

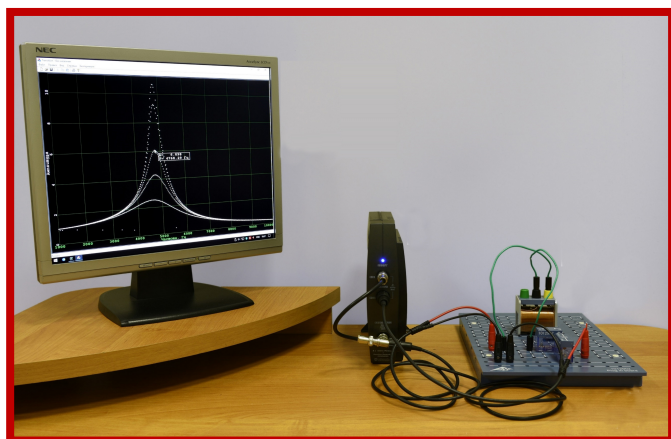
**В.М. Буханов, И.В. Митин, Г.М. Николадзе,
А.М. Салецкий, Д.Э. Харабадзе**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Лабораторный практикум

Часть 2

Цепи переменного тока



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2023

УДК 537
ББК 22.33



Коллектив авторов: Буханов В.М., Митин И.В., Николадзе Г.М., Салецкий А.М., Харабадзе Д.Э.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. Лабораторный практикум.
Часть 2. Цепи переменного тока. Уч.-метод. пособие. – М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023. – 48 с.

Лабораторный практикум содержит описание лабораторных работ по дисциплине «Физика» и предназначен в помощь студентам, выполняющим лабораторные работы по разделу «Электричество и магнетизм». Представлены три лабораторных работы: «Изучение явления резонанса в колебательном контуре», «Колебания в связанных контурах» и «Исследование переходных процессов в LR-, LC- и LRC-цепях». Каждая работа содержит краткое изложение теории изучаемых явлений, описание экспериментальной установки и методику проведения экспериментов и обработки их результатов. Для студентов физических специальностей университетов.

Рецензент: канд. физ.- мат наук, доцент. *А.В. Быков*

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2023 г.
© Коллектив авторов, 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Лабораторная работа 2.1. ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ	6
Цель работы. Идея эксперимента	6
Теория	6
Эксперимент	19
<i>Экспериментальная установка (19). Проведение эксперимента (22).</i>	
Основные итоги работы	30
Контрольные вопросы	31
Литература	31
Лабораторная работа 2.2. КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ	32
Цель работы. Идея эксперимента	32
Теория	32
Эксперимент	39
<i>Экспериментальная установка (39). Проведение эксперимента (42).</i>	
Основные итоги работы	46
Контрольные вопросы	46
Литература	46
Лабораторная работа 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RC-, RL- RLC-ЦЕПЯХ	48
Цель работы. Идея эксперимента	48
Теория	48
Эксперимент	59
<i>Экспериментальная установка (59). Проведение эксперимента (60).</i>	
Основные итоги работы	67
Контрольные вопросы	67
Литература	67

ВВЕДЕНИЕ

Переменным током называется такой электрический ток, который изменяется по величине и направлению во времени. Синусоидальный ток изменяется во времени по гармоническому закону. Наибольшее распространение в электроэнергетике получили электрические цепи синусоидального тока.

В общем случае цепь переменного тока характеризуется тремя параметрами: **активным сопротивлением R** , **индуктивностью L** и **емкостью C** .

Рассмотрим цепи переменного тока с этими элементами.

Цепь переменного тока с активным сопротивлением (рис. 2.1). На входе цепи действует напряжение $U = U_0 \sin \omega t$.

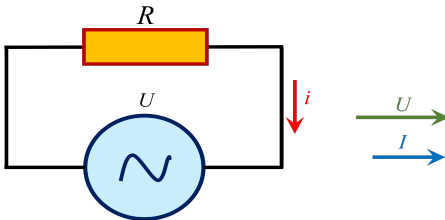


Рис. 2.1. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением

Согласно закону Ома для участка цепи ток равен

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t .$$

То есть в цепи переменного тока с **активным сопротивлением** ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 2.1).

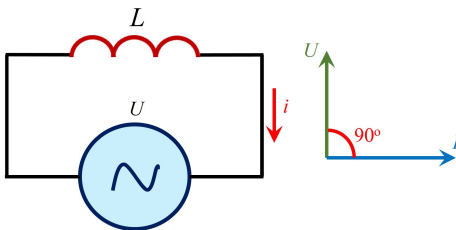


Рис. 2.2. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с индуктивным элементом

Рассмотрим цепь переменного тока с идеальной катушкой ($R=0$) с **индуктивностью L** (рис. 2.2). При подаче синусоидального напряжения на цепь с L в ней протекает ток

$$i = I_0 \sin \omega t . \quad (2.1)$$

В результате этого вокруг катушки возникает переменное магнитное поле

и в катушке наводится ЭДС самоиндукции

$$E = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(I_0 \sin \omega t)}{dt} = -I_0 L \omega \cos \omega t . \quad (2.2)$$

При $R = 0$ напряжение источника U идет на уравновешивание этой ЭДС

$$U = -E. \quad (2.3)$$

Таким образом, ЭДС самоиндукции находится в противофазе с приложенным напряжением.

С учетом (2.2) получаем

$$E = I_0 L \omega \cos \omega t = I_0 X_L \cos \omega t = U_0 \cos \omega t = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.4)$$

где $X_L = \omega L = 2\pi fL$ индуктивное сопротивление.

Из (2.4) следует, что в цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на угол 90° ($\pi/2$) (см. рис. 2.2).

Цепь переменного тока с емкостным элементом (рис. 2.3).

Под действием синусоидального напряжения $U = U_0 C \sin \omega t$ в цепи с емкостным элементом протекает ток

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d(U_0 \sin \omega t)}{dt} = U_0 C \omega \cos \omega t = U_0 C \omega \sin(\omega t + 90^\circ) = \\ &= U_0 C \omega \sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{U_0}{X_C} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_0 \sin(\omega t + 90^\circ), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где C – емкость, q – заряд на емкости, X_C – емкостное сопротивление, равное

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}, \quad (2.6)$$

Из выражения (2.5) видно, что в цепи с емкостным элементом ток опережает по фазе напряжение на угол 90° ($\pi/2$) (рис. 2.3).

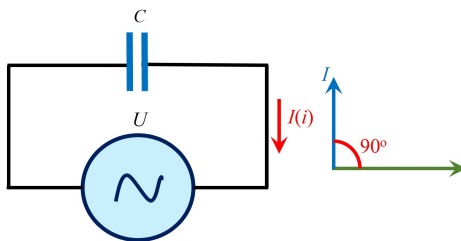


Рис. 2.3. Электрическая схема и векторная диаграмма для цепи с емкостным элементом

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы

Экспериментальное изучение явления резонанса в последовательном и параллельном колебательных RLC контурах. Исследование зависимости амплитуды напряжения на различных элементах колебательного контура от частоты электродвижущей силы внешнего источника.

Идея эксперимента

К колебательному контуру подключается источник гармонического напряжения с плавно изменяющейся частотой. Это позволяет, используя компьютерную систему регистрации, получать амплитудные и фазовые резонансные кривые на различных элементах колебательного контура.

Теория

Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном контуре, элементами которого являются конденсатор C , индуктивность L и активное сопротивление R при подсоединении к нему источника питания последовательно (рис. 2.4, а) или параллельно (рис. 2.4, б). При этом в качестве источника питания используется либо генератор переменной ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \sin \omega t$ (рис. 2.4, а), либо генератор переменного тока $I(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$ (рис. 2.4, б).

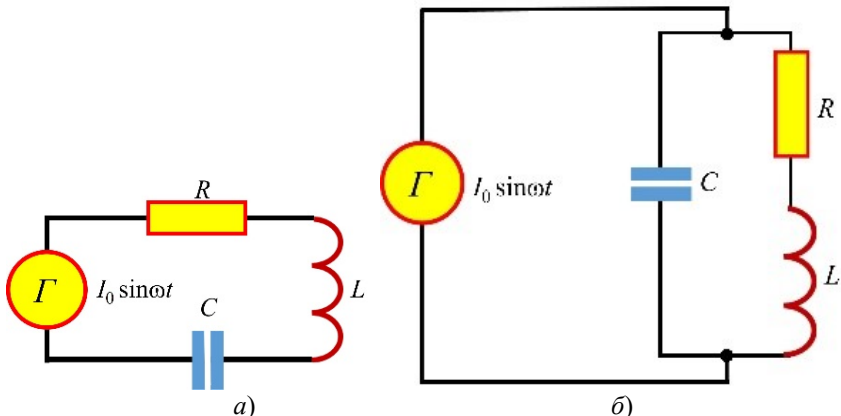


Рис. 2.4. Электрические схемы последовательного (а) и параллельного (б) контуров

Последовательный колебательный контур

Рассмотрим электрическую цепь, включающую в себя последовательно соединенные внешний источник, ЭДС которого меняется по гармоническому закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \sin \omega t$, конденсатор C , индуктивность L и активное сопротивление R (рис. 2.4, а). Записывая закон Кирхгофа для этой цепи, получим уравнение вынужденных колебаний в контуре:

$$L \frac{dI}{dt} - RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cdot \sin \omega t. \quad (2.7)$$

где I – сила тока, протекающего в контуре; q – заряд конденсатора; ε_0 – амплитуда напряжения источника ЭДС; ω – частота напряжения источника ЭДС. Так как сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, то уравнение (2.7) можно записать в следующем виде:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cdot \sin \omega t. \quad (2.8)$$

Разделим обе части уравнения на L и введем обозначения

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (2.9)$$

где ω_0 – собственная частота колебательного контура в отсутствие затухания, δ – коэффициент затухания колебаний.

С учетом обозначений уравнение (2.8) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cdot \sin \omega t. \quad (2.10)$$

Решение данного дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию свободных затухающих колебаний

$$q_{\text{затух}}(t) = q_{0\text{затух}} \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{затух}} t + \varphi)$$

на частоте $\omega_{\text{затух}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ затухающих колебаний, и вынужденных колебаний $q_{\text{вын}}(t)$ на частоте ω внешнего источника.

После полного затухания свободных колебаний в системе установятся только вынужденные колебания¹:

$$q_{\text{вын}}(t) = q_0 \sin(\omega t - \theta) \quad (2.11)$$

где

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.13)$$

Используя выражение (2.11) для q , можно найти закон изменения силы тока в цепи

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\omega \cos(\omega t - \theta) = q_0\omega \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.14)$$

где $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ – разность фаз между фазами ЭДС источника и силы тока в цепи, а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.12) можно записать выражение для зависимости амплитуды силы тока в цепи от частоты ЭДС

$$I_0 = q_0\omega = \frac{\omega\varepsilon_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видно, что амплитудное значение силы тока зависит от частоты ω .

Рассмотрим полученные результаты подробнее. При $\omega = 0$ амплитуда тока $I_0 = 0$. С ростом частоты I_0 возрастает и при

$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ амплитуда силы тока достигает максимального

значения $(I_0)_{\max} = \frac{\varepsilon_0}{2\delta L R_{\max}}$, разность фаз φ при этом равна нулю.

При дальнейшем увеличении частоты I_0 уменьшается, и при

¹ Строгое решение подобных дифференциальных уравнений разбирается в математических курсах, ниже будет рассмотрено решение уравнения с помощью метода векторных диаграмм.

$\omega \rightarrow \infty$ амплитуда тока $I_0 \rightarrow 0$. В итоге зависимость $I_0(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 2.5 (для двух различных значений активного сопротивления). Эта зависимость получила название *амплитудно-частотной характеристики* контура.

Из рис. 2.5 видно, что чем меньше R (меньше коэффициент затухания δ), тем больше I_0 и тем «острее» максимум кривой.

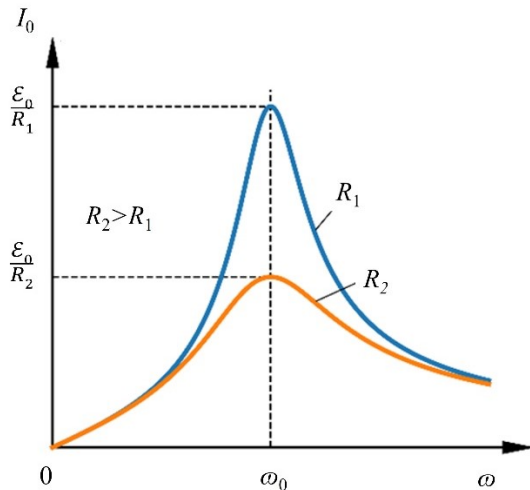


Рис. 2.5. Зависимость I_0 от частоты ω для двух значений R .

На рис. 2.6 приведены зависимости разности фаз φ между фазами ЭДС и силы тока в цепи от частоты ω . Видно, что при частотах, близких к нулю, разность фаз близка к $-\pi/2$ (говорят,

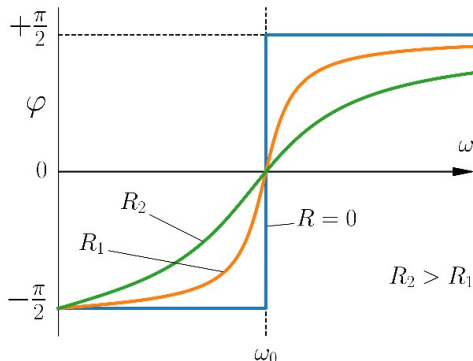


Рис. 2.6. Зависимость φ от частоты ω для двух значений R .

что напряжение отстает по фазе от силы тока на $\pi/2$), при больших частотах разность фаз стремится к $+\pi/2$ (напряжение опережает силу тока по фазе на $\pi/2$). При частоте $\omega = \omega_0$ разность фаз равна нулю. Из рис. 2.6 видно, что чем меньше R , тем быстрее изменение φ вблизи частоты $\omega = \omega_0$, в предельном случае при $R = 0$ фаза изменяется скачком при $\omega = \omega_0$.

Найдем теперь зависимость напряжения на конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$ от частоты ω . Так как $q = \int Idt$, то, проинтегрировав выражение (2.11), получим

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I_0 \sin(\omega t - \theta) dt = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \theta) = U_{C_0} \sin(\omega t - \varphi_C), \quad (2.17)$$

где

$$U_{C_0} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (2.18)$$

– амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе, $\varphi_C = \varphi + \pi/2$ – разность фаз между ЭДС и напряжением на конденсаторе.

При $\omega = \omega_0$

$$U_{C_0} = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0 CR} \approx \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{\sqrt{LC}} CR} = \varepsilon_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 Q, \quad (2.19)$$

где $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ – *добротность* контура. Значение добротности характеризует величину потерь энергии в контуре – чем меньше потери, тем больше добротность². Из формулы (2.19) видно, что при $\omega = \omega_0$ напряжение на конденсаторе в Q раз больше ЭДС

² По определению, добротность $Q = \pi/\theta$, где Q – логарифмический декремент затухания свободных колебаний в контуре. В свою очередь, $\theta = \delta T$, где $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (затухание мало), и после несложных преобразований можно получить формулу $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Также для добротности часто приводят формулу

$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$, где W – энергия, запасенная в контуре, ΔW – потери энергии в контуре за период колебаний.

