

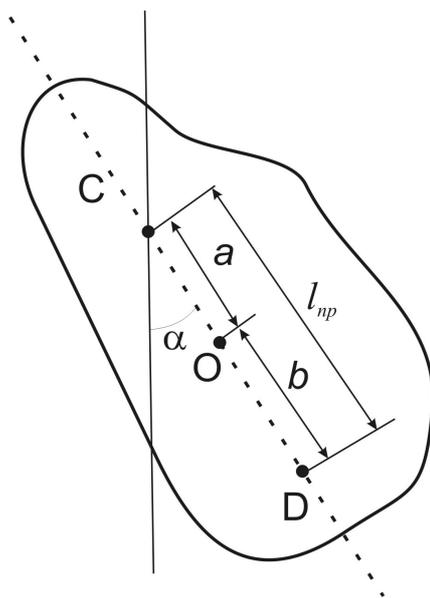


Лабораторный практикум по физике

Механика

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Баранов А.Н., Салецкий А.М., Слепков А.И.



Москва
Физический факультет МГУ
2010

Лабораторная работа 117

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Изучение физического маятника и определение ускорения свободного падения

Идея эксперимента

Состоит в измерении периода колебаний физического маятника при изменении расстояния от точки повеса до центра масс маятника. Используются два физических маятника: цилиндрический стержень с передвижной призмой и обратный маятник, в виде цилиндрического стержня с двумя закрепленными призмами и двумя дополнительными массами (чечевицами). Колебания маятников происходят вокруг горизонтальной оси, проходящей через ребро призмы.

Теоретическое введение

Физический маятник

Физическим маятником является любое твердое тело, подвешенное на

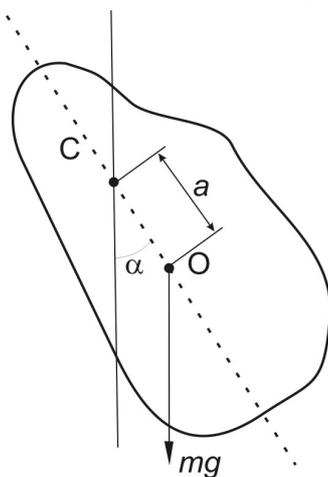


Рис.1. а) Физический маятник: C – точка подвеса, O – центр масс, a – расстояние точки подвеса до центра масс; m – масса.

неподвижной горизонтальной оси в поле тяготения и которое может качаться вокруг этой оси, совершая колебательное движение (рис.1).

Колебания маятника являются частным случаем вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Поэтому особенности движения маятника могут быть изучены путем анализа основного уравнения вращательного движения относительно оси, проходящей через точку подвеса C (ось C) и перпендикулярной к плоскости чертежа на рис.1:

$$J_C \cdot \varepsilon = M_C, \quad (1)$$

где J_C – момент инерции маятника относительно оси С, ε – угловое ускорение, M_C – суммарный момент всех сил, действующих на маятник при его движении, относительно оси С. В отсутствие сил трения M_C равен моменту силы тяжести, приложенной к центру масс маятника:

$$M_C = -mga \sin \alpha, \quad (2)$$

где m – масса маятника, a – расстояние между центром масс О и точкой подвеса С, $\alpha = \alpha(t)$ – угол отклонения от положения равновесия в момент времени t . Знак минус означает, что момент M_C противодействует увеличению угла α . Для малых углов отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$ и уравнение моментов (1) принимает вид:

$$J_C \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) + mga \alpha = 0, \quad (3)$$

где через $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ обозначено угловое ускорение ε . Уравнение (3) является уравнением колебаний:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J_C}}. \quad (5)$$

- циклическая частота.

Решением (4) является гармоническая функция вида

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

Это означает, что маятник совершает колебательное движение, при котором угол отклонения $\alpha(t)$ изменяется со временем по гармоническому закону (6) с амплитудой α_0 , начальной фазой φ и циклической частотой ω , связанной с периодом колебаний T соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (7)$$

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{mga}} . \quad (8)$$

Математический маятник является частным – предельным случаем физического маятника, масса m которого сосредоточена в одной точке – в центре масс и колеблется на невесомой, нерастяжимой нити длиной l_m . Следовательно, для периода колебания T_m математического маятника можно применить формулу (8), где $J_C = ml_m^2$, а роль расстояния a играет длина нити l_m :

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_m^2}{mgl_m}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_m}{g}} . \quad (9)$$

Из сравнения формул (8) и (9) видно, что величина J_C/ma для физического маятника играет такую же роль, как длина l_m для математического маятника.

