

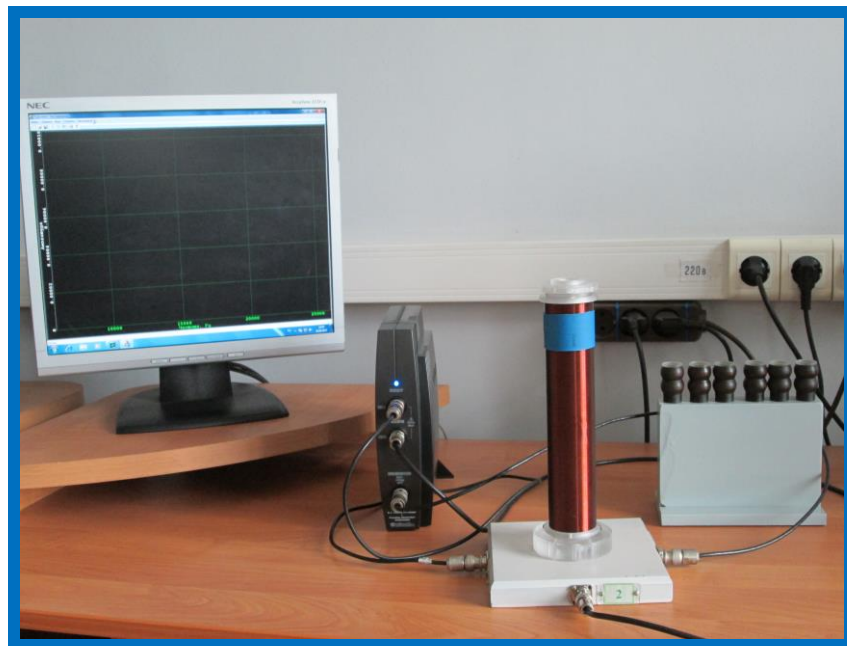
*Московский государственный университет  
им. М.В.Ломоносова*

*Физический факультет  
Кафедра общей физики*

*Лабораторный практикум по  
общей физике*

*Лабораторная работа № 3.3*  
**БЕСКОНТАКТНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ  
МЕТАЛЛОВ**

Буханов В.М., Николадзе Г.М., Салецкий А.М., Харабадзе Д.Э.



**МОСКВА - 2017**

*Используется метод дифференциального трансформатора; с помощью фазоизмерительного устройства определяется частотная зависимость фазового сдвига между переменным внешним магнитным полем и намагниченностью образца, помещенного в это поле. В результате обработки экспериментальных данных находится удельная проводимость различных металлов и сплавов.*

## **ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

Магнитные свойства вещества принято объяснять т.н. микротоками, циркулирующими в атомах и молекулах вещества, которые получили общее название молекулярных токов [1, 2]. Они обусловлены главным образом орбитальным и спиновым движением электронов.

Так как микроструктурные элементы веществ (электроны и нуклоны) являются элементарными носителями магнитного момента, то и любые их комбинации – атомные ядра и электронные оболочки, а также комбинации этих комбинаций, т. е. атомы, молекулы и макроскопические тела, тоже оказываются источниками магнетизма. Поэтому магнитные свойства присущи всем веществам, т. е. все они магнетики.

Если суммарный магнитный момент элементарных носителей атомов вещества полностью скомпенсирован; это – т.н. диамагнетики. Вещества, в атомах которых суммарный магнитный момент элементарных носителей не скомпенсирован; представляют парамагнетики (или ферромагнетики). Однако, в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты парамагнитных атомов и молекул ориентированы хаотически и суммарный магнитный момент любого макроскопического объема вещества будет равен нулю.

Если парамагнитное вещество поместить во внешнее магнитном поле, магнитные моменты его молекул приобретут преимущественную ориента-

цию под действием поля. Вещество станет намагниченным, т.е. его суммарный магнитный момент будет отличным от нуля.