источника. Это явление носит название *резонанса напряжений*. Можно показать, что амплитуда колебаний напряжения на индуктивности $U_{L_0} = L \frac{dI}{dt}$ при $\omega = \omega_0$ также будет равна $\varepsilon_0 Q$, но при этом напряжение на индуктивности будет меняться в противофазе с напряжением на конденсаторе.

Из формулы (2.18) можно найти частоту ω_C , при которой напряжение на конденсаторе будет максимальным. Для этого надо решить уравнение $\frac{dU_{C_0}}{d\omega} = 0$. После несложных, но громоздких преобразований можно получить:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0, \quad (2.20)$$

$$U_{C_0}(\omega_C) = \frac{\varepsilon_0}{CR \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (2.21)$$

При $Q \gg 1$ можно записать $\omega_C \approx \omega_0$ и $U_{C_0}(\omega_C) = \varepsilon_0 Q$.

Таким образом, измеряя напряжение на конденсаторе на резонансной частоте, можно определить добротность контура Q .

На рис. 2.7 приведен вид зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты ЭДС внешнего источника. $U_{C_0} = \varepsilon_0$ при $\omega = 0$, по мере увеличения частоты U_{C_0} растет и при $\omega = \omega_C \approx \omega_0$ достигает максимального значения $(U_{C_0})_{\max} \approx \varepsilon_0 Q$, после

чего начинается монотонное убывание напряжения до нуля. Обратим внимание на тот факт, что частота ω_C , при которой амплитуда колебаний напряжения на

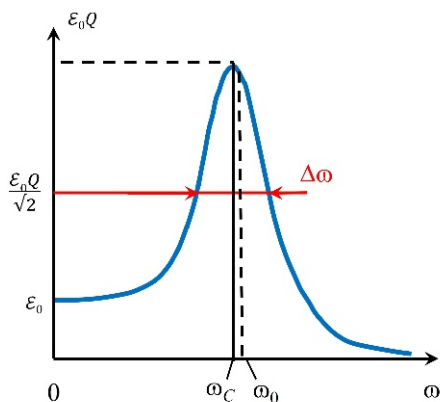


Рис. 2.7. Вид резонансной кривой для напряжения на конденсаторе.

конденсаторе максимальна, несколько меньше частоты ω_0 , для которой максимальна амплитуда силы тока.

Обычно вводится понятие ширины резонансной кривой $\Delta\omega$ – это диапазон частот, для которых амплитуда напряжения отличается от амплитуды напряжения в резонансе не более, чем в $\sqrt{2}$ раз. Можно показать, что для $\Delta\omega \ll \omega_0$ справедливо соотношение $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ или $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Таким образом, определяя ширину резонансной кривой, можно также найти добротность контура Q .

График зависимости разности фаз между фазами напряжения источника ЭДС и напряжения на конденсаторе будет иметь такой же вид, как на рис. 2.6, только «приподнятый» на $\pi/2$, т.к. $\varphi_C = \varphi + \pi/2$. Иными словами, в точке резонанса, когда сила тока в цепи и напряжение источника совпадают по фазе, напряжение на конденсаторе будет отставать по фазе от напряжения источника на $\pi/2$. Напомним, что напряжение на конденсаторе всегда (а не только при резонансе) отстает по фазе от тока, протекающего через конденсатор, на $\pi/2$, в свою очередь, напряжение на индуктивности всегда опережает по фазе силу тока на $\pi/2$.

Для катушки индуктивности резонансная кривая будет немного отличаться от приведенной на рис. 2.7 для конденсатора:

- 1) при $\omega = 0$ амплитуда напряжения на катушке $U_L(\omega = 0) = 0$;
- 2) при $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда напряжения на катушке $U_L(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \varepsilon_0$;

- 3) частота ω_L , при которой амплитуда колебаний напряжения на катушке максимальна, несколько больше частоты ω_0 ,

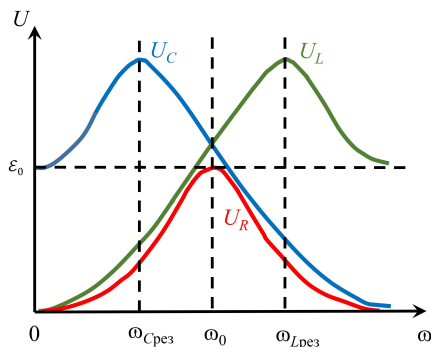


Рис. 2.8. Зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе от частоты.

$$\omega_L = \frac{\omega_0^2}{\omega C \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} > \omega_0;$$

4) в вершине резонансной кривой $U_L(\omega = \omega_L) \approx \varepsilon_0 Q$, т.е. такое же, как и на конденсаторе, то фаза смещена на π (в противофазе).

На рис. 2.8 представлены зависимости амплитуды напряжений на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе от частоты.

Можно заметить, что для резонансных частот на различных элементах справедливы соотношения:

$$\omega_C \omega_L = \omega_0^2, \quad Q = \frac{\sqrt{\omega_L + \omega_C}}{2\sqrt{\omega_L - \omega_C}}.$$

Метод комплексных амплитуд. Векторные диаграммы

Для расчета линейных цепей переменного тока широко применяется *метод комплексных амплитуд*, суть которого состоит в следующем.

Известно, что любой гармонический сигнал

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.22)$$

можно представить в комплексном виде

$$X = \text{Im}(x_0 e^{i(\omega t + \varphi)}) = \text{Im}(x_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = \text{Im}(X_0 e^{i\omega t}), \quad (2.23)$$

где знак Im означает, что берется только мнимая часть выражения, заключенного в скобки; $X_0 = x_0 e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда гармонического сигнала.

Представление гармонического сигнала в комплексном виде позволяет упростить рассмотрение процессов, происходящих в цепях переменного тока. Рассмотрим, например, конденсатор.

Пусть заряд на обкладках изменяется по закону:

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t),$$

тогда для силы тока через конденсатор получим:

$$I_C(t) = \frac{dq}{dt} = q_0 \cos(\omega t) = q_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Переходя к комплексной форме записи и учитывая, что $q(t) = U_C C$, получим:

$$U_C(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{q_0}{C} U_0 e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}(U_0 e^{i\omega t});$$

$$U_C(t) = \operatorname{Im}(U_0 \cdot \omega C \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)}) = \operatorname{Im}(U_0 \cdot i\omega C e^{i\omega t}),$$

(так как $e^{i\pi/2} = i$).

Введем понятие комплексного сопротивления конденсатора Z_C , или *импеданса*, равного отношению комплексных амплитуд колебаний напряжения и силы тока:

$$Z_C = \frac{U_{\text{СКОМП}}}{I_{\text{СКОМП}}} = \frac{U_0}{U_0 i\omega C} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (2.24)$$

Наличие в (2.24) мнимой единицы i свидетельствует о разности фаз $\pi/2$ между силой тока и напряжением, т.е. сила тока, протекающего через конденсатор, опережает по фазе на $\pi/2$ напряжение на конденсаторе.

Аналогичным образом можно получить выражения для импедансов других элементов цепи:

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = i\omega L \quad (2.25)$$

или

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}, \quad Z_L = \omega L e^{i\pi/2}. \quad (2.26)$$

Значение импеданса в общем случае может быть представлено в следующем виде:

$$Z = X + iY = |Z| \cdot e^{i\varphi}, \quad (2.27)$$

где X и Y называют соответственно *активной* и *реактивной* составляющими комплексного сопротивления; $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – модуль импеданса; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$ – аргумент импеданса.

Из приведенных формул следует, что импеданс для резистора имеет только активную составляющую, следовательно, разность фаз между силой тока и падением напряжения равна нулю. Для емкости и индуктивности, напротив, импедансы являются чисто мнимыми, т.е. имеют только реактивную составляющую. Для емкости аргумент импеданса φ_C равен $-\pi/2$, что означает, что падение напряжения на конденсаторе отстает по фазе от силы протекающего через него тока на $\pi/2$. Напротив, для

индуктивности аргумент импеданса φ_L равен $\pi/2$, что означает, что падение напряжения на индуктивности опережает по фазе от силу протекающего через нее тока на $\pi/2$.

Воспользуемся комплексным представлением при решении уравнения (2.7). Так как частота ω одна и та же для всех колебаний в цепи, то множитель $e^{i\omega t}$ можно не указывать, в этом случае (2.7) может быть записано не для мгновенных значений тока и напряжения в цепи, а для их комплексных амплитуд:

$$I \cdot (Z_L + Z_R + Z_C) = U_{\text{ист}},$$

$$U_L + U_R + U_C = U_{\text{ист}},$$

где U и I – комплексные амплитуды колебаний напряжения и тока в цепи соответственно, $U_{\text{ист}}$ – напряжение источника; Z – комплексное сопротивление цепи, называемое *импедансом*.

Зная эти соотношения и применяя законы Кирхгофа к цепям переменного тока, можно сформулировать следующее правило для расчета импеданса цепи: поставить в соответствие каждому элементу цепи его импеданс, а затем использовать правила вычисления суммарного сопротивления цепи для постоянного тока, т.е. при последовательном соединении сопротивления складываются, при параллельном – складываются их обратные величины (проводимости).

Метод комплексных амплитуд имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Каждому комплексному числу $c = a + ib$ можно сопоставить вектор на комплексной плоскости $\mathbf{c} = \{a; b\}$. Длина вектора \mathbf{c} равна модулю числа

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а угол φ , образуемый с действительной осью, является аргументом числа и определяется соотношением

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

(положительный угол соответствует повороту против часовой стрелки).

Для геометрического анализа цепей переменного тока на комплексной плоскости строятся векторы напряжений и токов, соответствующие комплексным амплитудам этих величин для

каждого элемента схемы. При построении необходимо учесть, что сумма векторов напряжений вдоль любого контура цепи равна сумме векторов ЭДС (2-й закон Кирхгофа), а диаграмма векторов тока в любом узле должна быть замкнутой – поскольку сумма токов в узле равна нулю (1-й закон Кирхгофа). Когда диаграмма построена, амплитуда и фаза напряжения между любыми двумя точками определяются длиной и углом поворота вектора, соединяющего эти точки. Для простых цепей такие диаграммы строятся и анализируются достаточно легко и, главное, наглядно.

В качестве примера рассмотрим построение векторной диаграммы для последовательного колебательного контура

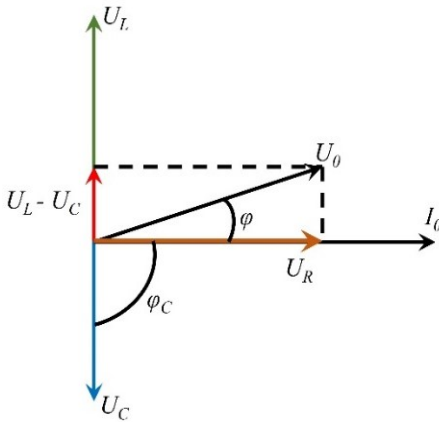


Рис. 2.9. Векторная диаграмма для последовательного контура

(рис. 2.9). Так как импеданс дает информацию о разности фаз между напряжением и силой тока, то значение фазы для какой-либо одной из величин (напряжения или силы тока для любого элемента схемы) можно выбрать произвольно. Для последовательного контура сила тока, протекающего через все элементы схемы, одна и та же, поэтому удобно выбрать для комплексной амплитуды силы тока значение фазы равное нулю (вектор I_0 на рис. 2.9). Тогда

комплексные векторы для амплитуд напряжения на резисторе U_R , катушке индуктивности U_L и конденсаторе U_C могут быть легко найдены из соотношений (2.24) и (2.27). В частности, для емкости комплексный вектор U_C имеет длину $|U_C| = |Z_C| \cdot I_0 = \frac{I_0}{\omega C}$ и фазу $\varphi_C = -\pi/2$. Сумма всех комплексных векторов $U_R + U_C + U_L$ будет равна комплексному вектору U_0 , соответствующему амплитуде и фазе напряжения источника ЭДС. Построенная векторная диаграмма позволяет довольно просто получить ранее выведенные формулы (2.15), (2.16).

Параллельный колебательный контур

Для изучения явлений, наблюдаемых при параллельном соединении элементов контура (рис. 2.4,б), воспользуемся методом комплексных амплитуд. Импеданс цепи находится из следующего соотношения:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \quad (2.28)$$

или

$$Z = \frac{R + i\omega L}{1 + i\omega C(R + i\omega L)} = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 CL + i\omega CR} \quad (2.29)$$

Умножая числитель и знаменатель (2.29) на $(1 - \omega^2 CL) - i(\omega CR)$, получаем:

$$Z = \frac{R + i\omega[L(1 - \omega^2 CL) - CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (2.30)$$

При равенстве мнимой части импеданса нулю, т.е. при выполнении соотношения

$$L(1 - \omega^2 CL) - CR^2 = 0 \quad (2.31)$$

сопротивление цепи эквивалентно омическому.

Решая уравнение (2.31) относительно ω , получаем:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{L - CR^2}{L^2 C} = \omega_0^2 - R^2 \frac{C}{L} \cdot \omega_0^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right), \quad (2.32)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота незатухающих колебаний в

контуре; $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ – добротность контура.

Можно показать, что в этом случае модуль импеданса принимает максимальное значение, равное

$$Z = \frac{L}{CR} + Q^2. \quad (2.33)$$

В настоящей работе для изучения рассматриваемых процессов в схеме, изображенной на рис. 2.4, б вместо генератора ЭДС используется генератор переменного тока $I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$ где I_0 – амплитудное значение силы тока. Тогда значение

комплексной амплитуды падения напряжения на контуре находится из соотношения:

$$U_0 = Z \cdot I_0 = |Z| \cdot I_0 \cdot e^{i\varphi}, \quad (2.34)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega[(1 - \omega^2 CL) - CR^2]}{R}$$

– разность фаз между падением напряжения на контуре и силой тока генератора.

Для частоты $\hat{\omega}$ падение напряжения на контуре будет максимальным: $\hat{U}_0 = \frac{L}{CR} I_0$. Найдем комплексную амплитуду силы тока, протекающего через конденсатор в этом случае (при $Q \gg 1$):

$$\hat{I}_{0C} = \frac{\hat{U}_0}{Z_C} = \frac{L}{CR} \cdot I_0 \cdot i\hat{\omega}C \approx i \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_0 \approx iQ \cdot I_0. \quad (2.35)$$

Таким образом, ток, протекающий через конденсатор, по модулю в Q раз больше тока, даваемого генератором. Это явление носит название *резонанса тока*. Присутствие мнимой единицы в выражении (28) означает, что при резонансе разность фаз между фазами тока через конденсатор и тока от генератора равна $\pi/2$.