*Длина l_m математического маятника с периодом колебаний, равным периоду колебаний физического маятника, называется **приведенной длиной** этого физического маятника:*

$$l_{np} = \frac{J_C}{ma} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g . \quad (10)$$

Очевидно период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника, длина которого равна l_{np} :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}} . \quad (11)$$

Центр качаний. Сопряженные точки.

Воспользуемся теоремой Гюйгенса - Штейнера:

$$J_C = J_0 + ma^2 , \quad (12)$$

где J_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс O и параллельной оси C . Из (8) и (12) получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} \quad (13)$$

$$l_{np} = \frac{J_C}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma} = \frac{J_0}{ma} + a = b + a, \quad (14)$$

где введено обозначение:

$$b = \frac{J_0}{ma}. \quad (15)$$

Точка D (рис.2), расположенная на расстоянии l_{np} от точки подвеса C на прямой, проходящей через центр масс O , называется **центром качаний**.

Согласно (14), $l_{np} > a$. (В случае математического маятника, для которого $J_0 = 0$, $l_{np} = a$). Это означает, что центр качаний относительно точки подвеса расположен по другую сторону от центра масс на расстоянии

$$b = \frac{J_0}{ma} = l_{np} - a \text{ от него (рис. 2).}$$

Точка подвеса C и соответствующий ей центр качаний D – взаимно обратимые или **сопряженные** точки маятника.

Это означает, что если изменить точку подвеса и поместить ее в центр качаний, то период колебаний не изменится. Несложно убедиться, что новая величина приведенной длины

$$\begin{aligned} l_{npD} &= \frac{J_D}{mb} = \frac{J_0 + mb^2}{mb} = \\ &= \frac{J_0}{mb} + b = \frac{J_0}{m \frac{J_0}{ma}} + \frac{J_0}{ma} = a + \frac{J_0}{ma} = \frac{ma^2 + J_0}{ma} = \frac{J_C}{ma} = l_{np} \end{aligned} \quad (16)$$

будет такой же, как и прежде, $l_{npD} = l_{np}$, а прежняя точка подвеса C станет новым центром качаний. Данное положение носит название **теоремы Гюйгенса** [1].

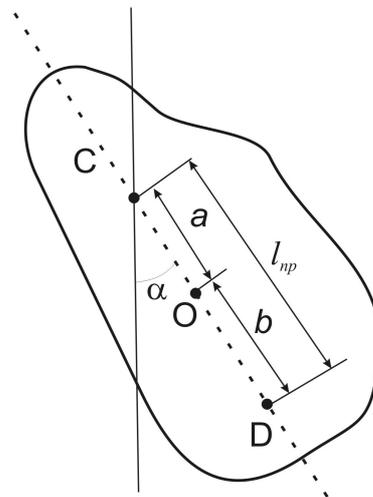


Рис.2 Сопряженные точки маятника

Радиус инерции.

Сопоставим момент инерции маятника J_A относительно произвольной оси A с моментом инерции материальной точки ma_A^2 такой же массы и относительно той же оси A . Расстояние a_A от оси A до этой материальной точки, при котором их моменты инерции будут одинаковы ($J_A = ma_A^2$), называется **радиусом инерции** маятника относительно оси A . Тогда, по аналогии, момент инерции J_O маятника относительно оси O , проходящей через его центр масс и параллельной оси A , равен:

$$J_O = ma_0^2, \quad (17)$$

где $a_0 = \sqrt{J_O/m}$ – **радиус инерции относительно оси O** . С учетом этого определения выражение (12) – переписывается в виде:

$$J_C = J_O + ma^2 = ma_0^2 + ma^2 = m(a_0^2 + a^2). \quad (18)$$

То есть

$$l_{np} = \frac{(a_0^2 + a^2)}{a}; \quad (19)$$

и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(a_0^2 + a^2)}{ag}}. \quad (20)$$

Зависимость $T(a)$ (20) представлена на рис. 3, где по оси абсцисс – расстояние a от точки подвеса до центра масс.

