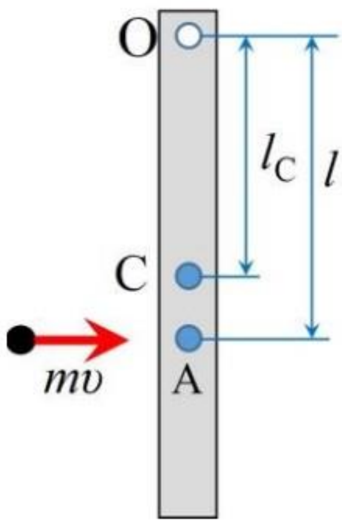
Лабораторный практикум
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Задача № 103

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА



МОСКВА 2023

Лабораторная работа №103

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы Использование законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии для решения практических задач механики.

Идея эксперимента Определение скорости пули по реакции мишени (баллистического маятника).

Теоретическое введение

Законы сохранения в механике. В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии − являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из этих законов.

Для определенности введем понятия *изолированной* и *замкнутой* систем тел.

Замкнутой называется такая система тел, для которой суммарное действие всех внешних сил равно нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса. Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным:

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = const \ , \qquad (1)$$

где m_i –масса i-материальной точки, $\mathbf{v}_i$ - вектор ее скорости.

Закон сохранения момента импульса. Суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю:

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = const \ , \qquad (2)$$

Закон сохранения механической энергии. Механическая энергия системы тел сохраняется неизменной, если суммарная работа всех внешних сил и сил трения внутри системы равна нулю.

Столкновение тел.

Удар (*соударение*) – кратковременное взаимодействие двух тел, вызванное непосредственным соприкосновением, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором суммарная кинетическая энергия тел до соударения равна суммарной кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором тела после соударения движутся с одинаковой скоростью. При таком ударе механическая энергия не сохраняется (переходит в другие формы, например, в тепло).

Теоретическое рассмотрение физических процессов при взаимодействии «пуля – твердое тело».

Если тело, закрепленное на оси вращения, испытывает удар, то действие удара в общем случае передается и на ось. При этом величина и направление силы $\boldsymbol{F}_{ось}$, приложенной к оси, зависят от того, в какую точку тела нанесен удар.

Центром удара называется точка тела, имеющего неподвижную ось вращения, обладающая тем свойством, что удар, направленный в эту точку перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела, не передается на ось и не оказывает ударных воздействий на подшипники, в которых эта ось закреплена. Центр удара всегда существует у тела, имеющего плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

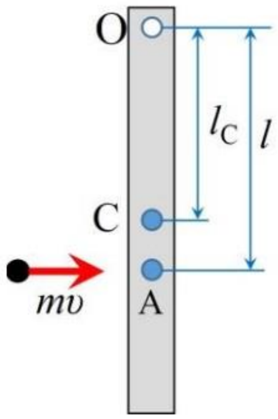


Рис. 1. Твердое тело и пуля перед соударением

Определим положение центра удара. На рис. 1 схематично изображено произвольное твердое тело массой M, центр масс которого находится в точке С, а неподвижная ось вращения проходит через точку О перпендикулярно плоскости чертежа. Соударение небольшого тела (пули) массой m с твердым телом происходит в точке А (см. рис. 1). Направление скорости пули $\boldsymbol{\upsilon}$ перед соударением перпендикулярно прямой ОС. В этом случае в момент удара на тело подействует сила $\boldsymbol{F}$, направленная так же, как и $\boldsymbol{\upsilon}$. Кроме этого, возникнет и сила (- $\boldsymbol{F}_{ось}$), действующая на тело со стороны оси. Дальнейшее рассмотрение справедливо как для случая абсолютно упругого удара, так и в случае неупругого соударения.

Запишем для тела уравнение моментов относительно оси вращения О (в проекции на ось):

$$J\frac{d\omega}{dt} = F \cdot l\,, \tag{3}$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ω - угловая скорость вращения тела; l – расстояние от оси вращения до точки удара А. Заметим, что независимо от точки удара момент силы (- $\boldsymbol{F}_{ось}$), действующий на тело со стороны оси, равен нулю.