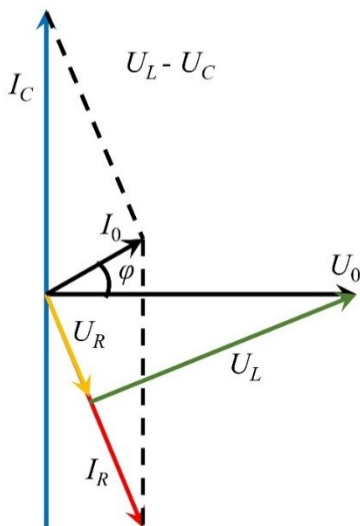


Рис. 2.10. Векторная диаграмма для параллельного контура

График зависимости силы тока, протекающего через конденсатор, от частоты имеет характерный вид резонансной кривой, похожей на изображенную на рис. 2.5 (аналитическое выражение данной зависимости не приводится вследствие его громоздкости). Отметим, что для определения добротности контура с параллельным соединением элементов можно воспользоваться формулой $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, кроме этого,

значение добротности можно оценить по отношению токов на частоте, соответствующей резонансу. Величина разности фаз

также будет функцией частоты тока и будет равна нулю при частоте резонанса ω .

На рис. 2.10 приведена векторная диаграмма для параллельного колебательного контура. При ее построении удобно выбрать для комплексной амплитуды напряжения на контуре U_0 значение фазы равное нулю (вектор U_0 на рис 2.10). Вектор силы тока I_C , протекающего через конденсатор, будет повернут на угол $\varphi_C = \pi/2$ относительно вектора U_0 (ток через конденсатор опережает напряжение на нем по фазе на $\pi/2$). Для последовательно соединенных резистора R и катушки индуктивности L угол между векторами падения напряжения U_R и U_L будет равен $\pi/2$, а их сумма равна U_0 . Вектор силы тока I_R , протекающего по данному участку цепи, сонаправлен с вектором U_R . Тогда вектор силы тока генератора I_0 равен сумме токов I_C и I_R . Данное построение позволяет найти всевозможные фазовые и амплитудные соотношения для параллельного контура.

Обычно в катушках индуктивности $|Z_L| \gg Z_R$, тогда угол между U_0 и I_R близок к $-\pi/2$, а угол между I_C и I_R близок к π . Поэтому полный ток I_0 по модулю много меньше, чем токи I_C и I_R . При резонансе токов вектора U_0 и I_0 сонаправлены (угол φ равен нулю).

Эксперимент

Экспериментальная установка

В состав экспериментальной установки для изучения явления резонанса входят (рис.2.11 и 2.12):

- USB-модуль PClab2000LT;
- блок коммутации;
- элементы схемы (резисторы и конденсаторы), размещаемые на коммутационной плате;
- катушка индуктивности;
- соединительные кабели;
- компьютер.

Модуль PClab2000LT является специальной USB-приставкой к компьютеру, позволяющей генерировать электрические сигналы различной формы (в нашем случае гармонические), частоту которых можно изменять в широких пределах от единиц герц до

сотен килогерц. Сигнал с генератора (гнездо **GENERATOR** в нижней части) подается на блок коммутации и на Вход1 (**CH1**) модуля, на Вход2 (**CH2**) модуля подается напряжение с одного из элементов схемы (на рис. 2.14 с катушки L).

На блоке коммутации собирается колебательный RLC контур из отдельных элементов: катушки индуктивности, конденсатора и резистора. В набор входят одна катушка и по 3-4 конденсатора и резистора различных номиналов.

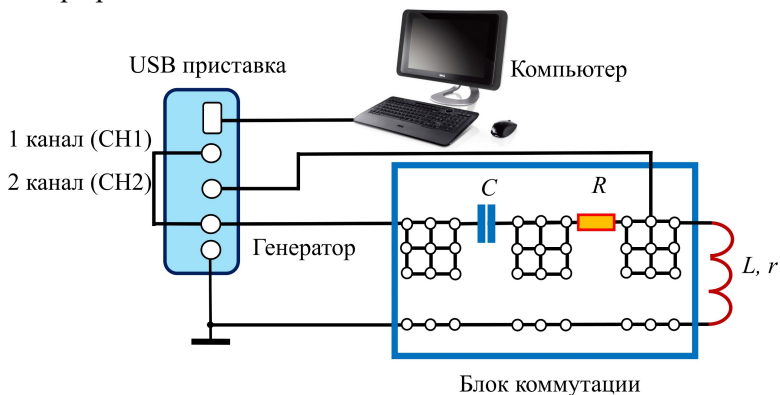


Рис. 2.11. Схема соединения элементов схемы для наблюдения резонанса напряжений в последовательном RLC -контуре (к выходу CH2 подключена катушка индуктивности).

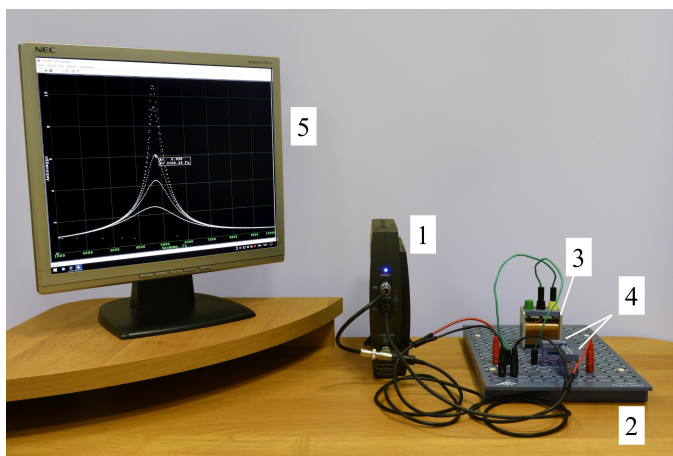


Рис. 2.12. Внешний вид установки: USB модуль PClab2000LT (1); блок коммутации (2); катушка индуктивности (3); R и C элементы контура (4); дисплей ПК (5).

Управление работой установки осуществляется рабочей программой (значок *PClab2000LT* на *Рабочем столе компьютера*). При запуске программы на экране дисплея появляется поле для отображения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура, на котором по вертикали откладывается отношение амплитуд напряжения на **СН2** и **СН1**, а по горизонтали – частота вынуждающего воздействия (в герцах).

В главном меню программы, расположенном в верхней части экрана, находится меню управления генераторной и осциллографической частью USB-модуля. При выборе пункта меню «**Эксперимент**» появляется подменю, в котором присутствуют пункты:

Начать – запускается осциллограф и генератор с плавно меняющейся частотой;

Закончить – прекращается работа осциллографа и генератора;

Параметры генератора и осциллографа – открывается диалоговое окно с параметрами приставки, что необходимо для подстройки оптимальных параметров работы.;

Параметры отображения данных – открывается диалоговое окно, позволяющее выбрать цвета графиков и фона, что может быть полезно при демонстрации эксперимента при помощи проектора.

Кроме того, в этом подменю есть пункты, предназначенные для управления запоминанием результатов эксперимента:

Запомнить данные – запомнить результаты эксперимента в одну из восьми ячеек,

Отобразить память – отобразить на графике данные, запомненные в одной из восьми ячеек,

Скрыть память – скрыть данные, запомненные в одной из восьми ячеек,

Стереть данные – очистить содержимое одной из 8-ми ячеек памяти.

При нажатии команды **Начать** сигнал с генератора USB-модуля поступает на собранную схему. Частота генератора плавно меняется в пределах, указанных в диалоговом окне «Параметры генератора и осциллографа». Осциллограф периодически «захватывает» сигналы с входов **СН1** и **СН2**, отображая напряжение на этих входах в правом верхнем углу дисплея в дополнительном окошке. Программа самостоятельно определяет

по осциллограмме амплитуды сигналов и разность фаз между ними (указываются в верхней части окошка). На АЧХ появляется точка, соответствующая заданной частоте. После этого производится следующий «захват» сигналов при другом значении частоты генератора, и процедура обработки повторяется.

Для примера на рис. 2.13 представлены амплитудные резонансные кривые для последовательного контура, полученные при измерении напряжения на катушке индуктивности при трех значениях сопротивления R . При перемещении курсора по экрану возникает измерительная рамка, в которой можно видеть значение амплитуды A и частоты F в точке курсора.

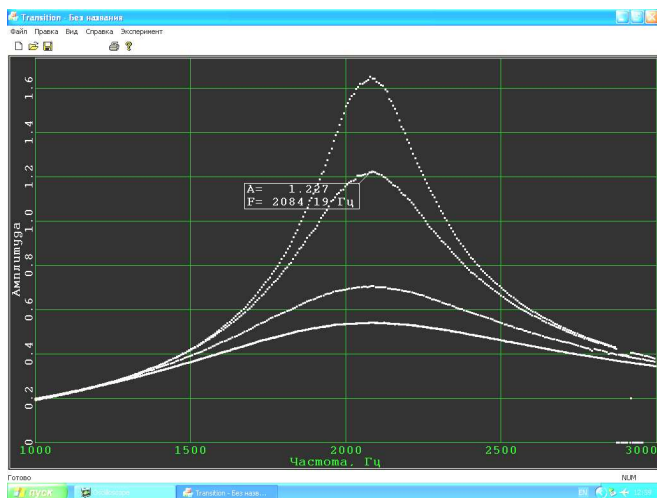


Рис. 2.13. Амплитудные резонансные кривые для последовательного контура, полученные при измерении напряжения на катушке индуктивности при трех значениях сопротивления R .

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение резонанса напряжений в цепи последовательно соединенных L и C (колебательный контур с большой добротностью). Определение неизвестного значения индуктивности катушки L .

Измерения

1. Соберите электрическую схему, согласно рис. 2.14. Последовательно с генератором включите конденсатор известной

емкости C (ее значение запишите в табл. 2.1) и катушку с неизвестными индуктивностью L и собственным сопротивлением обмотки r .

2. Для корректного измерения АЧХ войдите в пункт меню **Эксперимент – Параметры генератора и осциллографа** и зададите:

- **диапазон частот** (начальная и конечная) и **время сканирования по частоте**. Так как резонансная частота контура неизвестна, то первое измерение проводится при параметрах, заданных по умолчанию. В дальнейшем диапазон частот выбирается так, чтобы центр резонансной кривой располагался примерно в центре экрана;

- **амплитуда генератора** первоначально задана по умолчанию;

- **чувствительность каналов 1 и 2** (в вольтах/деление) также первоначально задана по умолчанию.

3. Начните эксперимент, для этого войти в пункт меню **Начать**, при этом в правом верхнем углу экрана появляется дополнительное окно «осциллографа», в котором отображаются два гармонических сигнала **CH1** и **CH2**.

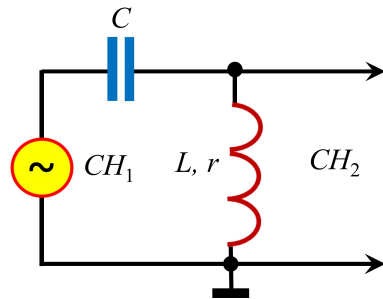


Рис. 2.14. Схема соединения элементов колебательного контура для *Vnp.1*

Если в процессе измерения (сканирования по частоте) сигнал по какому-либо из каналов «зашкаливает» (синусоида «обрезается»), то следует изменить чувствительность соответствующего канала. Так же следует поступать и в случае очень малой (на уровне шумов) амплитуды сигнала. В противном случае расчет параметров сигналов (частота, амплитуда и начальная фаза), выполняемый программой автоматически, может приводить к существенным ошибкам.

При правильно подобранных параметрах эксперимента на экране монитора появится зависимость отношения напряжения на катушке индуктивности $U_{\text{кат}}=U_{\text{CH2}}$ к напряжению генератора $U_{\text{ген}}=U_{\text{CH1}}$ от частоты генератора.

4. Когда будет получено достаточное количество точек, завершите эксперимент, для этого выберите пункт «**Эксперимент/Запомнить данные/Память 1**», после чего в первой ячейке памяти окажутся данные последнего эксперимента. Эти данные автоматически будут отображаться на графике.

5. Выполните пп. 1-4 для трех номиналов C (например, 0,22, 0,47 и 1 мкФ).

Таблица 2.1

Результаты измерений и обработки упражнения 1

C (мкФ)				
$\omega_{рез}$ (Гц)				
A				
$\Delta\omega$ (Гц)				
L (Гн)				
Q				
r (Ом)				

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых для различных значений C определите резонансную частоту $\omega_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне 0,7 A . Результаты запишите в табл. 2.1.

2. По известному значению емкости C_i и измеренной резонансной частоте ($\omega_{рез}$) рассчитайте значение индуктивности катушки L_i :

$$L_i = \frac{1}{4\pi^2 f_{рез}^2 \cdot C}$$

3. По ширине резонансной кривой рассчитайте добротность Q колебательного контура:

$$Q_i = \frac{f_{рез}}{\Delta f}$$

4. По известной емкости C и найденным Q и L рассчитайте сопротивление обмотки катушки r :

$$r_i = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L_i}{C_i}}.$$

5. Для всех величин следует оценить погрешности.
6. Результаты вычислений пп.2-4 записать в табл. 2.1.

Упражнение 2. Изучение резонанса напряжений в цепи последовательно соединенных L , R и C .

а). Исследование зависимости напряжения на конденсаторе в последовательной цепи при различных значениях сопротивления.

Измерение

1. Соберите электрическую схему, представленную на рис. 2.15.

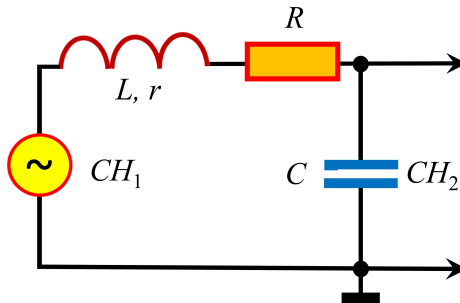


Рис 2.15. Схема соединения для *упр.2, а), б) и в).*

2. Емкость конденсатора конденсатора $C = 0.47$ мкФ. С конденсатора сигнал подается на **СН2**.

3. Снимите и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для четырех сопротивлений $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 5,1$ Ом, $R_3 = 10$ Ом и $R_4 = 22$ Ом.

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых для различных значение R определите резонансную частоту $\omega_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.2.

2. Для каждого из контуров рассчитать добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению

амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения в генераторе (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.2. сравните полученные результаты.

3. Из формулы для добротности $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ следует, что

$$\frac{1}{Q} = (R+r) \sqrt{\frac{C}{L}} = r \sqrt{\frac{C}{L}} + \sqrt{\frac{C}{L}} R,$$

т.е. величина $1/Q$ связана линейной зависимостью с включенным в схему сопротивлением R . Постройте график зависимости $\frac{1}{Q}(R)$ и аппроксимируйте его линейной зависимостью $1/Q = A + BR$ с помощью метода наименьших квадратов. Определите коэффициенты A и B и их погрешности. Рассчитайте индуктивность $L = B^2/C$ и сопротивление катушки $r = A\sqrt{L/C}$.

Таблица 2.2.

Результаты измерений и обработки упражнения 2а

R (Ом)				
$\omega_{рез}$ (Гц)				
A				
$\Delta\omega$ (Гц)				
Q_1				
Q_2				
L (Гн)				
r (Ом)				

Результаты вычислений записать в табл. 2.2. Сравнить их с результатами, полученными в *упр.1*.