Минимальное значение приведенная длина и период колебаний принимают при $a=a_0$. Убедиться в этом можно, исследуя зависимость $l_{np}(a)$ на экстремум:

$$\frac{d}{da}(l_{np}) = -\frac{(a_0^2 + a^2)}{a^2} + \frac{2a}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a_0.$$

При этом минимальные значения приведенной длины и периода колебаний равны, соответственно

$$l_{np.мин} = \frac{a_0^2 + (a_0)^2}{a_0} = 2a_0 \quad (21)$$

$$T_{мин} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np.мин}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2a_0}{g}} \quad (22)$$

Парные точки подвеса.

Из рис 3 видно, что любая прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая кривую $T(a)$, дает пару точек подвеса (например, C_1, C_2 ; или C_1', C_2') с одинаковыми периодами колебаний $T_1 = T_2$ и в соответствии

с (8) одинаковыми приведенными длинами ($l_{np1} = l_{np2}$ на рис. 3). Такие точки подвеса называются **парными**.

Выясним их свойства. Для этого перепишем формулу (17) в виде квадратного уравнения относительно a :

$$a^2 - l_{np}a + a_0^2 = 0. \quad (23)$$

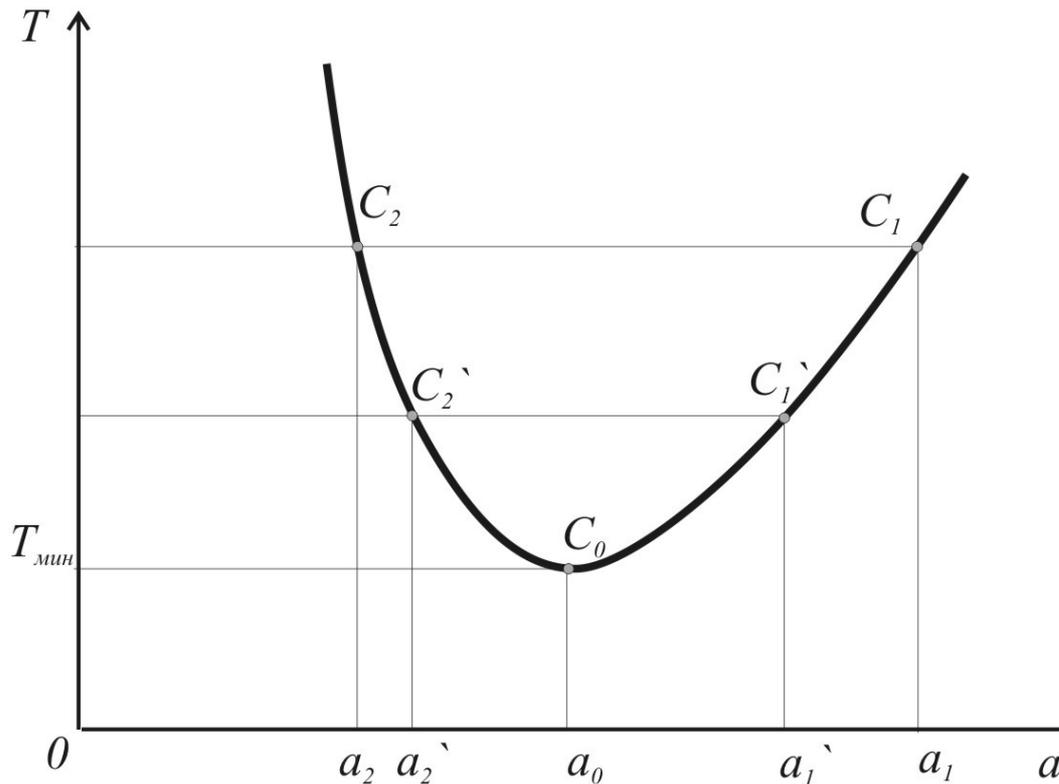


Рис. 3. Зависимость $T(a)$ для физического маятника. Точки $(C_1$ и $C_2)$, $(C_1'$ и $C_2')$ – парные.

Уравнение (23), при условии $l_{np} = const > 2a_0$, имеет два положительных корня $a_1 > a_0$ и $a_2 < a_0$, которые соответствуют двум парным точкам подвеса **по одну сторону** от центра масс, но по разные стороны от точки a_0 (см. рис.3).

