

**Т.А. Бушина, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков,
А.И. Слепков, Н.И. Чистякова**

МЕХАНИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

*Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей
и направлений подготовки 03.00.00 – «Физика и астрономия» в качестве
учебного пособия для обучающихся по основным образовательным
программам высшего образования уровня бакалавриата по направлению
подготовки 03.03.02 – Физика*



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2019

УДК 537
ББК 22.33

Т.А. Бушина, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков,
А.И. Слепков, Н.И. Чистякова. **Механика. Сборник задач** /
Учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2019. 372 с.
ISBN 978-5-8279-0174-7

Учебное пособие «Механика. Сборник задач» написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ и является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Учебное пособие, является заключительной третьей частью модуля «Семинарские занятия» серии «Университетский курс общей физики» (первая часть — «Разработка семинарских занятий», вторая — «Методика решения задач»).

Содержание «Сборника задач» включает в себя 8 тематических разделов с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по механике. Каждому разделу предшествуют краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач данного раздела. В пособии приведены в первую очередь наиболее характерные и типичные для каждого раздела задачи. Сборник содержит 625 задач различной степени трудности по разделу «Механика» курса общей физики, при этом в качестве примера дается решение более 20% всех задач.

Настоящее пособие предназначено для преподавателей, а также студентов высших учебных заведений, и имеет целью помочь преподавателям организовать свою работу, а студентам – овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по разделу «Механика» курса общей физики.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор *В.А. Макаров*
д. ф.-м. н., профессор *Г.С. Плотников*

ISBN 978-5-8279-0174-7

© Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2019 г.
© Коллектив авторов, 2019 г.

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ **(Предисловие редактора инновационного** **учебно-методического комплекса)**

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Цель авторов данного курса – представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описан-

ных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического факультета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент», увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий», предназначенное для преподавателя. В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики. Для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, для каждой работы сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией

В.И. Ивероновой, вышедшего в свет в 1967 г. В последние годы разработаны и введены в действие новые современные лабораторные работы с использованием современных экспериментальных методов исследования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекции» и «Практикум». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но может быть полезен для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.М. Салецкий

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7	
	Задачи	Ответы и решения
Раздел 1. Кинематика и динамика материальной точки и простейших систем	8	149
Раздел 2. Законы сохранения и изменения импульса и механической энергии	27	177
Раздел 3. Неинерциальные системы отсчета	46	208
Раздел 4. Релятивистская механика	57	226
Раздел 5. Механика твердого тела	72	254
Раздел 6. Механические колебания	103	296
Раздел 7. Механические волны	122	328
Раздел 8. Механика сплошных сред	136	346
Литература		369

Предисловие

Учебное пособие «Механика. Сборник задач» написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов с целью овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по разделу «Механика» курса общей физики.

Пособие содержит 625 задач и состоит из 8 разделов, соответствующих темам семинарских занятий. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, используемые при решении задач в данном разделе. Затем формулируются условия наиболее характерных и типичных задач. Во второй части пособия даются ответы ко всем задачам и в качестве примера приводятся решения более 20% различных типов задач. Остальные задачи предназначены для самостоятельного решения. В конце сборника приводится список рекомендуемой студентам литературы – учебников, задачников и учебных пособий.

В пособии использован материал из ранее вышедших учебных пособий: «Механика. Методика решения задач» (авторы В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова) [1] и «Механика. Разработка семинарских занятий» (авторы Т.А. Бушина, М.А. Комарова, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков, А.И. Слепков, Н.И. Чистякова) [2]. При подборе задач использовались как оригинальные задачи, так и задачи, условия которых являются переработанными условиями задач, заимствованных из классических учебников и задачников [3–4], рекомендованных в программе курса.

Составители сборника с благодарностью примут замечания и советы, которые могут возникнуть у читателя.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за полезные обсуждения и ценные замечания. Особую признательность авторский коллектив выражает рецензентам пособия профессорам В.А. Макарову и Г.С. Плотникову. Авторы заранее признательны также всем, кто в дальнейшем поспособствует улучшению этого учебно-методического пособия.

РАЗДЕЛ 1

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

- **Радиус-вектор** материальной точки:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} – орты декартовой системы координат; x, y, z – координаты материальной точки.

- **Скорость** материальной точки:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

- **Ускорение** материальной точки:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

- **Тангенциальное ускорение** a_τ – составляющая ускорения

\mathbf{a} вдоль направления скорости:

$$\mathbf{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t),$$

где $\boldsymbol{\tau}(t) \equiv \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$ и $a_\tau(t) = \frac{d v(t)}{dt} = \dot{v}(t)$ – проекция ускорения \mathbf{a} на

направление скорости $\boldsymbol{\tau}$.

- **Нормальное ускорение** a_n – составляющая ускорения \mathbf{a} , в направлении \mathbf{n} , перпендикулярном скорости, и направленная к центру кривизны траектории – центру окружности максимального радиуса (радиуса кривизны траектории $\rho(t)$), касательной к траектории в данной точке:

$$\mathbf{a}_n(t) = a_n(t)\mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(t) \perp \boldsymbol{\tau}(t), \quad |\mathbf{n}(t)| = 1,$$

где $a_n(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)}$ – проекция ускорения \mathbf{a} на направление \mathbf{n} , перпендикулярное скорости.

- **Второй закон Ньютона:** произведение массы m материальной точки на ее ускорение \mathbf{a} относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех сил $\{\mathbf{F}_i\}$, действующих на материальную точку:

$$ma = \sum_i F_i.$$

• **Закон всемирного тяготения:** Материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силами

$$F_{12} = -F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12},$$

Здесь F_{12} и F_{21} – силы, с которыми первая точка действует на вторую и вторая на первую соответственно, $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная, r_{12} – радиус-вектор второй точки относительно первой.

• **Сила трения** – составляющая силы взаимодействия тел при их непосредственном соприкосновении вдоль плоскости соприкосновения.

• **Силы сухого трения** – силы трения, возникающие при непосредственном соприкосновении твердых тел.

Сила сухого трения скольжения $F_{\text{ск}}$, возникающая при относительном движении взаимодействующих тел, направлена противоположно направлению скорости $v_{\text{отн}}$ относительного движения тел:

$$F_{\text{ск}} \uparrow \downarrow v_{\text{отн}}.$$

Модуль силы сухого трения скольжения

$$F_{\text{ск}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения, N – модуль силы нормальной реакции опоры.

Сила сухого трения покоя $F_{\text{п}}$ возникает в отсутствие относительного движения взаимодействующих тел, ее модуль:

$$0 \leq F_{\text{п}} \leq F_{\text{ск}}.$$

• **Сила вязкого трения** $F_{\text{в}}$ – сила трения, действующая со стороны вязкой среды (жидкой или газообразной) на тело при его движении в этой среде.

При малой величине скорости v движения тела относительно среды

$$F_{\text{в}} = -\eta v,$$

где η – коэффициент вязкого трения.

• **Закон Гука:** при малых упругих деформациях величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее силы

$$\Delta l = \frac{1}{k} F.$$

Здесь k – **коэффициент жесткости (упругости)**.

- При деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением относительное удлинение (сжатие) стержня ε пропорционально нормальному напряжению σ :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma.$$

Здесь E – **модуль Юнга** материала стержня, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – относительное

изменение длины стержня, $\sigma = \frac{F}{S}$ – нормальное напряжение, S – площадь поперечного сечения стержня.

Для однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением коэффициент жесткости (упругости) стержня связан с модулем Юнга соотношением:

$$k = \frac{S}{L} E.$$

- **Коэффициент Пуассона** – определяется отношением относительного поперечного сжатия ε_{\perp} стержня к его относительному удлинению ε :

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}.$$

Векторный, координатный и «естественный» способы описания движений

1.1. Известен закон изменения радиус-вектора \mathbf{r} частицы: $\mathbf{r} = k_1 a t + (1 - k_2 t) b t$. Здесь t – время, \mathbf{a} и \mathbf{b} – единичные векторы, угол между которыми составляет 60° , k_1 и k_2 – положительные постоянные. Определить момент времени t_1 , когда угол между ускорением и скоростью частицы будет составлять 90° .

1.2. Частица движется вдоль некоторой траектории со скоростью v , которая нарастает по закону $v = k\sqrt{l}$, где l – траекторная

координата, k – положительная постоянная. В момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат. Какова средняя путевая скорость частицы за время, в течение которого она прошла путь s ?

1.3. Частица движется по дуге радиуса R . Зависимость скорости от дуговой координаты l имеет вид $v = v_0 + k\sqrt{l}$, где k – постоянная. Определить угол между вектором скорости и полным ускорением как функцию координаты l .

1.4. Частица движется по дуге окружности радиуса R по закону $l = A \sin \omega t$, где l – смещение из начального положения, отсчитываемое вдоль дуги, A и ω – постоянные. Найти полное ускорение частицы в точках $l = 0$ и $l = \pm A$, если $R = 100$ см, $A = 80$ см и $\omega = 2,00$ с⁻¹.

1.5. Скорость материальной точки зависит от ее положения в декартовой системе координат следующим образом: $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$, где c и b – положительные постоянные величины. В начальный момент времени радиус-вектор материальной точки равен нулю: $\mathbf{r}(0) = 0$. Определить:

а) законы движения $\mathbf{r}(t)$, изменения скорости $\mathbf{v}(t)$ и ускорения $\mathbf{a}(t)$, тангенциальную $a_\tau(t)$ и нормальную $a_n(t)$ проекции ускорения;

б) уравнение траектории $y(x)$ материальной точки;

в) радиус кривизны траектории $\rho(t)$;

г) угол $\varphi(t)$ между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$.

1.6. Находящееся на высоте H над Землей тело бросили горизонтально с начальной скоростью v_0 . Найти закон движения тела, уравнение траектории, законы изменения скорости и ускорения, а также нормальную и тангенциальную проекции ускорения и радиус кривизны траектории в произвольный момент времени.

1.7. Точка двигается, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости v как $a = \alpha\sqrt{v}$, где α – постоянная. В начальный момент скорость точки равна v_0 . Какой путь s она пройдет до остановки и за какое время t ?

1.8. Точка движется в плоскости xu по закону $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, где α и β – положительные постоянные. Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$ и ее график;

б) модули скорости и ускорения точки как функции t ;

в) угол φ между векторами \mathbf{a} и \mathbf{v} как функцию t .

1.9. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория является: а) параболой $y = \alpha x^2$; б) эллипсом $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$, где α и β – постоянные.

1.10. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0,20$ рад/с². Найти полное ускорение a точки А на ободу колеса в момент $t = 2,5$ с, если скорость точки А в этот момент $v = 0,65$ м/с.

1.11. Закон движения движущейся в плоскости материальной точки, заданный в полярной системе координат, имеет следующий вид: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Определить законы изменения проекций скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые осями декартовой и полярной систем координат, жестко связанных с телом отсчета. Начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной системы, а ось X декартовой системы направлена вдоль полярной оси.

1.12. Определить закон изменения модуля скорости материальной точки, движущейся в плоскости, если ее движение описывается в полярной системе координат следующим законом: $r(t) = a(1 - bt)$,

$$\varphi(t) = \frac{bt}{1 - bt}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – положительные постоянные величины.}$$

1.13. Движение материальной точки в полярной системе координат задается взаимосвязью полярных координат $r(\varphi) = 2a(1 + \cos \varphi)$, при этом полярный угол возрастает линейно во времени $\varphi(t) = bt$. Определить зависимость модуля скорости и модуля ускорения материальной точки от времени.

1.14. Планета движется вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера по эллиптической траектории $r(1 - e \cos \varphi) = p$. Фокальный параметр эллипса p , эксцентриситет e и секторную скорость σ считать заданными. Определить проекции ускорения планеты в зависимости от координат r и φ полярной системы.

1.15. Небольшое тело движется по гладкой внутренней поверхности полого вертикального цилиндра радиуса R . В начальный момент времени скорость тела направлена перпендикулярно оси цилиндра и равна v_0 (см. рис.). Определить законы изменения скорости и ускорения материальной точки в цилиндрической системе координат, а также угол $\alpha(t)$ между скоростью и ускорением.

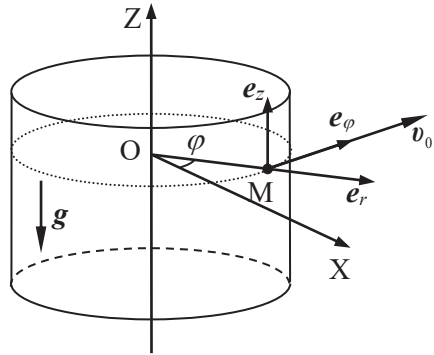


Рис. к задаче 1.15.

Принцип суперпозиции движений

1.16. Определить уравнение траектории каплей дождя на боковом стекле трамвая, движущегося горизонтально со скоростью V_1 , во время его торможения с ускорением a . Капли дождя падают на землю вертикально вниз, и скорость их относительно Земли постоянна и равна V_2 .

1.17. Из пушки, находящейся на самолете, летящем горизонтально со скоростью $v_{\text{сам}}$, выпущен снаряд в направлении движения самолета. Скорость снаряда относительно самолета равна $v_{\text{сн}}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- а) уравнение траектории снаряда относительно Земли $y(x)$;
- б) уравнение траектории снаряда относительно самолета $y'(x')$;
- в) уравнение траектории самолета относительно снаряда $y''(x'')$.

Оси X, X' и X'' декартовой системы координат направлены горизонтально вдоль скорости самолета, а оси Y, Y' и Y'' – вертикально вверх, при этом начало координат системы $X'Y'$ совпадает с положением самолета в момент выстрела пушки.

