

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является **абсолютно твердым**, т.е. расстояние между двумя любыми точками тела не меняется.

В дальнейшем вместо термина «абсолютно твердое тело» будет использоваться термин «твердое тело».

Кинематика твердого тела. Любое движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

При **поступательном движении** прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе. В этом случае в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы, поэтому достаточно знать характер движения лишь одной точки тела. Анализ такого движения сводится к анализу движения материальной точки.

При **вращательном движении** твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси, называемой **осью вращения**. При таком движении все точки твердого тела за малый промежуток времени dt поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол $d\varphi$.

Если ввести в рассмотрение аксиальный вектор $d\varphi$, модуль которого равен углу поворота $d\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения, то скорость изменения угла будет равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.1)$$

Вектор ω называется **угловой скоростью**.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью $\mathbf{v}_i$ i -й точки тела соотношением

$$\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор.

Производная от ω по времени называется **угловым ускорением**

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.3)$$

Совместим начало поступательно движущейся системы координат с какой-либо точкой А твердого тела (точкой отсчета). Тогда в лабораторной системе отсчета скорость любой другой точки В тела представима в виде векторной суммы скорости

движения системы координат v_0 (скорость точки А) и относительной скорости v' точки В:

$$v = v_0 + v'. \quad (2.4)$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем). Поскольку угол поворота $d\varphi$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и одинаков для всех точек твердого тела, то с учетом (2.1.) и (2.2) выражение (2.4) может быть представлено в следующем виде:

$$v = v_0 + \omega \times r, \quad (2.5)$$

где ω — угловая скорость вращения твердого тела (не зависит от выбора точки отсчета), r — радиус-вектор с началом в точке А. Скорость поступательного движения тела v_0 зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать так, чтобы v_0 была равна нулю.

Плоское движение твердого тела — движение, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения твердого тела ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения*.

Мгновенная ось вращения твердого тела — ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю. Поэтому плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение относительно некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно неподвижной оси. Рассмотрим движение твердого тела как движение системы жестко связанных между собой точек. В лабораторной системе отсчета уравнение движения для i -й материальной точки массой m_i имеет вид:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + \sum_{j \neq i} f_{ij}, \quad (2.6)$$

где F_i — сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, f_{ij} — сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки, т.е. внутренняя сила.

Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы $\mathbf{f}_{ij}$ и $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим векторно обе части уравнения (2.6) на радиус-вектор $\mathbf{r}_i$:

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.7)$$

Учтем, что $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ (так как $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$, то $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i = 0$). Суммируя по всем материальным точкам системы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.8)$$

Величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ($\mathbf{p}_i$ — импульс i -й материальной точки) называется **моментом импульса** системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — **момент внешних сил** относительно

той же точки; величина $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ — суммарный момент всех

внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать к виду:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \quad (2.9)$$

Поскольку в случае центральных сил $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$, уравнение (2.8) (с учетом введенных выше обозначений) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.10)$$

Это уравнение называется уравнением вращательного движения или **уравнением моментов**.

В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.11)$$

где L_z и M_z — соответственно проекции векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ на ось Z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость материальной точки m_i тела равна $v_i = \omega \rho_i$ где ρ_i — ее расстояние до оси Z . Проекция моментов импульса на ось Z для этих точек равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. Так как угловая скорость ω одинакова для всех точек твердого тела, то момент импульса всего тела относительно оси Z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (2.12)$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (2.13)$$

называют **моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси**, который является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

Подставляя (2.12) в (2.11), получим **основное уравнение вращательного движения** тела вокруг неподвижной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (2.14)$$

Поскольку взаимное расположение точек в твердом теле со временем не меняется, то момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (2.14) может быть представлено в следующем виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z. \quad (2.15)$$

Для вычисления момента инерции при непрерывном распределении массы по объему суммирование можно заменить интегрированием по всему объему тела, и тогда (2.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (2.16)$$

Пусть известен момент инерции тела J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс — точку с радиус-вектором $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$ (m_i — масса элементарного объема тела,

$\mathbf{r}_i$ — его радиус-вектор, m — масса тела). Тогда, в соответствии с **теоремой Гюйгенса–Штейнера**, момент инерции тела J относительно любой другой параллельной оси, находящейся на расстоянии a , равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.17)$$