Если точка А является центром удара, то $\boldsymbol{F}_{ось}$=0. В этом случае теорема о движении центра масс тела (в проекции на горизонтальную ось) запишется в виде

$$M\frac{d\upsilon_C}{dt} = F\,, \tag{4}$$

где M – масса тела; υ_C - скорость центра масс тела.

Для абсолютно твердого тела уравнение кинематической связи имеет вид:

$$\upsilon_C = \omega \cdot l_C , \tag{5}$$

где l_C – расстояние от оси вращения до центра масс тела.

Разделим (3) на (4), и с учетом (5) получим, что центр удара располагается на расстоянии

$$l = \frac{J}{Ml_C} \tag{6}$$

от оси вращения.

В соответствии с теоремой Гюйгенса –Штейнера

$$J = J_0 + Ml_C^2$$

где J_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

В итоге получим

$$l = l_C + \frac{J_0}{Ml_C}, \tag{7}$$

т.е. центр удара располагается дальше от оси вращения, чем центр масс.

В настоящей задаче размеры тела $l_{\text{тело}}$ существенно меньше длины нитей. Можно также утверждать, что момент инерции J_0 тела не превосходит $Ml_{\text{тело}}^2$. Тогда можно записать

$$l - l_C < \frac{Ml_{\text{тело}}^2}{Ml_C} = \frac{l_{\text{тело}}^2}{l_C} << l_{\text{тело}} .$$

В этом случае центр удара практически совпадает с центром масс тела. Можно считать, что при выстреле, направленном в центр масс тела, никаких усилий в оси не возникает ($\boldsymbol{F_{ось}}$=0), и для системы «пуля+тело» можно применить закон сохранения импульса.

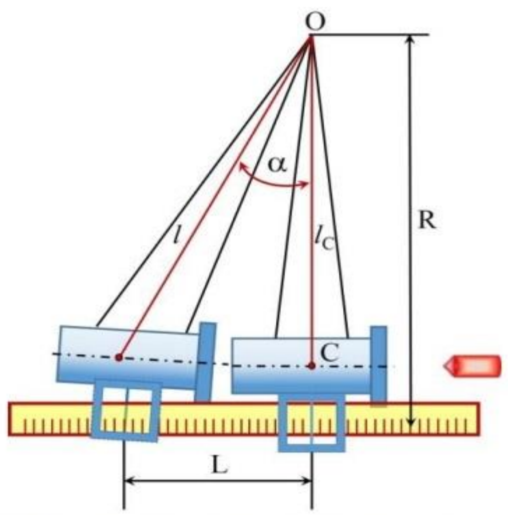


Рис. 2. Схематичное изображение баллистического маятника.

Схема баллистического маятника показана на рис. 2. Баллистический маятник представляет собой тяжелое тело, подвешенное на четырех длинных нитях.

Рассмотрим движение маятника в рамках следующих предположений.

• Движение пули и тела маятника происходит в одной (вертикальной) плоскости. Точкой О обозначена горизонтальная ось, вокруг которой происходит движение маятника. Точка С – центр масс тела маятника, имеющего цилиндрическую форму. С одной стороны цилиндр «заглушен» пластиной с пластилином.

• Пуля застревает в теле маятника таким образом, что ее центр масс находится на прямой ОС.

• Размеры пули будем считать малыми.

• Время действия пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебаний маятника.

• Ударными силами натяжения нитей будем пренебрегать.

Первоначальная скорость пули может быть определена по углу отклонения баллистического маятника от положения равновесия после соударения.

Рассмотрим абсолютно неупругое соударение пули и баллистического маятника в рамках выбранной модели. Как отмечалось выше, на этой стадии выполняется закон сохранения импульса для системы тел «пуля + маятник» на интервале времени от момента перед соударением до момента сразу после соударения (в проекции на горизонтальную ось):

$$m\upsilon = (M + m)\upsilon' \tag{8}$$

Здесь υ — скорость пули перед соударением, υ' — скорость центра масс маятника сразу после абсолютно неупругого соударения.

Затем тело маятника с застрявшей пулей начинает двигаться по дуге окружности, чуть поднимаясь вверх. Так как сила натяжения нити, являющаяся внешней силой, при этом не совершает работы, то для указанной системы тел на интервале времени от момента сразу после соударения до момента максимального отклонения маятника справедлив закон сохранения механической энергии:

$$\frac{(M + m)\upsilon'^2}{2} = (M + m)gl_C(1 - \cos\alpha) \tag{9}$$

Здесь α — угол максимального отклонения маятника.