1.18. По движущемуся вниз эскалатору спускается пассажир со скоростью v относительно эскалатора. Скорость эскалатора равна u . Спускаясь по неподвижному эскалатору, пассажир проходит N ступеней. Сколько ступеней N' пройдет пассажир, спускаясь по движущемуся эскалатору?

1.19. Корабль движется по экватору на восток со скоростью $u_0 = 30$ км/ч. С юго-востока под углом $\varphi = 60^\circ$ к экватору дует ветер со скоростью $v = 15$ км/ч. Найти скорость v' ветра относительно корабля и угол φ' между экватором и направлением ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

1.20. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна u_0 . Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = \alpha y$, где α – постоянная, y – высота подъема. Найти зависимости от высоты подъема:

а) сноса шара $x(y)$;

б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

1.21. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по ровной горизонтальной дороге со скоростью V_0 . Найти закон движения произвольной точки A на ободе колеса, ее скорость и ускорение в произвольный момент времени t .

1.22. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с ускорением a (см. рис.). Какие ускорения относительно неподвижной системы отсчета имеют точки A и B , расположенные на горизонтальном диаметре колеса в момент, когда скорость центра колеса равна V ?

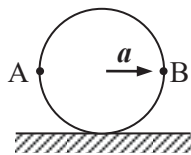


Рис. к задаче 1.22.

1.23. Лодка движется относительно воды со скоростью, в $n = 2$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

1.24. Лодка пересекает реку шириной d с постоянной относительно воды скоростью v , перпендикулярной скорости течения реки, модуль которой нарастает от берегов к середине реки по линейному закону, меняясь от 0 до u . Найти уравнение траектории лодки, а также снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

1.25. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью V' , направленной под углом α к берегу. Скорость течения воды в реке меняется по линейному закону, достигая на середине реки максимальной величины U_m . Ширина реки равна d . При каком

значении угла α лодка достигнет противоположного берега в точке, расположенной напротив места отплытия лодки?

1.26. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v_d , перпендикулярной направлению течения реки. Модуль скорости u течения реки, ширина которой d , нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, изменяясь от 0 до u_m . Найти уравнение траектории лодки, время ее движения τ , а также снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

1.27. Два пловца должны попасть из точки А на одном берегу реки в прямо противоположную точку В на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой АВ, другой же – все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u . При каком значении u оба пловца достигнут точки В за одинаковое время, если скорость течения $v_0 = 2,0$ км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2,5$ км/ч?

1.28. От бакена, который находится на середине широкой реки, отошли две лодки, А и В. Обе лодки стали двигаться по взаимно перпендикулярным прямым: лодка А – вдоль реки, а лодка В – поперек. Удалившись на одинаковое расстояние от бакена, лодки вернулись затем обратно. Найти отношение времен движения лодок τ_A/τ_B , если скорость каждой лодки относительно воды в $\eta = 1,2$ раза больше скорости течения.

1.29. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом $\vartheta = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Найти расстояние между телами через $t = 1,70$ с.

1.30. Два шарика бросили одновременно из одной точки в горизонтальном направлении в противоположные стороны со скоростями $v_1 = 3,0$ м/с и $v_2 = 4,0$ м/с. Найти расстояние между шариками в момент, когда их скорости окажутся взаимно перпендикулярными.

1.31. Три материальных точки находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью v , причем первая точка все время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на первую. Через сколько времени точки встретятся?

1.32. За лисой, бегущей равномерно и прямолинейно со скоростью U , гонится собака, скорость V которой постоянна по модулю и все время направлена на лису. Когда скорости лисы и собаки взаимно перпендикулярны, расстояние между лисой и собакой равно L . Определить ускорение собаки и радиус кривизны траектории ее движения в этот момент времени.

1.33. В условиях задачи **1.32** определить время, через которое собака догонит лису.

Движение со связями. Уравнение кинематической связи

1.34. Концы твердого стержня MN могут свободно скользить по сторонам прямого угла MON (см. рис.). Найти уравнение траектории точки P стержня, которая делит его на части длиной a и b .

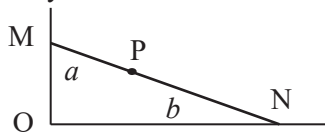


Рис. к задаче 1.34.

1.35. Один из концов тонкого стержня движется вдоль горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v . Стержень опирается на закрепленный цилиндр радиусом R , оставаясь при этом перпендикулярным оси цилиндра (см. рис.). Определите угловую скорость стержня и положение мгновенной оси вращения в некоторый момент времени t , когда стержень еще касается поверхности цилиндра. Начало отсчета по оси X совпадает с координатой центра масс цилиндра в начальный момент времени, а координата правого конца стержня равна $x(t = 0) = x_0$.

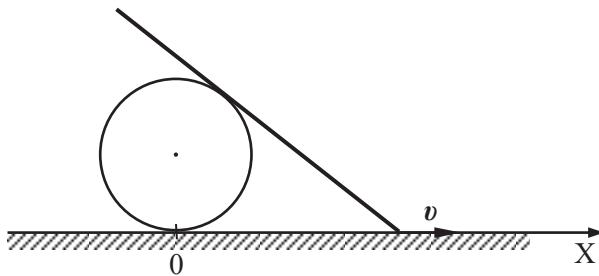


Рис. к задаче 1.35.

1.36. На клине с углом при основании α , расположенном на горизонтальной поверхности, находится система двух тел 1 и 2 (см. рис.), связанных нерастяжимой нитью, перевернутой через маленький блок, ось которого закреплена в верхней точке клина. Записать уравнение кинематической связи для ускорений клина и двух тел, если тело 2 не отрывается от вертикальной поверхности клина в процессе движения.

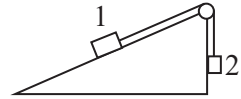


Рис. к задаче 1.36.

1.37. Система тел состоит из трех блоков и трех подвешенных к ним грузов (см. рис.). Найти уравнение кинематической связи для ускорений грузов.

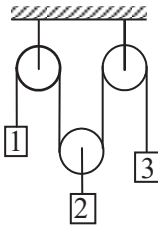


Рис. к задаче 1.37.

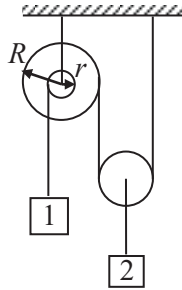


Рис. к задаче 1.38.

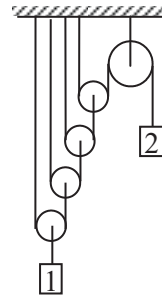


Рис. к задаче 1.39.

1.38. Система тел состоит из двух блоков и двух подвешенных к ним тел (см. рис.). Один из блоков составлен из двух коаксиальных цилиндров с неподвижной относительно потолка осью, имеющих различные радиусы r и R . Первое тело подвешено на нити, намотанной на цилиндр радиуса r , второй – на нити, прикрепленной к оси другого блока. Найти ускорение второго тела, если известно, что ускорение первого тела равно a_1 . Нити считать нерастяжимыми.

1.39. Два тела подвешены на нерастяжимых нитях, как показано на рисунке. Определить ускорение тела 2, если известно ускорение тела 1.

1.40. На вал радиуса R , закрепленный на оси, намотана веревка, на конце которой висит

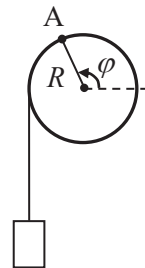


Рис. к задаче 1.40.

груз, опускающийся вниз (см. рис.). Закон движения груза имеет вид $x = x_0 + bt^2$, где x_0 и b – постоянные положительные величины. Определить угловую скорость ω и ускорение β произвольной точки А обода вала, модуль ускорения a этой точки, его нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие. Записать закон движения этой точки $\varphi(t)$.

1.41. Вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω видеокамера, находящаяся в начале координат, фиксирует положение гоночного автомобиля, который движется по участку траектории, уравнение которой задается в полярных координатах функцией $r = 2a + 4ac\cos\varphi$, где a – положительная постоянная. Автомобиль все время находится в поле зрения видеокамеры. Определить скорость автомобиля в момент времени, когда $\varphi = \pi/3$.

1.42. Груз поднимают с помощью дифференциального ворота (см. рис.). Радиусы валов ворота А и В равны R и r соответственно. Определить угловую скорость вращения подвижного блока С, если груз поднимается со скоростью v .

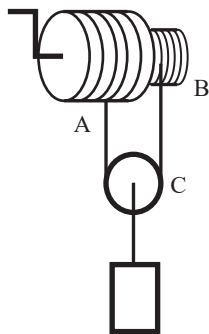


Рис. к задаче 142.

1.43. Бобина магнитофонной ленты, имеющей толщину d , проигрывается в течение времени t . Начальный радиус бобины с пленкой R , а конечный (без пленки) – r . Определить скорость протяжки ленты, считая ее постоянной.

1.44. Стержень опирается своими концами на стороны прямого угла. Верхний конец движется вверх с постоянной скоростью v . Найти, как зависит от времени скорость его центра v_C . За начало отсчета времени принять момент, когда верхний конец находится в вершине угла. Длина стержня L .

1.45. Два трактора, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 , буксируют с помощью тросов автомобиль (см. рис.). Определить модуль и направление скорости v автомобиля в тот момент, когда тросы параллельны векторам v_1 и v_2 , а угол между ними равен α .

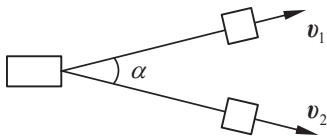


Рис. к задаче 1.45.

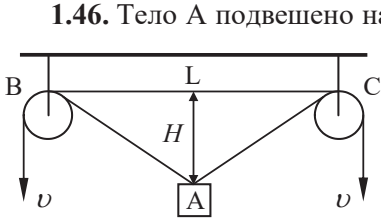


Рис. к задаче 1.46.

1.46. Тело А подвешено на нитях, перекинутых через блоки В и С малого диаметра так, что $AB = BC$ (см. рис.). Концы нитей тянут с одинаковыми скоростями v . Расстояние между блоками В и С равно L . Найти модуль скорости v_A тела А в тот момент, когда оно находится на расстоянии H от прямой ВС.

1.47. Лодку подтягивают к пристани высотой H с помощью веревки, наматываемой на вал лебедки. Радиус вала равен $R \ll H$. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить зависимость модулей скорости и ускорения лодки от длины веревки L ($L > H$). Движение лодки считается поступательным.

1.48. Четыре тела подвешены на нерастяжимых нитях (см. рис.). Найти ускорение тела 4, если известны ускорения остальных трех тел.

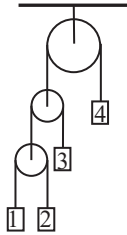


Рис. к задаче 1.48.

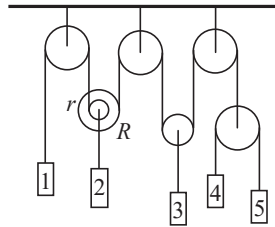


Рис. к задаче 1.49.

1.49. Найти уравнение кинематической связи для ускорений тел, подвешенных на нерастяжимых нитях так, как показано на рисунке.

Динамика материальной точки и простейших систем

1.50. Через блок, подвешенный к потолку, перекинута нить. К концам нити прикреплены два груза массами m_1 и m_2 . Определить ускорения тел.

1.51. Найти ускорения тел массами m_1 и m_2 и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке.

1.52. В системе тел, изображенной на рисунке, известны массы бруска m и клина M , а также угол α при основании клина. Массы блока и нити пренебрежимо малы, нить нерастяжима, трения нет. Найти ускорение клина.

1.53. В системе, изображенной на рисунке, известны массы грузов m_1 , m_2 и m_3 . Определить ускорения всех тел.

1.54. На покоящуюся частицу массой m в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила $F(t) = F_0(1 - \alpha t)$, где F_0 – постоянный вектор, α – положительная константа. Найти закон движения частицы и путь, пройденный частицей до возвращения в исходную точку.

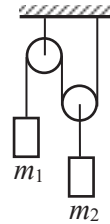


Рис. к задаче 1.51.

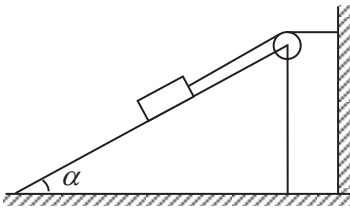


Рис. к задаче 1.52.

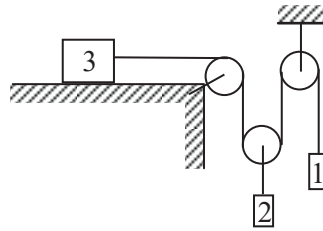


Рис. к задаче 1.53.

1.55. Найти закон движения и уравнение траектории материальной точки, движущейся в однородном и постоянном силовом поле с начальной скоростью v_0 , направленной под произвольным углом α к силе F .

1.56. Найти модуль и направление силы F , действующей на частицу массой m при ее движении в плоскости XY по эллиптической траектории. Закон движения частицы в координатной форме имеет вид $x(t) = A \sin(\omega t)$, $y(t) = B \cos(\omega t)$, где A , B , ω – постоянные величины.

1.57. Материальная точка массой m движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом R . Найти модуль силы давления материальной точки на стенку цилиндра в тот момент, когда ее скорость составляет угол α с горизонтом и по модулю равна v_0 .

1.58. Частица движется вдоль оси X по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти модули силы в точке поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

1.59. Пуля, пробивая доску толщиной h , изменяет свою скорость от v_0 до v . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

1.60. Через блок, ось которого горизонтальна, перекинута нерастяжимая веревка длиной l . За концы веревки держатся две обезьяны одинаковой массы, находящиеся на одинаковом расстоянии l от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью v , а другая со скоростью $2v$. Через какие интервалы времени каждая из обезьян достигнет блока? Массами блока и веревки пренебречь.

1.61. Система трех тел, связанных между собой с помощью двух нитей и трех блоков, изображена на рисунке. Два тела подвешены на нитях, а третье находится на горизонтальной поверхности. Оси крайних блоков, в отличие от оси среднего блока, закреплены (см. рис.). Считая заданными массы m_1 и m_2 , определить массу m_3 , при которой ось среднего блока будет оставаться неподвижной. Трением и массами блоков и нитей пренебречь.

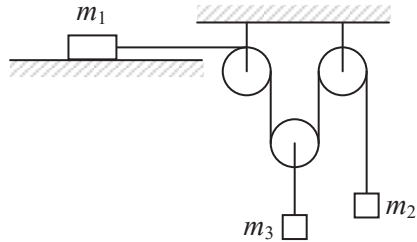


Рис. к задаче 1.61.

1.62. Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. К одному ее концу привязан груз массой m_1 . По другому концу нити с постоянным относительно нее ускорением a_2 скользит кольцо массой m_2 . Найти ускорение a_1 груза массой m_1 и силу трения кольца о нить. Нить считать невесомой.

1.63. Цепочку длиной l поместили на гладкую сферическую поверхность радиуса R так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. С каким ускорением a начнет двигаться каждый элемент цепочки, если ее верхний конец освободить? Длина цепочки $l < \pi R/2$.

Индивидуальные свойства сил

1.64. Маленькое тело массой m лежит на горизонтальной поверхности. На него под углом α к поверхности действует сила, модуль которой зависит от пройденного пути по закону $|F(s)| = F_0 \sqrt{1 + s^2/R^2}$, где F_0 и R – положительные постоянные величины. При этом $\operatorname{tg} \alpha = s/R$, а коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ . Определить скорость тела в момент отрыва от поверхности.

1.65. На доске массой M лежит брусок массой m . Коэффициент трения между доской и бруском равен μ . Доска может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. К бруску прикладывается горизонтальная сила F , модуль которой зависит от времени по закону $|F(t)| = \alpha t$, где $\alpha = \text{const}$. Определить скорости бруска $v(t)$ и доски $V(t)$ спустя время t после начала действия силы.

1.66. На столе лежит доска массой $M = 1$ кг, а на доске – груз массой $m = 2$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской равен $\mu_1 = 0,25$, а между доской и столом – $\mu_2 = 0,5$.

1.67. Один из концов тонкого гибкого каната массой m приподнят над горизонтальной шероховатой поверхностью на высоту H . Длина соприкасающейся с горизонтальной поверхностью части каната, равна l (см. рис.). Коэффициент трения скольжения каната о горизонтальную поверхность равен μ . Канат тянут с постоянной горизонтальной скоростью (верхний конец каната все время остается на высоте H). Найдите длину той части каната Δl , которая не касается поверхности.

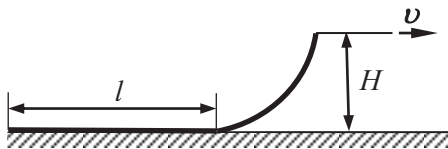


Рис. к задаче 1.67.

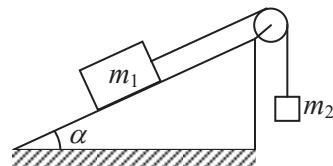


Рис. к задаче 1.68.

1.68. На неподвижном клине с углом при основании $\alpha = 30^\circ$ находится тело массой m_1 , к которому прикреплена легкая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, жестко связанный с

клином. К другому концу нити прикреплено тело массой m_2 , не касающееся клина (см. рис.). Отношение масс тел $\eta = m_2/m_1 = 2/3$. Коэффициент трения между первым телом и плоскостью равен $\mu = 0.1$. Найти величину и направление ускорения второго тела.

1.69. На наклонную поверхность, составляющую угол α с горизонтом, положили два бруска 1 и 2 (см. рис.). Массы брусков равны m_1 и m_2 , коэффициенты трения между поверхностью и этими брусками – μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 > \mu_2$. Найти силу давления одного бруска на другой, возникающую в процессе их скольжения, и углы α , при которых будет скольжение брусков.

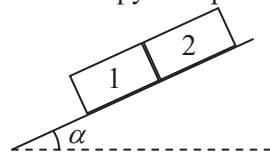


Рис. к задаче 1.69.

1.70. На гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массой M с углом при основании α . Тело массой m скользит по наклонной поверхности клина. Коэффициент трения между клином и телом равен μ . Найти горизонтальные проекции ускорений тела и клина, а также силы N и R , с которыми тело давит на клин и клин на горизонтальную поверхность.

1.71. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения μ между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом $R = 200$ м на скорости $v = 100$ км/ч?

1.72. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом $\mu = 0,1$. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

1.73. Два шарика одинаковой массы падают в воздухе. Диаметр одного из шариков вдвое больше, чем у второго. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости.

1.74. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, ускоренно скользит доска массой M . Коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен μ . На доску кладут тело массой m , которое скользит по доске без трения. Какова должна быть мини-

мальная масса тела, чтобы движение доски по наклонной плоскости стало равномерным?

1.75. Тело небольших размеров движется по поверхности неподвижного клина с углом при основании α . В начальный момент времени скорость тела равнялась v_0 и составляла угол φ_0 с ребром клина (см. рис.). Коэффициент трения тела о поверхность клина $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Найти установившуюся скорость скольжения тела.

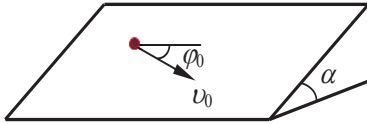


Рис. к задаче 1.75.

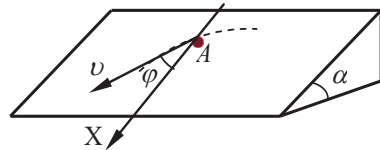


Рис. к задаче 1.76.

1.76. Небольшую шайбу А положили на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (см. рис.), и сообщили ей начальную скорость v_0 . Найти зависимость скорости шайбы от угла φ между вектором скорости и осью X, если коэффициент трения $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, и в начальный момент времени угол равен $\varphi_0 = \pi/2$.

1.77. Небольшое тело пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Найти коэффициент трения между телом и наклонной поверхностью, если время подъема тела оказалось в $\eta = 2,0$ раза меньше времени спуска.

1.78. Стальной шарик радиусом r начинает двигаться в сосуде, заполненном глицерином, под действием силы тяжести. Найти зависимость скорости шарика от времени $u(t)$, а также определить скорость установившегося движения шарика $u_{\text{уст}}$. Коэффициент вязкого трения в глицерине равен η , плотность глицерина – ρ_1 , плотность стали – ρ_2 . Считать, что сила вязкого трения определяется формулой Стокса: $F_v = 6\pi r \nu \eta$.

1.79. Брусочек скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (см. рис.). Определить время, через которое брусочек покинет эту область. Радиус кривизны забора R , коэффициент трения скольжения бруска о по-

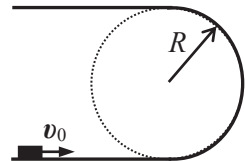


Рис. к задаче 1.79.

верхность забора μ . Размеры бруска много меньше R .

1.80. Стальной шарик радиусом r падает с высоты h без начальной скорости на горизонтальную стальную плиту. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, k – коэффициент пропорциональности. На какое расстояние Δh не долетит шарик до первоначального положения после абсолютно упругого удара о плиту?

1.81. Тонкий упругий шнур массой m имеет длину l_0 и коэффициент упругости k . Склеив торцы, шнур положили на гладкую горизонтальную поверхность, придали ему форму окружности и раскрутили до угловой скорости ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Найти силу натяжения шнура в этом состоянии.

1.82. Кольцо радиусом $R = 25$ см, сделанное из тонкой свинцовой проволоки, лежит на горизонтальном гладком столе. Кольцо привели во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Оценить частоту вращения, при которой кольцо разорвется.

1.83. Стальная проволока диаметром $d = 1$ мм натянута в горизонтальном положении между двумя зажимами, находящимися на расстоянии $l = 2$ м. Сила натяжения проволоки равна $F = 10$ Н. К середине проволоки подвесили груз. Определить массу груза m , если точка его подвеса опустилась на $h = 1$ см.

1.84. Однородный упругий стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы F_0 , равномерно распределенной по его торцу. Длина стержня и площадь его торца в недеформированном состоянии равны l_0 и S_0 , модуль Юнга материала стержня – E , коэффициент Пуассона – μ . Определить зависимости напряжения упругих сил $\sigma(x)$ и относительной деформации $\varepsilon(x)$ от координаты x вдоль стержня, а также относительное удлинение стержня.

1.85. Однородный упругий стержень массой m подвесили за один конец к потолку. Длина и площадь поперечного сечения стержня в недеформированном состоянии – l_0 и S_0 , модуль Юнга материала стержня равен E , а коэффициент Пуассона – μ . Определить относительное удлинение стержня под действием силы тяжести, а также относительное изменение его объема.

1.86. Найти силу гравитационного взаимодействия тонкого кольца массой m и радиусом r с материальной точкой массой m_1 , находящейся на оси кольца, в зависимости от расстояния до его центра. Определить, на каком расстоянии от центра кольца должна находиться материальная точка, чтобы ее ускорение, обусловленное силой гравитационного взаимодействия, было максимальным.

1.87. Определить силу гравитационного взаимодействия однородного сферического слоя и материальной точки, находящейся внутри него.

1.88. В однородном шаре из вещества плотностью ρ сделана сферическая полость. Центр полости находится на расстоянии d от центра шара. Внутри полости помещается сферическая дробинка, которая движется под действием гравитационных сил со стороны оставшейся части шара. Определить ускорение, с которым будет двигаться дробинка.

1.89. Вокруг Земли по круговой орбите вращается спутник. После кратковременного торможения скорость спутника уменьшилась, после чего он начинает двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли (см. рис.) и приземляется через время t . Определите радиус R круговой орбиты, по которой первоначально вращался спутник. Радиус Земли R_0 . Трением в атмосфере пренебречь.

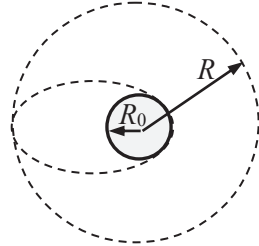


Рис. к задаче 1.89.

1.90. Спутник, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$ рад/с². Найдите изменение радиуса орбиты спутника через $\Delta t = 30$ дней. Радиус Земли можно считать равным $R = 6400$ км, ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли $g = 10$ м/с².

РАЗДЕЛ 2

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

• **Центр масс механической системы (системы материальных точек)** – точка пространства, радиус-вектор которой $\mathbf{r}_{\text{цм}}$ равен:

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

где $m = \sum_i m_i$ – масса механической системы, \mathbf{r}_i и m_i – радиус-вектор и масса i -ой материальной точки системы.

• **Теорема о движении центра масс:** произведение массы m системы тел на ускорение ее центра масс $\mathbf{a}_{\text{цм}}$ относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех внешних сил \mathbf{F}^{ex} , действующих на механическую систему со стороны тел, не входящих в систему:

$$m\mathbf{a}_{\text{цм}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}.$$

• **Импульс механической системы \mathbf{P}** – физическая величина, равная сумме импульсов материальных точек, составляющих систему:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{\text{цм}} \equiv \mathbf{p}_{\text{цм}}.$$

• **Закон изменения импульса механической системы:** изменение импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета на интервале времени (t_1, t_2) равно импульсу суммы внешних сил \mathbf{F}^{ex} , действующих на систему в этот интервал времени:

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{\text{ex}} dt.$$

• **Уравнение Мещерского** – уравнение движения тела с переменной массой $M(t)$:

$$M(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} - \mu \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} + \mathbf{F}_p(t),$$

где $\mu = -\frac{dM}{dt}$ – расход топлива (скорость изменения массы тела, взятая с обратным знаком), $\mathbf{u}(t)$ – скорость отделяющихся частиц относительно тела, $\mathbf{F}_p(t) \equiv -\mu\mathbf{u}(t)$ – реактивная сила, действующая на тело со стороны отделяющихся от него частиц.

- **Формула Циолковского** – зависимость скорости тела \mathbf{v} , движущегося под действием постоянной реактивной силы, от его массы M :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} \ln \left(\frac{M_0}{M(t)} \right),$$

где \mathbf{u} – скорость отделяющихся частиц относительно тела, M_0 и \mathbf{v}_0 – начальные (в момент времени $t = t_0$) масса и скорость тела.

- **Работа силы \mathbf{F}** при перемещении точки приложения силы из точки с радиус-вектором \mathbf{r}_1 в точку с радиус-вектором \mathbf{r}_2 :

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

- **Мощность силы** – физическая величина, численно равная работе, совершаемой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

- **Потенциальная сила \mathbf{F}^p** – сила, работа которой не зависит от вида траектории, а только от начального и конечного положений точки приложения силы. Работа потенциальной силы по замкнутой траектории равна нулю¹.

- **Потенциальная энергия механической системы E^p** – физическая величина, равная сумме работ потенциальных сил, действующих на тела системы, при изменении положения тел системы в пространстве из данного (состояние 1) в любое наперед заданное (состояние 0), называемое нулем отсчета потенциальной энергии:

¹Здесь и далее рассматриваются только **стационарные** потенциальные силы, которые явно не зависят от времени, а только от координат тел системы, которые сами могут зависеть от времени.

$$E^p = -\int_0^1 dA^p = A_{1 \rightarrow 0}^p.$$

• **Кинетическая энергия механической системы** – сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит механическая система:

$$E^k = \sum_i E_i^k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

• **Закон изменения механической энергии системы:** изменение механической энергии системы относительно инерциальной системы отсчета равно работе внутренних и внешних непотенциальных сил:

$$\Delta E = \Delta A^{\text{np}}.$$

• **Удар (соударение)** – кратковременное взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

• **Абсолютно упругий удар (соударение)** – удар, в результате которого суммарная кинетическая энергия соударяющихся тел не изменяется.