Используя свойства корней квадратного уравнения, получаем следующие **свойства парных точек**.

1) Для каждой из двух парных точек приведенная длина равна сумме их расстояний от центра масс:

$$a_1 + a_2 = l_{np}; \quad (24)$$

2) произведение этих расстояний равно квадрату радиуса инерции маятника относительно центра масс

$$a_1 a_2 = a_0^2. \quad (25)$$

Свойство (25) позволяет найти радиус инерции a_0 и, зная массу маятника, определить по формуле (17) его момент инерции J_0 , относительно оси, проходящей через центр масс.

Использование физического маятника для измерения ускорения свободного падения.

Измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет в принципе определить ускорение свободного падения g в любой точке земного шара. Эти методы определения g известны и используются в гравиметрии. Маятниковые гравиметрические приборы удобны для определения вариаций g , т.е. нахождения отношений значений g в различных точках поля тяготения, однако их точность уступает другим типам гравиметров. Часто маятниковые приборы используются для решения более сложной задачи — определения абсолютного значения g . В этом случае измерения проводятся таким образом, чтобы исключить из окончательных формул величину момента инерции маятника.

Предположим, что мы определили периоды колебаний маятника T_1 и T_2 , подвешивая его в двух разных точках, находящихся на некоторых расстояниях a и b по разную сторону от центра масс. В соответствии с (13) можно записать

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mb^2}{mgb}} \quad (26)$$

Возведя в квадрат эти уравнения и вычитая, получим:

$$T_1^2 ga - T_2^2 gb = 4\pi^2(a^2 - b^2),$$

откуда следует

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_1^2 - bT_2^2}. \quad (27)$$

Можно показать, что погрешность вычислений по формуле (27) будет минимальной, если T_1 и T_2 близки друг к другу, а a и b существенно отличаются друг от друга. Действительно:

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_1^2 - bT_2^2} = 4\pi^2 \frac{(a+b)(a-b)}{aT_1^2 - bT_1^2 + aT_1^2 - bT_2^2} =$$

$$= 4\pi^2 \frac{(a+b)}{\frac{aT_1^2 - bT_1^2 + bT_1^2 - bT_2^2}{(a-b)}} = 4\pi^2 \frac{(a+b)}{T_1^2 + \frac{b}{(a-b)}(T_1^2 - T_2^2)}$$

Учитывая, что при вычитании величин их погрешности складываются, можно сделать вывод, что погрешность в значительной степени определяется величиной $\frac{b}{(a-b)}(T_1^2 - T_2^2)$, которая уменьшается, если a и b сильно отличаются, а T_1 и T_2 близки друг к другу.

Если периоды равны между собой ($T_1 = T_2 = T_0$), то $(a+b) = l_{np}$,

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{np}}{T_0^2} \quad (28)$$

Экспериментальная установка

В данной работе используются два физических маятника. Один из них –

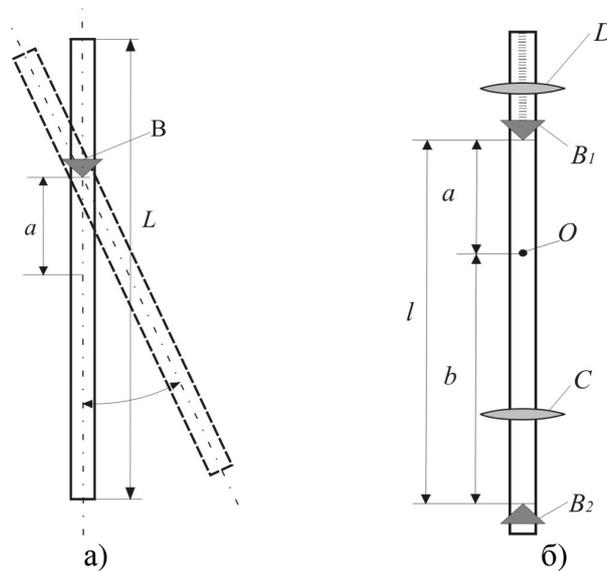


Рис. 4. Устройство физических маятников

цилиндрический стержень с одной опорной призмой B (рис.4а), положение которой может меняться. Вторым – цилиндрический стержень с двумя неподвижными опорными призмами B_1 и B_2 (рис.4б) и двумя дополнительными массами (чечевицами). Чечевица C закреплена, а чечевица D находится на конце стержня (не между призмами) и может

перемещаться по нему, ее положение определяется по шкале на стержне. Центр масс маятника на схеме обозначен точкой O его положение изменяется в зависимости от положения чечевицы D . Изменяя положение чечевицы D , можно найти такое положение центра масс, при котором $a + b = l_{np}$ и периоды колебаний на призмах B_1 и B_2 будут одинаковы. Такой маятник называется обратным.