б). Исследование зависимости напряжения на конденсаторе в последовательной цепи при различных значениях емкости конденсаторов

Измерение

1. Соберите электрическую схему, представленную на рис. 2.15.
2. Сопротивление $R = 5,1$ Ом. С конденсатора сигнал подается на **СН2**.
3. Снимите и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для пяти конденсаторов $C_1 = 0,22$ мкФ, $C_2 = 0,47$ мкФ, $C_3 = 1,0$ мкФ, $C_4 = 2,2$, $C_5 = 4,7$ мкФ.

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых для различных значение C определите резонансную частоту $\omega_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.3.
2. Для каждого из контуров рассчитать добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения в генераторе (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.3. Сравните полученные результаты.

Таблица 2.3.

Результаты измерений и обработки упражнения 2б

C (мкФ)					
$\omega_{рез}$ (Гц)					
A					
$\Delta\omega$ (Гц)					
Q_1					
Q_2					

3. Из формулы для добротности

$$Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

следует, что добротность Q пропорциональна $1/\sqrt{C}$. Построив график зависимости $Q\left(\frac{1}{\sqrt{C}}\right)$ убедитесь в этом.

в). Исследование зависимости напряжения на конденсаторе, катушки и резисторе в последовательной цепи при фиксированных параметрах этих элементов цепи.

Измерение

Для фиксированной пары резистор и конденсатор (номиналы выбрать самостоятельно) снимите и запомните в памяти компьютера резонансные кривые на конденсаторе (рис. 2.15), катушке (рис. 2.16) и резисторе (рис.2.17).

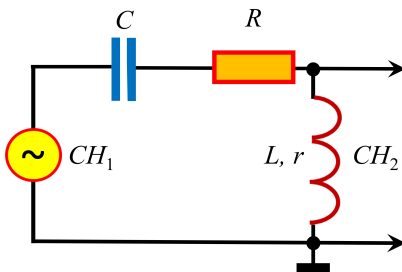


Рис 2.16 Схема соединения для получения резонансной кривой на катушке (упр.2, в).

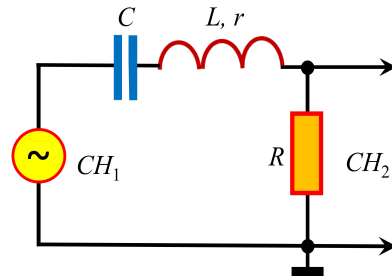


Рис 2.17. Схема соединения для получения резонансной кривой на резисторе (упр.2 в).

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых определите резонансную частоту $\omega_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.4.

Таблица 2.4.

Результаты измерений и обработки упражнения 2в

Элемент	C	L	R
$\omega_{рез}$ (Гц)			
A			
$\Delta\omega$ (Гц)			
Q_1			
Q_2			

2. Для каждого из контуров рассчитать добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению

амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения в генераторе (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.4. Сравните полученные результаты.

3. Сравните резонансные частоты, полученные при измерении на разных элементах контура. Проверьте их соответствие теоретическим формулам (при оценивании коэффициента затухания δ учесть сопротивление r катушки).

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0,$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} > \omega_0,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

4. Проверьте выполнение формул:

$$\omega_L \cdot \omega_C = \omega_0^2, \quad Q = \frac{\sqrt{\omega_L + \omega_C}}{2\sqrt{\omega_L - \omega_C}}.$$

Упражнение 3. Изучение резонанса токов в цепи L , R и C , включенных параллельно генератору.

Измерение

1. Соберите схему параллельного контура, показанную на рис. 2.18 (номиналы выбрать самостоятельно). Между генератором и колебательным контуром включите балластный резистор с большим сопротивлением $R_\delta = 33$ кОм. Это позволяет считать, что сила тока от генератора остается практически неизменной (не зависит от частоты). Обратите внимание, что в данном эксперименте измеряются не токи (как в теории), а по прежнему напряжения.

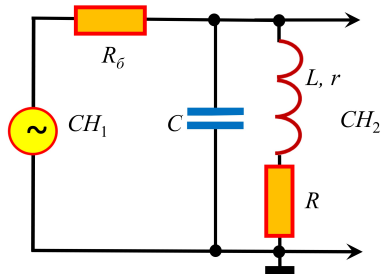


Рис 2.18. Схема соединения для *упр.3*

2. Проведите измерения резонансной кривой. Так как амплитуда сигнала на CH_2 очень мала, измените чувствительность этого канала.

3. Снимите и запомните в памяти компьютера резонансные кривые для четырех сопротивлений. Проведите измерения для 2 – 3 различных значений сопротивления R , получив все кривые на одном графике. Дайте объяснение полученным результатам. Данные запишите в табл. 2.5.

Обработка результатов

1. Поочередно вызывая из памяти (команда **Отобразить память**) результаты измерения резонансных кривых для различных значений R определите резонансную частоту $\omega_{рез}$, амплитуду A и ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ на уровне $0,7A$. Результаты запишите в табл. 2.5.

2. Для каждого из контуров рассчитать добротность двумя способами: по ширине резонансной кривой (Q_1) и по отношению амплитуды напряжения в резонансе к амплитуде напряжения в генераторе (Q_2). Результаты запишите в табл. 2.5. сравните полученные результаты. Обратите внимание, что одним из предложенных ранее способов сделать это не удастся (почему?).

Таблица 2.5.

Результаты измерений и обработки упражнения 2а

R (Ом)				
$\omega_{рез}$ (Гц)				
A				
$\Delta\omega$ (Гц)				
Q_1				
Q_2				

3. Сравните полученные характеристики с измерениями в случае последовательного соединения элементов с теми же номиналами.

4. Вызовите из памяти компьютера все кривые на одном графике. Дайте объяснение полученным результатам.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть измерены зависимости амплитуды напряжения на различных элементах в последовательном и параллельном колебательных RLC контурах от частоты электродвижущей силы внешнего источника.

Контрольные вопросы

1. Напишите дифференциальное уравнение, описывающее процессы, происходящие в последовательном колебательном контуре.
2. В чем разница между собственными и вынужденными колебаниями?
3. Как выглядит амплитудно-частотная характеристика последовательного контура при различных значениях активного сопротивления?
4. Чему равен импеданс последовательного контура?
5. Нарисуйте и объясните векторную диаграмму последовательного контура.
6. Чему равна разность фаз между силой тока в контуре и напряжением на конденсаторе? Как она зависит от частоты?
7. Что такое резонанс напряжений? Резонанс токов? В каких контурах наблюдается каждый из них?
8. Нарисуйте и объясните векторную диаграмму параллельного контура.
9. Что такое добротность контура? Как ее найти по амплитудно-частотной характеристике контура?
10. Как по графикам найти разность фаз между двумя гармоническими сигналами?

Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер.-СПб: Издательство «Лань», 2010, §50.
2. Алешкевич В.А. Электромагнетизм.-М. Физматлит, 2014, Лекция 18.

Лабораторная работа 2.2

КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

Цель работы

Изучение установившихся вынужденных колебаний в связанных линейных контурах с индуктивной и емкостной связью.

Идея эксперимента

К генератору тока подключается или одиночный колебательный контур, или два одинаковых колебательных контура, связанных либо индуктивным (рис. 2.19), либо емкостным образом (рис. 2.20). Плавно изменяя частоту вынуждающего воздействия на колебательную систему, наблюдают изменение амплитуды напряжения на экране осциллографа, т.н. амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) или амплитудную резонансную кривую соответствующей колебательной системы (одиночного контура или связанных контуров).

Теория

Индуктивно связанные контуры. Физические системы, которые могут обмениваться энергией, называют связанными. Электрические колебательные системы (LC контура) могут быть связаны емкостным, индуктивным или гальваническим (через резистор) образом. Возможность обмена энергией не означает, что он обязательно имеет место. При задании специальных начальных условий, части системы, способные обмениваются энергией, не участвуют в обмене; в результате, в них происходят процессы, характерные для их изолированного состояния. Например, в линейных колебательных системах будут иметь место гармонические колебания. Такие колебания без обмена энергией называют нормальными.

Рассмотрим два идентичных индуктивно связанных LC контура (рис. 2.19). Будем считать, что внешнего воздействия нет, т.е. генератор пока отключен. Активное сопротивление контуров и соединительных проводов R_1 и R_2 обычно мало, поэтому положим в расчетах $R_1 = R_2 = 0$.

Будем считать, что в контурах текут переменные токи I_1 и I_2 , мгновенные направления которых показаны стрелками на рис. 2.19. Эти токи протекают через катушки L_1 и L_2 и создают магнитные поля с индукцией B_1 и B_2 , а значит, магнитные потоки. В случае, когда оси катушек L_1 и L_2 совпадают, а токи I_1 и I_2 в витках катушек

направлены так как показано на рис. 2.19, магнитное поле в области между катушками равно суммарному полю $B_1 + B_2$ катушек. Тогда магнитный поток принимает вид $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$ через катушку L_1 и $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{12} I_1$ через катушку L_2 . Изменение токов I_1 и I_2 приведет к изменению магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 . т.е.

к появлению ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Следовательно, ЭДС индукции будет

$$\mathcal{E}_1 = -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right)$$

в первом контуре и

$$\mathcal{E}_2 = -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{12} \frac{dI_1}{dt} \right)$$

во втором.

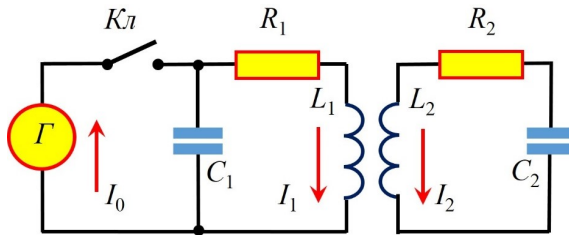


Рис. 2.19. Схема соединения элементов для исследования вынужденных колебаний в индуктивно связанных контурах.

Запишем уравнения Кирхгофа для контуров (рис. 2.19) и получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int I_1 dt &= -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right) \\ \frac{1}{C_2} \int I_2 dt &= -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{12} \frac{dI_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

В случае одинаковых контуров $L_1 = L_2 = L$ и $C_1 = C_2 = C$. Сложим первое и второе уравнения системы (2.36), а затем вычтем второе уравнение из первого. Учитывая, что заряды q_1 и q_2 на конденсаторах C_1 и C_2 равны $q_{1,2} = \int I_{1,2} dt$, получим после преобразования следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}(L + L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} [q_1 + q_2] + \frac{1}{C} [q_1 + q_2] &= 0, \\ (L - L_{12}) \frac{d^2}{dt^2} [q_1 - q_2] + \frac{1}{C} [q_1 - q_2] &= 0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Введем вместо q_1 и q_2 новые переменные:

$$\begin{aligned}q^{(+)} &= q_1 + q_2, \\ q^{(-)} &= q_1 - q_2.\end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2.37) преобразуется в систему двух независимых уравнений гармонических колебаний:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 q^{(+)}}{dt^2} + \omega_{H1}^2 q^{(+)} &= 0, \\ \frac{d^2 q^{(-)}}{dt^2} + \omega_{H2}^2 q^{(-)} &= 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_{H1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + L_{12}/L}}, \quad \omega_{H2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - L_{12}/L}},\tag{2.39}$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Уравнения (2.38) описывают т.н. нормальные колебания (или моды) в индуктивно связанных контурах, показанных на рис. 2.19. Поэтому введенные нами функции $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ называются нормальными координатами, а частоты ω_{H1} и ω_{H2} , определяемые формулами (2.39), – нормальными частотами. Заряды, а следовательно, и токи, возникающие в связанных контурах, могут быть представлены как суперпозиция величин $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$, которые, как следует из уравнений (2.38), в линейных системах изменяются по гармоническому закону. Таким образом, мы видим, что произвольное колебание в таких связанных контурах можно представить как суперпозицию двух нормальных колебаний с нормальными частотами (2.39).

Для возбуждения нормальных колебаний в контурах с индуктивной связью, по аналогии с механическими связанными системами, необходимо выполнение определенных начальных условий; в противном случае мы получим не нормальные колебания, а их некоторую суперпозицию. В случае, когда ω_{H1} и ω_{H2} близки по величине, наблюдают т.н. биения, т.е. колебания с

частотой ω_0 и медленно меняющейся (по гармоническому закону) амплитудой.

Итак, система двух связанных контуров имеет две нормальные частоты, следовательно, она должна иметь две резонансные частоты при воздействии на нее внешней вынуждающей ЭДС.

Раздельное наблюдение двух резонансных пиков возможно при определенных условиях.

Степень влияния контуров друг на друга количественно оценивают коэффициентом связи K , который определяется как среднее геометрическое из коэффициентов связи первого контура со вторым K_1 и второго контура с первым K_2 :

$$K = \sqrt{K_1 K_2}. \quad (2.40)$$

Коэффициенты связи определяются отношением коэффициентов взаимной индуктивности катушек к их собственным индуктивностям: $K_1 = L_{21}/L_1$ и $K_2 = L_{12}/L_2$. Так как $L_{12} = L_{21}$ и $L_1 = L_2 = L$, для коэффициента связи K получим:

$$K = L_{12}/L. \quad (2.41)$$

Эти формулы можно обобщить на случай любого типа связи между контурами:

$$K = -\frac{X_{св}}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (2.42)$$

где $X_{св}$, X_1 , X_2 , – реактивное сопротивление связи и реактивные сопротивления элементов контуров того же типа, что и связь (индуктивное или емкостное), соответственно.

Условно связь контуров оценивается по коэффициенту (2.42) следующим образом:

очень слабая связь	$K < 0.001$,
слабая связь	$K = 0.01 - 0.05$ (1 – 5%),
сильная связь	$K = 0.05 - 0.90$ (5 – 90%),
очень сильная (жесткая) связь	$K > 0.90$.

Учитывая (2.42), формулы для резонансных (нормальных) частот двух индуктивно связанных контуров (2.39) можно переписать следующим образом:

$$\omega_{p1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}, \quad \omega_{p2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}. \quad (2.43)$$

Исключив K из этих формул, получим выражение для расчета собственной частоты ω_0 отдельного контура:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\omega_{p1}\omega_{p2}}{\sqrt{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2}}. \quad (2.44)$$

Как видно из формул (2.44), увеличение коэффициента связи приводит к тому, что разница между резонансными частотами ω_{p1} и ω_{p2} увеличивается. Поскольку в реальных контурах имеются омические потери (активное сопротивление катушки и соединительных проводов), то каждый резонансный пик обладает определенной шириной $\Delta\omega$. Ширина резонансной кривой связана с добротностью Q известным соотношением:

$$\Delta\omega_{1,2} = \omega_{p1,2}/Q_{1,2}. \quad (2.45)$$

На резонансной кривой два пика будут различимы, если разность между резонансными частотами будет больше, чем ширина резонансных пиков

$$\omega_{p2} - \omega_{p1} > \Delta\omega_1, \Delta\omega_2. \quad (2.46)$$

Более детальный анализ показывает, что условию (2.46) эквивалентно условие:

$$Q_2 K > 1, \quad (2.47)$$

где Q_2 – добротность второго контура.

Так как здесь $Q_1 = Q_2 = Q$, два связанных контура ведут себя как один контур, у которого имеется только одна резонансная частота (т.е. два пика становятся неразличимыми), при $QK < 1$.