В диамагнетиках внешнее магнитное поле индуцирует элементарные круговые токи в молекулах (атомах), магнитное поле которых направлено противоположно внешнему полю.

Когда говорят, что среда в магнитном поле намагничивается, то подразумевают, что из-за молекулярных токов любой физически малый объем среды в магнитном поле приобретает магнитный момент. Следовательно, в создании магнитного поля в среде участвуют не только внешние источники, но и внутренние токи, циркулирующие в пределах атомов и молекул.

В однородных и изотропных неферромагнитных телах при не слишком сильных магнитных полях векторы **V**, **J** и **H** связаны друг с другом линейными соотношениями:

$$\mathbf{V} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (2)$$

где

$$\mu = 1 + \chi, \quad (3)$$

**V** – вектор магнитной индукции (полевой вектор), используемый для обозначения результирующего (внешнего плюс внутреннего) магнитного поля; **H** – вектор магнитной напряженности (вспомогательный вектор, в диэлектриках **D**); **J** – вектор намагниченности вещества, равный магнитному моменту единицы объема тела;  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества и  $\mu$  – его магнитная проницаемость. В отличие от диэлектрической восприимчивости, магнитная восприимчивость может быть как положительной, так и отрицательной. Вещества с  $\chi > 0$  – парамагнетики, вещества с  $\chi < 0$  – диамагнетики.

В случае гармонической зависимости магнитного поля от времени, вектор **V** может быть представлен в комплексном виде ( $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 e^{-i\omega t}$ ). Векторы **H** и **J** также будут представлены комплексными величинами. Поэтому и коэффициент  $\chi$  между ними (как и  $\mu$ ) также может быть записан в комплексной

форме:  $\chi = \chi' + i\chi''$ . У диамагнетиков и парамагнетиков магнитная проницаемость очень мало отличается от единицы, а напряженность магнитного поля в веществе  $H_i$  линейно связано с внешним полем  $H_e$ , поэтому намагничённость тела также линейно зависит от  $H_e$

$$\mathbf{J} = \alpha \mathbf{H}_e. \quad (4)$$

Безразмерный коэффициент  $\alpha$ , называемый магнитной поляризуемостью, также является комплексной величиной:  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ ; это означает, что *намагниченность не совпадает с внешним полем по фазе*.

Магнитную поляризуемость для цилиндрического проводника радиуса  $r$ , помещенного в однородное переменное магнитное поле, параллельное оси цилиндра ( $H_e = H_0 e^{-i\omega t}$ ) находят исходя из уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  – ток проводимости, а  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  – ток смещения, которым можно пренебречь при относительно низких частотах (до 10 кГц), используемых в задаче, и высокой проводимости среды. В этом приближении уравнение (6) упрощается:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Ток проводимости  $\mathbf{j}$  связан с вихревым электрическим полем дифференциальным законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7)$$

Вихревое электрическое поле создается переменным магнитным полем, которое, в свою очередь, создается только вихревыми токами (токами Фуко), текущими по проводнику.

Из уравнений Максвелла можно получить волновые уравнения для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , в частности,

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Это уравнение вместе с уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  и с учетом временной зависимости поля  $H_e = H_0 e^{-i\omega t}$  при  $\mu = 1$  в парамагнетиках и диамагнетиках составляет полную систему, достаточную для определения магнитного поля и магнитной поляризуемости  $\alpha$ .

Точное решение приведено в книгах [3] (задача 3 к § 59) и [4] (задача 382), в частности для магнитной поляризуемости получено выражение:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\pi r^2} = -\frac{1}{4\pi} \left[ 1 - \frac{2}{kr} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr)} \right], \quad (9)$$

где  $r$  – радиус проводника,  $k = \frac{1+i}{\delta}$ ,  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$  – толщина скин-слоя,  $J_0(kr)$  и  $J_1(kr)$  функции Бесселя нулевого и первого порядка.

