятником.

А теперь вернемся к Упр. 2 и попробуем понять, насколько точно в предлагаемой модели оценивается g. В данном случае используется формула

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_1^2 - bT_2^2} \tag{25}$$

Это обычная формула косвенных измерений. Для нахождения a и b требуется экспериментально найти положение центра масс и измерить линейкой расстояние от него до призмы. Такое измерение будет менее точным, чем заданное значение приведенной длины. Для оценки погрешности необходимо взять частные производные по всем четырем переменным, получится довольно громоздкая формула. И есть все основания предполагать, что погрешность определения g по формуле (25) будет существенно больше, чем по (26). Но проверьте, вдруг я не прав!

Удачи!

Митин И.В.