

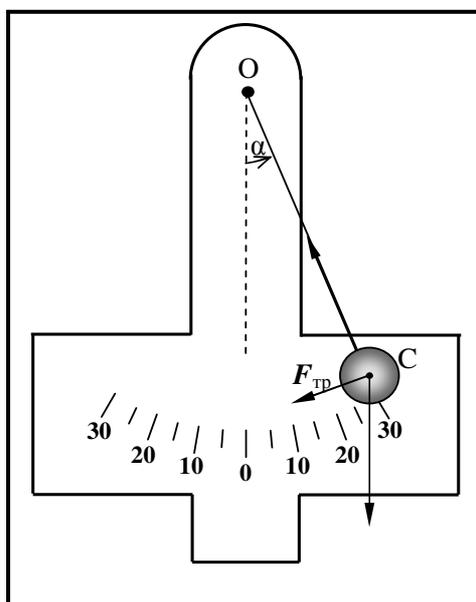


## Лабораторный практикум по физике

### Механика

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ И ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Никанорова Е.А., Салецкий А.М., Слепков А.И.



Москва - 2010

## Лабораторная работа 109

### Определение коэффициентов вязкого трения и трения качения

#### Цель работы

Целью работы является экспериментальное определение коэффициентов вязкого трения и трения качения при затухающих колебаниях.

#### Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в измерении изменения амплитуды колебаний маятника при наличии затухания, обусловленного вязким трением о воздух и трением качения при соприкосновении маятника с наклонной поверхностью.

#### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из металлического шарика, подвешенного на тонкой легкой нити и опирающегося на наклонную поверхность (см. рис. 1 и 2). Угол наклона плоскости  $\gamma$  (рис. 2) легко изменять с помощью винта, установленного справа или сзади на установке. Нить подвеса шарика параллельна наклонной плоскости и проходит через его центр (точка С на рис. 1 и 2).

При отклонении шарика от положения равновесия или сообщения ему начальной скорости шарик начинает совершать затухающие колебания, причем со

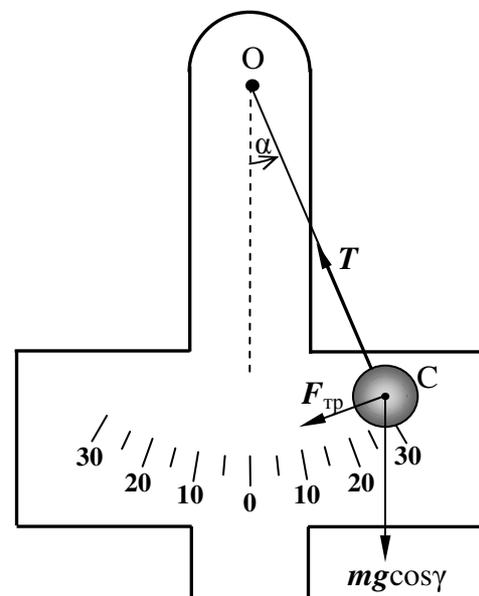


Рис. 1. Силы, действующие на шарик в плоскости колебаний маятника

стороны наклонной поверхности на него действует сила трения. По наклонной поверхности шарик при этом может катиться как с проскальзыванием, так и без проскальзывания.

В работе измеряется изменение угла отклонения нити маятника от положения равновесия  $\alpha$  (рис. 1), и, исходя из полученных значений угла, рассчитываются коэффициенты вязкого трения шарика о воздух и трения качения шарика о наклонную поверхность. На наклонной поверхности имеется паз, в который можно вставлять пластины из различных материалов: стекла, металла, резины, для которых проводятся измерения коэффициентов трения качения. При измерении коэффициента вязкого трения плоскость, по которой катится шарик маятника, устанавливается вертикально ( $\gamma=0$ ). В этом случае нет соприкосновения шарика с поверхностью, и затухание колебаний вызвано только сопротивлением воздуха.