Тензор инерции. Предположим, что твердое тело может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Совместим с этой точкой начало декартовой системы координат XYZ . Скорость произвольной i -й точки твердого тела массой m_i равна $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела, а $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор. По определению, момент импульса этой материальной точки относительно точки O равен

$$\mathbf{L}_i \equiv m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i]] = m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Перепишем выражение для $\mathbf{L}_i$ в проекциях на оси системы координат XYZ с началом в точке O . Учитывая, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \text{ и } (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z,$$

получим

$$\begin{aligned} L_{ix} &= m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z], \\ L_{iy} &= m_i [-x_i y_i \omega_x + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - y_i z_i \omega_z], \\ L_{iz} &= m_i [-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + \omega_z (x_i^2 + y_i^2)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных объемов тела:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.18), соотношение (2.19) можно переписать в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \\ L_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \\ L_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Совокупность девяти величин

$$\underbrace{J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}}_{J_{ij}}$$

называется **тензором инерции**

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Проекции момента импульса на оси координат (2.20) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой О (центром вращения), поэтому из (2.18) и (2.20) получаем

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Отметим, что выражение (2.19) принимает точно такой же вид, если векторы $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_i$ проецировать на оси лабораторной системы координат XYZ. Отличие заключается в том, что в неподвижной лабораторной системе отсчета постоянно меняются координаты x_i , y_i , z_i каждого малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора $\hat{J}$ меняются со временем. В выбранной системе координат XYZ радиус-вектор $\mathbf{r}_i$ — неизменная величина, а проекции угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z меняются со временем.

Диагональные элементы тензора инерции J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} называются **осевыми моментами инерции**. Недиагональные элементы J_{xy} , J_{yx} , J_{xz} , J_{zx} , J_{yz} , J_{zy} , называются **центробежными моментами инерции**.

Тензор инерции — симметричный, так как $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Симметричный тензор всегда можно привести к

диагональному виду соответствующим выбором системы координат (определяемой формой тела), относительно которой все недиагональные элементы будут равны нулю. В этом случае координатные оси называются **главными осями инерции**, а величины $J_x \equiv J_{xx}$, $J_y \equiv J_{yy}$, $J_z \equiv J_{zz}$, — **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, называют **центральными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, называют **главными центральными осями**.

Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции. Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой неподвижной оси AA' . Представим радиус-вектор i -го элементарного объема массой dm в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{\rho}_i$, где $\mathbf{d}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{\rho}_i \perp \boldsymbol{\omega}$ (вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта, рис. 2.1). Так как ось AA' неподвижна, то линейная скорость любой точки тела перпендикулярна этой оси и равна

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\rho}_i.$$

Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат XYZ ось AA' (рис. 2.1) лежит в плоскости XY , а тензор инерции имеет диагональный вид:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

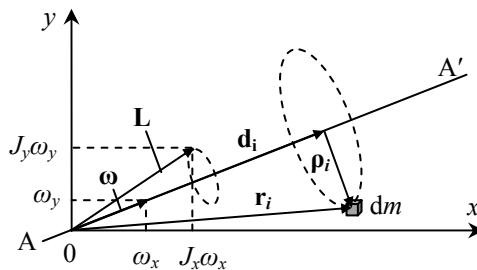


Рис. 2.1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси.

Вектор угловой скорости имеет компоненты $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$.

В соответствии с (2.20) $L_x = J_x \omega_x$, $L_y = J_y \omega_y$, $L_z = 0$. Следовательно, в общем случае ($J_x \neq J_y$) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, может не совпадать с направлением вектора угловой скорости. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси AA' . Вектор $\mathbf{L}$ так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие — совпадающую с

вектором угловой скорости ω , и перпендикулярную к нему, т.е. $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{AA'} + \mathbf{L}_\perp$. В этом случае векторное уравнение моментов (2.10) можно разделить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp. \quad (2.24)$$

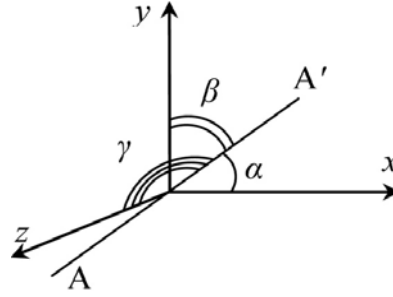


Рис. 2.2. Положение оси AA' относительно системы координат.

В уравнении (2.23) $M_{AA'}$ — проекция момента внешних сил на ось AA' (в том числе и сил трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. В уравнении (2.24) $M_\perp$ — перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил и сил упругости, действующих на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора $\mathbf{L}$ вокруг AA'.