Период колебаний определяется с помощью электронного таймера и фотоэлектрической схемы (на рис. 4 не указаны). После включения таймера в сеть необходимо последовательно нажать клавиши “СБРОС” и “ПУСК”. При первом же пересечении маятником светового луча фотоэлектрического датчика происходит запуск системы счета периодов и электронного таймера. После нажатия клавиши “СТОП” очередное пересечение маятником светового луча, соответствующее завершению текущего периода колебаний, вызывает остановку таймера и системы счета периодов колебаний. Результаты высвечиваются на табло блока — это количество периодов и соответствующее ему полное время колебаний, точность измерений времени таймером 0,001 сек.

Проведение эксперимента

При проведении эксперимента следует:

- убедиться, что призма маятника попала ребром в ребро опорной призмы и опирается на опорную призму по всей длине;
- убедиться, что в процессе колебаний стержень маятника полностью открывает луч таймера, и таймер правильно считает количество периодов, в противном случае необходимо увеличить амплитуду колебаний.

Упражнение 1. Изучение колебаний физического маятника (используется маятник в виде цилиндрического стержня).

Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить длину L стержня.
2. Опорную призму закрепляют в верхнем положении так, чтобы винт попал в отверстие на риске стержня. Штангенциркулем измеряют расстояние d от ребра призмы до верхнего конца стержня. Отклоняя маятник на $3-5^{\circ}$ измеряют время t_n $n=10$ колебаний с помощью таймера. Данные записывают в табл. 1. (Следует записывать все цифры с таймера, его точность измерения времени 0.001 сек)
3. Смещают призму B на 5 см и закрепляют ее, следя за тем, чтобы винт попадал в отверстие на риске стержня (тогда призма сместится точно на 50.0 мм, риски на стержне и отверстия сделаны с точностью 0,1

мм, поэтому точность определения величины расстояния от ребра призмы до центра масс получается 0,1 мм). Проводят измерения аналогично п.2.

4. Повторяют измерения 5-7 раз, каждый раз смещая положение призмы В на 5 см. Данные записывают в табл. 1.
5. В области минимальных значений периода колебаний (минимальных t_n) проводят дополнительные измерения смещая при каждом опыте призму на 1 см.
6. Для полученного минимального значения периода (минимального t_n) измерения повторяют 3-5 раз, данные записывают в табл.1.

Таблица 1

Расстояние призмы от конца стержня d , мм	Расстояние призмы от центра масс a мм	t_n , с ($n=10$)	T

Обработка результатов

1. Строят зависимость $T(a)$, где $a = \frac{L}{2} - d$ - расстояние от призмы до центра масс.
2. Определяют по этой зависимости значение a_0 , соответствующее минимальному периоду колебаний и сравнивают его с теоретическим $a_0 = \frac{L}{\sqrt{12}}$, которое получается из (17), подстановкой в него значения $J_0 = \frac{1}{12}mL^2$. Поскольку положение призмы меняется дискретно с шагом 1 см, то для значения a_0 следует взять погрешность -0.5 см
3. Находят среднее значение минимального периода колебаний $\langle T_{мин} \rangle$ и погрешность этой величины $S_{\langle T_{мин} \rangle}$.

4. По графику определяют 2—3 пары значений a_1 , a_2 для которых периоды колебаний одинаковы, определяют значение $l_{\text{пр}}$ по формуле (10), проверяют соотношения (24) и (25) для парных точек.

Упражнение 2. Определение g с помощью обратного физического маятника с учетом разницы в периодах колебаний T_1 и T_2 .