• **Абсолютно неупругий удар (соударение)** – удар, в результате которого соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость.

• **Неупругий удар (соударение)** – удар, в результате которого часть суммарной кинетической энергии тел переходит в их внутреннюю энергию.

• **Центральный удар (соударение)** – удар, при котором силы упругости, действующие между соударяющимися телами, направлены вдоль прямой, соединяющей центры масс тел.

• **Лобовой удар (соударение)** – удар, при котором скорости соударяющихся тел лежат на прямой, соединяющей центры масс тел.

Законы сохранения и изменения импульса

2.1. Ствол игрушечной пушки направлен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если она не закреплена и может скользить по абсолютно гладкой поверхности.

Модуль скорости снаряда относительно пушки сразу после выстрела равен $v_0 = 2,2$ м/с, а его масса в $k = 10$ раз меньше массы пушки.

2.2. Две одинаковые тележки, на каждой из которых находится по человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек в направлении, перпендикулярном к направлению движения тележек. В результате первая тележка остановилась, а скорость второй стала равна V . Найти модули первоначальных скоростей тележек V_1 и V_2 , если масса каждой тележки равна M , а масса каждого человека – m .

2.3. Орудие массой M соскальзывает по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В момент, когда скорость орудия оказалась равной V , произвели выстрел, в результате которого орудие остановилось. Из орудия в горизонтальном направлении вылетел снаряд массой m со скоростью v относительно орудия. Найти среднее значение действующей на орудие силы реакции со стороны наклонной плоскости за время выстрела Δt .

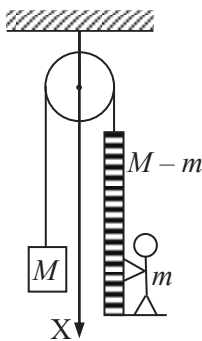


Рис. к задаче 2.4.

2.4. Через неподвижный блок перекинут шнур, на одном конце которого находится лестница с человеком, а на другом конце – уравновешивающий груз массой M (см. рис.). Человек, масса которого равна m , совершил

вверх перемещение $\Delta x'$ относительно лестницы и остановился. Пренебрегая массами блока и шнура, найти перемещение центра масс этой системы.

2.5. Опора подшипника массы M лежит на гладкой горизонтальной поверхности (см. рис.). Определить расстояние l , на которое передвинется опора, когда шайба массой m и радиусом r из верхнего положения I соскользнет на дно опоры радиуса R (положение II).

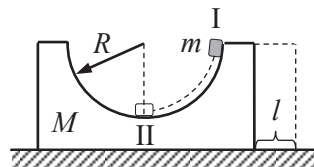


Рис. к задаче 2.5.

2.6. От поезда массой M , идущего с постоянной скоростью, отрывается последний вагон массой m , который проходит путь l и останавливается. На каком расстоянии L от вагона в момент его

остановки будет находиться поезд, если сила тяги паровоза постоянна, а сила трения каждой части поезда не зависит от скорости и пропорциональна ее весу?

2.7. На краю покоящейся тележки стоят два человека, масса каждого из которых равна m . Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с тележки с одной и той же горизонтальной скоростью u относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом.

2.8. Снаряд, выпущенный со скоростью V_0 под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, через время $\tau = \frac{3V_0 \sin \alpha}{2g}$ разорвался на два одинаковых осколка. Один осколок полетел вперед и вверх под углом $\beta = 45^\circ$ к горизонту со скоростью $V_1 = 2V_0$. С какой скоростью V_2 и под каким углом γ к горизонту полетел второй осколок?

2.9. Ящик с песком массой M лежит на горизонтальной поверхности. Под углом α к горизонтали в ящик попадает пуля, имеющая массу m и скорость V , и застревает в песке. Определить скорость пули V , если ящик остановился через время τ после попадания в него пули. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью равен μ . Считать, что выполняется соотношение $mV \gg Mg\Delta t$, где Δt – время, за которое скорость пули относительно ящика становится равной нулю.

2.10. Система состоит из двух шайб массами m_1 и m_2 , связанных нерастяжимой нитью длиной l и движущихся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость одной шайбы равна нулю, а другой V . Найти силу натяжения нити T в этот момент времени.

2.11. На левом конце неподвижной платформы длиной l и массой M стоят два человека. Масса каждого человека равна m . В некоторый момент времени они начали двигаться по направлению к правому концу платформы. Один человек дошёл до середины платформы и остановился, а второй дошёл до правого конца платформы. Трение между колесами платформы и поверхностью земли пренебрежимо мало. На какое расстояние S переместилась в итоге вся платформа?

2.12. На краю квадратного плота с квадратным отверстием, размещенным так, как показано на рисунке, стоит человек. На какое расстояние S переместился плот, если человек дошел до точки O и остановился. Масса плота равна M , масса человека – m , сторона плота l , сторона квадратного – отверстия $l/4$.

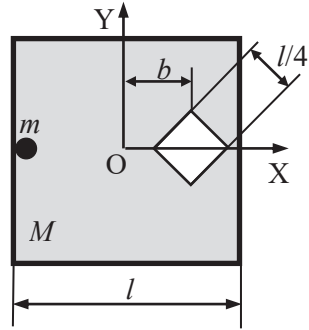


Рис. к задаче 2.12.

2.13. Три лодки, массы которых одинаковы и равны m , идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массой m_1 . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

2.14. С концов платформы массой M и длиной l , которая может перемещаться без трения, навстречу друг другу бегут два зайца массами m и $2m$ с постоянными относительно платформы скоростями. Второй заяц (массой $2m$) бежит в два раза быстрее первого. Насколько сместится платформа, когда второй заяц добежит до ее конца?

2.15. На нити, прикрепленной к воздушному шару массой M , свободно висающему в воздухе, сидит жук массой m , который начинает двигаться с постоянной относительно нити скоростью U вверх. Определить скорости шара и жука относительно Земли.

2.16. Система состоит из двух шариков массами m_1 и m_2 , соединенных между собой пружинкой. В момент $t = 0$ шарикам сообщили скорости v_1 и v_2 , после чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Найти зависимости от времени импульса этой системы в процессе движения и радиус-вектора ее центра масс относительно его начального положения.

2.17. Плот массой M с человеком массой m покоится на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение l со скоростью $v'(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

- перемещение l плота относительно берега;
- горизонтальную составляющую силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

2.18. В момент, когда скорость падающего тела по модулю стала равной $v_0 = 4,0$ м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью $v = 5,0$ м/с каждый. Найти модуль скорости третьего осколка сразу после разрыва.

2.19. Две одинаковые тележки массой M каждая движутся по прямой друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью v_0 . На задней тележке находится человек массой m . В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью u относительно своей тележки. Найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

2.20. Над столом висит однородная неупругая цепочка длиной l и массой m , едва касаясь его поверхности. Цепочку отпускают с нулевой начальной скоростью. Найти закон изменения силы давления цепочки на стол.

Движение тел с переменной массой

2.21. По двум горизонтальным рельсам движутся с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с без трения (по инерции) две одинаковые тележки массой $M_0 = 100$ кг каждая. В некоторый момент времени $t_0 = 0$ на обе тележки сверху непрерывной струйкой начинает сыпаться песок так, что масса сыплющегося песка растет линейно по закону $m = kt$, где $k = 10$ кг/с. В первой тележке есть устройство для непрерывного выброса всего ссыпанного на нее песка в направлении, перпендикулярном скорости тележки. Из второй тележки песок не выбрасывается. Как будут зависеть от времени скорость и перемещение каждой тележки? За какое время каждая тележка пройдет расстояние $L = 9$ м?

2.22. Ракета, масса которой на старте составляет $M_0 = 1500$ кг, взлетает вертикально вверх. Определить скорость ракеты через 10 с полета, если скорость расхода горючего $\mu = 100$ кг/с, а относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 200$ м/с.

2.23. Ракета движется прямолинейно в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением $a > 0$, причем скорость расхода горючего меняется в процессе полета. Модуль относительной скорости выхода продуктов сгорания u . Найти массу ракеты $M(t)$ в произвольный момент времени t , если масса ракеты на старте M_0 .

2.24. Человек поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью реактивного (ракетного) ранца. Реактивный двигатель ранца выбрасывает струю газов вертикально вниз со скоростью (относительно человека) $u = 1200$ м/с. Сколько времени человек может продержаться на постоянной высоте, если его масса $m_1 = 70$ кг, масса ранца без топлива $m_2 = 30$ кг, а начальная масса топлива $m_0 = 20$ кг?

2.25. Космический корабль массой M_0 движется в отсутствие внешних сил со скоростью V_0 относительно инерциальной системы отсчета, связанной с неподвижными звездами. Для изменения направления движения включили реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью u , перпендикулярной направлению его движения. На какой угол α изменилось направление движения корабля за время работы двигателя, если в конце его работы масса корабля стала равной M ? Какое количество топлива потребуется, чтобы развернуть корабль массой $M_0 = 10^5$ кг, летящий с первой космической скоростью ($V_0 = 8$ км/с) на угол $\alpha = 180^\circ$, если относительная скорость истечения газов составляет $u = 4$ км/с?

2.26. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью жидкостного ракетного двигателя. Начальная масса ракеты (с топливом) равна $M_0 = 10^5$ кг, а скорость выбрасываемых вертикально вниз газов равна $u = 2600$ м/с. Найти расход топлива $\mu(t)$ и массу выброшенных ракетой газов в первую секунду полета.

2.27. На судне массой $M = 200$ т установлен водометный двигатель, выбрасывающий ежесекундно $\mu = 200$ кг/с воды с относительной скоростью $u = 5$ м/с. Определить скорость судна через 5 минут после старта без начальной скорости. Соппротивление воды движению судна не учитывать.

2.28. Ракета, масса которой вместе с твердым топливом равна $M_0 = 400$ г, взлетает вертикально вверх. Время работы двигателя ракеты $\tau = 3$ с, скорость истечения газов $u = 800$ м/с. Определить высоту H , на которую поднимется ракета. Масса твердого топлива $m = 50$ г.

2.29. Ракета, поднимается с поверхности с Земли вертикально вверх, имея в начальный момент времени ускорение $2g$. Скорость вылетающих газов равна $u = 2600$ м/с. Считая расход топлива μ постоянным, определить, каким станет ускорение ракеты через $\tau = 20$ с после запуска. Начальная масса ракеты $M_0 = 10^3$ кг.

2.30. Автономная водяная платформа (платформа с реактивной тягой, способная поддерживать человека над поверхностью воды на высоте нескольких метров) состоит из тела платформы, шланга по которому с помощью внутреннего насоса вода закачивается на платформу, и реактивных двигателей, выбрасывающих воду с большой скоростью (см. рис.). Определить, с какой скоростью должна выбрасываться вода из платформы, чтобы платформа с человеком находилась в равновесии на высоте $H = 3$ м. Масса платформы с человеком $M = 100$ кг. Диаметр втягивающего шланга $D = 20$ см. Масса подаваемой ежесекундно воды $\mu = 100$ кг/с.

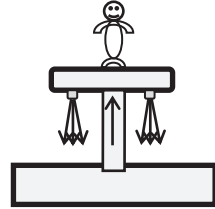


Рис. к задаче 2.30.

2.31. С поверхности Земли стартует двухступенчатая ракета. Определить скорость ракеты после того, как отработают обе ступени. Массы ступеней равны m_1 и m_2 соответственно, масса полезного груза – m . Скорость истечения газов u в двигателе обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношение массы топлива к массе ступеней ракеты равны соответственно α_1 и α_2 , время работы первой и второй ступеней – τ_1 и τ_2 . Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

2.32. Тело скользит по горизонтальным рельсам. Истечение газа происходит вертикально вниз с постоянной скоростью u . Начальная скорость тела равна V_0 , начальная масса – m_0 . Расход газа равен μ . Найти закон движения тела и закон изменения его скорости, предполагая, что тело не отрывается от рельсов. Коэффициент трения скольжения равен k .

2.33. Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью u , постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты v в тот момент, когда ее масса равна m , если в начальный момент она имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

2.34. Ракета начала подниматься вертикально вверх в однородном поле силы тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 . Скорость газовой струи относительно ракеты равна u . Найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t .

2.35. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью $u = 900$ м/с. Найти время, которое ракета может находиться в состоянии покоя,

если начальная масса топлива составляет $\eta = 25\%$ ее массы (без топлива).

2.36. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , сонаправленной с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент времени t , если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

2.37. Платформа массой m_0 начинает двигаться вправо под действием постоянной силы F . Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы при погрузке.

2.38. Цепочка длиной l находится в гладкой горизонтальной трубке так, что часть ее длиной h свободно свешивается, касаясь одним своим концом поверхности стола. В некоторый момент другой конец цепочки отпустили. С какой скоростью он выскочит из трубки?

2.39. В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углем, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги, если на нее погружают $\Delta m = 10$ т угля, за время $\Delta t = 2$ секунды, и за это время она проходит равномерно расстояние $l = 10$ м? Трением при движении платформы можно пренебречь.