В предельном случае низких частот ( $\delta \gg r$ ) можно получить приближенные соотношения, раскладывая функции Бесселя в ряд по степеням  $kr$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{\mu_0 r^6 \sigma^2}{192} \omega^2, \quad \alpha'' = \frac{\mu_0 r^4 \sigma}{32} \omega, \\ \frac{\alpha'}{\alpha''} &= \frac{\mu_0 r^2 \sigma}{6} \omega = \frac{\pi \mu_0 r^2 \sigma}{3} f. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, магнитный момент проводника в переменном магнитном поле обусловлен в основном, возникающими в нем вихревыми индукционными токами; он отличен от нуля даже при  $\mu = 1$ , когда статический момент обращается в нуль. Статический магнитный момент получается из  $J(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Вещественная часть магнитной поляризуемости  $\alpha'$  при  $\omega \rightarrow 0$  также стремится к постоянному значению (равному нулю при  $\mu = 1$ ). Возникновение вихревых токов сопровождается диссипацией энергии поля, выделяющейся в виде джоулева тепла. Диссипация энергии определяется мнимой частью магнитной поляризуемости  $\alpha''$  [3], причем  $\alpha'' > 0$ .

Полученное соотношение (10) может использоваться (см. далее) для бесконтактного определения проводимости (на достаточно малых частотах) в

тех случаях, когда вещественная часть магнитной поляризуемости  $\alpha' < 0$ , а  $\mu = 1$ .

## МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Бесконтактные методы измерения электропроводности во многих случаях имеют существенные преимущества перед контактными способами. В частности, они позволяют контролировать чистоту металлов по остаточному удельному сопротивлению.

Бесконтактные методы можно использовать для измерения электропроводности металлов, сплавов, полупроводников и электролитов, в том числе и в тех случаях, когда образец помещен в герметичную ампулу для изоляции исследуемого материала от окружающей среды.

В данной работе применяется метод дифференциального трансформатора. Датчиком служит дифференциальный трансформатор, состоящий из двух одинаковых катушек индуктивности (см. рис. 1). Образец 1 помещают внутрь одной из катушек трансформатора. Первичные обмотки катушек включены последовательно и по ним пропускается ток от генератора низкой частоты. Вторичные обмотки включены навстречу друг другу, поэтому в отсутствие образца напряжение на выходе дифференциального трансформатора должно быть равно нулю. При помещении образца 1 внутрь рабочей катушки в нем возникают вихревые токи, которые изменяют магнитное поле, и во вторичной обмотке появляется ЭДС. Возникающий в этом случае выходной сигнал пропорционален частоте, амплитуде магнитного поля и эффективной магнитной восприимчивости образца:

$$U_{\text{out}} \propto \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\chi H_0 e^{-i\omega t}) = -i\omega \chi_0 H_0 e^{-i\omega t} = \omega \chi_0 H_0 e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2} - \beta)}. \quad (11)$$

Здесь  $\chi = \chi_0 e^{i\beta}$ , где  $\text{tg } \beta = \frac{\alpha''}{\alpha'}$ , из соотношения (10). Иначе говоря, вы-

ходной сигнал оказывается сдвинут по фазе на величину  $\varphi = (\pi/2 - \beta)$  отно-

сительно магнитного поля (тока в первичной катушке). Воспользовавшись тем, что  $\operatorname{tg}(\pi/2 - \beta) = \operatorname{ctg} \beta$ , получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\alpha'}{\alpha''} = -\frac{\pi \mu_0 r^2 \sigma}{3} f. \quad (12)$$

Таким образом, построив график зависимости  $\operatorname{tg} \varphi$  от частоты  $f$ , можно рассчитать проводимость  $\sigma$  по коэффициенту наклона линейного участка кривой.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Экспериментальная установка показана на рис. 1 (вид приборов и их расположение могут отличаться от показанного на рисунке). В ее состав вхо-