Из уравнения (2.23), совпадающего с рассмотренным выше уравнением (2.11), следует основное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (2.15).

Момент инерции J твердого тела относительно некоторой оси можно найти, если известны направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора инерции.

Воспользуемся соотношением $L_{AA'} = \omega J$. С учетом (2.20) и соотношений $L_{AA'} = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma$, $\omega_x = \omega \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \cos \beta$, $\omega_z = \omega \cos \gamma$ (α, β, γ — углы, определяющие положение оси AA' относительно осей координат, см. рис. 2.2) получим:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) может быть использовано, в частности, для решения обратной задачи — определения компонент тензора инерции $\hat{J}$ по известным значениям моментов инерции J относительно нескольких различных неподвижных осей.

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Идея эксперимента

Система тел с изменяемым моментом инерции может свободно вращаться вокруг закрепленной оси под действием момента внешней силы.

Теоретическое введение

Согласно основному уравнению вращательного движения твердого тела (2.15), в случае вращения вокруг закрепленной оси Z тела (системы тел) с моментом инерции J

$$J\varepsilon = M, \quad (2.1.1)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение, M — момент внешних сил.

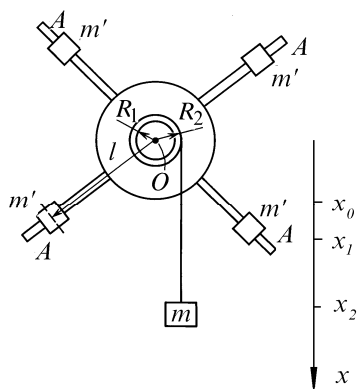


Рис. 2.1.1. Схематическое изображение маятника Обербека.

Для экспериментальной проверки этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 2.1.1). Он состоит из четырех стержней A и двух шкивов радиусом R_1 и R_2 , закрепленных на одной горизонтальной оси. На каждом из стержней находятся одинаковые грузы массой m' каждый, положение которых можно фиксировать на различных расстояниях от оси. Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m , подвешенного за

конец намотанной на тот или иной шкив нити.

Пренебрегая силами трения, а также считая нить невесомой и нерастяжимой, можем записать уравнение вращательного движения маятника:

$$J\varepsilon = RT, \quad (2.1.2)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T \quad (2.1.3)$$

и уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R. \quad (2.1.4)$$

Здесь R — радиус шкива, T — сила натяжения нити, a — линейное ускорение груза массой m , g — ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (2.1.2)–(2.1.4) следует, что ускорение груза массой m постоянно и равно

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g. \quad (2.1.5)$$

Основное уравнение вращательного движения (2.1.2) записано без учета момента сил трения $M_{\text{тр}}$ в оси маятника. Поэтому для проверки выполнения соотношения (2.1.1) необходимо убедиться, что $M_{\text{тр}}$ можно не учитывать, если суммарный момент сил трения $M_{\text{тр}}$ много меньше момента силы натяжения нити M , который равен:

$$M = RT = Rm(g - a) = mgR \frac{J}{J + mR^2}.$$

С учетом неравенства $mR^2 \ll J$ можно записать, что $M \approx mgR$.

Оценим момент сил трения в оси маятника, полагая, что он не изменяется во время движения. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_2 и при последующем подъеме до отметки x_1 изменение потенциальной энергии груза в поле сил тяжести ΔW будет равно работе сил трения $A_{\text{тр}}$ в оси маятника.

Изменение потенциальной энергии ΔW груза равно разности энергии на уровнях x_1 и x_0 :

$$\Delta W = mgx_1 - mgx_0 = mg(x_1 - x_0). \quad (2.1.6)$$

Работа сил трения в оси маятника равна

$$A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \cdot \Phi, \quad (2.1.7)$$

где Φ — полный угол поворота маятника Обербека.

С учетом (2.1.6) и (2.1.7) имеем:

$$mg(x_1 - x_0) = M_{\text{тр}}\Phi. \quad (2.1.8)$$

Полный угол поворота маятника Обербека находим из соотношения:

$$R\Phi = (x_2 - x_0) + (x_2 - x_1). \quad (2.1.9)$$

С учетом (2.1.9) формулу (2.1.8) можно переписать в следующем виде:

$$M_{\text{тр}} = mgR \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}. \quad (2.1.10)$$

Таким образом, использование основного уравнения вращательного движения (2.1.1) для расчетов корректно при выполнении следующего условия

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)} \ll 1. \quad (2.1.11)$$

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис. 2.1.2) состоит из вертикальной *стойки* 1 с закрепленными на ней двумя подвижными *кронштейнами* 2 и 3, на которых крепятся оптические датчики положения. Кроме того, на стойке закреплены два неподвижных *кронштейна* 4 и 5.