Контур с емкостной связью. Для контуров на рис. 2.20 (с отключенным генератором) запишем уравнения согласно правилам Кирхгофа, подобно тому, как были записаны уравнения (2.36) для индуктивно связанных контуров:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt + \frac{1}{C_{св}} \int (I_1 - I_2) dt &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt - \frac{1}{C_{св}} \int (I_1 - I_2) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Вновь рассмотрим случай одинаковых контуров, когда $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, а омическим сопротивлением в цепи пренебрегаем. Сложим первое и второе уравнения системы (2.48), а затем вычтем второе уравнение из первого. Учитывая, что заряды

q_1 и q_2 на конденсаторах C_1 и C_2 равны $q_{1,2} = \int I_{1,2} dt$, после преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2}{dt^2} [q_1 + q_2] + \frac{1}{C_1} [q_1 + q_2] &= 0, \\ L \frac{d^2}{dt^2} [q_1 - q_2] + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{\text{св}}} \right) [q_1 - q_2] &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

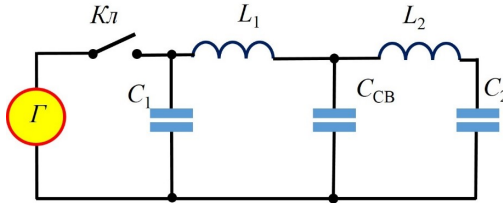


Рис. 2.20. Схема соединения элементов для исследования вынужденных колебаний в контурах с емкостной связью.

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} A &= q_1 + q_2, \\ B &= q_1 - q_2. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2.49) преобразуется в систему двух независимых уравнений гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_{H1}^2 A &= 0, \\ \frac{d^2 B}{dt^2} + \omega_{H2}^2 B &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_{H1} = \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \omega_{H2} &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{LC_{\text{св}}}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2C}{C_{\text{св}}}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Уравнения (2.51) описывают нормальные колебания в контурах с емкостной связью (рис. 2.20). Поэтому формулы (2.51) дают нормальные частоты для случая емкостной связи между контурами.

Поскольку система двух связанных контуров имеет две нормальные частоты, то при подключении внешнего генератора

гармонического сигнала с изменяющейся частотой (рис. 2.20), она должна иметь две резонансные частоты. Резонанс наступает, когда частота внешнего генератора будет совпадать с одной из нормальных частот системы.

Рассмотрим вопрос о раздельном наблюдении двух резонансных пиков для емкостной связи. Степень влияния контуров друг на друга оценим по коэффициенту связи K , заданному обобщенной формулой (2.42):

$$K = -\frac{X_{\text{св}}}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (2.52)$$

где $X_{\text{св}} = -\frac{1}{\omega C_{\text{св}}}$ – емкостное сопротивление связи, $X_1 = \frac{1}{\omega C_A}$ – реактивное сопротивление в первом контуре того же типа, что сопротивление связи, $X_2 = \frac{1}{\omega C_{\text{св}}}$ – реактивное сопротивление во втором контуре того же типа, что сопротивление связи, где $C_A = -\frac{C_1 C_{\text{св}}}{C_1 + C_{\text{св}}}$ и $C_B = -\frac{C_2 C_{\text{св}}}{C_2 + C_{\text{св}}}$.

Тогда коэффициент K для двух одинаковых контуров с емкостной связью по формуле (2.52) записывается как:

$$K = \frac{\sqrt{C_A C_{\text{св}}}}{C_{\text{св}}} = \frac{C}{C + C_{\text{св}}}. \quad (2.53)$$

Оценки типа связи по коэффициенту (2.53) такие же как для системы с индуктивной связью.

С учетом формул (2.51) выражения для резонансных частот (совпадающих с нормальными частотами) будут записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{p1}} = \omega_{\text{H1}} &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \\ \omega_{\text{p2}} = \omega_{\text{H2}} &= \omega_{\text{H1}} \sqrt{1 + \frac{2C}{C_{\text{св}}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+K}{1-K}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Как видно из формул (2.54), увеличение коэффициента связи приводит к увеличению разницы между резонансными (нормальными) частотами ω_{p1} и ω_{p2} (ω_{H1} и ω_{H2}).

Как и в случае с индуктивной связью, два пика будут различимы, если разность между резонансными частотами будет больше, чем ширина резонансных пиков

$$\omega_{H2} - \omega_{H1} > \Delta\omega_1, \Delta\omega_2,$$

что соответствует условию:

$$QK > 1, \quad (2.55)$$

где Q – добротность любого из идентичных контуров.

При $QK < 1$ два связанных контура ведут себя как один контур, у которого имеется только одна резонансная частота.

Эксперимент

Экспериментальная установка

Блок-схема основных элементов установки представлена на рис. 2.21. Приставка PClab2000LT (USB модуль) соединена с компьютером и с LC контурами через блок коммутации. Блок позволяет изменять тип связи контуров (индуктивный или емкостной) и подключать поочередно разные $C_{св}$ из набора пяти конденсаторов при емкостной связи.

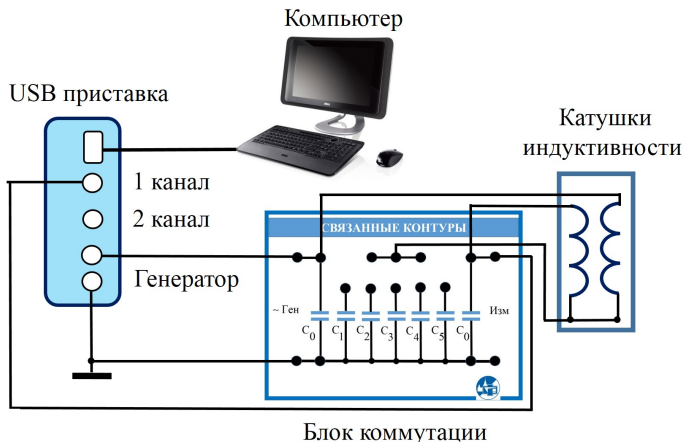


Рис. 2.21. Схема соединения элементов установки для наблюдения резонансов в связанных контурах.

Общий вид установки для изучения вынужденных колебаний в связанных контурах показан на фотографии (рис. 2.22).

Модуль PClab2000LT, представляющий собой специальную USB-приставку к компьютеру, позволяет генерировать электрические сигналы различной формы (гармонические, пилообразные и

прямоугольные), период (или основную частоту $f = 1/T$) которых можно изменять в широких пределах от единиц герц до десятков килогерц.

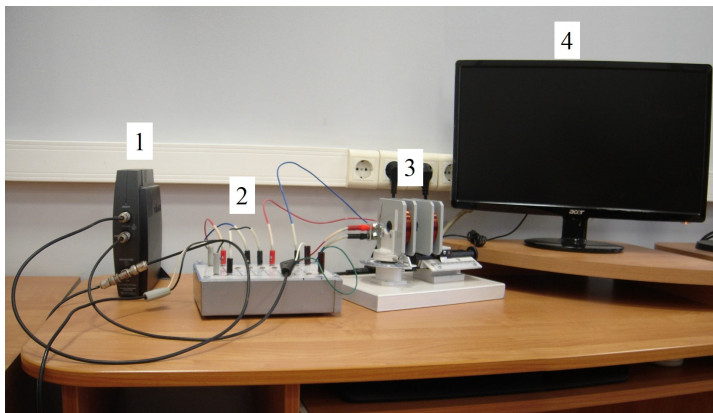


Рис. 2.22. Внешний вид установки для исследования резонансов в связанных контурах: USB приставка PClab2000LT (1), блок коммутации (2), катушки индуктивностей с механизмом изменения расстояния между ними (3) и и дисплей компьютера (4).

Блок катушек индуктивности (рис. 2.23) состоит из двух катушек (1, 2), которые подключаются к электрической цепи с помощью гнезд 3. Катушки установлены на станине 4. Расстояние между катушками можно изменять с помощью механизма 5. Изменение осуществляется вращением ручки 6, а величина смещения регистрируется с помощью шкалы 7. Одна из катушек может поворачиваться относительно вертикальной оси с помощью рычага 8. Угол поворота измеряется с помощью угловой шкалы 9.

В этой работе используются гармонические колебания, частоту которых может плавно изменять с заданной скоростью в определенных пределах для вынуждающего воздействия на исследуемую колебательную систему. На рис. 2.24 представлен пример амплитудой резонансной кривой для связанных контуров. Рядом с первым пиком показана измерительная рамка, в которой содержится значение амплитуды A и частоты F в точке помещения курсора.

Перемещая курсор с прямоугольной рамкой (рис. 2.24) в нужную точку кривой с помощью мыши можно измерить

резонансные частоты, амплитуды резонансных пиков и их ширину (например, на уровне 0,7).

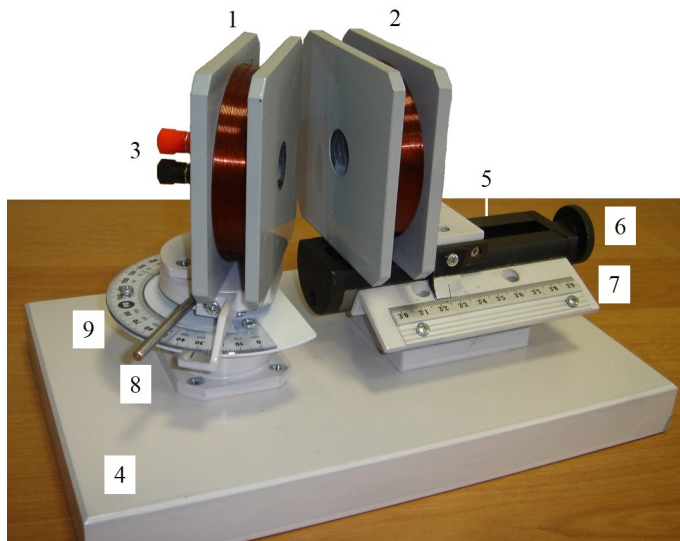


Рис. 2.23. Блок катушек индуктивности.

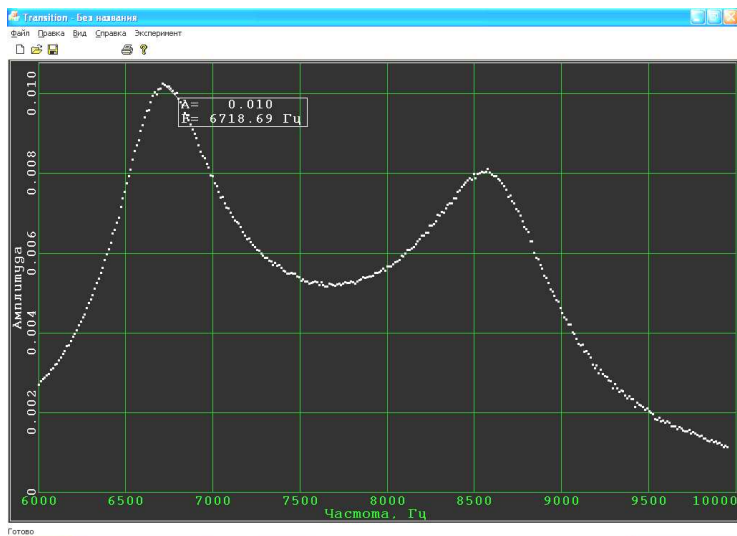


Рис. 2.24. Амплитудная резонансная кривая (АЧХ) двух одинаковых индуктивно связанных контуров в *упр 2*.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Изучение резонанса в уединенном (несвязанном) контуре

Измерение

В данном упражнении используется только один контур (неподвижный).

1. Собрать схему, показанную на рис. 2.25.

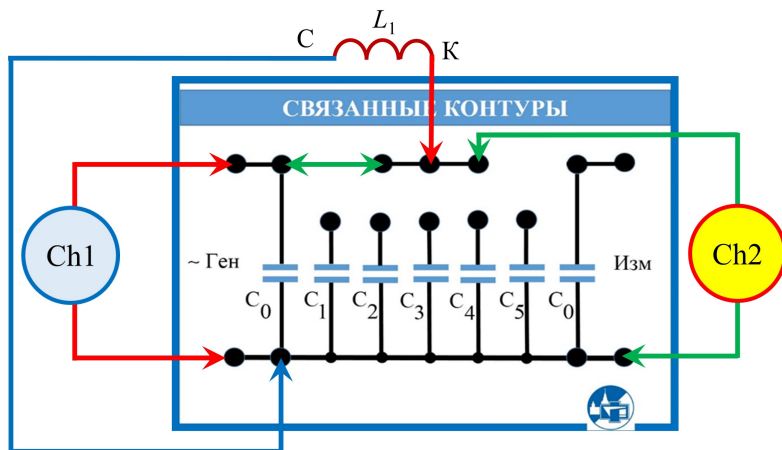


Рис. 2.25. Схема соединений в блоке коммутации для наблюдения АЧХ уединенного контура.

2. Включить компьютер. После загрузки ПК на экране появится *Рабочий стол*. С помощью мыши поместить курсор на значок *Transition* и, дважды нажав левую клавишу мыши, запустить рабочую программу (если не удастся запуск таким образом, следует нажать правую клавишу и в появившемся меню выбрать команду *Открыть*). На экране дисплея появится «пустое» (без кривой) окно, подобное тому, что на рис. 2.24, представляющее собой координатное поле осциллографа с отсчетом амплитуды в произвольных единицах (слева по вертикали) и частоты генератора (в герцах) по горизонтали.

3. В верхней командной строке выбирается курсором команда *Эксперимент*. После нажатия на нее открывается меню, в котором выбираем команду *Начать*. Нажатием на нее запускаем генератор плавно меняющейся частоты (диапазон сканирования и

его скорость предварительно установлены, но могут быть изменены в случае необходимости третьей строчкой меню).

4. На экране наблюдается процесс построения АЧХ (амплитудной резонансной кривой), который можно прервать нажатием на команду *Завершить* после достижения наибольшей частоты сканирования (или раньше, если основная часть кривой (максимум) уже проявилась и далее идет монотонное убывание амплитуды. Результатом в этом упражнении будет осциллограмма с амплитудной резонансной кривой типа той, что показана на рис. 2.24, но с одним пиком.

5. Перемещая с помощью мыши курсор с прямоугольной рамкой на максимум амплитудной кривой, определяем соответствующие ему значение резонансной частоты и амплитуды. Далее в тексте вместо A и F (указанные в рамке) будем использовать обозначения V и f , общепринятые для напряжения и линейной частоты ($f = \omega/2\pi$, где ω – круговая частота).

В максимуме кривой обозначим через f_0 резонансную частоту и через V_{\max} амплитуду. Перемещая рамку вдоль резонансной кривой в точки с $0,7V_{\max}$, определяем ширину $\Delta f_{0,7}$ резонансного пика на заданном уровне, что позволяет рассчитать добротности контуров по известной формуле $Q = f_{\max}/\Delta f_{0,7}$. Полученные данные заносим в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Характеристики резонансной кривой

Номер измерения	f_0	V_{\max}	$0,7 V_{\max}$	$f_{-0,7}$	$f_{+0,7}$	Δf
1						
2						
3						

Обработка результатов

1. Проведите статистическую обработку результатов по данным из трех кривых. Вычислите средние значения всех величин прямых измерений, а также их среднеквадратичные погрешности. По этим значениям рассчитайте добротность контура Q .