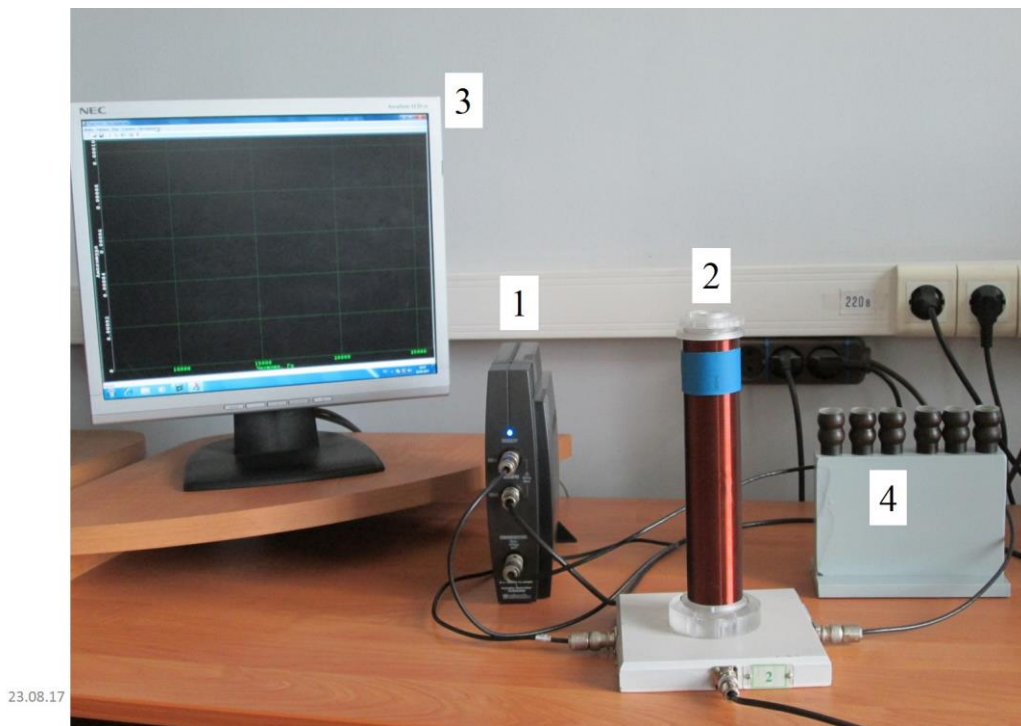


Рис. 1. Общий вид экспериментальной установки. Основные части: 1 – USB приставка PClab2000LT, 2–дифференциальный трансформатор с испытуемым образцом, 3 – компьютер, 4 – набор образцов.

дят: модуль PClab2000LT (1), дифференциальных трансформатор (2), компьютер (3) (на рис. 1 показан только монитор). Образцы (4) для определения электропроводности представляют собой стержни диаметром  $d = 16$  мм и длиной  $L = 110$  мм, изготовленные из меди, алюминия, титанового сплава, свинца, латуни и стали.

Модуль PClab2000LT представляет собой специальную USB приставку к компьютеру и позволяет генерировать электрические сигналы различной формы (гармонические, пилообразные и прямоугольные), период (основную частоту  $f = \frac{1}{T}$ ) которых можно изменять в широких пределах от единиц герц до сотен килогерц.

В этой работе используются гармонические колебания, частоту которых можно плавно изменять с заданной скоростью (шагом) в определенных пределах. Это позволяет получить частотную зависимость сдвига фаз между током в первичной обмотке трансформатора (напряженностью магнитного поля) и выходным сигналом во вторичной обмотке с погруженным в нее испытуемым образцом.

Электрическая схема экспериментальной установки показана на рис. 2. Основные модули:  $G$  – генератор (входит в состав USB приставки), 1 – испытуемый образец, 2 – вторичная обмотка, в которую помещают образец, 3 – вторичная обмотка без образца,  $R$  – сопротивление, напряжение с которого поступает в канал Ch1; сигнал с вто-

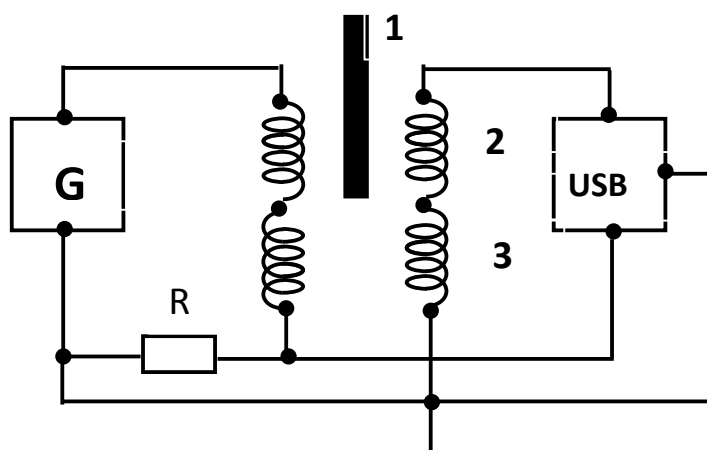


Рис. 2. Электрическая схема экспериментальной установки. Основные модули: USB приставка PClab2000LT,  $G$  – генераторная часть приставки, 1 –испытуемый образец, 2,3 – вторичные обмотки дифференциального трансформатора, включенные навстречу друг другу.

ричных обмоток поступает в канал Ch2. Сдвиг по фазе  $\varphi$  между этими двумя сигналами измеряется с помощью специальной программы в системе USB-приставка–компьютер. Зависимости  $\varphi$  и амплитуды вторичного сигнала от частоты генератора выводятся на экран дисплея компьютера.



# ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

## Измерения

1. Рекомендуется начинать работу с трансформатором без образца.
2. Включить компьютер. После загрузки на экране появится *Рабочий стол*.

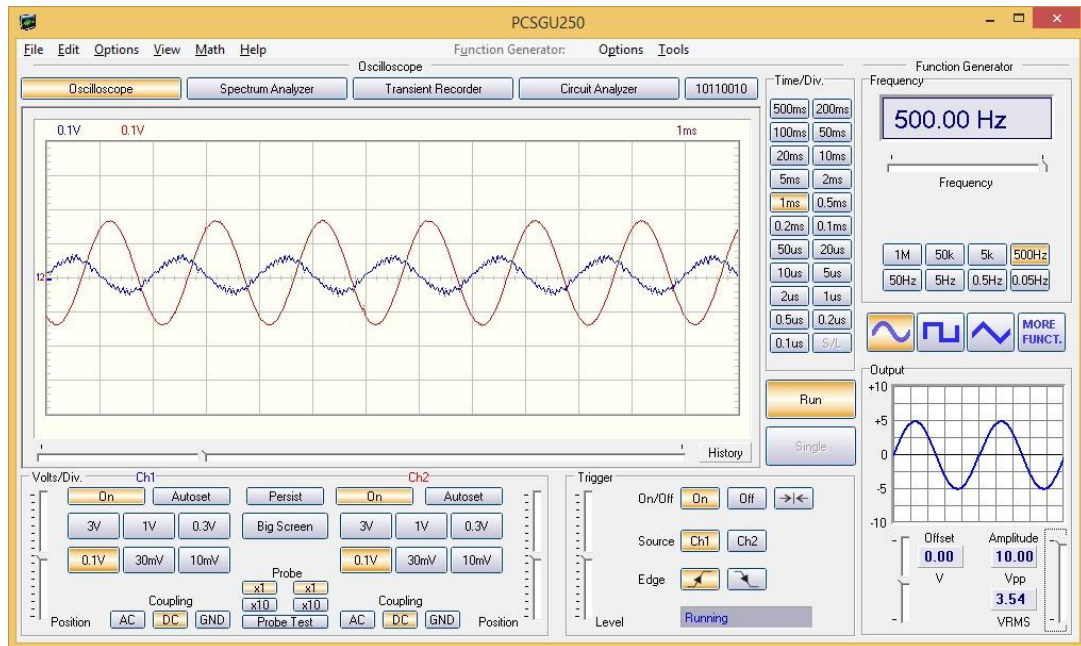


Рис. 3. «Лицевая панель» приставки PClab2000LT.

3. С помощью мыши переместить курсор на значок *PClab2000LT* и, дважды нажав левую клавишу мыши, запустить рабочую программу. На экране дисплея – появится окно программы *PClab2000LT* (рис. 3) в виде координатного поля двухлучевого осциллографа с отсчетом напряжения (в вольтах) по вертикали и длительности (в секундах) по горизонтали и кнопки управления генераторной и осциллографической частью системы.

4. Далее нажимается с помощью мыши картинка гармонического сигнала и кнопки *Run* и *On* (на рис. 3 показан результат вызова сигнала). В нижнем правом углу следует установить амплитуду 10 В. В каналах *Ch1* и *Ch2* установить чувствительность 0.1 В.

5. В строке выше экранного поля нажать *Circuit Analyzer*, после чего появляется поле *Bode Plotter* (Рис. 4), в меню которого следует нажать команду *View* и *Phase plot*.

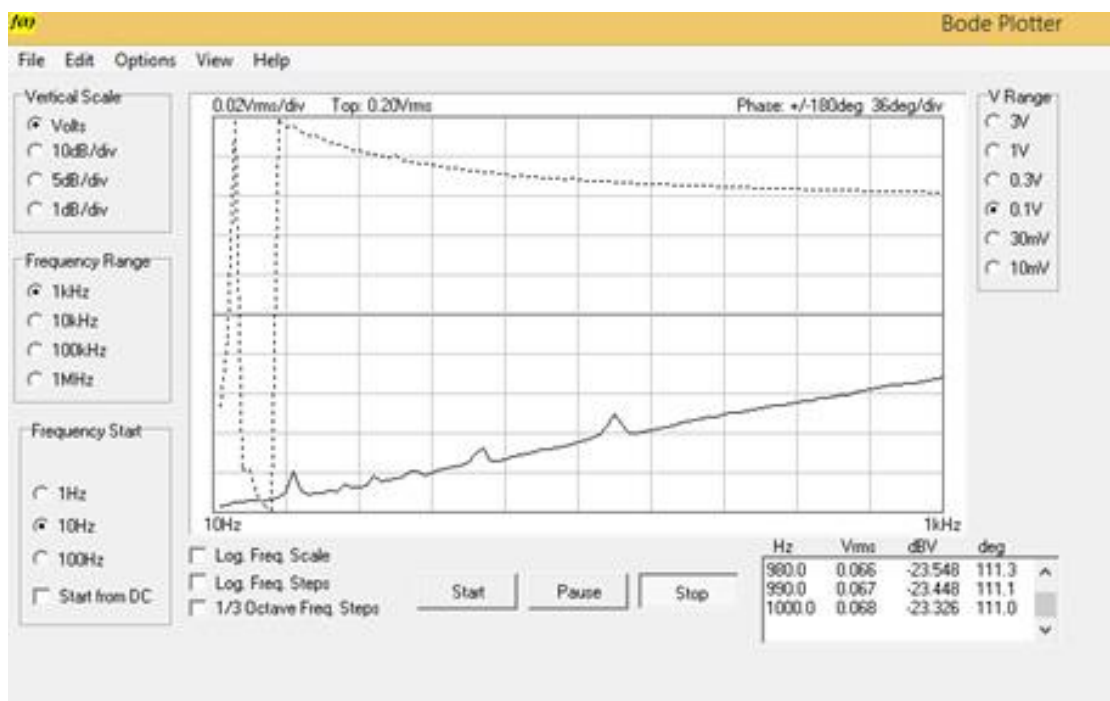


Рис. 4. Частотные зависимости разности фаз напряжения во вторичной обмотке дифференциального трансформатора и магнитного поля в первичной обмотке (верхняя точечная кривая) и амплитуды напряжения (нижняя кривая) во вторичной обмотке.

6. Удалить галочки из окошек с вызовом логарифмического масштаба изменения частоты и шага (ниже левого края экрана).

7. В левом столбце установить, (Volts, 1 kHz и 10 Hz) (как показано на рис. 4), после чего кнопкой *Start* запустить процесс сканирования частоты и построения зависимостей сдвига по фазе и амплитуды сигнала во вторичной обмотке от частоты (зависимость амплитуды не используется в задаче). Графическая информация может быть использована для исключения тех точек, которые явно выпадают из плавного хода фазовой зависимости. Вся рабочая информация отражена в таблице, расположенной в правом нижнем углу.

8. Для трансформатора без образца амплитуда оказывается практически нулевой, а сдвиг по фазе около  $90^\circ$  во всем диапазоне частот, что указывает на правильную работу прибора (объясните – почему?). Таблицу следует со-

хранить отдельным файлом на *Рабочем столе*, присвоив ему имя *Empty* (и скопировать, например, на флешку, если планируется обработка результатов дома). Файл появится в виде зеленой иконки на *Рабочем столе*. Нажатием на нее открывают табличные данные в программе *Libre Office*.

9. В указанном режиме следует повторить измерения для медного, алюминийного и латунного образцов (*материалы с высокой проводимостью*) и сохранить соответствующие файлы под именами Cu, Al и Brass.

10. Для образцов из титанового сплава, стали и свинца (*материалы с относительно низкой проводимостью*) следует (см. п. 7) в левом столбце установить 10 kHz и 100 Hz, восстановить галочки логарифмического масштаба, после чего нажать кнопку *Start*. Полученные файлы сохранить под именами Ti, Pb и Fe.

***В итоге на Рабочем столе (или флешке) будут сохранены семь таблиц, шесть из которых нужно обработать для получения искомым значений электропроводностей исследуемых материалов.***

### ***Обработка результатов***

#### ***1. Нахождение удельных электропроводностей материала образцов.***

1. Первая таблица (для «пустого» трансформатора) нужна лишь для того, чтобы убедиться в нормальной работе трансформатора (почти нулевая амплитуда сигнала во вторичной обмотке и фазовый сдвиг около  $90^\circ$ ).

Для остальных таблиц, полученных в результате эксперимента с шестью разными образцами, осуществляется одна и та же процедура: вычисляются тангенсы углов сдвига фаз  $\varphi$  из соответствующей таблицы, строятся графики зависимости  $\operatorname{tg}\varphi$  от частоты, определяется тангенс угла наклона линейной части зависимости и рассчитывается значение электропроводности. При желании и возможности студенты могут выбрать свой способ реализации указанной процедуры в зависимости от умений и наличия вспомогательных программ, записав предварительно результаты на флешку и удалив свои файлы с *Рабочего стола*.

2. Приведем «ручной» вариант обработки в лаборатории с использованием тех программ, что имеются на *Рабочем столе* (Libre Office, калькулятор, МНК).

Открыть первый файл (например для меди), кликнув левой кнопкой мыши на соответствующий файл. После открытия промежуточной таблицы и повторения вызова открывается основная таблица, в первом столбце которой - частоты, в четвертом – сдвиг фаз в градусах. Второй и третий столбцы не нужны и могут быть удалены.

Значения углов, представленные в форме десятичных дробей с десятичной точкой, следует перевести в форму с запятой: для этого следует пометить столбец  $\varphi$ ; далее нажать *Правка* → *Найти и заменить*: . → , .

Для нахождения тангенса угла  $\varphi$  в пятом пустом столбце напротив первого значения угла делают запись  $E2=tan(D2/57) \rightarrow Enter$ . Вместо записи появляется значение тангенса соответствующего угла. Поместить курсор в угол ячейки с тангенсом и при нажатой правой кнопке мыши потянуть вниз вдоль столбца до конца; весь столбец будет заполнен значениями тангенсов всех углов  $\varphi$  таблицы.

4. Строится зависимость  $tg(\varphi) = F(f)$  (например, с использованием МНК) определяется тангенс угла наклона  $A$  графика зависимости для соответствующего материала (например меди). Из всего массива данных выбирается несколько значений частоты (например, 200, 300, 400, ..., 1000 Гц). Если среди выбранных точек оказываются и те, что резко отклоняются от ожидаемой зависимости, то их следует удалить, а затем повторить построение с оставшимися точками.

Подобным образом находят значения тангенса угла соответствующих графиков наклона для всех шести образцов.

5. Для расчета электропроводностей используется сравнительный метод. В качестве эталонного образца выбирается медь ( $\sigma_{Cu} = 60 \text{ МСм}$ ). Тогда, в соответствии с соотношением (12) для материала образца  $i$  ( $i = \text{Al, латунь, Ti, Pb и Fe}$ ) можно записать:

$$\sigma_i = \sigma_{Cu} \frac{A_i}{A_{Cu}},$$

где  $A_i$  – тангенс угла наклона зависимости  $\text{tg}(\varphi) = F(f)$  для материала образца (i),  $A_{Cu}$  – тангенс угла наклона  $\text{tg}(\varphi) = F(f)$  для Cu.

6. Можно использовать машинный способ обработки таблиц данных (вместо ручного) по выше предложенной программе при наличии соответствующих умений. В этом случае будет использован весь массив данных вместо нескольких выбранных частот в ручной обработке.

7. Представить отчет в форме таблицы значений  $\sigma$  для всех образцов и графики зависимости  $\text{tg}\varphi = F(f)$ .

## ***2. Оценка глубины проникновения (скин-слоя) переменного электромагнитного поля в проводник.***

Скин-эффект существует не только в том случае, когда к концам проводника приложена переменная разность потенциалов и по нему протекает переменный ток, но и когда проводник находится во внешнем переменном электромагнитном поле, созданном любым способом.

В случае сильного скин-эффекта, когда глубина скин-слоя  $\delta \ll h$ , где  $h$  – характерный линейный размер проводника, выведено соотношение [1, 2]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \mu_0 \sigma}},$$

где  $\mu = 1$  для немагнитных проводников.

В данной работе при низких частотах  $f$  (порядка сотен Гц) реализуется слабый скин-эффект, для которого, строго говоря, указанная формула неприменима. Ее можно использовать лишь для оценки порядка величины  $\delta$  при использованных частотах и для сравнения величин  $\delta$  в проводниках с различной электропроводностью.

Отчет состоит в расчете  $\delta$  для всех образцов, используя ранее найденные значения  $\sigma$ , и в построении графиков зависимостей  $\delta$  от  $f$  для всех материалов на одном графике.

*После завершения работы с данными (после перенесения всех данных на флешку или окончания обработки результатов – получении искомых значений  $\sigma$  и  $\delta$ ) следует удалить свои файлы с Рабочего стола.*

### **Основные итоги работы**

*В результате выполнения лабораторной работы должны быть определены удельные электропроводности различных металлов, определена оценка глубины проникновения (скин-слоя) переменного поля в проводнике.*

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое магнитная восприимчивость?
2. Что такое магнитная проницаемость?
3. Что такое магнитная поляризуемость?
4. Что такое вектор магнитной поляризации?
5. Как магнитная поляризация связана с магнитной проницаемостью, восприимчивостью и поляризуемостью?
6. Типы магнетиков и их магнитная восприимчивость.
7. Объясните суть метода дифференциального трансформатора для измерения удельной электропроводности проводников.
8. Как удельная электропроводность проводников связана с глубиной проникновения переменного электромагнитного поля в проводник?

### **Литература**

1. Сивухин Д.В. Электричество. Т. III, М.: Физматлит, 2004.
2. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 2005.
3. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, М.: Физматлит, 2001.
4. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н., Сборник задач по электродинамике, М.: НИЦ «Регул. и хаот. динамика», 2002