Соотношение (9) справедливо в пренебрежении затуханием колебаний маятника в пределах одной четверти периода его колебаний.

Исключая из системы уравнений (8) и (9) скорость υ', получаем связь скорости пули до соударения и угла максимального отклонения маятника:

$$\upsilon = \frac{M + m}{m}\sqrt{gl_C} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \tag{10}$$

Так как длина нитей маятника намного превосходит его смещение по горизонтали, угол α мал и

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{R},$$

где L - смещение маятника по горизонтали (измеряется по шкале), R – расстояние от оси маятника до измерительной шкалы (рис. 2).

В результате формула (10) принимает следующий вид

$$\upsilon = \frac{M + m}{m}\sqrt{gl_C} \cdot \frac{L}{R} \tag{11}$$

Формула (11) используется в дальнейшем для расчета скорости пули.

Экспериментальная установка

Установка состоит из баллистического маятника 1, шкалы 2 для отсчета отклонения маятника, пружинной пушки 3, набора пуль (снарядов) 4 (рис. 3). Баллистический маятник — цилиндр, частично заполненный пластилином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и легких нитях 5 (рис. 3). Масса цилиндра с пластилином равна M. В маятник в горизонтальном направлении стреляют из пружинной пушки 3 пулей, имеющей массу m. Пуля входит в пластилин и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется на небольшой угол, который может быть измерен с помощью шкалы 2.

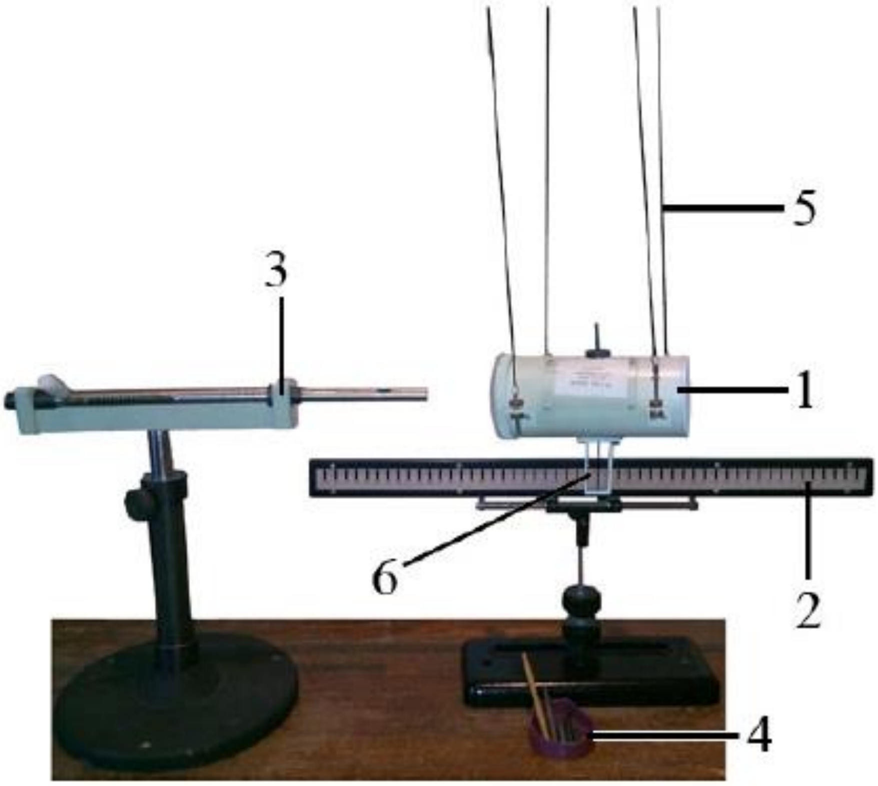


Рис. 3. Экспериментальная установка

Шкалу 2, предназначенную для определения отклонения маятника, устанавливают параллельно отсчетной рамке 6 маятника, на расстоянии примерно 5–6 мм от нее.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение скорости пуль

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что ось цилиндра в положении равновесия горизонтальна, а вертикальная плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии. Если эти условия не выполнены, то необходимо подрегулировать длину нитей.