- По частоте f_0 и известной емкости $C_0 = 0,47$ мкФ найдите индуктивность L (по формуле Томпсона $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$).
- Из полученных Q и L и заданному C_0 рассчитайте омическое сопротивление R контура по формуле $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
- В отчете следует представить полученные значения f_0 , Q , L и R для уединенного LC контура.

Упражнение 2. Изучение АЧХ индуктивно связанных контуров

- Установите минимальное расстояние $d_{\min} = 0$ между катушками индуктивности (катушки соосны, их плоскости параллельны).
- Соберите схему, согласно рис. 2.26.

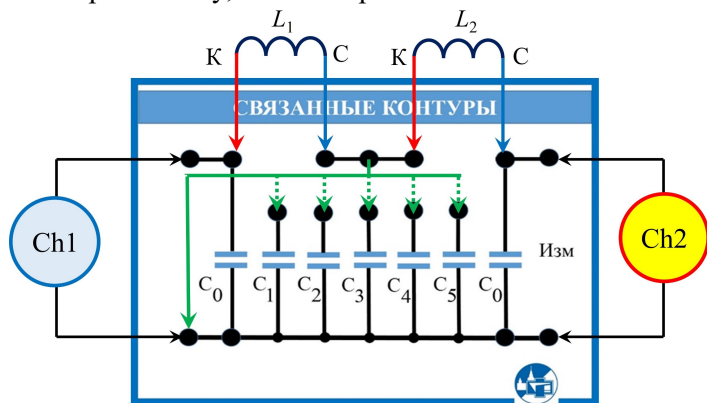


Рис. 2.26. Схема соединений в коммутационном блоке для наблюдения АЧХ.

- Таким же образом, как для уединенного контура, снимите резонансные кривые связанных контуров (при параллельном взаимном положении катушек), изменяя расстояние между ними в диапазоне от $d_{\min} = 0$ до $d_{\max} = 60$ мм (с шагом 5 мм для двугорбых кривых и 10 мм для одnogорбых кривых, образующихся при слиянии максимумов).

Для каждой двугорбой кривой определите резонансные частоты в максимумах кривой, являющиеся нормальными (собственными) частотами f_{01} и f_{02} системы связанных контуров.

Данные запишите в табл. 2.7. Измерения повторите три раза; найдите средние значения и погрешности измерений для f_{01} и f_{02} .

Таблица 2.7

Частоты f_{01} и f_{02} для различных значений d между катушками

d	0	5	10	15	20	25	30	35	40
f_{01}									
f_{02}									

4. Для двугорбых кривых рассчитайте значения f_0 по формуле $f_0 = \frac{\sqrt{2}f_{01}f_{02}}{\sqrt{f_{01}^2 + f_{02}^2}}$ и измеренным частотам f_{01} и f_{02} ; сравните с результатами из *упр. 1*.

5. На одном графике постройте зависимости $f_{01}(d)$, $f_{02}(d)$ и $f_0(d)$.

6. По данным для f_{01} и f_{02} и значения L , вычисленного в *упр. 1*, рассчитайте коэффициент взаимной индукции L_{12} по формулам (4) и постройте график зависимости L_{12} от d .

7. По формуле (2.41) рассчитайте коэффициенты связи K при заданных d и постройте график зависимости K от d .

8. Оцените изменение силы связи при увеличении расстояния d между катушками. Проверьте условие (2.45) для раздельного наблюдения пиков на АЧХ.

9. В отчет включите полученные значения f_0 , графики из пунктов 5 – 8 и оценки из п.9.

Упражнение 3. Изучение АЧХ контуров с емкостной связью

Измерение

1. В схеме на рис. 2.26 переключите провод (на рис. 5.26-зеленый) с земляного контакта на контакт конденсатора связи C_1 (показано пунктиром).

2. Отодвиньте подвижную катушку на расстояние $d = 60$ мм и поверните другую катушку на угол $\varphi = 90^\circ$, т.е. установите плоскости катушек взаимно перпендикулярно, что приведет к максимальному ослаблению индуктивной связи между контурами. Установите диапазон сканирования 6–20 кГц в третьей строке меню.

3. Последовательно проведите запуск сканирования частоты для каждого из пяти конденсаторов связи, переключая последовательно провод (зеленый – см. рис. 5.26) на соответствующие контакты $C_1 - C_5$ и измерьте для каждой двугорбой кривой резонансные частоты f_{01} и f_{02} этой системы. Для получения всех кривых на одном рисунке следует производить переключение на очередной конденсатор в момент достижения наибольшей частоты выбранного диапазона сканирования (20 кГц). Данные для f_{01} и f_{02} , соответствующие конденсаторам связи от C_1 до C_5 , занести в таблицу 2.8. Процедуру повторите три раза и провести статистическую обработку результатов.

Таблица 2.8

Частоты f_{01} и f_{02} для различных значений d между катушками

$C_{св}$ (мкФ)	2,04	1,40	0,95	0,31	0,22
f_{01}					
f_{02}					

Обработка результатов

1. По данным для f_{01} и f_{02} постройте график зависимости $(f_{02})^2 - (f_{01})^2$ от $2/C_{св}$.

2. Постройте на одном графике зависимости f_{01} и f_{02} от коэффициента связи, рассчитанного по формуле (2.53), и теоретические зависимости для них, рассчитанные по формуле (2.54).

3. В отчете следует представить график зависимости $(f_{02})^2 - (f_{01})^2$ от $2/C_{св}$ и график зависимости f_{01} и f_{02} от коэффициента связи.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть измерены зависимости амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний в связанных линейных контурах с индуктивной и емкостной связью.

Контрольные вопросы

1. Сравните модели связанных линейных механических осцилляторов и электрических осцилляторов с индуктивной и емкостной связью.
2. Что такое последовательный (параллельный) колебательный контур?

3. В чем особенности вынужденных колебаний в последовательных и параллельных колебательных контурах?
4. Какие виды связи известны для электрических контуров?
5. Нарисуйте принципиальные схемы, используемые в упражнениях 1, 2 и 3.
6. Дайте определение нормальных колебаний?
7. Выведите формулы для расчета частоты нормальных колебаний для двух одинаковых контуров с индуктивной (емкостной) связью.
8. Напишите формулу коэффициента индуктивной (емкостной) связи для двух контуров.
9. Как связаны нормальные (резонансные) частоты в эксперименте для двух контуров с индуктивной (емкостной) связью с собственной частотой одиночного контура?
10. При каком условии два резонансных пика будут наблюдаться раздельно?

Литература

3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер.-СПб: Издательство «Лань», 2010, §51.
4. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. – М. Физматлит, 2014, Лекция 18.

Лабораторная работа 2.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В RC -, RL - И RCL - ЦЕПЯХ

Цель работы

Экспериментальное изучение переходных процессов в RC , RL и RCL цепях.

Идея эксперимента

К генератору электрического сигнала (меандра) подключается одна из цепочек последовательно соединенных элементов: RC , RL или RCL . Меандр выступает в качестве замены постоянной ЭДС и ключа Π для ее подключения к электрической схеме и отключения от нее. Наблюдаются временные зависимости напряжений на элементах цепей (R , L или C) и определяются параметры т.н. переходных процессов в RC -, RL - и RCL -цепях (времена релаксации, время затухания и частота собственных колебаний).

Теория

Переходные процессы в электрических цепях

Переходный процесс в электрической цепи – переход из одного стационарного состояния цепи в другое, который происходит при изменении ее параметров – ЭДС \mathcal{E} , емкости C , индуктивности L или сопротивления R (в частности, при замыкании или размыкании электрической цепи).

Стационарное состояние электрической цепи – состояние, в котором не меняются во времени физические величины, определяющие это состояние (заряды на обкладках конденсатора q_C , токи I , разности потенциалов U_R , U_C и U_L на участках цепи) при ее фиксированных параметрах.

В исходном стационарном состоянии цепи физические величины, определяющие ее состояние, находятся с помощью законов Ома и правил Кирхгофа для цепей постоянного тока в результате решения системы линейных алгебраических уравнений.

После изменения параметров электрической цепи система осуществляет квазистационарный процесс – последовательно проходит через бесконечную непрерывную последовательность стационарных состояний. В этом процессе физические величины, определяющие состояние цепи, находятся с помощью законов Ома и правил Кирхгофа для квазистационарных процессов. Основное отличие в использовании этих законов и правил от случая

стационарных состояний – появление в уравнениях ЭДС индукции $\mathcal{E}^{\text{инд}}$ на участках цепи, содержащей индуктивность, и тока I_C на участке цепи, содержащей конденсатор.

В результате, для описания таких процессов используется система линейных дифференциальных уравнений, в решении которой необходимо использовать начальные условия – значения искомых величин и их первых производных в один и тот же начальный момент времени – сразу после перехода системы в квазистационарное состояние.

По определению квазистационарные электромагнитные процессы – процессы, для которых характерное время изменения электромагнитных физических величин гораздо больше времени установления электромагнитного равновесия в электрической цепи.

Локальное условие квазистационарности. Характерное время рассматриваемого процесса τ должно быть гораздо больше, чем характерное время установления локального равновесия (рассасывания избыточного свободного заряда в среде), так называемое время диэлектрической релаксации или время релаксации Максвелла τ_M :

$$\tau \gg \tau_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma},$$

где ε_0 – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость, σ – удельная электрическая проводимость.

При изменении параметров цепи не могут претерпевать скачки ток I_L , текущий через индуктивность, а также заряд q_C (и разность потенциалов U_C) на конденсаторе при наличии сопротивления R или индуктивности L в цепи конденсатора.

Нелокальное условие квазистационарности. Для того, чтобы мгновенные значения всех электрических величин в каждой части электрической цепи были такими же, как в случае постоянного тока, необходимо, чтобы характерное время рассматриваемого процесса τ было гораздо больше, чем максимальное время τ_{max} распространения электромагнитного возмущения вдоль цепи:

$$\tau \gg \tau_{\text{max}} = \frac{l_{\text{max}}}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{l_{\text{max}}}{c},$$

где l_{max} – максимальная длина электрической цепи, μ – магнитная проницаемость, v скорость электромагнитного возмущения, c – скорость света в вакууме.

В дальнейшем все рассматриваемые процессы будем считать квазистационарными и применять к ним правила Кирхгофа.

Процессы в RC-цепи

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, показанной на рис. 2.27.

Зададим начальное состояние следующим образом. Замкнем ключ П на контакт 2 и зарядим конденсатор до напряжения, равного \mathcal{E}_0 . В этом начальном состоянии ток в цепи отсутствует. Затем переведем ключ на контакт 3, отключив батарею ЭДС от цепи. Начнется *процесс разрядки конденсатора C через резистор R*. Для описания этого переходного квазистатического процесса используем правила Кирхгофа.

По второму правилу Кирхгофа сумма падений напряжения на резисторе U_R и конденсаторе U_C после переключения ключа на контакт 3 в любой момент времени должна быть равна нулю:

$$U_C + U_R = 0.$$

Выразим U_R через некоторую переменную U_C . Заряд на конденсаторе равен $q = CU_C$, поэтому сила тока в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Следовательно,

$$U_R = IR = RC \frac{dU_C}{dt}.$$

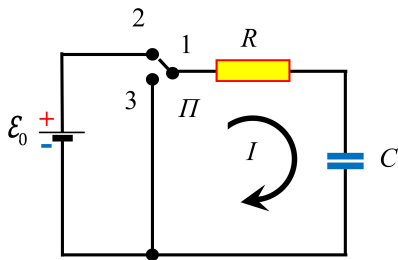


Рис. 2.27. RC-цепь.

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0, \quad (2.56)$$

которое решим методом разделения переменных:

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{dt}{RC};$$

после его интегрирования

$$\ln U_C = -\frac{t}{RC} + \text{const}.$$

Постоянную интегрирования определим из начального условия: $U_C = \mathcal{E}_0$ при $t = 0$. Отсюда находим:

$$\text{const} = \ln \mathcal{E}_0.$$

Таким образом, искомая зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа будет:

$$U_C(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-t/RC). \quad (2.57)$$

Произведение RC имеет размерность времени и часто обозначается τ . Эта величина называется *временем релаксации* RC цепи. Она определяет время, за которое напряжение на конденсаторе уменьшается в e раз. Время релаксации является одной из основных характеристик *переходного процесса разрядки конденсатора*, определяется только параметрами цепи и не зависит от начальных условий.

Рассмотрим теперь *процесс зарядки конденсатора* C через резистор R ; для запуска этого переходного процесса в схеме на рис. 2.27 следует переключить ключ Π с контакта 3 на контакту 2.

По второму правилу Кирхгофа сумма падений напряжения на резисторе U_R и конденсаторе U_C после замыкания ключа цепи с ЭДС в любой момент времени должна быть равна \mathcal{E}_0 :

$$U_C + U_R = \mathcal{E}_0.$$

Так как элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_C.$$

Падение напряжения на резисторе

$$U_R = IR = R \frac{dq}{dt},$$

где q – заряд, проходящий по цепи и накапливающийся на конденсаторе.

Падение напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$. В результате получаем уравнение для заряда на конденсаторе:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0,$$

которое перепишем в виде:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (2.58)$$

Рассмотрим общее решение уравнения (с произвольной постоянной интегрирования), согласно которому общее решение есть сумма двух слагаемых: $q = q_1 + q_2$. Первое слагаемое q_1 – общее решение уравнения

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = 0,$$

которое получается методом разделения переменных:

$$q_1 = B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Постоянную интегрирования B в формуле определим из начального условия задачи для ее полного решения.

Второе слагаемое q_2 в общем решении находим как любое частное решение полного (неоднородного) уравнения. Если правая часть полного уравнения есть постоянная, то и решение q_2 – тоже величина постоянная. Ее определяем, подставляя q_2 в исходное неоднородное уравнение (2.56) и получаем: $q_2 = C\mathcal{E}_0$. Тогда полное решение:

$$q = B \exp(-t/\tau) + C\mathcal{E}_0.$$

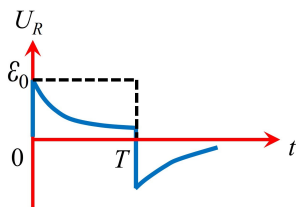
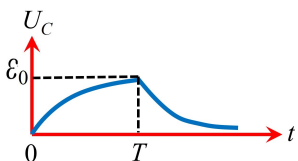
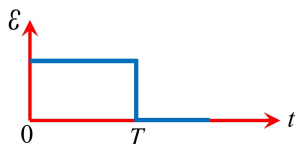


Рис. 2. 28. Зависимость $\varepsilon_0(t)$, $U_C(t)$, $U_R(t)$ для RC -цепи.