2.40. С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета с массой первой ступени m_1 , массой второй ступени m_2 и массой полезного груза m . При каком отношении масс m_1 и m_2 скорость контейнера с полезным грузом оказывается максимальной? Скорость истечения газов u в двигателе обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношение массы топлива к массе ступеней ракеты равны соответственно α_1 и α_2 для первой и второй ступеней. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

Работа, мощность энергия.**Законы сохранения и изменения механической энергии**

2.41. Небольшое тело массой m медленно затаскивают на горку, действуя силой, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Определить работу этой силы, если высота горки h , а длина ее основания l . Коэффициент трения между поверхностью горки и телом равен μ .

2.42. Тело массой m движется с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ . Найти скорость v , с которой тело вернется в исходное положение.

2.43. Локомотив массой m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{S}$, где α – постоянная, S – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

2.44. Шайба массой $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения равным $\mu = 0,15$.

2.45. К небольшому бруску массой $m = 50$ г, лежащему на горизонтальной плоскости, приложили постоянную горизонтальную силу $F = 0,10$ Н. Найти работу сил трения за время движения бруска, если коэффициент трения зависит от пройденного пути x как $\mu = \gamma x$, где γ – постоянная.

2.46. Брусок массой $m = 1,00$ кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0,27$. В некоторый момент ему сообщили начальную скорость $v_0 = 1,5$ м/с. Найти среднюю мощность силы трения за все время движения бруска.

2.47. Брусок массой $m = 2,0$ кг медленно подняли по шероховатой наклонной плоскости на высоту $h = 51$ см при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу $A = 16,0$ Дж. На высоте h нить отпустили. Найти скорость бруска, достигшего первоначального положения.

2.48. Два бруска массами m_1 и m_2 , соединенные недеформированной пружиной, лежат на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между брусками и поверхностью равен μ . Какую ми-

нимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску массы m_1 , чтобы другой брусок сдвинулся с места?

2.49. Спутник массой m движется вблизи поверхности Земли по почти круговой орбите. На спутник действует тормозящая сила со стороны микрочастиц, равная F , не зависящая от скорости спутника. Найти скорость, с которой спутник приближается к Земле в тот момент, когда его скорость равна v , полагая, что радиус орбиты спутника меняется медленно.

2.50. Два шарика с одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружинкой длиной l_0 , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки. Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной l_{\max} . Определить коэффициент упругости пружинки k .

2.51. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых шарика массами m_0 , соединенные невесомой пружинкой жесткостью k и длиной l_0 в недеформированном состоянии. В один из шариков попадает летящая горизонтально вдоль оси пружины со скоростью v пуля массой m и застревает в нем. Найти максимальное и минимальное расстояние между шариками в процессе их движения.

2.52. По гладкой внутренней поверхности полусферической чаши радиусом R из верхней ее точки начинает соскальзывать небольшая шайба. Чаша движется горизонтально с постоянной скоростью v_0 . Определить скорость шайбы в тот момент, когда она будет в нижней точке своей траектории.

2.53. На абсолютно гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массой M с углом при основании α . О наклонную грань клина опирается стержень массой m (см. рис.). Стержень может свободно перемещаться в вертикальном направлении по неподвижным направляющим муфтам. Трение отсутствует. Определить ускорения стержня a_1 и клина a_2 .

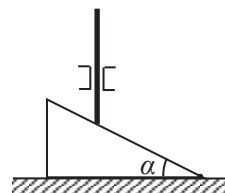


Рис. к задаче 2.53.

2.54. Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H , имеющей горизонтальный трам-

плин (см. рис.). При какой высоте h трамплина шайба пролетит максимальное расстояние? Чему равно это расстояние?



Рис. к задаче 2.54.

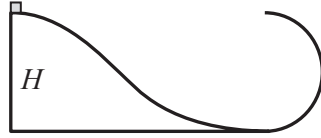


Рис. к задаче 2.55.

2.55. Небольшое тело начинает скользить с высоты H по наклонному желобу, плавно переходящему в полуокружность (см. рис.) радиусом $R = \frac{H}{2}$. Определить, на какую высоту $h_{\text{п}}$ поднимется тело после отрыва от желоба.

2.56. Тело массой m скользит по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0 и въезжает на гладкую подвижную покоящуюся горку массой M и высотой H . Определить скорости тела и горки после окончания их взаимодействия.

2.57. В некоторый момент времени два шарика массами m_1 и m_2 , удаленные от всех остальных тел, находятся на расстоянии l_0 друг от друга и имеют скорости v_1 и v_2 , направленные вдоль линии, соединяющей центры шаров так, как показано на рисунке. Найти наибольшее расстояние l_{max} между шариками в процессе их движения.

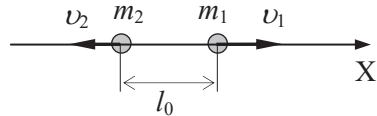


Рис. к задаче 2.57.

2.58. Два космических корабля массами m_1 и m_2 в некоторый момент времени неподвижны друг относительно друга. Расстояние между ними в этот момент времени равно l . Корабли начинают сближаться под действием гравитационных сил (гравитационное поле Земли и других небесных тел не учитывается). Какие скорости будут иметь корабли, когда расстояние между ними уменьшится вдвое? Сила трения отсутствует.

2.59. Прямая цепочка массой m и длиной l лежит на гладкой горизонтальной полуплоскости непосредственно у ее границы с другой полуплоскостью, где коэффициент трения равен μ . Цепочка расположена перпендикулярно границе раздела полуплоскостей. С по-

мощью горизонтальной силы F , направленной вдоль цепочки, цепочку перетаскивают на шероховатую полуплоскость. Определить скорость цепочки после того, как она вся окажется на шероховатой полуплоскости.

2.60. Механическая система состоит из трех одинаковых тел, соединенных нитью, перекинутой через два блока (см. рис.). Положение тел в начальный момент времени показано на рисунке. На какое максимальное расстояние опустится центральный груз в процессе движения системы? Определить также его максимальную скорость в процессе движения.

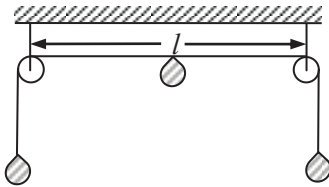


Рис. к задаче 2.60.

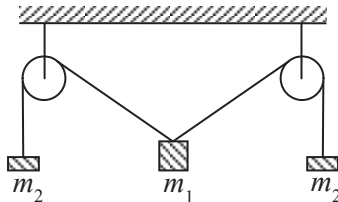


Рис. к задаче 2.61.

2.61. Механическая система, изображенная на рисунке, находится в положении равновесия в поле силы тяжести. Расстояние между осями блоков равно l , а отношение масс грузов $m_1/m_2 = \sqrt{2}$. Среднему грузу толчком сообщают скорость, направленную вниз, после чего он опускается, а затем начинает подниматься вверх. Какую скорость v_1 следует сообщить среднему грузу, чтобы при последующем движении он мог подняться до уровня осей блоков? На какое расстояние x в результате толчка должен опуститься средний груз? Размерами грузов, блоков, а также трением пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой.

2.62. Небольшая муфточка массой $m = 0,15$ кг движется по гладкому проводу, изогнутому в горизонтальной плоскости в виде дуги окружности радиусом $R = 50$ см (см. рис.). В точке 1, где скорость муфточки равна $v_0 = 7,5$ м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила F . Найти скорость муфточки в точке 2, если $F = 30$ Н.

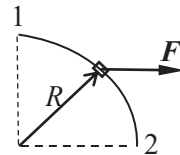


Рис. к задаче 2.62.

2.63. К нити длиной l прикреплен груз массой m . Определить, на какую минимальную высоту надо поднять груз m , чтобы он, падая,

разорвал нить, если минимальный покоящийся груз массой M , разрывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1%. Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

Упругие и неупругие соударения тел

2.64. Шар массой m_1 ,двигающийся по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_1 , испытывает абсолютно упругое лобовое соударение с шаром массой m_2 ,двигающимся в том же направлении со скоростью v_2 . Определить скорости шаров после соударения.

2.65. Частица массой m_1 с импульсом p_1 , движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на покоящуюся частицу массой m_2 . В результате абсолютно упругого нелобового удара частица массой m_2 отлетает под углом θ к первоначальному направлению движения налетающей частицы. Найти модули импульсов p'_1 и p'_2 частиц после столкновения.

2.66. Определить максимальный угол рассеяния для двух случаев абсолютно упругого столкновения: тяжелая частица налетает на покоящуюся легкую; легкая частица налетает на покоящуюся тяжелую.

2.67. Определить долю кинетической энергии, теряемой протоном при рассеянии на ядре атома гелия под максимальным углом.

2.68. Два идеально упругих шарика массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой по абсолютно гладкой поверхности со скоростями v_1 и v_2 . Во время столкновения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации в момент, когда она максимальна.

2.69. На гладкой горизонтальной поверхности лежат три одинаковых шара радиусами r . Первому шару сообщили скорость v_0 (см. рис.), после чего он испытал упругое столкновение одновременно с двумя другими шарами,

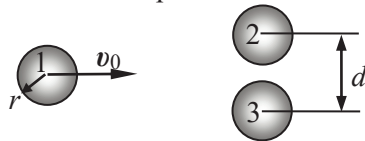


Рис. к задаче 2.69.

расстояние между центрами которых равно d . Найти зависимость скорости первого шара после соударения от расстояния d . При каком значении d первый шар после соударения остановится; отскочит назад; будет двигаться вперед?

2.70. Определить долю потерянной кинетической энергии при абсолютно неупругом лобовом столкновении частицы массой m_1 , движущейся по гладкой горизонтальной поверхности, с неподвижной частицей массой m_2 . При каком соотношении масс частиц эта доля максимальна? Минимальна?

2.71. Протон массой m , летящий со скоростью v , сталкивается с неподвижным атомом массой M , который находится в невозбужденном состоянии. После столкновения протон отскакивает и летит в противоположном направлении со скоростью $v/2$, а атом переходит в возбужденное состояние. Найти скорость атома после столкновения и энергию, которая пошла на возбуждение.

2.72. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых шарика массой M , соединенные недеформированной пружиной жесткостью k . На них налетает шарик такого же радиуса массой m , движущийся со скоростью v_0 , направление которой совпадает с осью пружины. Происходит абсолютно упругий центральный удар. Определить максимальную деформацию пружины после соударения.

2.73. Два одинаковых шара скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу с прицельным расстоянием, равным радиусу шаров. На какой угол повернется вектор скорости каждого шара в результате абсолютно упругого удара?

2.74. Частица массой m_1 испытала абсолютно упругое лобовое столкновение с покоящейся частицей массой m_2 . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы.

2.75. Частица массой m_1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей массой m_2 . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы, если в результате столкновения она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения.

2.76. После абсолютно упругого столкновения частицы массой m_1 с покоящейся частицей массой m_2 обе частицы разлетелись симметрично относительно направления первоначального движения первой частицы, и угол между их направлениями разлета равен $\alpha = 60^\circ$. Найти отношение масс этих частиц.

2.77. При бомбардировке атомов гелия α -частицами с энергией $E_{\alpha 0} = 1 \text{ МэВ}$ найдено, что налетающая частица отклонилась на угол $\varphi = 60^\circ$ по отношению к первоначальному направлению полета. Считая удар абсолютно упругим, определить энергию атома гелия E_{He} и α -частицы E_α после соударения.

2.78. Найти приращение кинетической энергии системы из двух шариков массами m_1 и m_2 при их абсолютно неупругом соударении. До соударения скорости шариков были равны v_1 и v_2 соответственно.

2.79. Частица А массой m , пролетев вблизи другой покоившейся частицы В, отклонилась на угол α . Импульс частицы А до взаимодействия был равен p_0 , после взаимодействия стал p . Найти массу частицы В, если система двух частиц является замкнутой.

2.80. Замкнутая система состоит из двух одинаковых частиц, которые движутся со скоростями v_1 и v_2 так, что угол между направлениями их движения равен θ . После упругого столкновения скорости частиц оказались равными v'_1 и v'_2 . Найти угол θ' между направлениями их разлета.

2.81. В результате лобового столкновения частицы 1 массой m_1 с покоившейся частицей 2 частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2.

2.82. Два одинаковых гладких шара радиусом R скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 . Прицельное расстояние между шарами равно $d = \sqrt{3}R$ (см. рис.). Между шарами происходит абсолютно упругий удар. Определить скорости шаров после соударения.

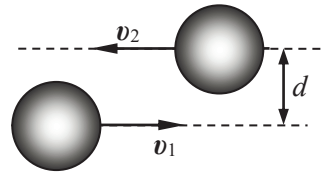


Рис. к задаче 2.82.

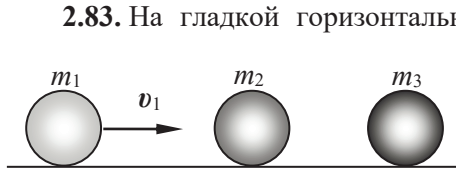


Рис. к задаче 2.83.

На гладкой горизонтальной поверхности находятся три идеально упругих шара массами m_1 , m_2 и m_3 . Центры шаров лежат на одной прямой (см. рис.). Первому шару сообщают скорость v_1 , направленную вдоль линии, соединяющей центры шаров, в результате чего он ударяет второй шар, а

второй шар – третий. Какова должна быть масса второго шара, чтобы третий отлетел с максимальной скоростью?

2.84. Несколько одинаковых упругих шаров подвешены рядом на нитях равной длины таким образом, что расстояния между соседними шарами очень малы (см. рис.). Как будут двигаться шары, если отклонить крайний шар и отпустить; отклонить два шара; три шара?

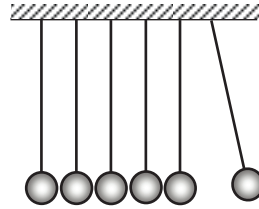


Рис. к задаче 2.84.

2.85. На гладкой горизонтальной поверхности лежат в ряд (с небольшими промежутками) шарики одинакового размера (см. рис.). Один из средних шариков сделан из стали, остальные – из слоновой кости. На шарики справа вдоль линии, соединяющей их центры, налетает костяной шарик той же массой, что и костяные шарики в ряду. Как будут двигаться шарики после удара?



Рис. к задаче 2.85.

2.86. Гладкая трубка согнута в виде кольца и расположена горизонтально. Внутри нее находятся два шарика массами m_1 и m_2 (см. рис.). Шарикам сообщают скорости v_1 и v_2 . Каковы будут скорости шариков после 2020 столкновений? Все столкновения абсолютно упругие и лобовые.

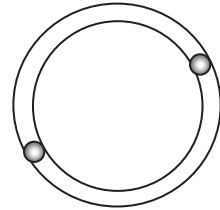


Рис. к задаче 2.86.

2.87. Движущийся большой шар массой m_1 абсолютно упруго сталкивается с неподвижным маленьким шаром массой m_2 . Затем маленький шар абсолютно упруго отражается от стены, вновь сталкивается с большим шаром и т.д. (см. рис.). Как зависит количество соударений в системе от отношения масс шаров? Считать $m_1 \gg m_2$. Все соударения лобовые.

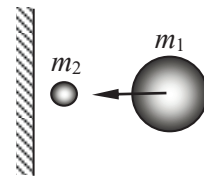


Рис. к задаче 2.87.

2.88. Шар массой m_2 находится на гладкой поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены. Другой шар массой m_1 движется с некоторой скоростью по направлению к шару массой m_2 . Между шарами происходит абсолютно упругий лобовой удар,

после чего оба шара движутся по направлению к стене. Затем шар массы m_2 ударяется о стену и, отскочив, вновь сталкивается с шаром массой m_1 , который после этого останавливается. Найти соотношение масс m_1/m_2 , при котором это возможно.

2.89. Шар массой M находится на гладкой поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены. Другой шар массой m движется по направлению к первому шару. Между шарами происходит абсолютно упругий лобовой удар. При каком соотношении масс m/M между шарами не произойдет второго удара?

2.90. Две одинаковые гантели скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 так, как изображено на рисунке. Расстояние между шариками гантели – l . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения? Размерами шариков и массой стержней пренебречь.

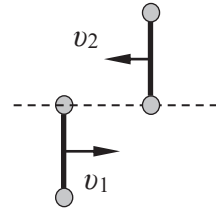


Рис. к задаче 2.90.

2.91. Частица массой t испытала столкновение с покоящейся частицей массой M , в результате которого первая частица отклонилась на угол $\pi/2$, а вторая частица стала двигаться в направлении, составляющим угол $\alpha = 30^\circ$ с первоначальным направлением движения налетающей частицы. Как изменилась кинетическая энергия системы этих двух частиц после столкновения, если $M/t = 5$?

2.92. В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой M прыгают вертикально, абсолютно упруго ударяясь о дно цилиндра и поршень, N легких маленьких шариков массой $m \ll M$ каждый. Общая масса шариков равна массе поршня. Во сколько раз изменится расстояние между равновесным положением поршня и дном цилиндра, если массу поршня увеличить в два раза? Считать модули скоростей шариков у дна цилиндра одинаковыми.

РАЗДЕЛ 3

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

• Взаимосвязь (формулы сложения) радиус-векторов $r(t)$ и $r'(t)$, скоростей $v(t)$ и $v'(t)$, а также ускорений $a(t)$ и $a'(t)$ материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета S и S':

$$\begin{aligned} r &= R + r', \\ v &= V + [\omega r'] + v' = v_{\text{пер}} + v', \\ a &= A + [\dot{\omega} r'] + \underbrace{[\omega [\omega r']]}_{\text{переносное}} + \underbrace{2[\omega v']}_{\text{Кориолиса}} + \underbrace{a'}_{\text{относительное}} = \\ &= a_{\text{пер}} + a_{\text{Кор}} + a'. \end{aligned}$$

Здесь $R(t)$, V , A и $\omega(t)$ – радиус-вектор, скорость, ускорение начала системы отсчета S' и угловая скорость вращения системы S' вокруг своего начала отсчета относительно системы S соответственно; $v_{\text{пер}} = V + [\omega r']$ – **переносная** и v' – **относительная** скорости движения материальной точки; $a_{\text{Кор}} = 2[\omega v']$ – **ускорение Кориолиса**, $a_{\text{цс}} = [\omega [\omega r']]$ – **центростремительное**, $a_{\text{пер}} = A + [\dot{\omega} r'] + [\omega, [\omega r']]$ – **переносное** и a' – **относительное** ускорения материальной точки.

• **Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета S':**

$$\begin{aligned} ma' &= \sum_i F_i - \underbrace{mA - m[\dot{\omega} r'] - m[\omega [\omega r']]}_{\text{переносная}} - \underbrace{2m[\omega v']}_{\text{Кориолиса}}, \\ ma' &= \sum_i F_i + F_{\text{пер}} + F_{\text{Кор}}. \end{aligned}$$

**Поступательно движущиеся
неинерциальные системы отсчета**

3.1. Два небольших шарика с одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружинкой длиной l_0 , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать по-

стоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки (см. рис.). Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной l_{\max} . Определить коэффициент жесткости пружинки k .

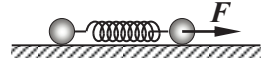


Рис. к задаче 3.1.

3.2. Математический маятник длиной l и массой m подвешен к потолку кабины лифта, опускающегося вниз с ускорением $a < g$. Найти закон движения маятника относительно кабины лифта. Решить задачу в неинерциальной и инерциальной системах отсчета. Влиянием вращения Земли пренебречь.

3.3. Математический маятник укреплен на подставке, которая соскальзывает с наклонной плоскости с углом при вершине α . Найти период колебаний маятника.

3.4. Небольшое тело поместили на вершину гладкого полуцилиндра радиусом R , находящегося на горизонтальной поверхности. Полуцилиндру сообщают постоянное горизонтальное ускорение a , в результате чего тело начинает соскальзывать с его поверхности. Определить модуль скорости v_0 тела относительно полуцилиндра в момент отрыва и высоту H , на которой произойдет отрыв.

3.5. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами m_1 и m_2 . Кабина поднимается с ускорением a . Найти ускорение грузов относительно кабины лифта.

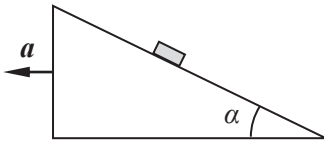


Рис. к задаче 3.6.

3.6. Небольшое тело находится в покое на вершине наклонной плоскости длиной l . За какое время тело соскользнет с плоскости, если плоскость начнет двигаться влево в горизонтальном направлении с ускорением a ? Угол наклона плоскости к горизонту α , коэффициент трения между телом и плоскостью μ .

3.7. Тележка с укрепленным на ней невесомым блоком движется с ускорением a . Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой закреплены два груза массами m_1 и m_2 (см. рис.). Трение между тележкой и грузами отсутствует. Определить

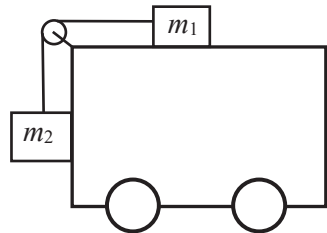


Рис. к задаче 3.7.

ускорение a , при котором груз массой m_1 начнет движение вправо.

3.8. Тележка с укрепленным на ней невесомым блоком движется с ускорением a . Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой закреплены два груза массами m_1 и m_2 (см. рис. к задаче 3.7). Трение между тележкой и грузами отсутствует. Определить силу натяжения нити в следующих трех случаях: а) ускорение a направлено вправо; б) ускорение a направлено влево; в) тележка находится в лифте, движущемся вверх с ускорением a .

3.9. Прямоугольный параллелепипед, стоящий на горизонтальной поверхности, имеет гладкую полуцилиндрическую выемку радиусом R (см. рис.) и движется с ускорением $a = g/\sqrt{3}$. Небольшое тело, находящееся в верхней точке этой выемки, отпускают без начальной скорости. Найти закон изменения силы, с которой тело давит на цилиндрическую поверхность в процессе своего движения.

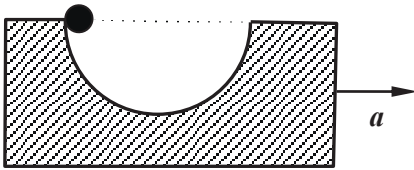


Рис. к задаче 3.9.

3.10. С какой горизонтальной силой F (см. рис.) следует двигать клин массой M и углом α при основании, чтобы лежащий на нем брусок массой m не перемещался относительно клина? Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен μ .

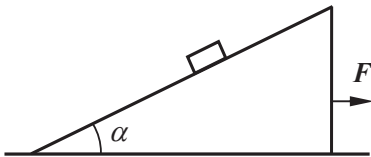


Рис. к задаче 3.10.

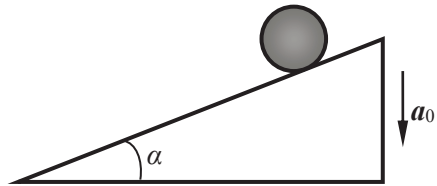


Рис. к задаче 3.11.

3.11. Сплошной цилиндр скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом α к горизонту (см. рис.). Наклонная плоскость опускается в лифте с ускорением a_0 . Определить ускорение оси цилиндра относительно наклонной плоскости.

3.12. С какой горизонтальной силой F следует двигать клин с углом α при основании и массой M (см. рис.), чтобы лежащий на нем брусок массой m не перемещался относительно клина? Сила F направлена так, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен μ .

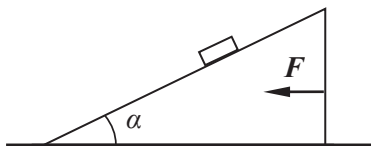


Рис. к задаче 3.12.

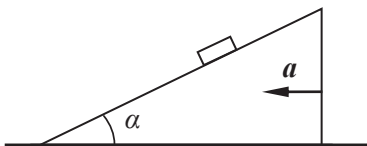


Рис. к задаче 3.13.

3.13. Наклонная плоскость с углом α при основании движется с ускорением в направлении, указанном на рисунке. Определить ускорение, при котором тело, лежащее на наклонной плоскости, начнет равномерно скользить вверх. Коэффициент трения тела о плоскость равен μ .

3.14. Небольшой груз массой m лежит на краю доски длиной l , масса которой равна M . Доска может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. Найти значение величины горизонтально направленной силы F , которую необходимо приложить к доске, чтобы груз соскользнул с нее за время t . Коэффициент трения между доской и грузом равен μ .

3.15. Сосуд с водой движется с ускорением a . В сосуде закреплен гладкий клин, к которому при помощи нити прикреплен шар (см. рис.). Объем шара V , плотность воды ρ_0 , плотность шара ρ . Найти силу натяжения нити.

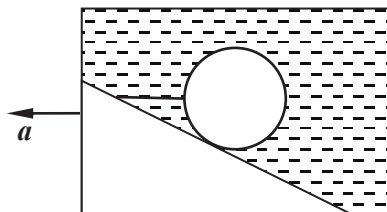


Рис. к задаче 3.15.

3.16. В сосуде с водой закреплена полка, наклоненная под углом α к горизонту. Деревянный шар опирается на гладкую поверхность полки и удерживается с помощью нити, натянутой под углом α к горизонту (см. рис.). Объем шара равен V , плотность воды – ρ , плотность дерева – $0,6\rho$.

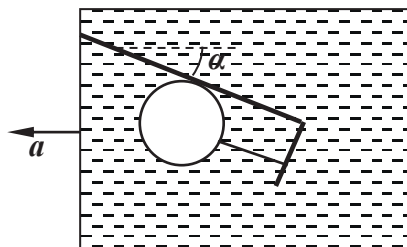


Рис. к задаче 3.16.

Определить силу натяжения нити, если сосуд движется с горизонтальным ускорением a .

3.17. В цилиндрическом сосуде, заполненном жидкостью плотностью ρ , находится шар объемом V и плотностью 3ρ . Сосуд дви-

жется горизонтально с ускорением a . Найти силу давления шара на боковую поверхность сосуда.

3.18. Шар объемом V_0 и плотностью ρ_0 находится в гладком сосуде с жидкостью плотностью ρ . Угол между стенками сосуда и горизонтальным дном равен α (см. рис.). Сосуд находится на тележке, которая движется горизонтально с ускорением a . Найти силу давления шара на дно сосуда.

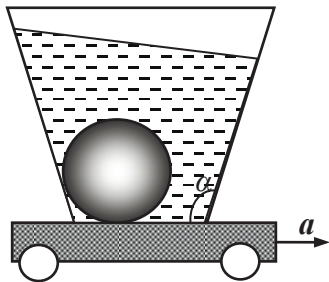


Рис. к задаче 3.18.

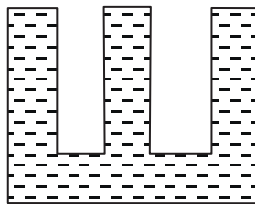


Рис. к задаче 3.19.

3.19. Сосуд, состоящий из трех вертикальных трубок, соединенных между собой (см. рис.), полностью заполнен водой. При равноускоренном движении в горизонтальном направлении из него вылилась часть k от всей массы воды. Найти ускорение сосуда.

Вращающиеся неинерциальные системы отсчета

3.20. Человек массой $m = 60$ кг идет равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиусом $R = 3$ м, которую вращают с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти горизонтальную составляющую силы, действующей на человека со стороны платформы, если результирующая сил инерции, приложенных к нему в системе отсчета, связанной с платформой, равна нулю.

3.21. Горизонтальный диск радиусом R вращают с угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его край. По краю диска равномерно относительно него движется частица массой m . В момент времени, когда она оказывается на максимальном расстоянии от оси вращения, сумма всех сил инерции $F_{ин}$, действующих на частицу в системе отсчета,

связанной с диском, обращается в ноль. Найти зависимость модуля силы $F_{\text{ин}}$ от расстояния r от частицы до оси вращения.

3.22. Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска в сторону от центра движется небольшое тело массой m с постоянной относительно диска скоростью V (см. рис.). Найти силу F , с которой диск действует на тело в момент времени, когда оно находится на расстоянии r от оси вращения.

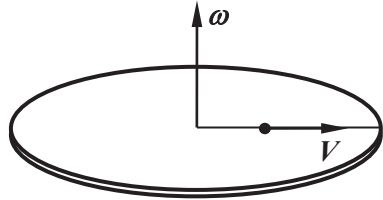


Рис. к задаче 3.22.

3.23. Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили небольшую шайбу массой m и толчком сообщили ей горизонтальную скорость V_0 . Найти модуль силы Кориолиса, действующей на шайбу в системе отсчета, связанной с диском, в тот момент, когда шайба оказалась на расстоянии R от центра диска.

3.24. По диаметру диска радиусом R высверлен канал, в котором вблизи центра диска находится шарик. Диск приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти скорость, с которой шарик вылетит из канала. Трением пренебречь.

3.25. Небольшое тело массой m движется равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиусом R , которую вращают с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Результирующая сил инерции, приложенных к телу в системе отсчета, связанной с платформой, равна нулю. Известно, что тело действует на платформу с силой F . Найти угловую скорость вращения платформы ω .

3.26. Велосипедист движется с постоянной скоростью v по радиусу горизонтального диска, вращающегося с частотой n оборотов в минуту. Определить угол наклона α велосипедиста.

3.27. Иногда устраивают в качестве аттракциона комнату, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Пол такой комнаты имеет

вогнутую форму. Во время вращения все находящиеся там предметы и люди стоят на этом полу, как на плоском, устойчиво и нормально к его поверхности. Определить форму пола, если угловая скорость вращения комнаты равна ω .

3.28. Велосипедное колесо радиусом R вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его центр. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени, шарик находился у обода колеса. Какую начальную скорость V_0 следует сообщить шарiku в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть оси вращения? Угловая скорость вращения ω поддерживается постоянной.

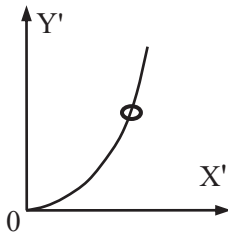


Рис. к задаче 3.29.

Определить форму стержня $y'(x')$, при которой бусинка при любой угловой скорости вращения не будет перемещаться по нему.

3.30. Тонкий однородный стержень длиной L и массой m , шарнирно закрепленный в верхней точке O , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через данную точку (см. рис.). Определить угол α устойчивого вращения стержня.

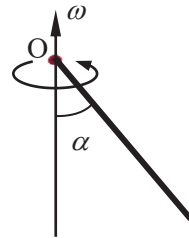


Рис. к задаче 3.30.

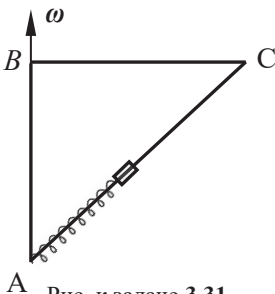


Рис. к задаче 3.31.

3.31. Жесткие стержни образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального катета AB (см. рис.). По стержню AC скользит без трения муфта массой m , связанная пружиной жесткостью k с вершиной A треугольника. Длина нерастянутой пружины равна l . Определить, при каком значении модуля угловой

скорости ω , муфта будет в равновесии при недеформированной пружине? Будет ли это равновесие устойчивым?

3.32. Гладкая горизонтальная трубка длиной L равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов (см. рис.). Определить, за какое время t_0 маленький шарик, находящийся на расстоянии l от оси трубки, достигнет ее конца, а также модуль скорости шарика v_0 относительно лабораторной системы отсчета в момент его вылета из трубки. Начальную скорость шарика относительно трубки принять равной нулю.

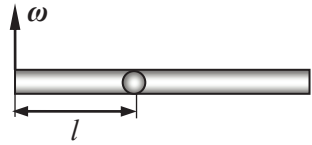


Рис. к задаче 3.32.

3.33. Гладкий горизонтальный стержень длиной L равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов. На стержень надета муфточка массой m , находящаяся в начальный момент времени на расстоянии l от оси стержня. Начальная скорость муфточки относительно стержня равна нулю. Найти модуль силы, действующей на муфточку в тот момент, когда она достигнет конца стержня.

3.34. Вертикальный цилиндрический сосуд радиусом R , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси (см. рис.). К боковой стенке сосуда на нити длиной l привязан шарик радиусом r_0 с плотностью, меньшей плотности жидкости. При вращении нить образует со стенкой угол α . Определить угловую скорость вращения сосуда.

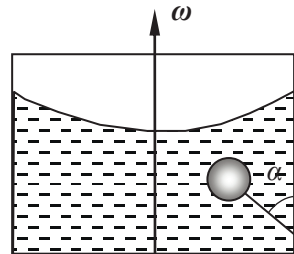


Рис. к задаче 3.34.

3.35. Винтовку с оптическим прицелом навели на вертикальную черту мишени, находящуюся точно в северном направлении, и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить на какое расстояние и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен вдоль поверхности Земли на широте $\varphi = 60^\circ$, начальная скорость пули $V = 900$ м/с, расстояние до мишени $s = 1$ км.

3.36. Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Определить, у какого берега и

на какую величину h уровень воды в реке будет выше. Река течет в северном полушарии на широте $\varphi = 60^\circ$ с севера на юг. Ширина реки $L = 1$ км, скорость течения $V = 1$ м/с.

3.37. На экваторе с высоты h на поверхность Земли падает тело без начальной скорости. Найти, на какое расстояние оно отклонится по вертикали в процессе падения.

3.38. Из ружья произведен выстрел вверх (параллельно линии отвеса). Географическая широта места $\varphi = 60^\circ$, начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с. Определить расстояние между точкой выстрела и точкой падения пули на Землю.

3.39. Под каким углом к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$.

3.40. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом R , равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели T , скорость пули v . Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как во вращающейся, так и в неподвижной системе отсчета, и сравнить результаты.

3.41. В диаметрально противоположных точках карусели диаметром D , вращающейся с постоянным угловым ускорением ϵ , расположены стрелок в точке C и мишень M . Стрелок целится в мишень, не вводя поправки на вращение карусели. Каково должно быть угловое ускорение карусели, чтобы при этих условиях пуля попала в цель, если в момент выстрела угловая скорость карусели была ω_0 , а скорость пули v_0 . Стрелок и условия стрельбы предполагаются идеальными. Влиянием центробежной силы инерции пренебречь.

3.42. Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов и ружейных пуль от начального направления выстрела, заданного в горизонтальной плоскости по земным ориентирам. Рассчитать величину поперечного смещения x пули, выпущенной в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду ее полета. Выстрел произведен на широте Моск-

вы ($\varphi = 55^\circ 45'$), начальная скорость пули $v = 1000$ м/с. Указать, в какую сторону отклонится пуля, если в момент выстрела ствол ружья был направлен на юг. Силу сопротивления воздуха не учитывать. Решить задачу в системе отсчета, связанной с Землей.

3.43. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\varphi = 30^\circ$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v_0 = 500$ м/с, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта) равен $\alpha = 60^\circ$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приблизительно отклонение y точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Каким это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

3.44. Вращение Земли приводит к отклонению свободно падающих тел (без начальной скорости) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в системе отсчета, связанной с Землей.

3.45. Поезд массой m движется вдоль меридиана на северной широте φ со скоростью V . Определить величину и направление силы бокового давления поезда на рельсы.

3.46. Поезд массой m движется вдоль экватора с постоянной скоростью v . Определить силу N нормального давления поезда на рельсы. Решить задачу в двух неинерциальных системах отсчета: в системе, связанной с поверхностью Земли, и в системе, связанной с поездом. Радиус Земли R и ее угловую скорость вращения ω считать заданными.

3.47. Поезд массой m движется на северной широте φ . Определить модуль и направление силы бокового давления поезда на рельсы, если он движется вдоль меридиана со скоростью v . В каком направлении и с какой скоростью должен двигаться поезд, чтобы результирующая сил инерции, действующих на него в системе отсчета, связанной с Землей, стала равной нулю?

3.48. На северной широте φ поезд массой m идет с запада на восток со скоростью v по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели данной местности. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонент кориолисовой силы, действующей на поезд.

3.49. Корабль движется на восток вдоль параллели с географической широтой φ . Скорость корабля v . Определить вес тела P на корабле, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0 .

3.50. На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если самолет взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз с востока на запад. Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна v_0 .

3.51. Представим себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу, с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

3.52. Получить закон движения свободно падающего тела на экваторе в поле силы тяжести Земли с учетом ее вращения в следующей системе координат: начало системы координат находится на поверхности Земли в точке, где проходит вертикаль, проведенная через начальное положение тела по линии отвеса; ось Z направлена вертикально вверх; ось X – на юг; ось Y – на восток. Ускорение свободного падения g известно. Решить задачу методом последовательных приближений.

РАЗДЕЛ 4

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

- **Преобразования Лоренца** – взаимосвязь пространственно-временных координат одного и того же события относительно различных инерциальных систем отсчета.

Пусть система отсчета S' движется относительно системы S с постоянной скоростью V вдоль оси X . При этом оси систем ориентированы в пространстве одинаково и часы синхронизованы так, что событие с пространственно-временными координатами $(\mathbf{r} = 0, t = 0)$ в системе S имеет координаты $(\mathbf{r}' = 0, t' = 0)$ в системе S' . Тогда координаты любого события (x, y, z, t) и (x', y', z', t') в этих системах отсчета связаны преобразованиями Лоренца:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right); \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + Vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{array} \right.$$

Здесь $\beta = V/c < 1$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ – Лоренц-фактор.

- **"Замедление времени"**: для системы отсчета, в которой события происходят в одной точке пространства, наблюдается сокращение интервала времени между этими событиями (по сравнению с любой другой системой отсчета:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \gamma \Delta t' \quad \text{или} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}.$$

Здесь $\Delta t'$ – интервал времени между событиями, происходящими в одной и той же точке пространства в системе S' , по часам системы S' , Δt – интервал времени между теми же событиями по часам системы S .

- **"Сокращение длины"** – для системы отсчета, в которой события происходят одновременно, наблюдается сокращение пространственного интервала между этими событиями (по сравнению с

любой другой системой отсчета) вдоль направления относительного движения систем

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma \Delta x \quad \text{или} \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Здесь $\Delta x'$ – интервал пространственных координат между событиями, происходящими в один и тот же момент времени в системе S' , по часам системы S' , Δx – интервал пространственных координат между теми же событиями по часам системы S .

• **Пространственно-временной интервал между двумя событиями**

$$S_{12} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2}$$

является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца.

• **Преобразование (сложение) скоростей.**

Пусть система отсчета S' движется относительно системы S с постоянной скоростью V вдоль оси X . При этом оси систем ориентированы в пространстве одинаково и часы синхронизованы. Если $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ и $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ – скорости материальной точки относительно систем отсчета S и S' , то:

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \end{array} \right.$$

• **Релятивистский импульс частицы** массой m и скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} m \mathbf{v} = \gamma m \mathbf{v},$$

где c – скорость света.

- **Релятивистское уравнение движения частицы** импульсом p , на которую действует сила F :

$$\frac{dp}{dt} = F .$$

- **Энергия частицы:**

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} mc^2 = \gamma mc^2 .$$

- **Энергия покоя частицы:**

$$E_0 = mc^2 .$$

- **Кинетическая энергия частицы:**

$$T = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2 .$$

- **Связь релятивистского импульса с энергией:**

$$p = \frac{E}{c^2} v .$$

- **Связь массы частицы с ее энергией и импульсом:**

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} .$$

- **Соотношение между импульсом и энергией для частиц, двигающихся со скоростью света:**

$$p = \frac{E}{c^2} c , \quad m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} = 0 .$$

- **Импульс системы** из n свободных (невзаимодействующих) частиц:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i ,$$

где $\{p_i\}$ – импульсы частиц.

- **Энергия системы** из n свободных (невзаимодействующих) частиц:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i ,$$

где $\{E_i\}$ – энергии частиц.

- **Масса системы** из n свободных (невзаимодействующих) частиц:

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2 c^2}}{c^2}.$$

- **Дефект массы составной частицы** массой m , состоящей из n частиц массами m_i :

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - m.$$

Релятивистская кинематика. Преобразования Лоренца и их следствия. Инвариантность пространственно-временных интервалов

4.1. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в системе отсчета S . Время пролета в этой системе равно $\Delta t = 20$ нс. В системе же отсчета S' , связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

4.2. Два стержня с одинаковой собственной длиной l_0 движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения левых и правых концов стержней оказался равным Δt . Определить скорость одного стержня относительно другого.

4.3. Стержень движется равномерно в продольном направлении мимо двух меток A и B , расположенных на расстоянии Δx друг от друга. Сначала в момент t_1 напротив метки A оказался передний конец стержня. Затем напротив метки B в моменты t_2 и t_3 оказались соответственно передний и задний концы стержня. Найти его собственную длину.

4.4. Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке станет равной $\Delta x_1 = 4,0$ м. Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе

отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по этой же линейке составит $\Delta x_2 = 9,0$ м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки.

