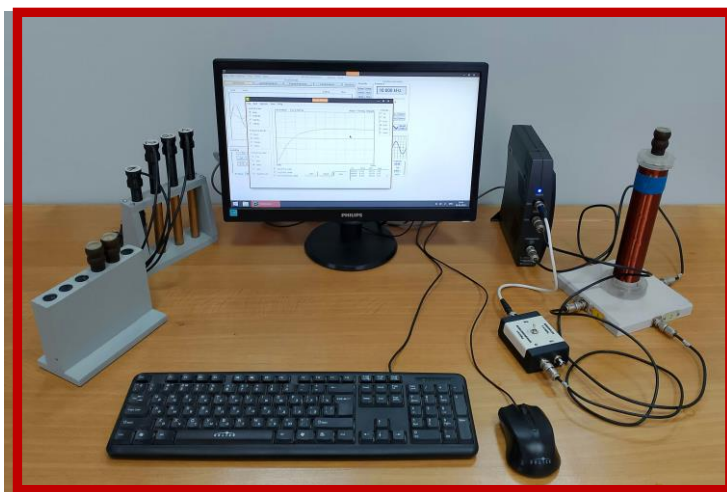


Буханов В.М., Николадзе Г.М.,
Салецкий А.М., Харабадзе Д.Э.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Лабораторный практикум

**СКИН-ЭФФЕКТ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИКНОВЕ-
НИЯ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРЬ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ**



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2025

УДК 537
ББК 22.33

Буханов В.М., Николадзе Г.М., Салецкий А.М., Харабадзе Д.Э.

Электричество и магнетизм. Лабораторный практикум. Скин-эффект. Исследование проникновения переменного магнитного поля внутрь цилиндрических проводников. Уч.-метод. пособие. – М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2025. – 26 с.

Описание лабораторной работы «Скин-эффект. Исследование проникновения переменного магнитного поля внутрь цилиндрических проводников» по дисциплине «Физика» предназначено в помощь студентам, выполняющим лабораторные работы по разделу «Электричество и магнетизм».

Пособие содержит краткое изложение теории скин эффекта, описание экспериментальной установки и методику проведения экспериментов и обработки результатов. Для студентов физических специальностей университетов.

Рецензент: канд. физ.- мат наук, доцент. *А.В. Быков*

© Коллектив авторов, 2025 г.

Цель работы

Экспериментальное исследование проникновения переменного магнитного поля внутрь цилиндрических проводников из разных материалов, определение удельной электрической проводимости материала образцов, проверка теории скин-эффекта.

Идея эксперимента

Измеряется фазовый сдвиг между магнитным полем внутри исследуемых образцов и внешним магнитным полем двумя методами: методом индукционного датчика и методом дифференциального трансформатора. Определяется частотная зависимость фазового сдвига между переменным внешним магнитным полем и намагниченностью образца, помещенного в это поле и из экспериментальных данных вычисляется удельная проводимость различных металлов и сплавов.

Теория

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Закон электромагнитной индукции. В основе классической электродинамики лежат два закона. Первый закон установил Ампер – это закон взаимодействия электрических токов и сформулированная им *теорема о циркуляции вектора магнитной индукции B* (или закон полного тока для магнитного поля в вакууме): циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на силу полного тока I , охватываемого этим контуром

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i. \quad (1)$$

Вторым законом является *закон электромагнитной индукции*. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции – явление возникновения тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего его. Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила (ЭДС) индукции. В результате своих опытов Фарадей обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами: пе-

ремещение проводящей рамки в магнитном поле неподвижной катушки и изменение магнитного поля B , создаваемого катушкой, за счет ее движения или вследствие изменения силы тока I в ней.

Закон электромагнитной индукции в интегральной форме: ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}$ в произвольном контуре L пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ через произвольную поверхность S , опирающуюся на этот контур:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2)$$

Знак « $-$ » в формуле позволяет учесть направление индукционного тока, которое определяется правилом Ленца: индукционный ток, возбуждаемый в замкнутом контуре при изменении магнитного потока, всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Потоком вектора магнитной индукции B (магнитным потоком) через малую поверхность площадью dS называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi_B = (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = B \cos \alpha dS.$$

Здесь $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к площадке площадью dS , B_n — проекция вектора $\mathbf{B}$ на направление нормали, α — угол между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{n}$.

Магнитный поток Φ_B через произвольную замкнутую поверхность S равен

$$\Phi_B = \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \int_S B_n dS. \quad (3)$$

Уравнения Максвелла. Максвелл постулировал, что теорема о циркуляции вектора магнитной индукции и закон электромагнитной индукции имеют силу независимо от присутствия в пространстве проводящих контуров. Согласно Фарадею переменное магнитное поле создает в проводящем замкнутом контуре вихревое электрическое поле:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Этот постулат лежит в основе теории электромагнитного поля и соответствующих уравнений Максвелла (в системе СИ):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{D}$ – вектор электрического смещения, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{j}$ – вектор плотности электрического тока, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная, σ – удельная проводимость среды, ε – относительная диэлектрическая проницаемость, μ – относительная магнитная проницаемость

Уравнение (4) – описывает закон электромагнитной индукции Фарадея, а уравнение (5) – одну из форм записи теоремы Гаусса.

Проводники в переменном поле. Из уравнений (4) и (6) следует, что переменное электрическое поле приводит к появлению вихревого магнитного поля и наоборот. Получим уравнение, описывающее магнитное поле внутри проводника. Для этого к (6) применим оператор rot

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mu_0 \mu \sigma.$$

В итоге получаем

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mu_0 \mu \sigma. \quad (8)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mu_0 \mu \sigma. \quad (9)$$

Скин-эффект. Качественный анализ. В проводнике плотность переменного тока в отличие от постоянного оказывается не одинаковой по сечению: она наибольшая на поверхности и наименьшая на оси проводника. Эта неравномерность тем больше, чем толще проводник и чем больше частота переменного тока, и при очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое, отчего явление и получило название скин-эффекта (от англ. skin- кожа, поверхностный слой).

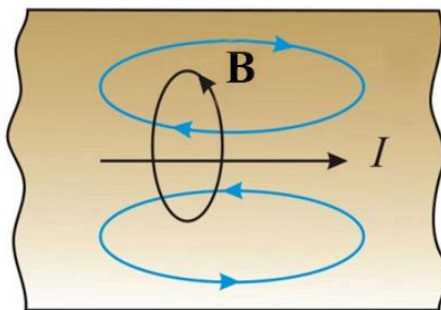


Рис. 1. Схематичное представление проводника с током.

Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток I имеет направление, указанное на рис. 1. При протекании переменного тока по проводнику вокруг него и внутри образуется магнитное поле (B), силовые линии которого перпендикулярны оси проводника. За счёт электромагнитной индукции переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле (E), причём на поверхности проводника вектор напряжённости электрического поля направлен по направлению тока проводника, а внутри проводника – противоположно (рис. 1). Следовательно, это вихревое электрическое поле будет усиливать ток на поверхности, и ослаблять его на оси.

Это приводит к уменьшению действующего сечения проводника и, соответственно, к увеличению его сопротивления. На рис. 2 представлено распределение плотности переменного тока в круглом проводе. Из рисунка видно, что большая часть тока сосредоточена

в тонком слое. Для характеристики этого явления вводится толщина скин-слоя δ . Она определяется как глубина, на которой плотность тока уменьшается в e раз от величины тока на поверхности проводника (рис. 2).

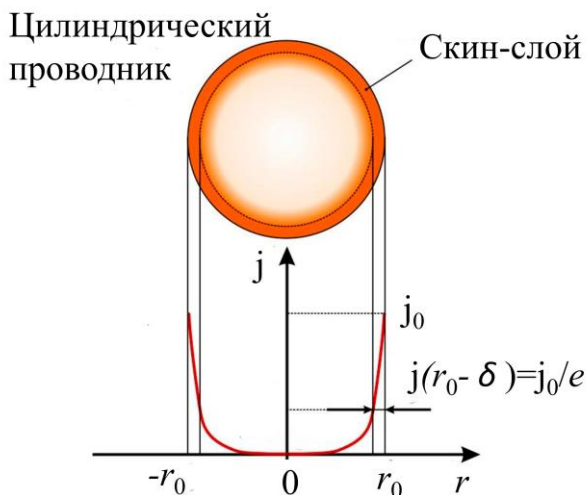


Рис. 2. Распределение плотности переменного тока в круглом проводе вдоль его радиуса r .

Этот эффект присутствует, вообще-то, на любой частоте, но становятся особенно заметным на высоких частотах, при этом электрический ток при высоких частотах течет преимущественно сквозь поверхностный слой проводника. На рис. 3 представлено

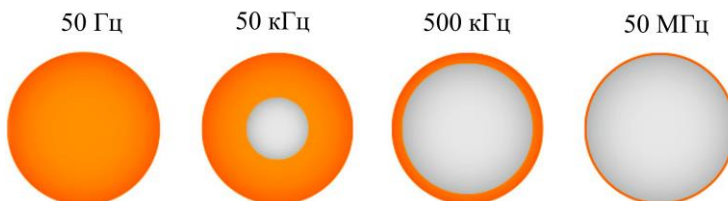


Рис. 3. Распределение тока в цилиндрическом проводе для различных частот.

схематическое представление распределения переменного тока по сечению проводника для различных частот.

Проявлением скин-эффекта является также ослабление переменного магнитного поля по мере проникновения его вглубь проводника из-за того, что это возбуждающее поле создает во внутренних слоях вихревое электрическое поле. Вихревое электрическое поле, в свою очередь, создает во внутренних слоях вихревые токи. Магнитное поле этих вихревых токов внутри проводника будет направлено навстречу исходному возбуждающему магнитному полю и будет ослаблять его. Таким образом, благодаря поверхностному эффекту плотность вихревых токов и напряженность магнитного поля по мере углубления в проводник будет падать.

Основы теории скин-эффекта. Рассмотрим одномерный случай, когда вектор $\mathbf{H}$ направлен вдоль оси x . В этом случае уравнение для напряженности магнитного поля в проводящей среде имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (10)$$

Пусть полупространство $z > 0$ заполнено проводящей средой с проводимостью σ , а полупространство $z < 0$ является свободным, в котором электрическое поле изменяется по гармоническому закону: $H_x = H_0 \cdot e^{i\omega t}$. Будем искать решение уравнения (10) в виде:

$$H_x(z, t) = H(z) e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Подставляя эту зависимость в уравнение с частными производными (10) получим обычное дифференциальное уравнение для функции $H(z)$:

$$\frac{d^2 H(z)}{dz^2} = i \mu_0 \mu \sigma \omega H(z). \quad (12)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$H(z) = A e^{az}, \quad (13)$$

где A – константа. Подставляя (13) в (12), получим уравнение для a :

$$a^2 = i \mu_0 \mu \sigma \omega. \quad (14)$$

Это уравнение имеет два корня: один отвечает убывающему, а другой – нарастающему вглубь проводника переменному полю. Нарастающее решение следует отбросить, т.к. оно отвечает бессмысленному увеличению поля вплоть до бесконечного значения. С учетом этого

$$a = -\sqrt{i\mu_0\sigma\omega} = -\sqrt{\mu_0\mu\sigma\omega} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}} \cdot (1+i).$$

Окончательное решение уравнения (14) будет иметь вид:

$$H_x(z, t) = H_0 e^{-\rho z} e^{i(\omega t - \rho z)}, \quad (15)$$

где:

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}}.$$

Из полученного решения (15) следует, что по мере проникновения переменного магнитного поля с частотой ω вглубь проводника фаза колебаний поля растет линейно, а амплитуда убывает по экспоненциальному закону. Такой закон спада характеризуется расстоянием, на котором амплитуда поля уменьшается в $e \approx 2,72$ раз. Это расстояние называется **глубиной проникновения поля** (*толщина скин слоя*)

$$\delta = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\mu\sigma\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\mu\sigma f}}, \quad (16)$$

где f – частота.

Изменение магнитного поля в длинном тонкостенном цилиндре. Рассмотрим длинный тонкостенный металлический цилиндр, помещенный внутрь соленоида. Пусть полый цилиндр имеет (рис. 4) радиус R и толщину стенки

$$h \ll R. \quad (17)$$

Условие (17) позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться **одномерным** приближением. Тогда для тонкой стенки исследуемого в данной работе цилиндра из латуни $\mu \approx 1$ (рис. 4, вставка) дифференциальное уравнение (8) для комплексной амплитуды магнитного поля принимает вид:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H. \quad (18)$$

Граничные условия для (вкладка 18) (см. рис. 4,)

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1. \quad (19)$$

Решение (18) находится в виде

$$H(x) = Ae^{-\alpha x} + Be^{\alpha x}. \quad (20)$$

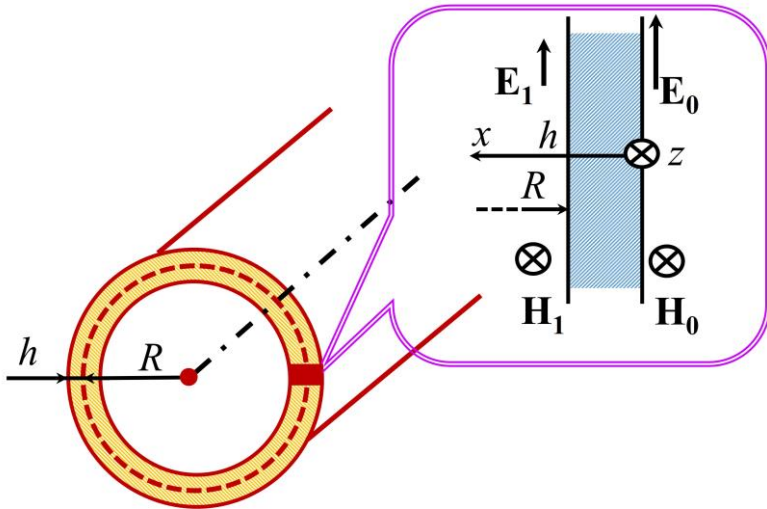


Рис. 4. Электрическое и магнитное поле в тонкостенном цилиндре.

Здесь A и B определяются из граничных условий (19), а α равна $\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4}$.

Из первого граничного условия (19) следует $A + B = H_0$. С учетом этого (20) можно переписать

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2Bsh\alpha x$$

Для электрического поля из закона Ампера (одномерный случай) получаем

$$E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{ch} \alpha x). \quad (21)$$

Связь между амплитудами колебаний электрического и магнитного полей на внутренней границе цилиндра определим из (4):

$$E_1 = -\frac{1}{2} i \omega R \mu_0 H_1. \quad (22)$$

При $x = h$ с учетом (22) получаем связь между H_0 и H_1 :

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2} \alpha R \operatorname{sh}(\alpha h)}. \quad (23)$$

При *малых частотах* $\frac{h}{\delta} \ll 1$ отношение модулей амплитуд будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Rh}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (Rh \sigma \mu_0 \omega)^2}}. \quad (24)$$

При этом колебания H_1 отстают по фазе от H_0 на угол ψ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Rh}{\delta^2}. \quad (25)$$

При *больших частотах* $\frac{h}{\delta} \gg 1$, $\operatorname{sh}(\alpha h) \approx \operatorname{ch}(\alpha h) \approx \frac{1}{2} e^{\alpha h}$. Выражение (23) после подстановки α переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha R} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{R} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}\right)}. \quad (26)$$

Из (26) видно, что поле внутри цилиндра запаздывает по фазе от поля снаружи на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}}. \quad (27)$$

Изменение магнитного поля в однородном проводнике.

При помещении проводника в магнитное поле H_0 в нем возникают вихревые токи, которые изменяют магнитное поле. В результате магнитное поле внутри проводника $\mathbf{H}(r)$ будет отличаться от H_0 .

Напряженность этого поля может быть определена из (8). Запишем его решение для длинного однородного проводника радиусом R . Напряженность магнитного поля выражается в функциях Бесселя:

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{H}_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}, \quad (28)$$

где $J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$ – функция Бесселя нулевого

порядка, $k = \frac{1+i}{\delta}$, δ – глубина проникновения.

Определим потоки индукции магнитного поля через свободное пространство $\Phi_{\text{вак}}$ и через сечение цилиндрического проводника $\Phi_{\text{пров}}$

$$\Phi_{\text{вак}} = \int_0^R \mu_0 H_0(t) 2\pi r dr = \pi \mu_0 H_0(t) R^2, \quad (29)$$

$$\Phi_{\text{пров}} = \int_0^R \mu_0 \mu H(r, t) 2\pi r dr = 2\pi \mu_0 \mu H_0(t) \frac{RJ_1(kR)}{kJ_0(kR)}, \quad (30)$$

где $J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^4}{3 \cdot (2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{4 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \right)$ – функция Бесселя первого порядка.

В данной работе применяется метод дифференциального трансформатора. Дифференциальный трансформатор состоит (рис. 5) из двух секций (I и II), каждая из которых содержит первичные 1, 2 и вторичные 3, 4 обмотки. Первичные обмотки соединены последовательно, а вторичные навстречу друг другу. На первичные обмотки подается переменное напряжение от генератора низкой частоты. На вторичных обмотках возникает сигнал ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$. Также возможно измерение с помощью фазометра (рис. 5) разности фаз между напряжением, подаваемым на первичную обмотку и выходным напряжением. Длины металлических стержней равны длине обмотки катушки 3. Так как вторичные обмотки включены навстречу друг другу, то в отсутствие образца напряжение на выходе дифференциального трансформатора должно быть равно нулю и сдвиг фаз равен 90° . При помещении образца внутрь

рабочей катушки в нем возникают вихревые токи, которые изменяют магнитное поле, и во вторичной обмотке появляется ЭДС

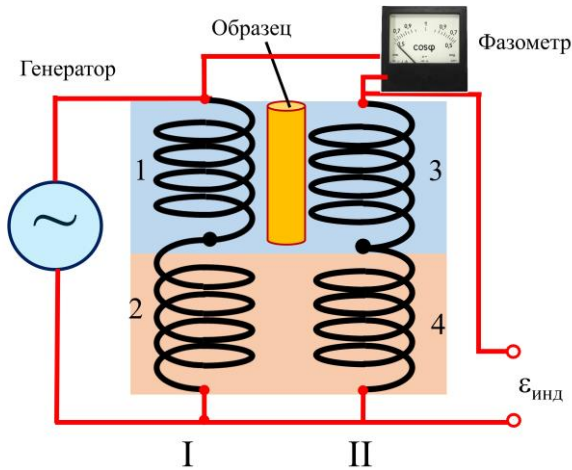


Рис. 5. Схема дифференциального трансформатора.

равная

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{инд}} &= -N \frac{d}{dt} (\Phi_{\text{пров}} - \Phi_{\text{вак}}) = iN\omega (\Phi_{\text{пров}} - \Phi_{\text{вак}}) = \\ &= iN\omega H_0(t) \pi R^2 \mu_0 \left(2\mu \frac{1}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} - 1 \right) \sim -i \left(1 - \mu \frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} \right).\end{aligned}$$

Общий анализ функции Бесселя очень сложен, поэтому рассмотрим поведение $\frac{J_1(kR)}{J_0(kR)}$ в предельных случаях для $|kR \ll 1|$ — случай *низких частот* и $|kR \gg 1|$ — случай *высоких частот*.

Низкие частоты. Рассмотрим в рядах определяющих функции Бесселя только первые малые слагаемые пренебрегая остальными, тогда

$$J_0(kR) \approx 1 - \frac{(kR)^2}{2^2} + \frac{(kR)^4}{(2 \cdot 4)^2},$$

$$J_1(kR) \approx \frac{(kR)}{2^2} \left(1 - \frac{(kR)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(kR)^4}{3 \cdot (2 \cdot 4)^2} \right).$$

$$\frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} \approx \frac{1 - \frac{(kR)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(kR)^4}{3 \cdot (2 \cdot 4)^2}}{1 - \frac{(kR)^2}{2^2} + \frac{(kR)^4}{(2 \cdot 4)^2}} \approx 1 + \frac{(kR)^2}{8} + \frac{(kR)^4}{48}.$$

Для материалов с $\mu \approx 1$, учитывая, что $k = \frac{1+i}{\delta}$, а

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}}$, находим, что напряжение на выходе пропорционально

$$-i \left(1 - \frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} \right) \approx i \left(\frac{(kR)^2}{8} + \frac{(kR)^4}{48} \right) = -\frac{R^2}{4\delta^2} - i \frac{R^4}{12\delta^4}.$$

Тангенс аргумента этого выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R^2}{3\delta^2} = \frac{R^2\mu_0\sigma\omega}{6}. \quad (31)$$

Видно, что зависимость тангенса сдвига фазы от частоты линейная.

При наличии заметных магнитных свойств ($\mu \neq 1$) напряжение на выходе пропорционально

$$-i \left(1 - \mu \frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)} \right) \approx i \left(-1 + \mu \left(1 + \frac{(kR)^2}{8} + \frac{(kR)^4}{48} \right) \right) =$$

$$= -i(1-\mu) - \mu \frac{R^2}{4\delta^2} - i\mu \frac{R^4}{12\delta^4}.$$

Тангенс аргумента этого комплексного выражения равен

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\mu-1}{\mu} \frac{8}{R^2\mu_0\sigma\omega} + \frac{R^2\mu_0\sigma\omega}{6}.$$

Высокие частоты. Асимптотика отношения функций Бесселя с комплексным аргументом для высоких частот

$$\frac{J_1\left((1+i)R/\delta\right)}{J_0\left((1+i)R/\delta\right)} = i.$$

Тогда напряжение на выходе пропорционально

$$i\left(1 - \mu \frac{2}{kR} \frac{J_1(kR)}{J_0(kR)}\right) \approx i\left(1 - \mu \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{\delta}{R}\right) = i + \mu(1-i) \cdot \frac{\delta}{R}.$$

Тангенс аргумента этого выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \mu\delta/R}{\mu\delta/R} = \frac{R}{\mu\delta} - 1 = \frac{R}{\mu} \sqrt{\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}} - 1.$$

При $\mu \approx 1$

$$\operatorname{tg}\varphi = R \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$$

или

$$\operatorname{tg}^2\varphi = R^2 \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}. \quad (32)$$

Таким образом, на больших частотах зависимость квадрата тангенса сдвига фазы от частоты линейная.

Прологарифмируем левые и правые части (31) и (32), получаем

$$\ln(\operatorname{tg}\varphi) = \ln\left(\frac{\mu_0 R^2 \sigma}{6}\right) + \ln\omega. \quad (33)$$

$$\ln(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\mu_0 R^2 \sigma}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\omega. \quad (34)$$

Из (33) и (34) видно, что наблюдается линейная зависимость между $\ln(\operatorname{tg}\varphi)$ и $\ln\omega$, но с разным наклоном: для низких частот 1, а для высоких – 1/2. Таким образом, построив зависимость $\ln(\operatorname{tg}\varphi)$ от $\ln\omega$ по коэффициенту наклона можно определить в какой области частот наблюдается скин-эффект.

Эксперимент

Экспериментальная установка

Фото экспериментальной установки представлено на рис. 6, а её принципиальная схема на рис. 7. В ее состав входят: модуль PClab2000LT (1) представляющий собой специальную USB при-

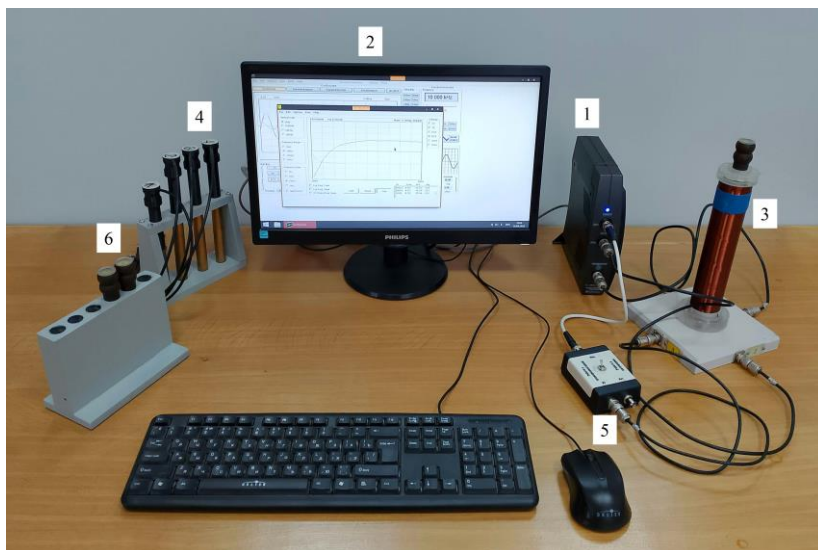


Рис. 6. Общий вид экспериментальной установки: 1 – USB приставка PClab2000LT, 2– компьютер, 3–дифференциальный трансформатор с испытуемым образцом, 4 – измерительные катушки, 5 –коммутатор, 6 – металлические стержни.

ставку к компьютеру, которая имеет генератор электрических сигнала различной формы (гармонические, пилообразные и прямоугольные), период (основную частоту $f = \frac{1}{T}$) которых можно из-

менять в широких пределах от единиц герц до десяти килогерц; двухлучевой осциллограф, которые управляются компьютером (2): соленоид (3), который состоит из двух секций (I и II), каждая из которых содержит обмотки 1, 2 (секция I) и 3, 4 (секция II). Первичные обмотки 1 и 2 соединены последовательно, а вторичные навстречу друг другу. На эти обмотки подается переменное напря-

жение от генератора низкой частоты приставки и для контроля этого напряжения на вход канала **Ch2** приставки. Обмотки 3 и 4 соединены навстречу друг другу. С этих обмоток через коммутатор при использовании соленоида в качестве дифференциального

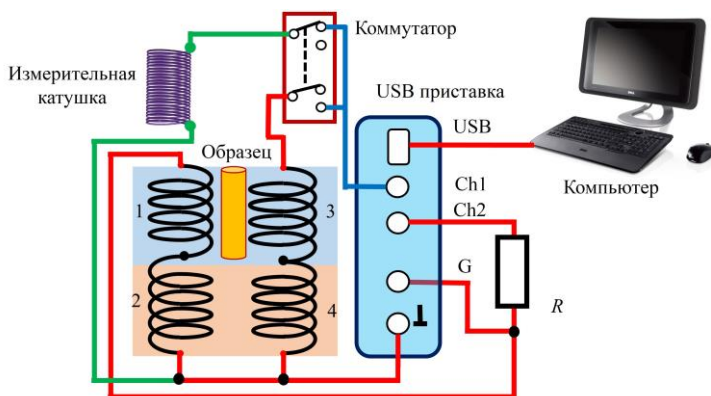


Рис. 7. Электрическая схема экспериментальной установки. Основные модули: USB приставка PClab2000LT (G – генератор приставки, канал Ch1 и канал Ch2 двухлучевого осциллографа приставки), дифференциальный трансформатор, компьютер.

трансформатора сигнал подается на вход **Ch1** приставки.



Рис. 8. Измерительная катушка: 1 – обмотка, 2 – коаксиальный кабель, 3 – разъем.



Рис. 9. Измерительные катушки с экраном из латуни (1 – 3) и из пластика (4).

Для регистрации поля внутри соленоида используется измерительные катушки (4) (рис. 8) при измерениях подключается через коммутатор (5) к входу **Ch2** приставки. К коммутатору катушке подключается с помощью разъема 3. Обмотка катушки имеет 100 витков. Для исследования электромагнитного экранирования используются 4 катушки (см. рис. 9), на три из которых (1 – 3) надеты экраны из латуни разной толщины (2, 3 и 4 мм), на одной (4) экран из пластика (для защиты от повреждения).



Рис. 10. Внешний вид коммутатора: 1 – подключение к USB приставки (Ch1), 2 – подключение измерительной катушки, 3 – подключение дифференциального трансформатора, 3 – переключатель режимов работы с измерительной катушкой или с дифференциальным трансформатором.

Образцы (6) для определения электропроводности представляют собой стержни диаметром $d = 16$ мм и длиной $L = 110$ мм, изготовленные из меди, сплава алюминия ДТ16 и латуни.

Коммутатор (рис. 10) служит для подключение измерительной катушки (*упр. 1*) или выходных катушек 3 и 4 (*упр. 2*) к входу USB приставки.

В этой работе исполь-

зуются гармонические колебания, частоту которых можно плавно изменять с заданной скоростью (шагом) в определенных пределах.

Это позволяет получить частотную зависимость сдвига фаз между током в первичной обмотке трансформатора (напряженностью магнитного поля) и выходным сигналом во вторичной обмотке с погруженным в нее испытуемым образцом.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Скин – эффект. Электромагнитная экранировка

Измерения

1. Включите компьютер. После загрузки на экране появится Рабочий стол.
2. С помощью мыши переместите курсор на значок **PCLab2000LT** и, дважды нажав левую клавишу мыши, запустите рабочую программу. На экране дисплея – появится окно программы **PCLab2000LT** (рис. 11) в виде координатного поля двухлучевого осциллографа с отсчетом напряжения (в вольтах) по вертикали и длительности (в секундах) по горизонтали и кнопки управления генераторной и осциллографической частью системы.

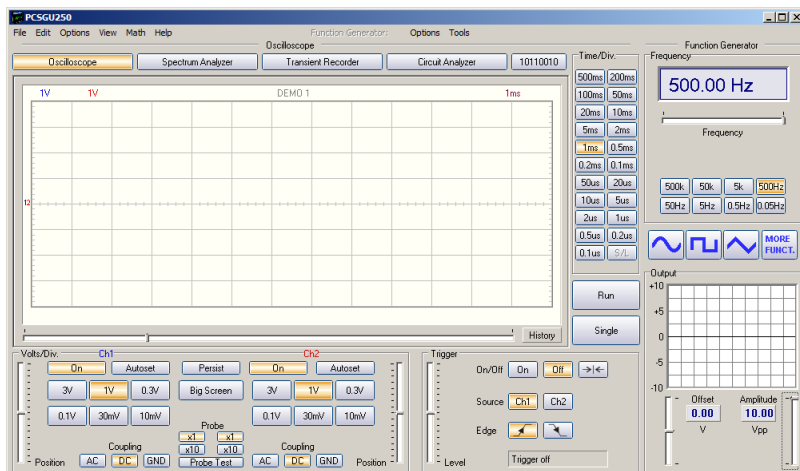


Рис. 11. Окно программы PCLab 2000LT.

3. На коммутаторе установить тумблер в положение «Катушка». Подключить катушку №1 (без латунного экрана). После чего поместить её в соленоид.

В окне характериографа (открывается после нажатия кнопки **Circuit Analyzer**) в меню **Options** выбрать пункты **Normalize Output by Input** и **Show Multiple Traces**. Чтобы выбрать шаг изменения частоты при измерениях, нужно в меню

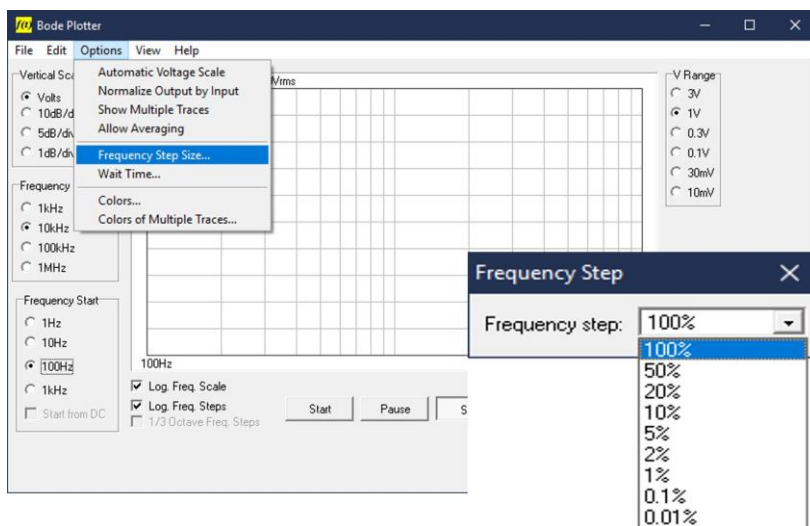


Рис. 12. Установление шага изменения частоты.

Options в окне **Bode Plotter** выбрать пункт **Frequency Step Size** (рис. 12). В открывшемся при этом окне в списке нужное значение. Величина в процентах вычисляется от значения переключателя **Frequency Start**. Например, требуется выбрать шаг частоты в 1 Гц. Тогда, если установлено значение **Frequency Start** в 100 Гц, то **Frequency Step Size** нужно выбрать 1%.

4. Перед началом измерений установить размах сигнала генератора в 10 В.

5. Снять зависимость ЭДС, наводимой во внутренней катушке, от частоты в диапазоне от 1000 Гц до 10 КГц. При этом не принципиально, установлены или сняты галочки **Log. Freq. Scale** и

Log. Freq. Steps. Возможно потребуется подобрать оптимальную чувствительность как для первого, так и второго канала (график не должен выходить за верхнюю границу). Чувствительность первого канала можно менять в основном окне (переключатели в группах **Volts/Div.**) или в окне характериографа (переключатели в группе **V Range**). Чувствительность второго канала можно менять только в основном окне, не закрывая окно характериографа, а оптимальные значения лежат в диапазоне от 0.03 до 0.3 В/дел. (если размах сигнала генератора в 10 В).

6. Одновременно исследуете фазовый сдвиг ψ от частоты f .
7. Сохранить результаты измерений (с помощью меню **File -> Save Data...**).
8. Провести аналогичные измерения для катушек №2, 3 и 4 с различными значениями толщины стенки экрана.
9. Сохранить результаты измерений (с помощью меню **File -> Save Data...**)

Обработка результатов

1. Результаты исследования могут быть записаны на флешку для обработки на другом компьютере.
2. Переведите градусы в радианы по формуле

$$\varphi = (\pi/180) \cdot \psi, \quad (35)$$

где φ – значение угла в радианах, ψ – значение угла в градусах.

Сигнал с измерительной катушки пропорционален не полю внутри экрана, а его производной по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе на $\pi/2$. Кроме того, в эксперименте разность фаз определяется как разность между значениями фазы сигналов на первичной обмотке соленоида и на измерительной катушке, а в расчетных формулах эта разность между сигналами на измерительной катушке и на обмотке соленоида необходимо в (35) поставить минус. Кроме того, сигнал с измерительной катушки пропорционален не полю внутри экрана, а его производной по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе на $\pi/2$. В результате (35) будет иметь вид

$$\varphi = -(\pi/180) \cdot \psi + \pi/2. \quad (37)$$

3. Постройте зависимости $(\varphi - \pi/4)$ от $\sqrt{f}$ для всех исследованных образцов. Методом наименьших квадратов определите наклон этой зависимости A .

4. Определите значение электропроводности σ с помощью формулы (см. (27))

$$\sigma = A^2/(\pi \cdot \mu_0 h^2),$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Результаты запишите в таблицу.

5. Используя найденные значения вычислите σ и постройте зависимость $\delta(f)$, используя (16) при $\mu = 1$.

6. Вычислите коэффициент ослабления магнитного поля $\eta = H_1/H_0$ для исследованных h . Постройте графики зависимости $\eta(f)$.

Упражнение 2. Бесконтактное измерение электропроводности

Измерения

1. Рекомендуется начинать работу с трансформатором без образца.

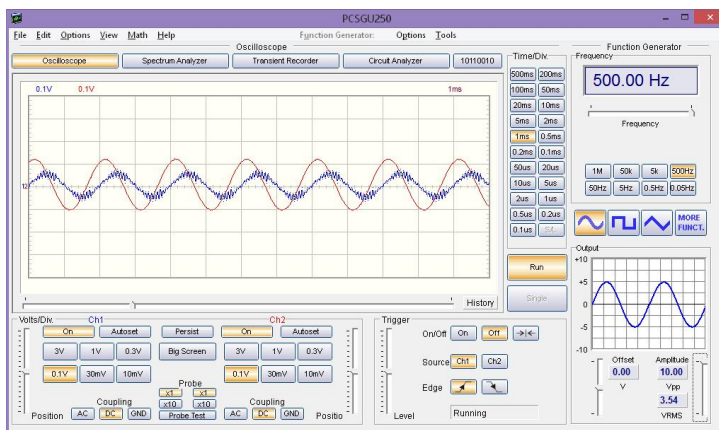


Рис. 13. Окно программы PCLab2000LT.

2. Нажмите с помощью мыши картинку гармонического сигнала и кнопки **Run** и **On** (на рис. 13 показан результат вызова сигнала). В

нижнем правом углу установите амплитуду 10 В. В каналах **Ch1** и **Ch2** установить чувствительность 0.1 В.

3. В строке выше экранного поля нажмите **Circuit Analyzer**, после чего появляется поле **Bode Plotter** (Рис. 13), в меню которого следует нажать команду **View и Phase plot**.

4. Удалите галочки из окошек с вызовом логарифмического масштаба изменения частоты и шага (ниже левого края экрана).

5. В левом столбце установите **Volts, 1 kHz** и **10 Hz** (как показано на рис. 14), после чего кнопкой **Start** запустить процесс сканирования частоты и построения зависимостей сдвига по фазе и амплитуды сигнала во вторичной обмотке от частоты (зависимость амплитуды не используется в задаче). Графическая информация может быть использована для исключения тех точек, которые явно выпадают из плавного хода фазовой зависимости. Вся рабочая информация отражена в таблице, расположенной в правом нижнем углу.

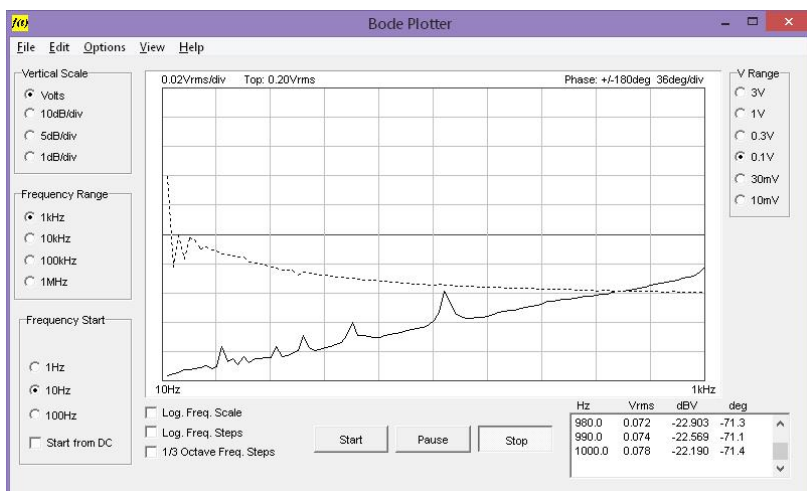


Рис. 14. Частотные зависимости разности фаз напряжения во вторичной обмотке дифференциального трансформатора и магнитного поля в первичной обмотке (верхняя точечная кривая) и амплитуды напряжения (нижняя кривая) во вторичной обмотке.

6. Для трансформатора без образца амплитуда оказывается практически нулевой, а сдвиг по фазе около 90° во всем диапазоне частот,

что указывает на правильную работу прибора. Таблицу следует сохранить отдельным файлом на *Рабочем столе*, присвоив ему имя **Empty** (и скопировать, например, на флешку, если планируется обработка результатов дома). Файл появится в виде зеленой иконки на *Рабочем столе*. Нажатием на нее открывают табличные данные в программе **Libre Office**.

7. В указанном режиме следует повторить измерения для медного, алюминийного и латунного образцов (*материалы с высокой проводимостью*) и сохранить соответствующие файлы под именами Cu, Al и Brass.

В итоге на Рабочем столе (или флешке) будут сохранены четыре таблицы, три из которых нужно обработать для получения искоемых значений электропроводностей исследуемых материалов, а четвертая таблица для трансформатора без образца амплитуда должна быть практически нулевой, а сдвиг по фазе около 90° во всем диапазоне частот, что указывает на правильную работу прибора

Обработка результатов

1. Результаты исследования могут быть записаны на флешку для обработки на другом компьютере.
2. Переведите градусы в радианы по формуле (37) (В связи с тем, что разность фаз определяется между вторичные обмотками соленоида в (37) минус заменить на плюс).
3. Для всех стержней вычислите значения $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}^2\varphi$, $\ln(\operatorname{tg}\varphi)$ и $\ln(f/2\pi)$ для каждого значений частоты f . Результаты записать в таблицу.
4. Постройте зависимость $\ln(\operatorname{tg}\varphi)$ от $\ln(f/2\pi)$. Методом наименьших квадратов определите наклон этой зависимости A . Если $A \approx 0,5$, то для дальнейшего исследования используйте (32), если $A \approx 1,0$ то – (31).
5. В зависимости от результатов п.4, постройте графики $\operatorname{tg}\varphi(f/2\pi)$ или $\operatorname{tg}^2\varphi(f/2\pi)$. Методом наименьших квадратов определите наклон этой зависимости C .
6. Определите электропроводности σ для всех стержней с помощью формул $\sigma = 2C/(\pi \cdot \mu_0 R^2)$ при использовании зависимости $\operatorname{tg}^2\varphi(f/2\pi)$ или $\sigma = 3C/(\pi \cdot \mu_0 R^2)$ при использовании зависимости $\operatorname{tg}\varphi(f/2\pi)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $R = 8 \cdot 10^{-3}$ м.

7. Результаты запишите в таблицу.

Основные итоги работы

В результате выполнения лабораторной работы должны быть измерены коэффициенты ослабления магнитного поля переменной частоты и фазовый сдвиг между переменным внешним магнитным полем и намагниченностью в полых цилиндрах с разной толщиной стенок и фазовый сдвиг поля внутри цилиндров из различных материалов, построены частотные зависимости этих параметров и из экспериментальных данных определены удельные электропроводности различных металлов.

Контрольные вопросы

2. Что такое магнитная проницаемость?
3. Что такое магнитная поляризуемость?
4. Что такое вектор магнитной поляризации?
5. Как величина магнитной поляризации связана с магнитной проницаемостью, восприимчивостью и поляризуемостью?
6. Типы магнетиков и их магнитная восприимчивость?
7. Объясните суть метода дифференциального трансформатора для измерения удельной электропроводности проводников.
8. Как удельная электропроводность проводников связана с глубиной проникновения переменного электромагнитного поля в проводник?
9. Что означает сильный скин-эффект?
10. Что означает слабый скин-эффект?

Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд. — СПб: Издательство «Лань», 2010, §53.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — Москва: Физматлит, 2015. — § 144.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Электродинамика сплошных сред, М.: Физматлит, 2001, Глава VII. § 59.
4. Попов П.В., Зелёная А.В., Зелёный М.Е. Лабораторная работа N 3.7.1. Скин эффект. МФТИ, Долгопрудный 2022, 15 с.

5. *Лабораторный практикум. Электричество и магнетизм.*
Вып. 6. Проникновение электромагнитного поля в вещество
(Под ред. Князева Б.А.) Новосибирск, 2008, 62 с.