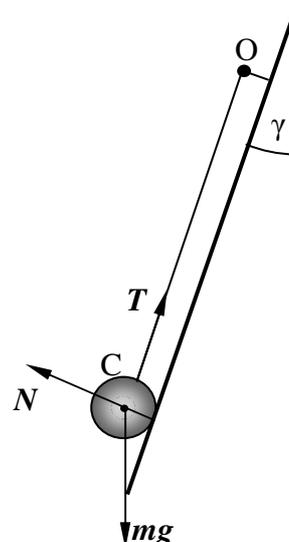


Рис. 2. Силы, действующие на шарик в вертикальной плоскости

## Теория

I. Рассмотрим вначале колебания маятника в отсутствие соприкосновения шарика с поверхностью. В этом случае плоскость колебаний, изображенная на рис. 1, является вертикальной ( $\gamma=0$ ). Шарик движется под действием трех сил: силы тяжести  $mg$ , силы натяжения нити  $T$  и силы вязкого трения о воздух:

$$F_{\text{тр}} = -\beta v. \quad (1)$$

Здесь  $v = \alpha l$  – скорость центра масс шарика,  $\beta$  – коэффициент вязкого трения,  $l$  – расстояние от центра шарика до точки подвеса.

Уравнение моментов для маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний, имеет вид:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha - \beta l^2 \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции шарика относительно указанной оси.

Поскольку шарик подвешен на нити, длина которой существенно превышает его линейные размеры, то при расчете момента инерции относительно указанной оси его можно считать материальной точкой:

$$J = ml^2. \quad (3)$$

Учитывая, что при малых колебаниях  $\sin \alpha \approx \alpha$ , преобразуем уравнение (2) к виду:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\delta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (4)$$

При записи уравнения (4) введены обозначения:

$$\delta = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться подстановкой, что решением уравнения (4) является функция

$$\alpha(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – частота затухающих колебаний,  $A_0$  – амплитуда колебаний в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний, определяющаяся начальными условиями.

При затухающих колебаниях амплитуда убывает во времени по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t). \quad (7)$$

Измеряя изменение амплитуды колебаний за время  $t$ , можно рассчитать в соответствии с формулой (7) коэффициент вязкого трения шарика о воздух:

$$\beta = \frac{2m}{t} \ln \frac{A_0}{A}. \quad (8)$$

II. В случае, когда колебания маятника сопровождаются качением по наклонной поверхности, движение шарика можно представить как суперпозицию

колебательного движения центра масс относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$  (рис. 1) перпендикулярно плоскости колебаний, и вращения вокруг оси  $OC$ , проходящей через центр масс шарика  $C$  и лежащей в плоскости колебаний маятника (рис. 2).

При качении шарика по наклонной поверхности возникают неупругие деформации. Следовательно, сила реакции поверхности  $R$ , приложенная к шарикау оказывается смещенной в сторону движения центра масс (рис. 3).

Разложим силу реакции  $R$  на две составляющие – нормальную к недеформированной поверхности  $N$  и тангенциальную  $R_\tau$ .

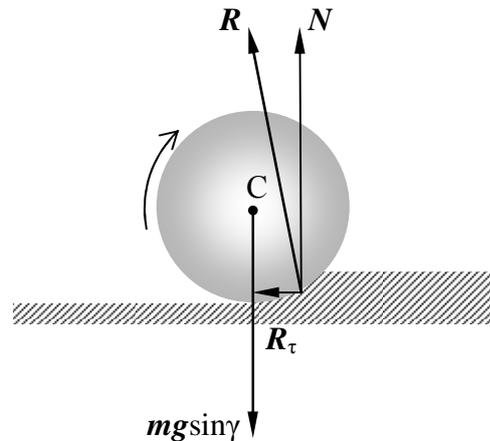


Рис. 3. Силы, действующие на шарик в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний маятника

Уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника запишем аналогично уравнению (2), в которое теперь вместо силы вязкого трения входит тангенциальная составляющая силы реакции поверхности  $R_\tau$  (см. рис. 1). Силой вязкого трения о воздух в этом случае можно пренебречь, поскольку (как будет показано в эксперименте) она существенно меньше  $R_\tau$ . Если наклонная плоскость составляет угол  $\gamma$  с вертикалью, то проекция силы тяжести на плоскость колебаний равна  $mg \cos \gamma$ . Уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \cos \gamma l \sin \alpha - R_\tau l. \quad (9)$$

Запишем также второй закон Ньютона для центра масс шарика в проекции на направление, перпендикулярное плоскости колебаний:

$$0 = N - mg \sin \gamma. \quad (10)$$

Поворот шарика вокруг оси ОС при качении без проскальзывания по наклонной поверхности будем описывать углом  $\varphi$ . Уравнение моментов для шарика относительно указанной оси запишем в виде:

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R_\tau r - Nk, \quad (11)$$

где  $r$  – радиус шарика,  $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$  – момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр масс,  $k$  – плечо силы нормальной реакции опоры относительно оси ОС. При записи уравнения (11) учтено, что плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры  $R_\tau$  не сильно отличается от радиуса шара при малых остаточных деформациях.

Коэффициентом трения качения называется плечо  $k$  смещенной силы нормальной реакции опоры при неупругих деформациях. В отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения, коэффициент трения качения – величина, измеряющаяся в единицах длины.

При движении шарика без проскальзывания скорость точки его соприкосновения с наклонной поверхностью равна нулю и, в силу принципа суперпозиции движений, складывается из скорости центра масс  $v_0 = \frac{d\alpha}{dt}l$  и скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс  $v_{\text{вр}} = \frac{d\varphi}{dt}r$ . Следовательно, уравнения кинематической связи в отсутствие проскальзывания имеют вид:

$$\frac{d\alpha}{dt}l = \frac{d\varphi}{dt}r, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2}l = \frac{d^2\varphi}{dt^2}r. \quad (12)$$

Исключая из системы уравнений (9) – (12) величины  $N$ ,  $F_{\text{тр}}$ , и  $\alpha$  и учитывая малость углов ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ ), получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла  $\varphi$ :

$$\frac{7}{5}mr^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{r^2}{l}mg \cos \gamma \varphi \pm M_{\text{тр}}, \quad (13)$$

где  $M_{\text{тр}} = kmg \sin \gamma$  – момент трения качения, в качестве которого выступает момент смещенной силы нормальной реакции опоры при

неупругих деформациях. Знак момента силы нормальной реакции опоры (момента трения качения) меняет знак дважды за период одновременно с изменением направления скорости центра масс шара, при этом модуль момента трения качения остается неизменным.

Уравнение (13) является уравнением колебаний шарика, на который в процессе движения кроме момента силы, возвращающего в положение равновесия и линейно зависящего от угла отклонения, действует постоянный по модулю момент трения качения. Постоянная сила (момент сил), как известно, не изменяет частоты колебаний, а только смещает положение равновесия. Уравнение (13) аналогично уравнению колебаний при наличии силы трения скольжения. В этом случае затухание колебаний возникает за счет изменения положения равновесия, то есть начальное смещение маятника от положения равновесия к началу следующего полупериода (определяющее амплитуду колебаний на полпериода) становится меньше, чем в предыдущем.