Измерение

1. Подвесьте маятник на призме B_1 (прямое положение маятника) и закрепите чечевицу D в ближайшем к призме B_1 положении, соответствующем совмещению риски чечевицы с одной из поперечных рисок на стержне.
2. Отклоните маятник от положения равновесия на $3\div 5^\circ$ (нижний конец стержня — на $3\div 5$ см от вертикали) и с помощью таймера измерьте время t_{n1} , за которое происходят $n=10$ периодов колебаний. Занесите данные в табл. 2.
3. Перевернув маятник и подвесив его на призме B_2 (обратное положение маятника), повторите измерения аналогично п. 2 для того же положения чечевицы, что и в п.2. Результаты измеренного значения t_{n2} также занесите в табл. 2.
4. Изменяя положение чечевицы D с шагом 10 мм, повторите измерения по п.2 и п.3. Результаты внесите в табл.2. Измерения провести не менее, чем для 10 положений чечевицы.
5. Выберите из табл.2 значение $d = d_1$, для которого t_{n1} и t_{n2} наиболее близки по величине. Вновь закрепите чечевицу D на расстоянии d_1 от призмы B_1 и повторите измерения в соответствии с пунктом 2 для прямого и обратного положения маятника по 3 раза каждое. Каждый раз заносите данные в таблицу 3.
6. Для определения величин a и b осторожно уложите его стержень на специальную подставку, имеющую форму призмы. Передвигая маятник относительно этой грани призмы, добейтесь равновесия, при этом центр масс будет находиться над ребром призмы. При помощи линейки измерьте расстояние a от центра масс до призмы B_1 и определите $b = l - a$. Результаты занесите в табл. 3. Измерения повторите 3 раза.

Таблица 2

Положение чечевицы d , мм	Прямое положение маятника (на призме B_1)		Обратное положение маятника (на призме B_2)	
	t_{n1} , с ($n=10$)	T_1 , с	t_{n2} , с ($n=10$)	T_2 , с
0				
10				
20				
30				
40				
...				

Обработка результатов

1. Для значения $d=d_1$ из экспериментальных данных рассчитайте средние значения $\langle T_1 \rangle$ и $\langle T_2 \rangle$ и погрешности определения этих величин $S_{\langle T_1 \rangle}$ и $S_{\langle T_2 \rangle}$
2. Определите средние значения $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$, а также их стандартные отклонения $S_{\langle a \rangle}$ и $S_{\langle b \rangle}$. Данные занесите в табл. 3
3. Определите значение ускорения свободного падения используя формулу (25)

4. Постройте графики зависимости периодов T_1 и T_2 от координаты чечевицы D . (Типичный вид этой зависимости показан на рис. 5а.)

Таблица 3

$t_n, \text{с}$ ($n=10$)	$\langle T_1 \rangle$, $S_{\langle T_1 \rangle}$, с	$t_n, \text{с}$ ($n=10$)	$\langle T_2 \rangle$, $S_{\langle T_2 \rangle}$, с	a	$\langle a \rangle$, $S_{\langle a \rangle}$	b	$\langle b \rangle$, $S_{\langle b \rangle}$

Упражнение 3. * Определение ускорения свободного падения с помощью обратного физического маятника при одинаковых значениях T_1 и T_2 .

В этом упражнении определяется положение чечевицы $d=d_0$, при котором периоды колебаний T_1 и T_2 для прямого и обратного положений маятника будут одинаковыми. Для определения g используется формула (26)

1. Используя экспериментальные данные табл. 2, выделите два ближайших к точке пересечения кривых 1 и 2 положения чечевицы. Для этих положений величины $(t_{n1}(d_1) - t_{n2}(d_1))$ и $(t_{n1}(d_2) - t_{n2}(d_2))$ принимают минимальные значения и кроме того если $(t_{n1}(d_1) - t_{n2}(d_1)) > 0$, то $(t_{n1}(d_1) - t_{n2}(d_1)) < 0$.

2. Используя линейную интерполяцию определите значение $d=d_0$, при котором периоды колебаний маятника в прямом и обратном положениях будут одинаковыми. Это можно сделать либо графически (см. рис.5б), либо вычислить по формуле. Для случая, показанного на рис. 5б она имеет вид:

$$d_0 = d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(T_2(d_2) - T_1(d_2))}{(T_2(d_2) - T_1(d_2)) + (T_1(d_1) - T_2(d_1))}$$

3. Закрепив чечевицу B_1 в положении $d=d_0$ провести измерения t_{n1} и t_{n2} для прямого и обратного положений маятника, повторяя каждый опыт 3 раз. Данные занести в табл.4.