На нижнем *кронштейне* 4 закреплен *вал* 6 с двумя шкивами радиусами R_1 и R_2 . На верхнем *кронштейне* 5 закреплен *блок* 7. Через блок перекинута нить, один конец которой намотан на двухступенчатый *вал* 6, а ко второму концу прикреплен *груз* 8. На двухступенчатом валу крепится *тело маятника* 9.

Кронштейны 2 и 3 с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на вертикальную *стойку* 1. Время движения грузов определяют с помощью электронного *таймера* 10. Начало работы *таймера* 10 осуществляется нажатием кнопки «Пуск», остановка — кнопкой «Стоп». При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

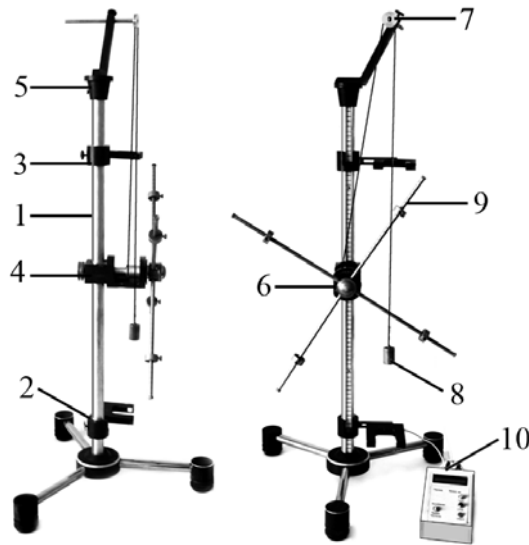


Рис. 2.1.2. Экспериментальная установка для изучения вращательного движения твердого тела.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка закона движения.

Как следует из (2.1.2) – (2.1.4), вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением ε . При этом груз m опускается (поднимается) с постоянным линейным ускорением a . Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0 , меняется по закону (ось X системы координат направлена вниз, см. рис. 2.1.1)

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (2.1.12)$$

Используя (2.1.12), определим время Δt пролета груза между двумя отметками, x_3 и x_4 :

$$t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0} \right). \quad (2.1.13)$$

Таким образом, при равнопеременном движении ($a = \text{const}$) и фиксированных положениях x_0 и x_4 зависимость времени t от

$\sqrt{x_3 - x_0}$ является линейной и изображается на графике прямой линией.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2 , результаты записать в рабочую тетрадь.
2. Установить кронштейны с фотодатчиками на максимальном расстоянии друг от друга.
3. Зафиксировать грузы m' в среднем положении на равном расстоянии от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия. Начальное положение x_0 груза массой $m = m_1^*$ всегда одно и то же, его необходимо записать в рабочий журнал. Нить наматывают на вал большего диаметра, виток к витку.
4. Отпустить груз и измерить время t пролета груза между фотодатчиками. Данные записать в табл. 2.1.1. Провести измерения времени t для нескольких положений x_3 верхнего датчика (рекомендуется менять x_3 с шагом 5 см). Для каждого положения датчика измерения времени проводят не менее $k = 3$ раз.
5. Для первых 5–7 опытов измерить значения x_1 — отметки, до которой поднимается груз при вращении маятника в одну сторону. Результаты занести в табл. 2.1.1.
6. Определить значение x_2 — отметки, до которой опускается груз при своем движении.

Таблица 2.1.1

Экспериментальные данные

k	x_3 , м	x_1 , м	$\sqrt{x_3 - x_0}$, м	t_i , с	$\bar{t}_i$, с	$S_{\bar{t}_i}$, с	$\bar{x}_1$, м	a , $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	S_a , $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1									
2									
3									
1									
2									
3									
...									

*) Масса груза m_1 указана на установке.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения верхнего фотодатчика x_3 вычислить среднее значение величины t_i по формуле

$$\bar{t}_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i,$$

где k — число измерений при каждом фиксированном положении датчика x_3 .

2. Вычислить погрешность измерения (выборочное стандартное отклонение) $\bar{t}_i$

$$S_{\bar{t}_i} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{t}_i)^2}.$$

Результаты пп. 1 и 2 записать в табл. 2.1.1.

3. В процессе измерений меняется величина x_3 , и при этом изменяется время t . Следовательно, измерения являются совместными, и для обработки результатов следует применить метод наименьших квадратов в рамках линейной модели $y = Az + B$ ($y = t$, $z = \sqrt{x_3 - x_0}$). По результатам расчета методом наименьших квадратов определить значения A и погрешности S_A и построить зависимость t от $\sqrt{x_3 - x_0}$.

4. Согласно (2.1.13), коэффициент A равен $\sqrt{2/a}$. Вычислить значение ускорения a и погрешность по формуле для косвенных измерений:

$$S_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2} \cdot S_A^2.$$

Результаты записать в табл. 2.1.1.

5. Как следует из формулы (2.1.5), момент инерции маятника равен

$$J = mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right).$$

Вычислить J и погрешность по формуле для косвенных измерений (считая, что g определено без погрешностей и равно $9,82 \text{ м/с}^2$):

$$S_J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m}\right)^2 \cdot S_m^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial R}\right)^2 \cdot S_R^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)^2 \cdot S_a^2}.$$

Результаты записать в табл. 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Вычисленные значения

$J,$ кг·м ²	$S_J,$ кг·м ²	$\xi = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}$	$M_{тр},$ Н·м	$S_{M_{тр}},$ Н·м

6. Вычислить среднее значение $\bar{x}_1$. Определить величину

$$\xi = \frac{x_1 - x_0}{2x_2 - (x_0 + x_1)}.$$

Результат записать в табл. 2.1.2. Убедиться, что $\xi \ll 1$, т. е. выполняется неравенство (2.1.11).

7. По формуле (2.1.10) вычислить момент сил трения $M_{тр}$ и погрешность $S_{M_{тр}}$ по формуле для косвенных измерений. Результаты записать в табл. 2.1.2.

Упражнение 2. Проверка независимости момента инерции маятника от момента внешних сил.

В данном упражнении экспериментально проверяется независимость инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил.

Согласно уравнению (2.1.1),

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (2.1.14)$$

Из уравнений (2.1.5) и (2.1.13) следует, что:

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (2.1.15)$$

В формулу (2.1.15) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Записать в табл. 2.1.3 координаты фотодатчиков (x_3, x_4) и значение x_0 .

2. Установить грузы m' в среднее положение, на равном расстоянии от оси, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

3. К концу нити, намотанной на шкив радиусом R_1 , прикрепить груз массой m и измерить время прохождения грузом расстояния между двумя фотодатчиками t . Измерение повторить $k = 3$ раза, результаты записать в табл. 2.1.3.

4. перебросив нить на другой шкив (радиусом R_2), измерить время t (3 раза). Результаты записать в табл. 2.1.3.

5. Аналогично провести измерения (пп. 3, 4) с грузом массой $m = m_2^*$. Результаты измерений занести в таблицу 2.1.3.

Таблица 2.1.3

Экспериментальные данные

$R_b, m_i,$ мм, Γ	k	$t_i,$ с	$\overline{t} \text{ ,}$ с	$S_{\overline{t}} \text{ ,}$ с	$x_0,$ м	$x_3,$ м	$x_4,$ м	$J_i,$ кг·м ²	$S_{J_i} \text{ ,}$ кг·м ²									
R_1, m_1	1																	
	2																	
	3																	
R_2, m_1	1																	
	2																	
	3																	
R_1, m_2	1																	
	2																	
	3																	
R_2, m_2	1																	
	2																	
	3																	

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения величин $\bar{t}$ и погрешности для четырех различных опытов. Результаты вычислений записать в табл. 2.1.3.

* Масса m_2 указана на установке.

2. По формуле (2.1.15) рассчитать значения момента инерции $J_1 \div J_4$.

3. Провести оценку погрешностей полученных результатов. Так как значения J_i получены как результаты косвенных измерений, то стандартное отклонение функции нескольких независимых переменных следует находить по формуле для косвенных измерений.

4. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 \div J_4$ (с учетом их погрешностей) на числовых осях (рис. 2.1.3). Если соответствующие интервалы перекрываются, то можно говорить о выполнении соотношения (2.1.14), т.е. о *независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил*.

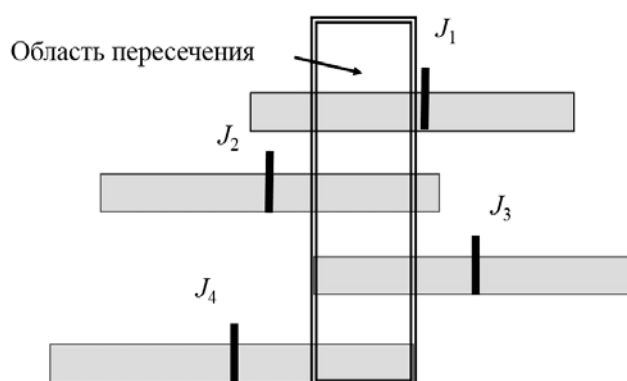


Рис. 2.1.3. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов.

Упражнение 3. Проверка выполнения теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Пусть J'_0 — суммарный момент инерции четырех грузов с массами m' относительно осей, проходящих через их центры масс. При удалении центров грузов от оси вращения на расстояние $l = l_1$ (см. рис. 2.1.1), момент инерции J'_1 , согласно теореме Гюйгенса – Штейнера, равен

$$J'_1 = J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.16)$$

Если J_0 — момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника равен

$$J_1 = J_0 + J'_0 + 4m'l_1^2. \quad (2.1.17)$$

Если удаление центров масс грузов от оси равно l_2 , то

$$J_2 = J_0 + J'_0 + 4m'l_2^2. \quad (2.1.18)$$

С учетом уравнений (2.1.15) и (2.1.17) квадрат времени прохождения груза между двумя отметками x_3 и x_4 равен

$$t^2 = \frac{2(\sqrt{x_4 - x_0} - \sqrt{x_3 - x_0})^2}{g} \left(1 + \frac{J_0 + J'_0}{mR^2} + \frac{4m'l^2}{mR^2} \right). \quad (2.1.19)$$

Таким образом, при выполнении теоремы Гюйгенса – Штейнера t^2 и l^2 должны быть связаны линейно. В данном упражнении исследуется эта зависимость.

Измерения

1. К свободному концу нити, намотанной на шкив большего радиуса R_2 , прикрепить груз наибольшей массы. Фотодатчики оставить в том же положении, что и в *упр. 2*.

2. Установить грузы m на минимальном расстоянии l от оси (соответствующее минимальному значению момента инерции маятника). Измерить расстояние от центров грузов до оси и записать его значение в табл. 2.1.4.

Таблица 2.1.4

Экспериментальные данные

$l, \text{ см}$	k	$t, \text{ с}$	$\overline{t}, \text{ с}$	$S_{\overline{t}}, \text{ с}$	$(\overline{t})^2, \text{ с}^2$	$S_{(\overline{t})^2}, \text{ с}^2$	$l^2, \text{ см}^2$	$S_{l^2}, \text{ см}^2$
	1							
	2							
	3							
	1							
	2							
	3							
...								

3. Отпустить груз m_1 и измерить время t прохождения груза между фотодатчиками. Измерения провести 3 раза. Результаты записать в табл. 2.1.4.

4. Отодвигая грузы m' от оси каждый раз на 3 см, измерить время t трижды. Результаты измерений и соответствующие

расстояния l от оси маятника до центров грузов записать в табл. 2.1.4.

Обработка результатов

1. Для каждого из положений грузов m' вычислить среднее арифметическое значение $\bar{t}$ времени прохождения груза m между оптическими датчиками

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}.$$

2. Для каждого из положений грузов m' вычислить случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}}.$$

3. Определить погрешность измерения l . Результаты вычислений пп. 1 - 3 записать в табл. 2.1.4.

4. Вычислить значения $(\bar{t})^2$, l^2 и $S_{(\bar{t})^2}$, S_{l^2} . Результаты записать в табл. 2.1.4.

5. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) обработать экспериментальную зависимость t^2 от l^2 и построить график $t^2(l^2)$. Если эта зависимость близка к линейной типа $y = Ax + B$ ($y = t^2$, $x = l^2$, $B = J_0$), то это свидетельствует о выполнении теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Основные итоги работы

В результате работы осуществляется экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов. Также проверяются соотношения (2.1.14) и линейная зависимость квадрата времени прохождения груза между метками от l^2 (2.1.19).

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений необходимо для описания движения твердого тела?

2. Как направлен вектор угловой скорости?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Что такое момент силы относительно оси?
4. Что такое момент импульса тела, системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно оси?
6. Теорема Гюйгенса – Штейнера.
7. Записать уравнение моментов относительно неподвижной оси.