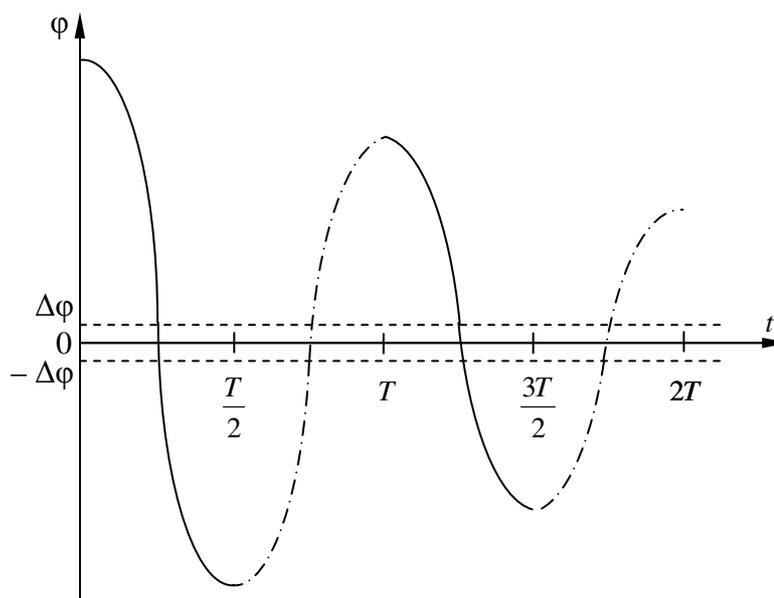


Рис. 4

На рис. 4, представлена временная зависимость углового смещения шарика от положения равновесия  $\phi(t)$  при наличии момента трения качения. В начальный момент времени  $t = 0$  маятник был максимально отклонен от положения равновесия, смещенного на  $\Delta\phi$  относительно нуля. Сплошной кривой изображен график  $\phi(t)$  в течение первой половины

периода. В момент времени  $t = \frac{T}{2}$  направление скорости шарика изменяет знак, а, следовательно, изменяется и знак момента смещенной за счет неупругих деформаций нормальной силы реакции опоры (момента трения качения), что приводит к смещению положения равновесия на  $-\Delta\varphi$ . Штрихпунктирной кривой на рис. 4 изображен график  $\varphi(t)$  в течение второй половины периода.

Уравнение (13) можно записать в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2(\varphi \pm \Delta\varphi) = 0. \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g \cos \gamma}{7l}}, \quad (15)$$

$$\Delta\varphi = \frac{kl}{r^2} \operatorname{tg} \gamma. \quad (16)$$

Величина  $\Delta\varphi$  определяет смещение положение равновесия дважды за период, при этом за период колебаний амплитуда уменьшается на  $4\Delta\varphi$  (см. рис. 4). Используя уравнение кинематической связи (12), получаем выражение для изменения угловой амплитуды колебаний маятника за период:

$$\Delta\alpha = \frac{4k}{r} \operatorname{tg} \gamma. \quad (17)$$

Измеряя изменение угловой амплитуды  $\Delta\alpha_n$  или амплитуды линейного смещения центра масс за  $n$  периодов  $\Delta x_n$ , можно рассчитать коэффициент трения качения по формуле:

$$k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\Delta x_n r}{4nl} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (19)$$

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Определение коэффициента вязкого трения

В первом упражнении следует определить коэффициент вязкого трения шарика о воздух при колебаниях маятника в вертикальной плоскости. Для этого поворачивают винт, устанавливая значение угла  $\gamma = 0$ . Если после установки вертикального положения шарик при колебаниях касается плоскости, необходимо выдвинуть пластину, для которой во втором упражнении производится измерение коэффициента трения качения.

Затем отклоняют маятник на небольшой угол, при этом начальное линейное смещение центра масс должно составлять 2 – 2,5 см. С помощью таймера измеряют время, за которое амплитуда колебаний уменьшится на 1 см. Линейные размеры маятника и масса шарика указаны на установке. Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения амплитуд колебаний маятника и время колебаний в таблицу 1.

Если сразу после запуска системы наблюдаются высокочастотные колебания в виде дрожания шарика, то следует возбуждать колебания с амплитудой несколько большей, чем выбранная для расчета. При этом включение таймера произвести в тот момент, когда амплитуда станет равной заданной для расчета. К этому моменту времени высокочастотные колебания должны полностью затухнуть.

После проведения измерений следует рассчитать по формуле (8) коэффициент вязкого трения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

**Таблица 1**

№	$A_0$	$\sigma_{A_0}$	$A$	$\langle A \rangle$	$\sigma_A$	$t$	$\langle t \rangle$	$\sigma_t$	$\beta$	$\sigma_\beta$
1										
2										
3										

## Упражнение 2. Определение коэффициента трения качения

Во втором упражнении следует определить коэффициенты трения качения для различных пластин, входящих в комплект установки.