* По указанию преподавателя.

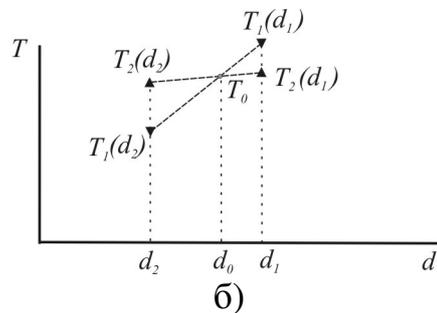
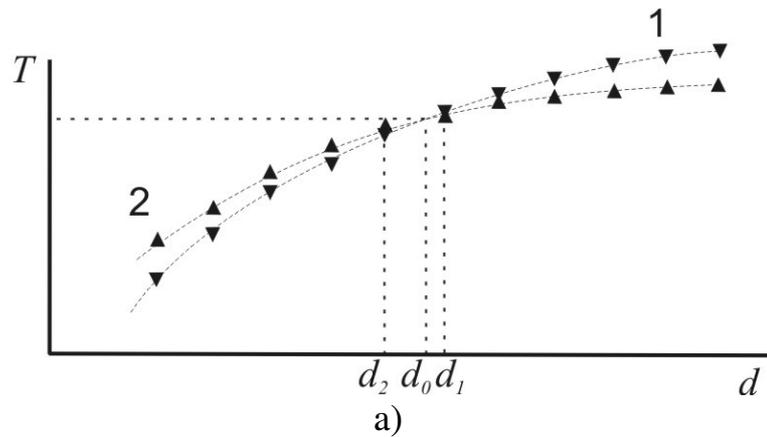


Рис.5 Зависимость периода колебаний физического маятника от положения чечевицы D при прямом (1) и обратном (2) положениях маятника

Обработка результатов

1. Определить среднее значение периода $\langle T_0 \rangle$, используя все измерения

t_{n1} и t_{n2} :

$$\langle T_0 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^5 t_{n1}^{(i)} + \sum_{i=1}^5 t_{n2}^{(i)}}{10}$$

Определить погрешность измерения периода $S_{\langle T_0 \rangle}$

2. Определите величину g по формуле (26). Расстояние между призмами, равное в данном случае приведенной длине маятника дано на установке.
3. Оцените погрешность проведенных косвенных измерений величины g , вычисленной по формуле (26)*:

$$S_g(l, T) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T\right)^2},$$

* Точное определение величины g требует учета многих факторов: величины амплитуды колебаний, температурных измерений, закругления ребра опорной призмы и др.

4. Сравните полученный результат с его табличным значением и полученным в упражнении 2.

Таблица 4.

$t_n, \text{с}$ ($n=10$)	$\langle T_0 \rangle, S_{\langle T_0 \rangle}$, с	g, S_g

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть изучены основные свойства колебаний физического маятника: должен быть определен радиус инерции a_0 , проведено его сравнение с теоретическим значением, определено минимальное значение периода колебаний, проверены соотношения (24), (25) для парных точек. Должно быть получено значение ускорения свободного падения, проведено его сравнение с табличным значением и проанализированы причины, приводящие к увеличению погрешности эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником? Математическим маятником? От чего зависит период их колебаний?
2. При каких условиях физический маятник совершает гармонические колебания? Каким уравнением они описываются? Что называется смещением колеблющейся точки, амплитудой, периодом, фазой?
3. В каких положениях колеблющегося маятника максимальна его скорость? Ускорение?
4. Что называется приведенной длиной физического маятника? Напишите формулу для приведенной длины.
5. Что такое парные точки?
6. Что такое сопряженные точки?
7. Что такое радиус инерции?

8. Дайте вывод формулы (28) для расчета ускорения свободного падения.
9. По каким причинам ускорение свободного падения зависит от высоты над уровнем моря, а также от географической широты?

Литература

1. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004.
2. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005. Гл.9, §76,77, Гл.14, §123,124
3. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. §35,36,41
4. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.
5. А.И.Акимов, А.Н.Баранов, А.М.Салецкий Изучение колебаний физического маятника. М. МГУ, 2007 Введение, 1.1-1.4, 3.1,3.2.