Определяем постоянную интегрирования B , используя начальное условие: при $t = 0$, заряд на конденсаторе $q = 0$. Подставим эти значения в полученное решение (2.58) и находим:

$$B = -C\mathcal{E}_0.$$

Окончательно, для искомой зависимости от времени заряда на конденсаторе после замыкания ключа имеем:

$$q = C\mathcal{E}_0[1 - \exp(-t/\tau)].$$

Откуда получим что

$$U_C = q/C = \mathcal{E}_0[1 - \exp(-t/\tau)], \quad (2.59)$$

и

$$U_R = \mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.60)$$

График полученных зависимостей $U_C(t)$ и $U_R(t)$ при зарядке (передний фронт, соответствующий ключу П в положении 2 на рис. 2.27) и разрядке ($\mathcal{E}_0 = 0$, соответствующий ключу П в положении 3 на рис. 2.27) приведен на рис. 2.28.

Процессы в RL-цепи. Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, показанной на рис. 2.29.

Ключ замкнули на контакт 2, после чего начинается процесс установления тока в цепи. Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_L \quad .$$

Согласно второму правилу Кирхгофа

$$U_L + U_R = \mathcal{E}_0.$$

Падение напряжения на катушке индуктивности U_L равно взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Используя формулы

$$U_R = IR \quad \text{и} \quad U_L = L \frac{dI}{dt},$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (2.61)$$

Это уравнение решаем также как уравнение (2.58) для процесса установления тока через конденсатор. Начальное условие: при $t = 0$, сила тока в цепи $I = 0$. В результате, зависимость силы тока в цепи от времени после замыкания ключа имеет вид:

$$I(t) = (\mathcal{E}_0/R) \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) = (\mathcal{E}_0/R) (1 - \exp(-t/\tau)),$$

где время релаксации равно $\tau = L/R$. При $t \rightarrow \infty$ сила тока в цепи нарастает, асимптотически стремясь к установившемуся значению $I_0 = \mathcal{E}_0/R$.

Тогда для напряжений U_R и U_L получаем

$$U_R = IR = \mathcal{E}_0(1 - \exp(-t/\tau)), \quad (2.62)$$

и

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.63)$$

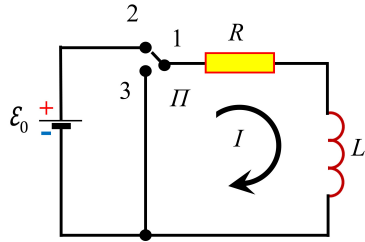


Рис. 2.29. RL-цепь.

Рассмотрим теперь *процесс установления* тока в цепи после перевода ключа П в положение 3 (см. рис.2.29). В цепи протекал установившийся ток $I_0 = \mathcal{E}_0/R$.

При переключении ключа в положение 3, согласно второму правилу Кирхгофа для цепи последовательно соединенных катушки индуктивности и резистора, получим:

$$U_L + U_R = 0.$$

Воспользовавшись выражениями для падений напряжения на катушке $U_L = L \frac{dI}{dt}$ и резисторе $U_R = IR$, получаем уравнение:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \quad (2.64)$$

Решая уравнение (2.64) методом разделения переменных, находим:

$$I(t) = B \exp(-t/\tau),$$

где B – постоянная интегрирования,

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ – время релаксации.}$$

Из начального условия следует что

$$B = (\mathcal{E}_0/R).$$

Окончательно, для искомой зависимости силы тока в цепи от времени после отключения источника напряжения имеем:

$$I(t) = (\mathcal{E}_0/R)\exp(-t/\tau),$$

откуда

$$U_R = \mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau), \quad (2.65)$$

и

$$U_L = -\mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau). \quad (2.66)$$

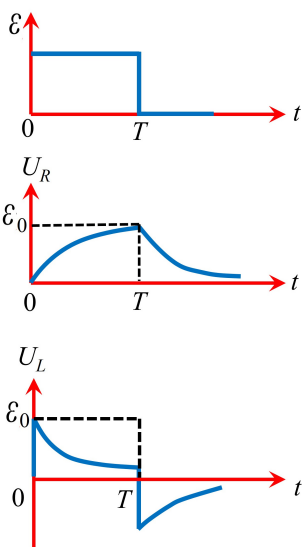


Рис. 2.30. Зависимость $\mathcal{E}_0(t)$, $U_L(t)$, $U_R(t)$ для RL -цепочки.

График полученных зависимостей $U_L(t)$ и $U_R(t)$ при замыкании ключа П на контакт 2 (подключен источник питания ЭДС \mathcal{E}_0 к электрической схеме на рис. 2.29) и после переключения на контакт 3 (отключен источник ЭДС \mathcal{E}_0 от электрической цепи на рис. 2.29) приведен на рис.2.30.

Процессы в RLC-цепи. Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, показанной на рис. 2.31.

Сначала резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L подсоединены к источнику постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E}_0 и после того, как конденсатор C будет заряжен, отключены от батареи (ключ Π переведен из положения 2 в положение 3).

Применяя второе правило Кирхгофа к цепи после перевода ключа в положение 3 и, используя выражения для падений напряжения на резисторе

$$U_R = IR, \quad \text{конденсаторе} \quad -$$

$$U_C = \frac{q}{C} \quad \text{и катушке} \quad U_L = L \frac{dI}{dt},$$

получаем уравнение:

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

где I – сила тока в цепи, q – заряд на конденсаторе.

Перепишем полученное уравнение, используя лишь

одну переменную q и ее первую производную $\frac{dq}{dt} = I$. Кроме того,

разделим почленно это уравнение на коэффициент при производной. В результате для заряда q получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Вводя обозначения $\frac{R}{L} = 2\beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, запишем это уравнение в каноническом виде:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.67)$$

Параметр β называется *коэффициентом затухания*, а ω_0^2 есть квадрат частоты свободных незатухающих гармонических колебаний при $\beta = 0$.

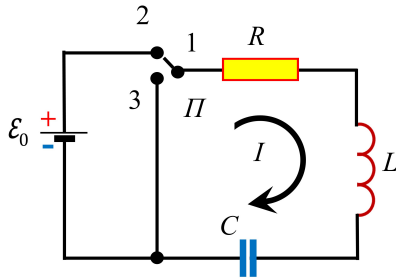


Рис. 3.31. RLC-цепь.

Будем искать решение уравнения в комплексном виде, предполагая, что оно имеет вид

$$\hat{q}(t) = \hat{q}_0 \exp(kt).$$

где \hat{q}_0 – комплексная амплитуда, а k – в общем случае комплексная величина.

Подставляя эту функцию в (2.56), приходим к алгебраическому уравнению для определения возможных значений числа k :

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0.$$

Если $\beta^2 \neq \omega_0^2$, $\beta^2 \neq \omega_0^2$, то находим два решения:

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

$$k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Общее решение однородного уравнения записывается как линейная комбинация двух полученных решений с произвольными коэффициентами:

$$\hat{q} = A \exp(k_1 t) + B \exp(k_2 t).$$

Коэффициенты A и B определяются начальными условиями. Характер решения зависит от соотношения параметров β^2 и ω_0^2 . Если $\beta > \omega_0$, то оба показателя в экспонентах отрицательные, решение будет вещественным и его можно записать в виде:

$$q = e^{-\beta t} \left[A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (2.68)$$

Такой процесс называется *апериодическим*.

В частном случае $\beta = \omega_0$, решение имеет вид:

$$q = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (2.69)$$

При этом описываемый (2.69) процесс называется *критическим апериодическим затуханием*.

Если, $\beta < \omega_0$, то в цепи возникают свободные затухающие колебания. Действительно, в этом случае имеем:

$$\hat{q}(t) = \exp(-\beta t) [A_1 \exp(i\omega t) + B_1 \exp(-i\omega t)],$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Коэффициенты A_1 и B_1 здесь следует понимать как комплексные числа, имеющие вещественную и мнимую части.

Поскольку заряд q является вещественной физической величиной, а вещественная часть комплексного решения также является решением однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, то:

$$q(e) = \operatorname{Re} q(t) = e^{-\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (2.70)$$

где A и B – вещественные коэффициенты, определяемые начальными условиями.

В результате мы получили закон свободных затухающих колебаний с частотой ω . Заряд на конденсаторе, осциллируя, убывает по экспоненциальному закону и становится в e раз меньше первоначального за время релаксации $\tau = 1/\beta$. По этой причине β называют *коэффициентом затухания, а τ временем релаксации*.

В выполняемой задаче используются параметры цепи, отвечающие только случаю затухающих колебаний (решение (2.70)) при $\beta < \omega_0$.

Тогда мы имеем из (2.70) и $\frac{dq}{dt} = I$:

$$I(t) = e^{-\beta t} \{ \omega [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] - \beta [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \};$$

$$q(0) = \mathcal{E}_0 C = A,$$

$$I(0) = \omega B - \beta A = 0,$$

откуда:

$$B = (\beta/\omega)A = (\beta/\omega)\mathcal{E}_0 C.$$

В итоге находим:

$$q(t) = \mathcal{E}_0 C e^{-\beta t} [\cos(\omega t) + (\beta/\omega) \sin(\omega t)].$$

Если ввести обозначение $(\beta/\omega) = \operatorname{tg} \varphi$ и использовать соотношение $U_C = q/C$, можно получить после простых преобразований:

$$U_C = \mathcal{E}_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.71)$$

График полученной зависимости $U_C(t)$ при замыкании ключа П на контакт 2 (на рис. 2.32 источник ЭДС \mathcal{E}_0 подключен к электрической цепи) и после переключения на контакт 3 (на рис. 2.31 источник ЭДС \mathcal{E}_0 отключен от электрической цепи) приведен на рис. 2.32.

Подводя итоги рассмотрения этого переходного процесса, выделим наиболее важные соотношения:

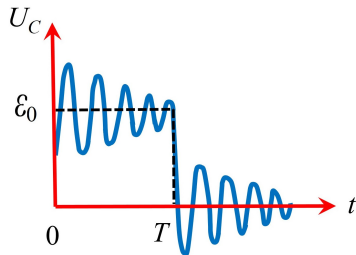
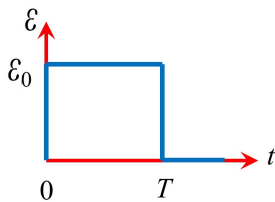


Рис. 2.32. Зависимости $\mathcal{E}_0(t)$, $U_C(t)$ для RLC -цепочки.

колебаний (например, напряжения на конденсаторе) в моменты времени t и $t + T$:

$$\theta \equiv \ln \frac{U_C(t)}{U_C(t+T)} = \beta T. \quad (2.72)$$

Если τ – время затухания, а N_e – число полных колебаний (периодов затухающих колебаний), за которое амплитуда уменьшается в $e \cong 2,71$ раз, то:

$$\theta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e}, \quad (2.73)$$

Добротность колебательной системы Q равна умноженному на 2π отношению средней за период энергии системы к средней энергии потерь за тот же период:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle W \rangle_T}{\langle P \rangle_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{2\beta E_0 e^{-2\beta t} T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.74)$$

$\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания в контуре;

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}}$$

– частота собственных затухающих колебаний в RLC -контуре,

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \text{ – частота собственных}$$

нестационарных незатухающих колебаний в контуре при $R = 0$.

Степень затухания в контуре принято характеризовать величиной, называемой логарифмическим декрементом затухания θ .

Логарифмический декремент затухания θ – логарифм отношения значений амплитуд затухающих

колебаний (например, напряжения на конденсаторе) в моменты времени t и $t + T$:

Эксперимент

Экспериментальная установка

Исследование переходных процессов в электрических цепях проводится на установке, общий вид которой показан на рис. 2.33. В состав установки входят: блок коммутации (1) приставка *PCLab2000LT* (USB модуль) (2) и компьютер (3) с монитором (4). Блок позволяет собирать исследуемую схему с RC , RL или RCL цепями, подключать генератор USB модуля и его измерительную часть (канал CH2).

Модуль *PCLab2000LT*, представляющий собой специальную USB приставку к компьютеру, позволяет генерировать электрические сигналы различной формы (гармонические, пилообразные и прямоугольные).

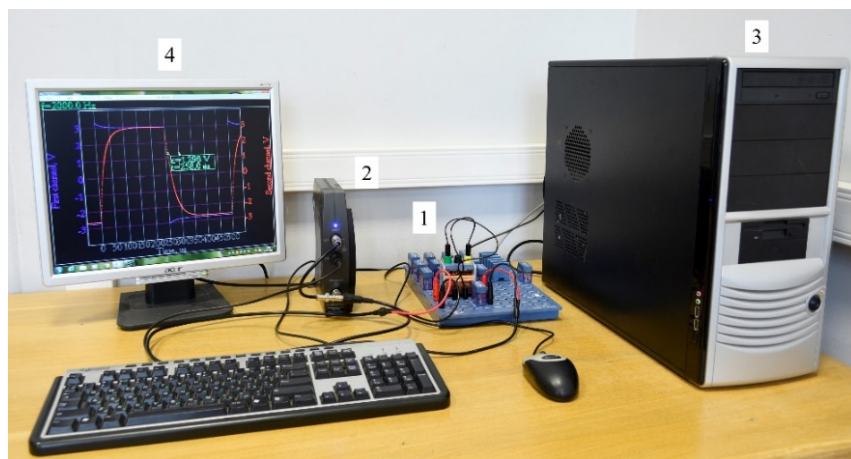


Рис. 2.33. Внешний вид установки: коммутационная плата (1), USB модуль *PCLab2000LT* (2), компьютер (3), дисплей (4).

В этой работе используется периодический прямоугольный сигнал, частоту следования, скважность и амплитуду которого можно изменять, подбирая наиболее благоприятный режим для наблюдения переходных процессов.

Схема электрических соединений на блоке коммутации в экспериментах по изучению переходного процесса в RLC -цепи показан на рис. 2.34.

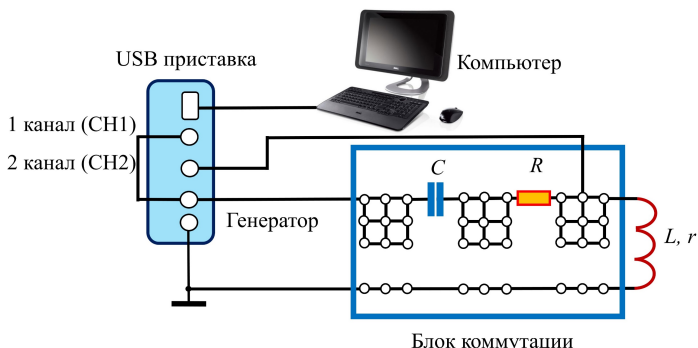


Рис. 2.34. Схема соединения элементов установки для наблюдения переходного процесса в RLC -цепи.

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Исследование процессов заряда и разряда конденсатора и определение постоянной времени RC -цепочки

Измерение

1. Соберите электрическую схему в соответствии с рис. 2.35; используя конденсатор с известной емкостью C_1 и резистор с известным сопротивлением R_1 .

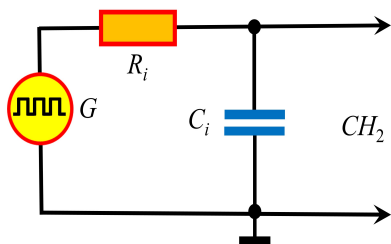


Рис. 2.35. Электрическая схема для исследования процессов заряда и разряда конденсатора.

