

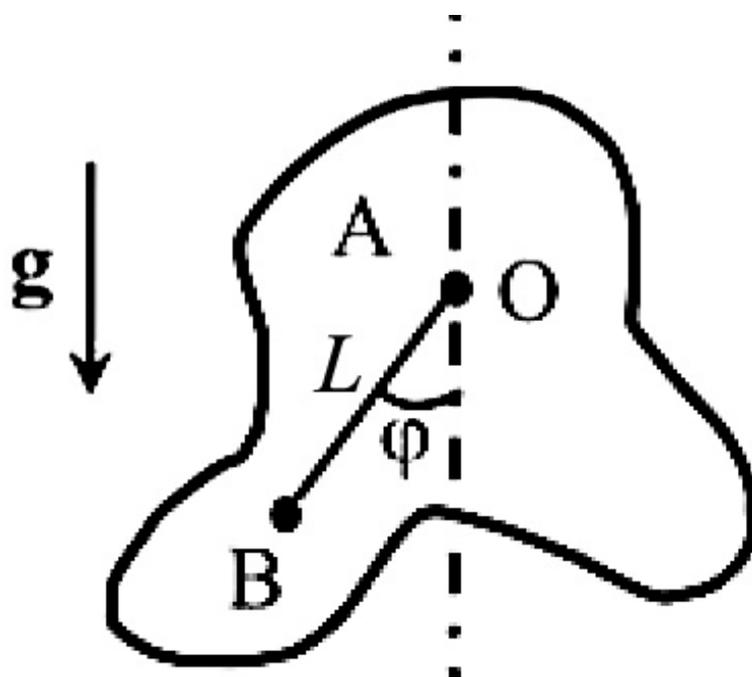


Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 113

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА  
ИНЕРЦИИ КОЛЕСА



МОСКВА 2023

## Лабораторная работа 113

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА

#### Цель работы

*Экспериментальное определение момента инерции твердых тел простой формы.*

#### Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй — на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Кроме того, проводится прямой расчет момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

#### Теоретическое введение

Для твердого тела, закрепленного на оси, уравнение вращательного движения имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (2.4.1)$$

где  $J$  — момент инерции твердого тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $M$  — момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением массы тела. В частности, для тела, состоящего из конечного числа материальных точек  $m_i$ ,

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (2.4.2)$$

где  $\rho_i$  — их расстояния до оси вращения. Для сплошных тел суммирование заменяется интегрированием:

$$J = \int \rho^2 dm.$$

Для некоторых тел простой формы возможен прямой расчет момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может оказаться достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью анализа колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело, и с помощью изучения вращательного движения этого тела.

**Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника.** Если закрепить исследуемое тело  $A$  на горизонтальной оси  $O$ , проходящей через центр масс (рис. 2.4.1), то момент сил тяжести будет равен нулю, и тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на

некотором удалении  $L$  от оси малое тело  $B$  с известной массой  $m$ , то равновесие перестанет быть безразличным — появится дополнительный момент силы тяжести, действующей на тело  $B$ . Такую систему тел можно рассматривать как физический маятник.

Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi, \quad (2.4.3)$$

где  $J$  и  $J_B$  — моменты инерции твердого тела  $A$  и дополнительного грузика  $B$  относительно оси  $O$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\varphi$  — угол отклонения тела от положения равновесия,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  —

—угловое ускорение тела.

Если углы отклонения малы ( $\varphi \leq 10^\circ$ ), то  $\sin \varphi \approx \varphi$ , и можно записать:

$$(J + J_B) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgL\varphi = 0. \quad (2.4.4)$$

Уравнение (2.4.4) — это уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2\varphi, \quad (2.4.5)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + J_B}. \quad (2.4.6)$$

Уравнение (2.4.5) описывает собственные (свободные) гармонические колебания, а его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (2.4.7)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  — собственная круговая частота,  $T$  — период колебаний,  $\varphi_0$  — амплитуда колебаний,  $\theta_0$  — начальная фаза колебаний.

Поскольку размеры тела  $B$  во много раз меньше расстояния  $L$  до оси, то момент инерции дополнительного грузика можно считать равным

$$J_B = mL^2. \quad (2.4.8)$$

С учетом (2.4.8), из (2.4.6) получаем

$$J = mL \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (2.4.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции

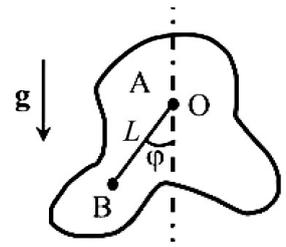


Рис. 2.4.1. Схематическое представление физического маятника.

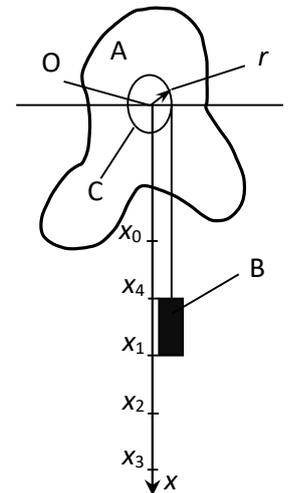


Рис. 2.4.2. Схематическое представление твердого тела, закрепленного на оси и вращающегося под действием груза  $B$ .

твердого тела можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нем добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние  $L$ , по формуле (2.4.9) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (2.4.9) не учитывалось влияние момента сил трения  $M_{\text{тр}}$  в оси. Если момент  $M_{\text{тр}}$  мал, то колебания будут затухать медленно, а их частота будет мало отличаться от  $\omega_0$ .

**Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения.** Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело  $A$ , закрепленное на оси  $O$ , проходящей через его центр масс (рис. 2.4.2). Пусть соосно с телом закреплен цилиндр  $C$  радиусом  $r$ , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом  $B$ .

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело  $A$  во вращение. Уравнение движения груза  $B$ , уравнение вращательного движения тела  $A$  и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (2.4.10)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (2.4.11)$$

$$a = \varepsilon r, \quad (2.4.12)$$

где  $m$  — масса груза  $B$ ,  $J$  — момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром  $C$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $T$  — сила натяжения нити,  $r$  — радиус цилиндра, на который намотана нить,  $M_{\text{тр}}$  — момент сил трения,  $a$  — ускорение тела  $B$ .

Из уравнений (2.4.10) – (2.4.12) получаем:

$$J = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} r}{a}. \quad (2.4.13)$$

Таким образом, если известно ускорение груза  $B$  и момент сил трения в оси, то по формуле (2.4.13) можно определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться из положения  $x_0=0$ , а время прохождения им расстояния между двумя точками  $x_1$  и  $x_2$  равно  $\Delta t$ . Так как движение груза на участке  $x_1 - x_2$  равноускоренное, то

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (2.4.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \quad (2.4.15)$$

где  $t_1$  — время прохождения участка  $x_1 - x_0$ ,  $\Delta t$  — время прохождения участка  $x_2 - x_1$ .

Из (2.4.14) и (2.4.15) следует, что

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right), \quad (2.4.16)$$

откуда находим

$$a = 2 \frac{\left( \sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right)^2}{(\Delta t)^2}. \quad (2.4.17)$$

Таким образом, для определения  $a$  нужны данные о  $x_0, x_1, x_2$  и времени  $\Delta t$  прохождения грузом расстояния между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Рассмотрим, как можно оценить момент сил трения.

При опускании груза с отметки  $x_0$  на полную длину нити (до отметки  $x_3$ ) его потенциальная энергия в поле силы тяжести переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, равное по величине работе сил трения:

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi M_{\text{тр}}, \quad (2.4.18)$$

где  $\Phi$  — полный угол поворота тела,  $E_k$  — кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того как груз опустится на полную длину нити до отметки  $x_3$ , тело  $A$  будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки  $x_4$ . Очевидно, что

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 M_{\text{тр}}, \quad (2.4.19)$$

где  $\Phi_1$  — полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что  $x_3 - x_0 = r\Phi$  и  $x_3 - x_4 = r\Phi_1$ , для оценки момента силы трения получаем соотношение

$$M_{\text{тр}} = mgr \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (2.4.20)$$

### Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное *колесо 1* (рис. 2.4.3), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен *груз 2*. Помещая груз в *устройство 3*, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной *шкале 4*. В том случае, когда груз освобожден (при этом устройство для его крепления снимается с колеса), под действием силы тяжести он начинает

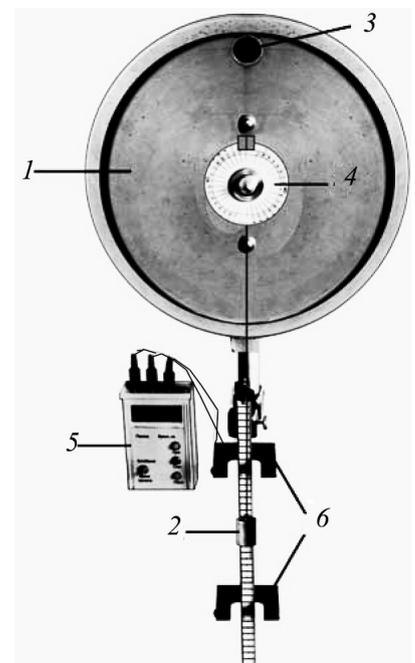


Рис. 2.4.3.  
Экспериментальная установка для определения момента инерции колеса.

опускаться, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации периода колебаний колеса и времени опускания груза.

Для регистрации периода колебаний с обратной стороны колеса имеются два симметрично расположенных, легких, одинаковых по массе тела. На одном из тел закреплен стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний.

Время колебаний колеса определяется с помощью электронного таймера 5. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки «Пуск», отсчет времени начинается в момент прохождения стержня через датчик («световые ворота»), соединенный с таймером. На индикаторе таймера, кроме времени, показывается число полных колебаний. При нажатии на кнопку «Стоп» отсчет времени прекращается при совершении системой целого числа полных колебаний.

Время перемещения груза при вращательном движении колеса определяется с помощью того же таймера 5, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками 6. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков определяется с помощью линейки (рис. 2.4.3). При нажатии на кнопку «Пуск» измерение времени начинается в момент срабатывания верхнего датчика, заканчивается при срабатывании нижнего датчика. На индикаторе электронного таймера высвечивается время прохождения грузом расстояния между двумя датчиками положения.

Переключение таймера в тот или иной режим работы осуществляется тумблером «Колебания – Время пролета». При подготовке к новым измерениям показания табло обнуляются нажатием кнопки «Сброс».

## Проведение эксперимента

**Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний.**

### Измерения

1. Закрепить на краю колеса специальное устройство 3 для крепления груза. Вывести колесо из положения равновесия на угол, не превышающий  $10^\circ$ . С помощью таймера определить время  $t$   $n=10$  полных колебаний. Измерения провести  $k = 3$  раза, результаты записать в табл. 2.4.1.

2. После этого не менее трех раз измерить расстояние  $L$  от оси вращения до центра масс груза (то есть расстояние от оси вращения до центра винта крепления груза на колесе). Результаты записать в табл. 2.4.1.

3. Взвесить устройство для крепления груза и сам груз. Значения масс этих тел  $m_k$  и  $m_{гр}$  и погрешности записать в табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1

## Экспериментальные данные

k	t <sub>k</sub> , с	t̄, с	S <sub>t̄</sub> , с	L, М	L̄, М	S <sub>L</sub> , М	m <sub>к</sub> , КГ	S <sub>m<sub>к</sub></sub> , КГ	m <sub>гр</sub> , КГ	S <sub>m<sub>гр</sub></sub> , КГ

### Обработка результатов

1. Для серии прямых измерений времени n=10 полных колебаний рассчитать среднее арифметическое значение t̄ :

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Оценить случайную погрешность S<sub>t̄</sub> среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 2.4.1.

Аналогичные расчеты выполнить для серии прямых измерений расстояния L от оси до груза.

3. Считая, что систематическая погрешность таймера равна 2% от результата измерения, а систематическая погрешность измерения расстояния L равна цене деления линейки, получить оценку суммарной погрешности для обеих величин

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}.$$

4. Определить период колебаний T̂ и погрешность S<sub>T̂</sub> по формулам:

$$\hat{T} = \frac{\bar{t}}{n}, \quad S_{\hat{T}} = \frac{\sigma_{t, \text{сумм}}}{n}.$$

Результаты записать в табл. 2.4.2.

Таблица 2.4.2

### Вычисленные значения T̂, J и их погрешности

T̂, с	S <sub>T̂</sub> , с	J, кг·м <sup>2</sup>	S <sub>J</sub> , кг·м <sup>2</sup>

7. По формуле (2.4.9), в которой m = m<sub>к</sub> + m<sub>гр</sub>, определить момент инерции колеса J.

8. Оценить погрешность для J, используя формулу для оценки погрешности косвенных измерений:

$$S_J(L, T, m, g) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial L} S_L\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} S_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m} S_m\right)^2}, \quad (2.4.21)$$

где значение  $S_m$  дано в описании используемых весов (считая, что  $g$  определено без погрешностей и равно  $9,82 \text{ м/с}^2$ ). Результаты записать в табл. 2.4.2.

**Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения.**

*Измерения*

1. Снять с колеса устройство 3 для крепления груза.

2. Переключить таймер в режим измерения времени пролета. На установках практикума используются два типа таймеров: в одних таймер срабатывает, когда световые ворота закрываются, а в других – когда открываются после закрытия. Поэтому перед началом измерений необходимо самостоятельно экспериментально проверить, какой тип таймера используется в вашей установке. И принять решение, по какой точке тела следует измерять его координату.

3. Провести измерения координат датчиков и груза по вертикальной шкале. Зафиксировать отметку  $x_0$ , с которой будет опускаться груз. Измерить координату  $x_2$  нижнего датчика и также координату  $x_3$  точки, до которой опустится груз при полном разматывании нити. Все эти величины останутся неизменными в процессе измерений. Оценить систематическую погрешность. Результаты записать в табл. 2.4.3.

В эту же таблицу записать данные о массе  $m_{гр}$  груза и радиусе  $r$  цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 2.4.3.

**Параметры установки (Упр. 2)**

$m_{гр} \pm S_m$ (г)	$x_0 \pm S_{x0}$ (см)	$x_2 \pm S_{x2}$ (см)	$x_3 \pm S_{x3}$ (см)	$r \pm S_r$ (см)

4. Установить верхний датчик в произвольное положение и измерить его координату  $x_1$ . Наматывая нить на цилиндр, зафиксировать груз в начальной точке с координатой  $x_0$ . Отпустив груз, измерить время  $\Delta t$  прохождения груза между отметками  $x_1$  и  $x_2$ , а также координату  $x_4$  точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр до остановки колеса.

Повторить измерения не менее 3 раз. Результаты записать в табл. 2.4.4 и 2.4.5.

Таблица 2.4.4.

**Результаты экспериментов (Упр. 2)**

$x_1$ (см)	$\Delta t_1$ (с)	$\Delta t_2$ (с)	$\Delta t_3$ (с)	$\Delta t_{\text{сред}}$ (с)	$S_{\Delta t}$ (с)	$\sqrt{x_1 - x_0}$ , см <sup>0.5</sup>

--	--	--	--	--	--	--

Таблица 2.4.5.

**Определение координаты  $x_4$  высоты подъема груза (Упр. 2)**

$(x_4)_1$ (см)	$(x_4)_2$ (см)	$(x_4)_3$ (см)	$(x_4)_4$ (см)	$(x_4)_5$ (см)	$(x_4)_{cp}$ (см)	$S_{x_4}$ (см)

5. Последовательно смещая верхний датчик на 3 см, повторить измерения, указанные в п.4, для 7-8 положений датчика. Координату  $x_4$ , не зависящую от положения датчиков, измерить в общей сложности не менее 5 раз.

*Обработка результатов*

1. По сериям прямых измерений получить оценку значений (среднее арифметическое)  $\Delta t$  для различных значений  $x_1$  и оценку погрешности.

2. Построить график зависимости  $\Delta t$  от  $\sqrt{x_1 - x_0}$ .

Запишем формулу

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}), \quad (2.4.16)$$

в виде линейной зависимости вида

$$y = Ax + B,$$

где  $y = \Delta t$ ;  $x = \sqrt{x_1 - x_0}$ ;  $A = -\sqrt{\frac{2}{a}}$ ;  $B = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x_2 - x_0}$ .

Применяя МНК<sup>1</sup>, получить оценку коэффициента  $A$  и оценку погрешности  $S_A$ .

По формуле косвенных измерений

$$a = \frac{2}{A^2}$$

получить оценку ускорения  $a$  груза и оценку погрешности. Результаты записать в табл. 2.4.6.

3. По серии прямых измерений получить оценку значения (среднее арифметическое)  $x_4$  и оценку погрешности.

По формуле (2.4.20) получить оценку момента сил трения  $M_{тр}$  и оценку погрешности. Сравнить найденное значение с моментом  $mgr$  силы тяжести.

4. Зная оценки ускорения и момента сил трения, по формуле (2.4.13) получить оценку момента инерции  $J$  колеса (с учетом силы трения) и оценку погрешности. Для сравнения получить оценку момента инерции  $J$  колеса, пренебрегая потерями энергии на трение ( $M_{тр} = 0$ ).

<sup>1</sup> Применить формулы (44)-(45) или (46)-(47) из [3], или воспользоваться программой расчета по МНК на сайте кафедры общей физики genphys.phys.msu.ru, раздел «Общий физический практикум»

## Результаты расчетов (Упр. 2)

$A \pm S_A$ (с/м <sup>1/2</sup> )	$a \pm S_a$ (м/с <sup>2</sup> )	$M_{тр} \pm S_{M_{тр}}$ (Н·м)	$mgr \pm S_{mgr}$ (Н·м)	$J \pm S_J$ (кг·м <sup>2</sup> ) с трением	$J \pm S_J$ (кг·м <sup>2</sup> ) без трения

## Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса

Используемое в установке колесо можно рассматривать как совокупность тел простой формы (рис. 2.4.4): диска радиусом  $R_1$  и толщиной  $l_1$ ; обода диска толщиной  $l_2$  с внешним и внутренним радиусами  $R_2$  и  $R_1$ ; двух малых тел  $C_1$  и  $C_2$ , расположенных на расстоянии  $R_3$  от оси; цилиндра радиусом  $R_4$  и толщиной  $l_3$ .

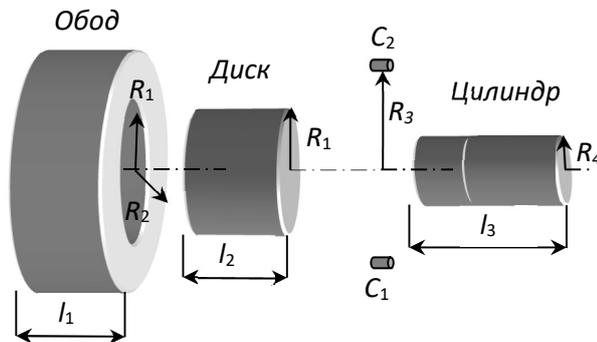


Рис. 2.4.4. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой формы.

Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать по известным формулам.

Момент инерции диска массой  $m_d$  относительно оси равен (см. Приложение 2.4)

$$J_d = \frac{1}{2} m_d R_1^2, \quad (2.4.22)$$

а для обода массой  $m_{об}$  (см. Приложение 2.5) —

$$J_{об} = \frac{1}{2} m_{об} (R_1^2 + R_2^2). \quad (2.4.23)$$

Учитывая, что диск, обод и цилиндр сделаны из одного материала с плотностью  $\rho$ , для момента инерции колеса получаем:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho l_2 R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \rho l_1 (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho l_3 R_4^4 + m_C R_3^2, \quad (2.4.24)$$

где  $m_C$  — суммарная масса тел  $C_1$  и  $C_2$ .

Так как момент инерции пропорционален четвертой степени радиуса, подумайте, измерения каких величин следует провести наиболее точно.

## Измерения

1. С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры составных частей колеса по 3 - 5 раз. Результаты измерений заносят в табл. 2.4.7.

Таблица 2.4.7

**Результаты измерений (Упр. 3)**

$n$	1	2	3	4	5
$R_{1n}, \text{м}$					
$\bar{R}_1 \pm S_{\bar{R}_1}, \text{м}$					
$R_{2n}, \text{м}$					
$\bar{R}_2 \pm S_{\bar{R}_2}, \text{м}$					
$R_{3n}, \text{м}$					
$\bar{R}_3 \pm S_{\bar{R}_3}, \text{м}$					
$R_{4n}, \text{м}$					
$\bar{R}_4 \pm S_{\bar{R}_4}, \text{м}$					
$l_{1n}, \text{м}$					
$\bar{l}_1 \pm S_{\bar{l}_1}, \text{м}$					
$l_{2n}, \text{м}$					
$\bar{l}_2 \pm S_{\bar{l}_2}, \text{м}$					
$l_{3n}, \text{м}$					
$\bar{l}_3 \pm S_{\bar{l}_3}, \text{м}$					

### Обработка результатов

1. Определить средние арифметические значения всех измеряемых величин:  $R_1, R_2, R_3, R_4, l_1, l_2, l_3$ .

2. Вычислить выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 2.4.7. Учесть систематическую погрешность.

3. По формуле (2.4.24) рассчитать значение момента инерции колеса и оценить погрешность.

4. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравнить со значениями, полученными экспериментально в упр. 1 и 2.

### Основные итоги работы

*Экспериментально определяется значение момента инерции колеса двумя способами. Результаты сравниваются с моментом инерции, рассчитанным по формуле (2.4.24).*

## Контрольные вопросы и задания

1. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
2. Вывести формулы для расчета главных центральных моментов инерции тонкой палочки, цилиндра и обода.
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
4. Как записать уравнение движения для колебательного режима? Как связаны частота собственных колебаний и момент инерции?
5. Как записать уравнение движения для вращательного режима? Каким образом можно найти момент инерции вращающегося тела?
6. Даны два диска из одного и того же материала и одинаковой толщины, радиусы которых отличаются в два раза. Во сколько раз отличаются их моменты инерции относительно центральной оси, совпадающей с осью симметрии дисков?

## Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. Гл. 8.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. М.: Изд. центр «Академия», 2004. Лекции 13,14
3. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.