В паз вставляют одну из пластин – металлическую, стеклянную или резиновую. Угол отклонения плоскости пластины от вертикали устанавливается равным  $\gamma = 5^\circ$  с помощью винта, находящегося справа или сзади на установке.

Для покоящегося шарика положение нити маятника должно соответствовать нулевому значению на шкале отсчета угла отклонения маятника.

При выполнении второго упражнения следует обращать внимание на правильный выбор начального отклонения маятника при заданном угле наклона – шарик должен катиться по пластине без проскальзывания (в первую очередь это относится к наивысшим точкам траектории шарика).

Далее измеряют с помощью таймера число  $n$  периодов колебаний маятника, за которые угловая амплитуда колебаний уменьшится на  $\Delta\alpha_n$  (или линейная – на  $\Delta x_n$ ). Измерения следует повторить не менее трех раз и занести значения измеренных величин в таблицу 2. Радиус шарика определяют с помощью штангенциркуля или используют значение, указанное на установке. С помощью формулы (19) следует рассчитать коэффициент трения качения и оценить погрешности эксперимента, используя для расчетов формулы, приведенные после описания упражнений в разделе «Оценка погрешностей эксперимента».

**Таблица 2**

Пластина № 1									
№	$\gamma$	$\sigma_\gamma$	$\Delta\alpha_n$ ( $\Delta x_n$ )	$\sigma_{\Delta\alpha}$ ( $\sigma_{\Delta x}$ )	$n$	$\langle n \rangle$	$\sigma_n$	$k$	$\sigma_k$
1									
2									
3									

Далее устанавливают угол наклона плоскости пластины, равным  $\gamma = 10^\circ$ . И повторяют измерения.

Затем следует заменить пластину на другую, входящую в комплект установки, и провести измерение коэффициента трения качения для двух углов наклона плоскости пластины.

После проведения всех расчетов необходимо проанализировать полученные в первом и втором упражнениях результаты, оценить, можно ли было во втором упражнении пренебрегать вязким трением, сформулировать краткие выводы и записать их в тетради.

### **Приложение. Оценка погрешностей эксперимента. Основные формулы.**

Измеряемые в данной задаче физические величины – коэффициенты вязкого трения и трения качения, являются функциями нескольких прямо измеряемых величин. Погрешность для коэффициентов трения следует оценивать по формулам для косвенных измерений.

Выборочное стандартное отклонение  $S_k$  случайных ошибок для коэффициента трения определяется выражением:

$$S_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a} S_a\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b} S_b\right)^2}, \quad (20)$$

где  $k$  – коэффициент трения (вязкого трения или трения качения),  $a$  и  $b$  – прямо измеренные величины (время, амплитуда колебаний, число периодов и т.д.)

В качестве оценки случайной погрешности прямо измеренной величины  $a$  принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n, \quad (21)$$

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (a_n - \langle a \rangle)^2}. \quad (22)$$

Если величина  $a$  или  $b$  измеряется однократно, то случайная погрешность принимается равной нулю.

Стандартное отклонение систематических ошибок рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{сист}k} = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial a} \sigma_{\text{сист}a}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial b} \sigma_{\text{сист}b}\right)^2}. \quad (23)$$

В предположении о независимости случайных и систематических погрешностей для величины стандартного отклонения суммарной погрешности справедлива формула:

$$\sigma_k = \sqrt{S_k^2 + \sigma_{\text{сист}k}^2}. \quad (24)$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое сила трения?
2. Какие силы трения вам известны?
3. Причины возникновения сил трения покоя и скольжения.
4. Причины возникновения трения качения.
5. Чему равна сила вязкого трения?
6. Чему равен коэффициент трения качения?

### Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004.
3. С. П. Стрелков. Механика. – СПб.: «Лань», 2005.
4. Д. В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005.
5. С. Э. Хайкин. Физические основы механики. – СПб.: «Лань», 2008.
6. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.