Для того, чтобы подготовить пистолет к выстрелу, отводят затвор назад в крайнее положение, сжимая расположенную внутри пружину, и приподнимают вверх курок затвора. Придерживая затвор, аккуратно вставляют пулю в дуло пистолета и **задвигают ее шомполом до упора**. Устанавливают пистолет так, чтобы пуля после вылета из пистолета попадала в центр маятника, и производят выстрел, для чего курок опускают вертикально вниз. Отклонение маятника определяют по шкале. Если после выстрела возникают колебания тела маятника вокруг вертикальной оси, выстрел следует повторить.

Измерения (результаты заносятся в табл.1)

1. Определить взвешиванием на электронных весах массы всех пяти пуль, используемых в задаче, погрешность считать равной единице последнего разряда шкалы.
2. Записать в тетрадь указанные на установке ее параметры (масса маятника M, расстояние от оси до центра масс l_C). Измерить и рассчитать расстояние R до измерительной шкалы.
3. Произвести по 5 выстрелов каждой из пуль по методике, изложенной выше. Измерить отклонения маятника в каждом случае.
4. Провести дополнительные измерения, изменив способ зарядки пистолета. Вставить пулю в дуло пистолета до упора, **не отводя затвора**. Затем аккуратно взвести затвор и на небольшое (около 1 см) расстояние переместите пулю вглубь ствола. В результате при выстреле пружина будет разгонять только затвор, который ударит по пуле в самом конце разгона. После удара пуля вылетит из ствола с (большей? меньшей?) скоростью, чем ранее.

Произвести по 5 выстрелов каждой из трех пуль (малой, средней и большой масс), измеряя отклонения маятника.

Табл.1. *Результаты измерений*

$M\pm\sigma_m$ = (г)			$l_C \pm\sigma_l$ = (см)		$R \pm\sigma_R$ = (см)	
№	Масса пули $m\pm\sigma_m$ (г)	L_1 (см)	L_2 (см)	L_3 (см)	L_4 (см)	L_5 (см)
1						
2						
3						
4						
5						
Дополнительные измерения						
1						
2						
3						

Обработка результатов (результаты заносятся в табл.2):

1. Для каждой пули вычислить среднее значение $\overline{L}$ отклонения маятника

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \,; \qquad (12)$$

где n - число измерений.

2. Рассчитать выборочное стандартное отклонение $S_{\overline{L}}$ среднего арифметического величины L, являющееся оценкой случайной погрешности:

$$S_{\overline{L}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(L_i - \overline{L}\right)^2} \,. \qquad (13)$$

Оценить величину суммарной погрешности σ_S:

$$\sigma_L = \sqrt{S_{\overline{L}}^2 + \sigma_{L,сист}^2} \;; \qquad (14)$$

где $\sigma_{L,сист}$ - систематическая ошибка измерений, определяемая погрешностью прибора и погрешностью округления. В данной задаче измерения проводятся с помощью обычной линейки, систематическую погрешность которой будем считать равной половине цены деления.

Табл.2. *Результаты обработки Упр.1*

№	Масса пули $m \pm \sigma_m$ (г)	$\overline{L}$ (см)	σ_L (см)	υ (м/с)	σ_υ (м/с)	$1/\upsilon^2$ ($с^2/м^2$)	σ_{1/υ^2} ($с^2/м^2$)
1							
2							
3							
4							
5							
Дополнительные измерения							
1							
2							
3							

3. Вычислить скорость υ полета каждой пули по формуле (11) и занести в таблицу 2. Расчеты скорости провести и для дополнительных измерений.

4. Оценить погрешность σ_υ скорости полета каждой из пуль по формуле оценки погрешности результата косвенных измерений:

$$\sigma_\upsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)^2 \cdot \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial m}\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial R}\right)^2 \cdot \sigma_R^2}$$

(погрешности параметров установки указаны на маятнике).

Упражнение 2. Оценка потенциальной энергии сжатой пружины и исследование зависимости скорости пули от ее массы.

В данном упражнении измерения не проводятся. В п.1-3 обрабатываются результаты только основной серии измерений.

Формула (11), полученная для расчета скорости пули, не определяет явную зависимость скорости пули от ее массы, поскольку величина горизонтального смещения маятника также зависит от массы пули.

Пуля приобретает скорость в результате выстрела из пружинного пистолета. Можно заметить, что при этом в движение приходит и довольно массивный затвор, который используется для сжатия пружины. Поэтому при выстреле потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули, пружин и затвора. Если пренебречь потерями энергии в результате действия силы трения, то можно записать закон сохранения механической энергии:

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m_0\upsilon^2}{2} \;; \tag{15}$$

где $\frac{k(\Delta l)^2}{2} = E_{пот}$ - потенциальная энергия сжатой пружины; m_0 - масса затвора, массой пружины в данном случае можно пренебречь. На стадии разгона пуля и затвор движутся вместе[1], т.е. их скорости одинаковы. Преобразуем формулу (15) к следующему виду:

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \frac{m + m_0}{2E_{пот}} = \frac{1}{2E_{пот}} \cdot m + \frac{m_0}{2E_{пот}} \;. \tag{16}$$

Как видно из (16), зависимость величины $\frac{1}{\upsilon^2}$ от массы пули m является линейной:

$$\frac{1}{\upsilon^2} = A \cdot m + B \;, \tag{17}$$

где параметры $A = \frac{1}{2E_{пот}}$; $B = \frac{m_0}{2E_{пот}} = A \cdot m_0$.

1. Рассчитать по результатам измерений Упр.1 для каждой пули значения величины $\frac{1}{\upsilon^2}$ и оценить погрешность. Результаты записать в Табл. 2.

---

[1] Данное утверждение справедливо для серии основных измерений, при дополнительных измерениях первоначально разгоняется только затвор.

2. Построить график зависимости $\frac{1}{\upsilon^2}$ от массы пули m. Используя метод наименьших квадратов (МНК) для линейной модели (17)[2], найти оценки параметров A и B и их погрешностей σ_A и σ_B. Результаты записать в Табл. 3.

Табл.3. *Результаты обработки Упр.2*

$A \pm \sigma_A =$	(Дж$^{-1}$)	$B \pm \sigma_B =$	(с^2/м^2)
$E_{пот} \pm \sigma_{Eпот} =$	(Дж)	$m_0 \pm \sigma_{m0} =$	(г)

3. По найденному значению коэффициента A и погрешности σ_A рассчитать потенциальную энергию пружины $E_{пот} = \frac{1}{2A}$ и оценить (по формуле косвенной погрешности) погрешность $\sigma_{Eпот}$. По найденному значению коэффициента B и погрешности σ_B рассчитать массу затвора $m_0 = \frac{B}{A}$ и оценить по (формуле косвенной погрешности) погрешность σ_{m0}.

4. Для каждой пули рассчитать ее кинетическую энергию $E_{кин} = \frac{m\upsilon^2}{2}$ в момент вылета пули из пистолета и оценить погрешность $\sigma_{Eкин}$. Расчеты провести как для основной, так и дополнительной серий измерений. Сравнивая полученные значения с потенциальной энергией $E_{пот}$ пружины, рассчитать КПД пистолета. Результаты записать в Табл. 4.

5. Построить график зависимости КПД пистолета от массы пули (для обеих серий измерений). Объяснить получившийся результат.

Табл.4. *Результаты расчета энергии и КПД*

№	Масса пули $m \pm \sigma_m$ (г)	$E_{кин} \pm \sigma_{Eкин}$ (Дж)	КПД	
1				
2				
3				
4				
5				
Дополнительные измерения				

[2] Для применения МНК использовать формулы из пособия [4] или воспользоваться программой обработки экспериментальных данных МНК на сайте кафедры общей физики по адресу: http://genphys.phys.msu.ru/rus/ofp/.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены скорости и кинетические энергии нескольких пуль с разной массой, потенциальная энергия пружины.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Что такое момент импульса относительно точки?
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
5. Определите положение центра удара в предположении, что тело маятника представляет собой сплошной цилиндр, масса которого в 100 раз больше массы пули.
6. Сколько законов сохранения использовано для вывода формулы (112)? Перечислите их.

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – . Гл. 6.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – Лекция 4.
3. И.Е. Иродов. Основные законы механики. – М. Высшая школа, 1997. – . Гл. 4, 5, 6.
4. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.