2. Включите компьютер. После загрузки компьютера на Рабочем столе дважды нажмите значок Меандр. Будет запущена рабочая программа; на экране дисплея появится окно программы *PClab2000LT* в виде координатного поля двухлучевого осциллографа и кнопок управления генераторной и осциллографической частью

системы (2.36).

В верхней строке окна находятся рабочие команды: RUN, STOP, MEASURE, SELECT, APPROX.EXP., APPROX.OSC., PARAMETERS.

3. При нажатии команды RUN запускается эксперимент; на RC -цепочку подается последовательность электрических импульсов прямоугольной формы с заданной частотой следования

(показана под строкой команд, $f = 20\,000\text{ Hz}$), которую можно регулировать после вызова команды PARAMETERS появляется осциллограмма с меандром (синяя линия), который подается на RC-цепочку, и две экспоненты – напряжения на конденсаторе (красная линия) – на переднем фронте и заднем фронте импульса. После нажатия команды SELECT включается курсор в виде желтой вертикальной линии, перемещая которую с помощью мыши с нажатой правой клавишей, «засвечивают» тот участок экспоненты, который будет обрабатываться (красная линия после засветки становится желтой).

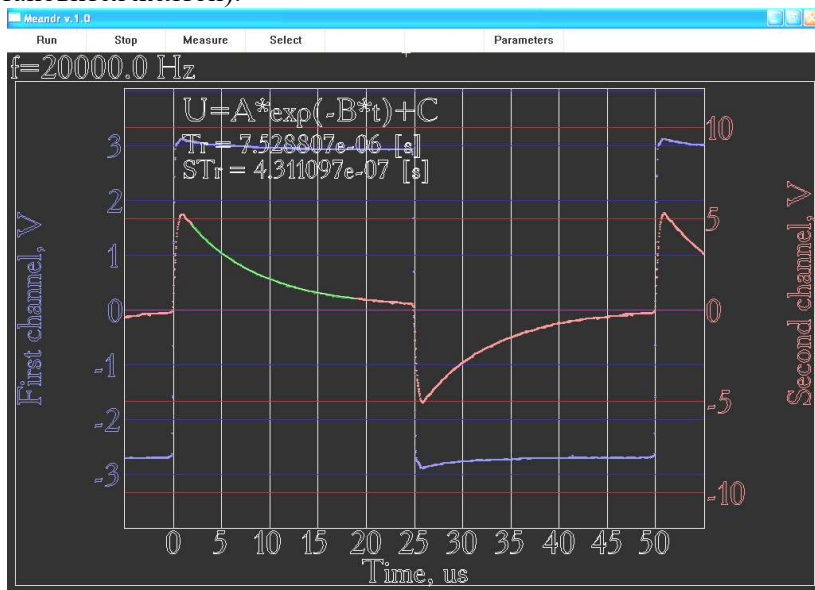


Рис. 2.36. Координатное поле двухлучевого осциллографа и кнопки управления генераторной и осциллографической частью USB приставки.

4. После выбора участка кривой, запускают обработку, нажимая команду APPROX.EXP. Результат обработки (белые буквы и цифры на рис. 2.36): A и τ из формулы $U = A\exp(-t/\tau)$ и погрешности расчета этих параметров. Эту процедуру последовательно применяют к экспонентам на переднем и заднем фронтах импульса. Данные о значении параметра A – напряжения, до которого был заряжен конденсатор к моменту прекращения зарядки (достижению заднего фронта импульса) и началу разрядки приводятся только для ознакомления и дальше не используются.

Основным результатом являются значения τ и $\delta\tau$ (время релаксации и ее погрешность (рис. 2.36), которые записываются в табл. 2.9. Значок \uparrow в табл. 2.9 (и последующих таблиц) относится к зарядке конденсатора после прихода переднего фронта импульса; значок \downarrow относится к разрядке конденсатора после прихода заднего фронта импульса.

5. Выполните пп. 2,3 для других резисторов R_i (R_2 – R_7) и заполните соответствующие строки табл. 2.9.

Таблица 2.9.

Результаты измерений и обработки процессов заряда и разряда конденсатора в RC-цепочке для различных сопротивлений

Номер резистора	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
$\tau\uparrow$						
$\delta\tau\uparrow$						
$\tau\downarrow$						
$\delta\tau\downarrow$						
$R\uparrow = \tau\uparrow/C_1$						
$R\downarrow = \tau\downarrow/C_1$						
$R_i \pm \delta R_i$						

Таблица 2.10

Результаты измерений и обработки процессов заряда и разряда конденсатора в RC-цепочке для различных емкостей

Номер конденсатора	C_2	C_3	C_4	C_5
$\tau\uparrow$				
$\delta\tau\uparrow$				
$\tau\downarrow$				
$\delta\tau\downarrow$				
$C\uparrow = \tau\uparrow/R_5$				
$C\downarrow = \tau\downarrow/R_5$				
$C_i \pm \delta C_i$				

6. В электрической схеме (рис. 2.35) вместо известного конденсатора C_1 поочередно подключите неизвестные конденсаторы C_2 – C_4 (используйте резистор R_1) и выполните пп. 2,3. Результаты измерений запишите в табл. 2.10.

Обработка результатов

1. Рассчитайте $R_i\uparrow$ и $R_i\downarrow$ по формуле $Ri = \tau/C$.
2. Вычислите средние значений $R_i\uparrow$ и $R_i\downarrow$ $R_i = (R_i\uparrow + R_i\downarrow)/2$ и погрешности их определения δR_i .
3. Рассчитайте $C_i\uparrow$ и $C_i\downarrow$ $C_i = \tau/R_1$.
4. Вычислите средние значений $C_i\uparrow$ и $C_i\downarrow$ $C_i = (C_i\uparrow + C_i\downarrow)/2$ и погрешности их определения δC_i .
5. Результаты вычислений пп. 1–4 запишите в табл. 2.10.

Упражнение 2. Исследование процесса установления тока при подключении и отключении ЭДС к RL-цепочке и определение его времени релаксации и индуктивности катушек.

Измерение

1. Соберите схему, согласно рис. 2.37. Включите в схему последовательно резисторы R_5 , R_6 и R_7 , определенные ранее в *упр. 1*, и основную секцию катушки индуктивности (подключить крайние клеммы 1–3).

2. Повторите операции *упр. 1*, начиная с пункта 3 (RUN). Полученные времена релаксации и погрешности запишите в табл. 2.11.

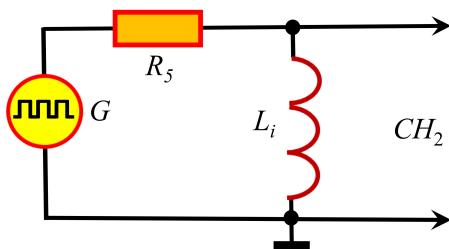


Рис. 2.37. Электрическая схема для исследования процесса установления тока при подключении и отключении ЭДС к RL-цепочке

Обработка результатов

1. Рассчитайте $L_i\uparrow$ и $L_i\downarrow$ по формуле $Li = \tau/R_1$.
2. Вычислите средние значений $L_i\uparrow$ и $L_i\downarrow$ $L_i = (L_i\uparrow + L_i\downarrow)/2$ и погрешности их определения δL_i .
3. Результаты вычисления запишите в табл. 2.11.

Таблица 2.11.

Результаты измерений и обработки процессов заряда и разряда конденсатора в RL -цепочке для различных резисторов

Номер резистора	R_5	R_6	R_7
$\tau \uparrow$			
$\delta\tau \uparrow$			
$\tau \downarrow$			
$\delta\tau \downarrow$			
$L \uparrow = \tau \uparrow / R_5$			
$L \downarrow = \tau \downarrow / R_5$			
$L_i \pm \delta L_i$			

Упражнение 3. Изучение затухающих колебаний в RLC -цепи. Определение периода колебаний, логарифмического декремента затухания и добротности цепи.

Измерение

1. Для изучения затухающих колебаний в RLC -цепи соберите электрическую схему, состоящую из катушки индуктивности L_{13} и конденсатора C_1 , в качестве сопротивления цепи r выступает здесь

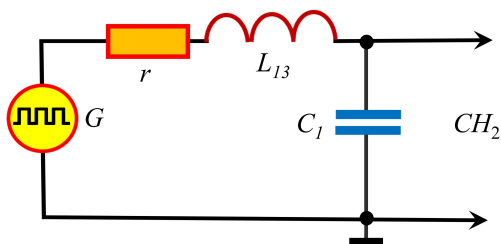


Рис. 2.38. Электрическая схема к *упр.3*.

активное сопротивление катушки, которое необходимо определить (рис. 2.38). На вход цепи подается сигнал с генератора прямоугольных импульсов в *PCLab2000LT*, а на вход приставки CH_2 — напряжение с конденсатора C_1 .

2. Запустите

программу командой RUN. Скриншот меандра и затухающих колебаний на переднем и заднем фронтах показан на рис. 2.39.

3. Включите курсор командой SELECT и «засветите» практически все (~ 20 максимумов на рис. 2.39) периодов затухающих колебаний на переднем фронте меандра.

4. Нажмите команду APPROX.OSC. и дождитесь появления результатов обработки, которые представляют собой значения параметров A , B , C и D (рис. 2.39) из формулы $U = A \exp(-Bt) \cos(Ct + D)$ и погрешности определения этих параметров. Амплитуда колебаний A не используется в последующих расчетах. Параметр B есть коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$, параметр C – круговая частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}}$. Параметр D – начальная фаза колебаний, которая не используется в дальнейшей обработке результатов. Запишите β и ω в табл. 2.12

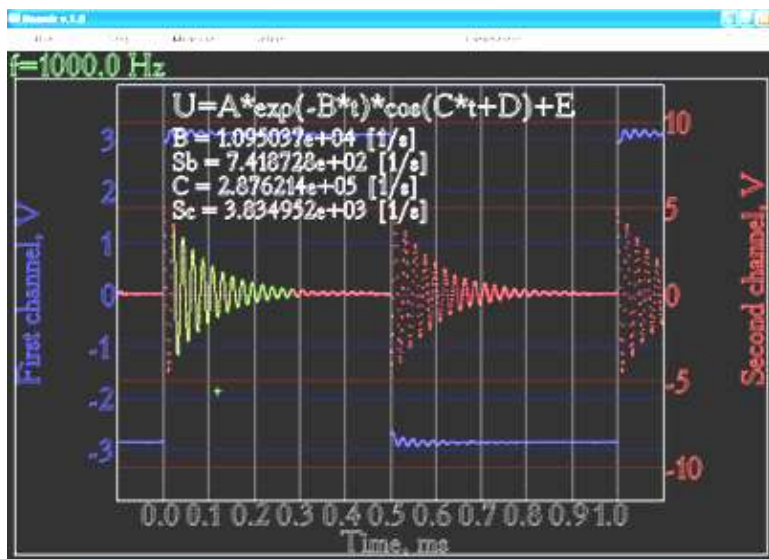


Рис. 2.39. Скриншот меандра и затухающих колебаний на переднем и заднем фронтах

Повторите пп 2–4 с конденсаторами C_2 – C_4 , значения которых были определены в *упр. 1*. Измеренные значения β и ω запишите в табл. 2.12.

Обработка результатов

1. Вычислите средние значений $\omega_i \uparrow$ и $\omega_i \downarrow$ ($\omega_i = (\omega_i \uparrow + \omega_i \downarrow) / 2$) и $\beta_i \uparrow$ и $\beta_i \downarrow$ ($\beta_i = (\beta_i \uparrow + \beta_i \downarrow) / 2$), а также их погрешности определения $\delta \omega_i$ и $\delta \beta_i$.

Таблица 2.12.

**Результаты измерений и обработки результатов изучения
затухающих колебаний в RLC-цепи**

Номер конденсатора	C_1	C_2	C_3	C_4
$\beta \uparrow$				
$\beta \downarrow$				
$\omega \uparrow$				
$\omega \downarrow$				
$\omega_i \pm \delta\omega_i$				
$\beta_i \pm \delta\beta_i$				
$T_i \pm \delta T_i$				
$T_i^2 \pm \delta(T_i^2)$				
$L_i \pm \delta L_i$				
$r_i \pm \delta r_i$				
$\theta_i \pm \delta\theta_i$				
$Q_i \pm \delta Q_i$				
$Q_{\text{теор}} \pm \delta Q_{\text{теор}}$				

2. Вычислите периоды электрических колебаний T по формуле $\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}$ и T^2 , а также их погрешности δT , $\delta(T^2)$.

3. Постройте зависимость T^2 от C . С помощью МНК аппроксимируйте данную зависимость линейной зависимостью $T^2 = A \cdot C + B$. Определите коэффициент наклона A_i , который равен L_i .

4. В формуле $\beta = r/(2L)$ сопротивление r является активным сопротивлением катушки индуктивности в условиях опытов. Используя средние значения из β_i , рассчитайте активные сопротивления r_i для опытов с конденсаторами C_1 – C_4 и оцените их погрешности δr_i .

5. По формуле $\theta_i = \beta_i T = 2\pi\beta_i/\omega_i$ рассчитайте логарифмические декременты затухания θ_i и погрешности $\delta\theta_i$ для колебательных контуров с конденсаторами C_1 – C_4 .

6. Найдите добротности колебательных контуров с конденсаторами C_1 – C_4 из логарифмических декрементов затухания по формуле $Q_i = \pi/\theta_i$. Вычислите погрешности δQ_i . Для сравнения рассчитайте также добротности через параметры RLC-цепочек по формуле $Q_{\text{теор}} = \frac{1}{2R} \sqrt{L/C}$.

7. Результаты вычислений пп. 1–6 запишите в табл. 2.12.

Основные итоги работы

В результате проведения лабораторной работы должны быть исследованы процессы заряда и разряда конденсатора и определены постоянные времени RC-цепочки; изучены процессы установления тока при подключении и отключении ЭДС к RL-цепочке и определены их время релаксации и индуктивности катушек; исследованы затухающие колебания в RLC-цепи и определены периоды колебаний, логарифмические декременты затухания и добротности цепи.

Контрольные вопросы.

1. Что называют переходными процессами?
2. Дайте определение квазистационарных процессов.
3. Назовите условия квазистационарности.
4. Запишите закон изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени в RC-цепи.
5. Запишите закон изменения напряжения на катушке индуктивности в зависимости от времени в RL-цепи.
6. Запишите уравнение переходного процесса в RLC-цепи.
7. Запишите аperiodические решения уравнения переходного процесса в RLC-цепи.
8. Запишите колебательное решение уравнения переходного процесса в RLC-цепи.
9. Определите логарифмический декремент затухания.
10. Определите добротность колебательных систем.

Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие. 3-е изд., стер.– СПб: Издательство «Лань», 2010, §§ 50, 51.
2. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. - М.Физматлит, 2014, Лекция 18.

Учебное издание

*М.В. Буханов, И.В. Митин, Г.М. Николадзе,
А.М. Салецкий, Д.Э. Харабадзе*

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ
Лабораторный практикум
Часть 2. Цепи переменного тока

Подписано в печать 14.07.2023 г.
Формат А5. Объем 3 усл.-п. л. Тираж 30 экз.
Заказ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова