Лабораторная работа №103

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Использование законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии для решения практических задач механики.

Идея эксперимента

Определение скорости пули по реакции мишени (баллистического маятника).

Теоретическое введение

Законы сохранения в механике. В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из этих законов.

Для определенности введем понятия ***изолированной*** и ***замкнутой*** систем тел.

Замкнутой называется такая система тел для которой суммарное действие всех внешних сил равно нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса. *Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным*:

$$\sum m_i \boldsymbol{\upsilon}_i = \mathrm{const}\,, \qquad (1)$$

где m_i –масса i-материальной точки, $\boldsymbol{\upsilon}_i$ – вектор ее скорости.

Закон сохранения момента импульса. ***Суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю:***

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\upsilon}_i = \mathrm{const}\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й материальной точки.

Закон сохранения механической энергии. Если на материальную точку, имеющую массу m, в каждой точке пространства действует сила, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}U, \tag{3}$$

то наряду с кинетической энергией $m\upsilon^2/2$ можно ввести потенциальную энергию U, при этом для материальной точки будет сохраняться полная энергия $E = m\upsilon^2/2+U$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}U(\mathbf{r}) \tag{4}$$

Умножим левую и правую части уравнения (4) на $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$ и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\upsilon_2^2}{2} - \frac{\upsilon_1^2}{2} \tag{5}$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{grad}U\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} \mathrm{d}U = U(r_2) - U(r_1), \tag{6}$$

получим:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} + U(\mathbf{r}_2) = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + U(\mathbf{r}_1). \tag{7}$$

Соотношение (7) выражает закон сохранения механической энергии.

Столкновение тел.

Удар (*соударение*) – кратковременное взаимодействие двух тел, вызванное при непосредственным соприкосновением, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором кинетическая энергия тел до соударения равна кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором тела после соударения движутся с одинаковой скоростью. При таком ударе механическая энергия не сохраняется (переходит в другие формы, например, в тепло).

Теоретическое рассмотрение физических процессов при взаимодействии «пуля – твердое тело».

Центром удара называется точка тела, имеющего неподвижную ось вращения, обладающая тем свойством, что удар, направленный в эту точку перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела, не передается на ось и не оказывает ударных воздействий на подшипники, в которых эта ось закреплена.

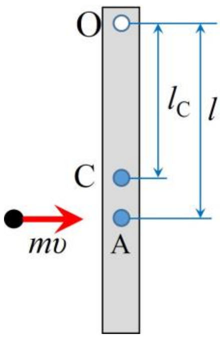


Рис. 1. Твердое тело и пуля перед соударением.

Центр удара всегда существует у тела, имеющего плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

Определим далее положение центра удара. На рис. 1 схематично изображено произвольное твердое тело массой M, центр масс которого находится в точке С, а неподвижная ось вращения проходит через точку О перпендикулярно плоскости чертежа. Соударение небольшого тела (пули) массой m с твердым телом происходит в точке А (см. рис. 1). Направление скорости пули $\boldsymbol{v}$ перед соударением направлено перпендикулярно прямой ОС. Дальнейшее рассмотрение справедливо как для случая абсолютно упругого удара, так и в случае неупругого соударения.

Если точка А является центром удара, то выполняется закон сохранения импульса для системы тело + пуля на интервале времени до удара – сразу после удара. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление первоначального движения пули:

$$mv = Mv_C + mv' . \qquad (8)$$

Здесь v_C и v' – скорости центра масс тела (точки С) и пули сразу после соударения. В случае абсолютно неупругого удара скорость пули после соударения v' совпадает со скоростью точки А тела (см. рис. 1).

Запишем также закон сохранения момента импульса относительно оси, проходящей через центр масс тела, для указанной системы тел на указанном интервале времени:

$$mvl_{\text{A}} = J_0\omega + mv'l_{\text{A}}. \qquad (9)$$

Здесь J_0 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, ω — угловая скорость вращения тела, $l_{\text{A}} = l - l_{\text{C}}$ – расстояние от центра удара до центра масс.

Уравнение кинематической связи для скорости центра масс и угловой скорости вращения тела имеет вид:

$$v_C = \omega l_{\text{C}}. \qquad (10)$$

Подставляя выражение (8) в (9), получаем:

$$(Mv_C + mv')l_{\text{A}} = J_0\omega + mv'l_{\text{A}}. \qquad (11)$$

Используя кинематическую связь (10) преобразуем соотношение (11) к виду:

$$l_{\text{A}} = \frac{J_0}{Ml_C}. \qquad (12)$$

Расстояние между центром удара и точкой подвеса равно

$$l_{\text{A}} + l_C = \frac{J_0}{Ml_C} + l_C = \frac{J_0 + Ml_C^2}{Ml_C}. \qquad (13)$$

В соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера момент инерции маятника J относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника равен:

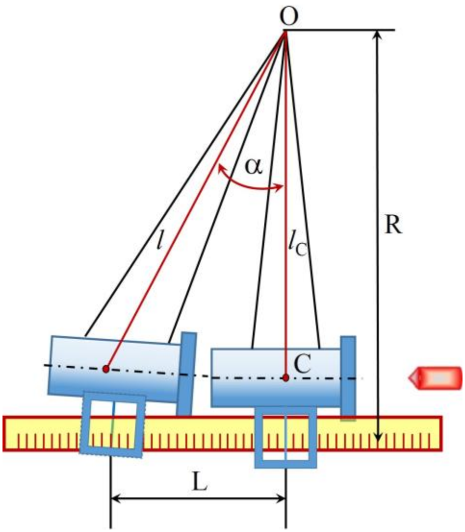
$$J = J_0 + Ml_C^2. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), находим расстояние между центром удара и точкой подвеса маятника:

$$l_{\text{A}} + l_C = \frac{J}{Ml_C}. \qquad (15)$$

Как видим, расстояние между центром удара и точкой подвеса маятника $l_{\text{A}} + l_C$ совпадает с приведенной длиной физического маятника*), что означает совпадение центра удара и центра качаний**).

Схема баллистического маятника показана на рис. 2. Баллистический маятник представляет собой тяжелое тело, подвешенное на четырех длинных нитях.



Рассмотрим движение маятника в рамках следующих предположений.

- Движение пули и тела маятника происходит в одной (вертикальной) плоскости. Точкой O обозначена горизонтальная ось, вокруг которой происходит движение маятника. Точка C – центр масс тела маятника, имеющего цилиндрическую форму. С одной стороны цилиндр «заглушен» пластиной с пластилином.
- Пуля застревает в теле маятника таким образом, что ее центр масс находится на прямой OC.
- Размеры пули будем считать малыми.
- Время действия пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебаний маятника.
- Ударными силами натяжения нитей будем пренебрегать.

Первоначальная скорость пули может быть определена по углу отклонения баллистического маятника от положения равновесия после соударения.

---

*) *Приведенная длина физического маятника* –это длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

**) *Центр качания* –точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период получившегося маятника остался равным периоду физического.

В первом приближении тело маятника будем считать сплошным цилиндром массой M, радиусом r и длиной H. Момент инерции цилиндра относительно центральной оси, перпендикулярной продольной оси цилиндра, равен:

$$J_0 = \frac{MH^2}{12} + \frac{Mr^2}{4}. \qquad (16)$$

В условиях данной работы геометрические размеры цилиндра много меньше расстояния от его центра масс до точки подвеса нитей, поэтому в соответствии с формулами (14) и (16) его момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса нитей, мало отличается от момента инерции материальной точки:

$$J = J_0 + Ml_C^2 = \frac{MH^2}{12} + \frac{Mr^2}{4} + Ml_C^2 \approx Ml_C^2. \qquad (17)$$

В указанных предположениях центр удара (см. (12)) можно считать совпадающим с центром масс:

$$l_{\text{А}} + l_C = \frac{J_0}{Ml_C} + l_C \approx l_C. \qquad (18)$$

Следовательно, при попадании горизонтально летящей пули в центр масс маятника выполняется закон сохранения импульса.

Рассмотрим абсолютно неупругое соударение пули и баллистического маятника в рамках модели материальных точек. Запишем закон сохранения импульса для системы тел «пуля + маятник» на интервале времени от момента перед соударением до момента сразу после соударения:

$$mv = (M + m)v'. \qquad (19)$$

Здесь v — скорость пули перед соударением, v' — скорость маятника сразу после абсолютно неупругого соударения.

Закон сохранения механической энергии для указанной системы тел на интервале времени от момента сразу после соударения до момента максимального отклонения маятника имеет вид:

$$\frac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)gl_C(1 - \cos\alpha). \qquad (20)$$

Здесь α — угол максимального отклонения маятника. Соотношение (20) справедливо в пренебрежении затуханием колебаний маятника в пределах одной четверти периода его колебаний.

Исключая из системы уравнений (19) и (20) скорость υ', получаем связь скорости пули до соударения и угла максимального отклонения маятника:

$$\upsilon = \frac{M+m}{m}\sqrt{l_C g}\, 2\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{21}$$

В связи с тем, что длина нитей R, намного превосходит смещение маятника L, угол α мал и $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Так как угол α малый, то $\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{L}{R}$.

В результате формула (21) принимает следующий вид

$$\upsilon = \frac{M+m}{m}\sqrt{l_C g} \cdot \frac{L}{R}. \tag{22}$$

Формула (22) используется в дальнейшем для расчета скорости пули.

Экспериментальная установка

Установка состоит из *баллистического маятника 1*, *шкалы 2* для отсчета отклонений маятника, *пружинной пушки* 3, *набора пуль (снарядов) 4* (рис. 3). Баллистический маятник — цилиндр, частично заполненный пластилином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и *легких нитях 5* (рис. 3). Масса цилиндра с пластилином равна M. В маятник в горизонтальном направлении стреляют из *пружинной пушки 3* пулей, имеющей массу m. Пуля входит в пластилин и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется на небольшой угол, который может быть измерен.

Шкалу 2, предназначенную для определения отклонения маятника, устанавливают параллельно *отсчетной рамке* 6 маятника, на расстоянии примерно 5–6 мм от нее.

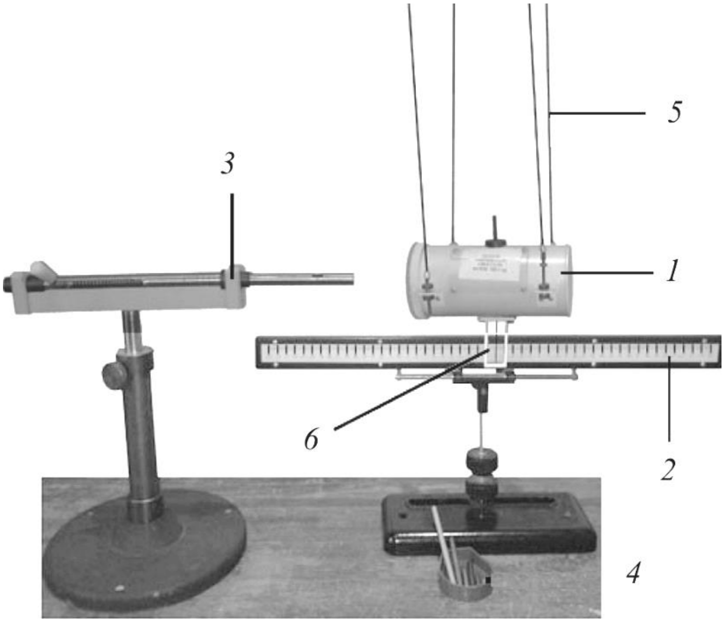


Рис. 3. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. **Определение скорости пуль.**

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что в положении равновесия ось цилиндра горизонтальна, а вертикальная плоскость, проходящая через ось цилиндра, является плоскостью симметрии. Если эти условия не выполнены, то необходимо подрегулировать длину нитей.

Чтобы подготовить пушку к выстрелу, затвор отводят в крайнее положение. Вставляют пулю в дуло пушки и задвигают ее шомполом до касания пружины. Убедившись, что пуля после вылета из пушки попадет в маятник, производят выстрел. Для этого курок отводят вертикально вниз. Отклонения маятника определяют по шкале.

Измерения

1. Провести взвешивание пуль. Результаты записать в табл. 1.

2. Производят выстрелы последовательно с каждой из пяти пуль*. Результаты отсчета отклонений маятника записать в табл. 1. Для каждой пули опыт повторить n не менее пяти раз.

Таблица 1

Экспериментальные данные

<table>
<tr><th rowspan="2">N
пули</th><th rowspan="2">n
эксп.</th><th>L_i</th><th rowspan="2">$\bar{L}$, $\sigma_{\bar{L}}$, м/с^2</th><th rowspan="2">υ, σ_υ, м/с</th><th rowspan="2">f, (с/м)^2</th><th rowspan="2">σ_f, (с/м)^2</th></tr>
<tr><th>м</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1,
m =</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">…</td></tr>
</table>

Обработка результатов

1. Вычислите средние значения отклонения маятника $\bar{L}$

$$\bar{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \,. \tag{23}$$

2. Определите выборочное стандартное отклонение среднего арифметического величины L:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(L_i - \bar{L}\right)^2} \,. \tag{24}$$

С учетом систематических погрешностей (погрешность прибора, погрешность округления) величина стандартного отклонения суммарной погрешности величины L равна

---

* Выстрелы всех пяти пуль необходимо осуществлять с одинакового расстояния.

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_{L\ \text{сист.}}^2}\ . \qquad (25)$$

3. Для каждой пули по формуле (22) найти значение скорости каждой из пуль и рассчитать стандартное отклонение по формуле:

$$\sigma_\upsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial L}\right)^2 \cdot \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial l_C}\right)^2 \cdot \sigma_{l_C}^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial R}\right)^2 \cdot \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial m}\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right)^2 \cdot \sigma_M^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial g}\right)^2 \cdot \sigma_g^2}\ . \qquad (26)$$

4. Вычислите значения $f_i = \dfrac{1}{\bar{\upsilon}_i^2}$ для каждой из пуль и рассчитать стандартное отклонение величины f_i по формуле:

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{\upsilon}_i^2}\right)^2 \cdot \sigma_{\bar{\upsilon}_i^2}^2} = \frac{2 f_i}{\bar{\upsilon}_i} \cdot S_{\upsilon_i}\ . \qquad (27)$$

Полученные данные в пп. 1–4 записать в табл. 1.

Упражнение 2. Оценка потенциальной энергии сжатой пружины.

В данном упражнении используются данные полученные в *упр. 1*. Формула (22) для расчета скорости пули не отражает в явном виде зависимость скорости пули от ее массы, поскольку угол отклонения маятника также зависит от массы пули. При этом потенциальная энергия сжатой пружины $\dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$ (Δl — величина сжатия пружины) переходит в кинетическую энергию пули, пружин и бойка. Если пренебречь потерями энергии из-за трения пружины и пули в «стволе» пушки, то можно записать закон сохранения механической энергии для системы пружина, пуля и маятник:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + b\frac{M_0\upsilon^2}{2}\ , \qquad (28)$$

где M_0 — масса пружины и бойка, b – коэффициент, зависящий от способа крепления и характера движения пружины и бойка, $b<1$. Например, для однородной пружины $b=1/3$. Преобразуем формулу (29) к следующему виду

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{m}{k\Delta l^2}+b\frac{M_0}{k\Delta l^2}. \qquad (29)$$

Согласно (29), $1/\upsilon^2$ линейно зависит от массы m пули. Определив значение $A=\frac{1}{k\Delta l^2}$, можно вычислить величину сжатия пружины, а затем и ее энергию:

$$E_{\text{пот}}=\frac{k\Delta l^2}{2}=\frac{1}{2A}. \qquad (30)$$

Обработка результатов

1. Постройте график зависимости $1/\upsilon^2$ от m и аппроксимировать его линейной зависимостью с помощью метода МНК. Определите коэффициент A в формуле $\frac{1}{\upsilon^2}=A\cdot m+B$ и погрешности значений *A*. Результаты запишите в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов характеристики пружины

A, Дж$^{-1}$	σ_A, Дж$^{-1}$	$E_{\text{пот}}$, Дж	$\sigma_{E_{\text{пот}}}$, Дж

2. Рассчитать величину потенциальной энергии пружины $E_{\text{пот}}$ по формуле (30) и оценить стандартное отклонение погрешности $E_{\text{пот}}$:

$$\sigma_{E_{\text{пот}}}=\sqrt{\left(\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial A}\right)^2\cdot\sigma_A^2}. \qquad (31)$$

Результаты запишите в табл. 2.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть определены скорости нескольких пуль с разной массой, энергия пружины.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Что такое момент импульса относительно точки?
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
5. Определите положение центра удара в предположении, что тело маятника представляет собой сплошной цилиндр, масса которого в 100 раз больше массы пули.
6. Сколько законов сохранения использовано для вывода формулы (22)? Перечислите их.

Литература

1. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. – М. Изд. дом «Оникс 21 век», 2003. – . Гл. 6.
2. В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. Механика. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – Лекция 4.
3. И.В. Митин, В.С. Русаков. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: МГУ. 2002.