4.5. Сквозь неподвижную в S-системе отсчета трубку АВ длиной l_0 пролетает стержень А'В', собственная длина которого равна $2l_0$. Скорость стержня такова, что его длина в S-системе равна длине трубки $l = l_0$, и в некоторый момент стержень, пролетая через трубку, целиком помещается в трубку. Однако с точки зрения стержня с такой же скоростью движется трубка, и она претерпевает сокращение длины в два раза. Поэтому стержень длиной $2l_0$ целиком в ней не поместится. Есть ли здесь противоречие?

4.6. Две нестабильные частицы движутся в лабораторной системе отсчета вдоль некоторой прямой в одном направлении с одинаковой скоростью $V = 0,99c$. Расстояние между частицами в этой системе отсчета $l = 12$ м. В некоторый момент времени частицы распались одновременно в системе отсчета, связанной с ними. Найти промежуток времени между моментами распада обеих частиц в лабораторной системе отсчета и определить, какая частица распалась позже в этой системе отсчета.

4.7. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы составляет $\Delta t_0 = 10$ нс. Какой путь пролетит эта частица, двигаясь с постоянной скоростью до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни равно $\Delta t = 20$ нс?

4.8. В К-системе отсчета мюон, движущийся со скоростью $v = 0,99c$, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние $l = 3,0$ км. Определить: а) собственное время жизни этого мюона; б) расстояние, которое пролетел мюон в собственной системе отсчета.

4.9. Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью $v = 3c/4$, попали в неподвижную мишень с промежутком времени $\Delta t = 50$ нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

4.10. В лабораторной системе отсчета находится неподвижный приемник. К нему со скоростью V приближается источник световых сигналов. В системе отсчета, связанной с источником, сигналы испускаются периодически с частотой ν_0 (собственная частота). С какой частотой ν будет воспринимать эти сигналы приемник?

4.11. В лабораторной системе отсчета находится неподвижный приемник. К нему со скоростью V , направленной под углом α к линии наблюдения, приближается источник световых сигналов. В системе отсчета, связанной с источником, сигналы испускаются периодически с частотой ν_0 . С какой частотой ν будет воспринимать эти сигналы приемник?

4.12. Система отсчета S' движется относительно системы S вдоль оси X с постоянной скоростью $V = 0,9c$. В каждой системе в точках с координатами -200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м находятся одинаковые синхронизованные часы. За начало отсчета времени в обеих системах отсчета взят такой момент, когда часы, неподвижные относительно системы S и имеющие координату $x = 0$ м, окажутся напротив часов, неподвижных относительно системы S' и имеющих координату $x' = 0$ м. Определить время, которое в этот момент будут показывать часы, а также их координаты с точки зрения наблюдателей, находящихся как в системе S , так и в системе S' . Изобразить расположение часов обеих систем и примерное положение стрелок этих часов в этот момент времени относительно различных систем отсчета.

4.13. Стержень, движущийся со скоростью $V = c/2$ относительно системы S , имеет собственную длину $l_0 = 1$ м. В системе отсчета S' , связанной с движущимся стержнем, угол между стержнем и направлением его движения составляет $\varphi_0 = 45^\circ$. Найти длину стержня l и угол его наклона φ в системе S .

4.14. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость равна $V = c/2$ и угол между ним и направлением движения составляет $\vartheta = 45^\circ$.

4.15. Стержень, длина которого в системе отсчета S равна L , расположен в ней так, что составляет с осью X угол ϑ . Система отсчета S' движется относительно системы S со скоростью $V = c/2$ в сторону, противоположную оси Y . Определить, какой угол ϑ' составляет стержень с осью X' системы отсчета S' и чему равна его длина L' в этой системе.

4.16. Межзвездный корабль движется от Земли к звезде, находящейся от нее на расстоянии $L = 3$ световых года, со скоростью $V = 5 \cdot 10^6$ м/с. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно с той же по величине скоростью. На какое время Δt часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на

Землю? При решении задачи пренебречь временем, затраченным на разгон и торможение ракеты.

4.17. Корабль, летящий по направлению к Земле, испускает последовательно два коротких световых импульса с интервалом времени $\tau_1 = 1$ мин. Отраженный от Земли первый импульс возвращается на корабль через время $T = 1,5$ месяца. При этом временной интервал между принятыми сигналами составляет $\tau_2 = 15$ с. Промежутки времени τ_1 , τ_2 и T отсчитываются по часам корабля. Найти скорость корабля и время T_3 , которое пройдет на Земле от момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля.

4.18. Космический корабль летит со скоростью $V = 0,6c$ от одного неподвижного космического маяка к другому. Расстояние между маяками свет проходит за время $\tau = 60$ суток. В тот момент, когда корабль находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов.

4.19. Два космических корабля летят вдоль одной прямой в одном направлении со скоростями $V_1 > V_2$. Со второго корабля вдогонку первому посылаются два электромагнитных импульса с интервалом времени τ_1 относительно лабораторной системы отсчета. С каким интервалом времени τ_2 относительно той же системы отсчета они вернуться назад после отражения от первого корабля?

4.20. Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу. На носу и на корме первого звездолета периодически, каждые $\tau_1 = 1$ с, по часам этого звездолета одновременно зажигаются сигнальные огни. На втором звездолете каждые $\tau_2 = 0,5$ с наблюдают две вспышки с интервалом времени $\Delta\tau = 1$ мкс. Найти собственную длину l_0 первого звездолета и скорость U относительного движения звездолетов.

4.21. Космонавт спустя время τ_0 (по собственным часам) после старта получает радиограмму с сообщением о рождении внука. Тотчас же, для того, чтобы внук получил поздравление вовремя, он посылает ответную радиограмму, в которой поздравляет внука с совершеннолетием (возраст равен T). Какова скорость космического корабля?

4.22. Космический корабль удаляется от Земли, двигаясь сначала со скоростью v_1 , потом со скоростью v_2 . С точки зрения космонавта, находящегося на космическом корабле, время движения со скоростями v_1 и v_2 одинаково. Какое расстояние L пролетит корабль, если время движения корабля по земным часам равно T ? Временем, затраченным на изменение скорости корабля, пренебречь.

4.23. Вдоль оси X инерциальной системы отсчета S движется ракета со скоростью $V = 0,9c$ (c – скорость света), проходящая начало координат O в момент времени $t = 0$. В момент $t_1 = 9$ с вслед за ракетой посылается световой сигнал из точки O , а с ракеты – световой сигнал в точку O . Предполагая, что ракета движется в вакууме, найти:

- 1) момент времени t_2 , когда световой сигнал, посланный из точки O , достигнет ракеты;
- 2) момент времени t_3 , когда сигнал, посланный с ракеты, придет в точку O ;
- 3) на каком расстоянии x_2 от точки O будет ракета, когда к ней придет сигнал из точки O ;
- 4) когда вернется в точку O посланный из нее сигнал, если он отражается от зеркала, установленного на ракете (момент времени t_4)?

4.24. Космический корабль с постоянной скоростью $V = (24/25)c$ движется по направлению к Земле. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени $\Delta t' = 1$ с, отсчитанный по часам корабля? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

4.25. В некоторой системе отсчета происходят два события со следующими пространственно-временными координатами: $x_1 = 0$; $t_1 = 0$ (событие А) и $x_2 = 5$ м; $t_2 = 10^{-8}$ с (событие В). Определить:

- 1) в какой системе отсчета эти события происходят на минимальном расстоянии друг от друга $|\Delta x'|_{\min}$, найти это расстояние и скорость движения системы отсчета V ;
- 2) в какой системе отсчета эти события происходят с минимальным временным интервалом $|\Delta t'|_{\min}$, найти этот интервал и скорость системы отсчета V ;

3) могут ли эти события находиться в причинно-следственной связи.

4.26. Два события совершаются на расстоянии $l = 6 \cdot 10^5$ км друг от друга с промежутком времени $\tau = 1$ с относительно некоторой инерциальной системы отсчета. С какой скоростью V должен лететь космический корабль, чтобы в системе отсчета, связанной с кораблем, эти события произошли одновременно?

4.27. В 79 году произошло знаменитое извержение Везувия, а в 1054 году на небе наблюдали сверхновую звезду, расстояние до которой равно 3588 световых лет. Найдите скорость системы отсчета, в которой эти два события произошли одновременно.

4.28. На диаграмме пространство-время Минковского (см. рис.) показаны координаты событий А, В и С. Найти промежуток времени между событиями А и В в системе отсчета, где они произошли в одной точке пространства; расстояние между точками, где произошли события А и С в той системе отсчета, где они одновременны. Между какими из рассматриваемых событий возможна причинно-следственная связь?

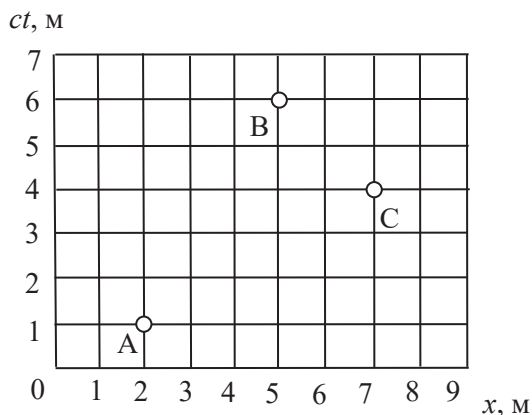


Рис. к задаче 4.28.

Релятивистское сложение скоростей

4.29. Две релятивистские частицы движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями u_1 и u_2 относительно

лабораторной системы отсчета. Найти скорость их сближения и относительную скорость.

4.30. Две частицы движутся относительно лабораторной системы отсчета в плоскости (XY) под углом α друг к другу, первая – со скоростью v_1 , вторая – со скоростью v_2 . Найти их относительную скорость.

4.31. На легкую подвижную частицу налетает тяжелая плита. Определить скорость V , приобретенную частицей после абсолютно упругого столкновения с плитой, движущейся в направлении, перпендикулярном своей плоскости, со скоростью $v = c/3$.

4.32. В системе S две частицы движутся вдоль оси X навстречу друг другу со скоростями $v_1 = a_1c$ и $v_2 = a_2c$, где c – скорость света, постоянные a_1 и a_2 больше $1/2$, но меньше 1. Найти скорость сближения этих частиц в системе S и их относительную скорость. Убедиться, что эта скорость всегда меньше c .

4.33. Два стержня одинаковой собственной длиной l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси со скоростями v_1 и v_2 относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина одного стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

4.34. Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета, причем скорость одной частицы равна v_1 , а другой – v_2 . Найти их относительную скорость.

4.35. Некоторая нестабильная частица движется со скоростью v' в S'-системе отсчета вдоль ее оси Y'. S'-система в свою очередь перемещается относительно S-системы со скоростью V в положительном направлении ее оси X. Оси X' и X обеих систем отсчета совпадают, оси Y' и Y параллельны друг другу. Найти путь, который частица пролетит в S-системе, если ее собственное время жизни равно Δt_0 .

4.36. Частица движется со скоростью v' , направленной под углом φ' к оси X' системы отсчета, движущейся со скоростью V вдоль оси X лабораторной системы отсчета. Направления осей X и X' совпадают. Найти угол φ , который составляет скорость частицы V с осью X лабораторной системы отсчета S.

4.37. В системе отсчета S', движущейся со скоростью $c/2$ вдоль оси X лабораторной системы отсчета S, движется тело небольших

размеров со скоростью $c/\sqrt{2}$ под углом α' к оси X' . Найти угол α , который составляет скорость тела с осью X в системе S .

4.38. Частица движется в S -системе со скоростью v под углом φ к оси X . Найти соответствующий угол в S' -системе, перемещающейся со скоростью V относительно S -системы в положительном направлении ее оси X , если оси X и X' совпадают.

4.39. Луч света распространяется вдоль оси OY' системы отсчета S' , движущейся со скоростью V вдоль оси OX лабораторной системы отсчета S . Найти угол, который образует этот луч с осью OY лабораторной системы отсчета (угол абберрации). Найти этот угол в рамках классической теории, применяя преобразования Галилея. Как отличаются классическая и релятивистские формулы?

4.40. В опыте Л. Физо, осуществленном в 1851 г., в лабораторной системе отсчета определялась скорость света в воде, текущей со скоростью V . Луч света от источника проходил через текущую в трубах воду в одном случае по направлению её движения, а другом – против направления её движения. Получить выражение для скорости света в этом опыте с точностью до $(V/c)^2$.

4.41. Два стержня одинаковой собственной длиной l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же по величине скоростью V относительно лабораторной системы отсчета S . Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

4.42. Два неподвижных прожектора излучают узкие пучки света в противоположных направлениях относительно оси Y лабораторной системы отсчета (см. рис.). С какой скоростью U эти прожекторы должны двигаться в направлении, перпендикулярном оси Y , чтобы пучки света распространялись под углом $\alpha = 90^\circ$ друг к другу?

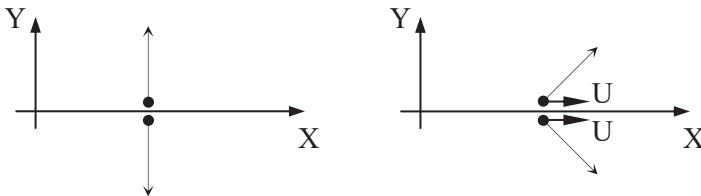


Рис. к задаче 4.42.

4.43. Стержень АВ ориентирован параллельно оси X' в системе отсчета S' и движется в этой системе со скоростью $U' = 0,7c$, направленной противоположно оси Y' (см. рис.). Система S' в свою очередь движется со скоростью $V = 0,6c$ относительно лабораторной системы отсчета S в направлении ее оси X , совпадающей по направлению с осью X' . Найти угол между стержнем и осью X в системе S .

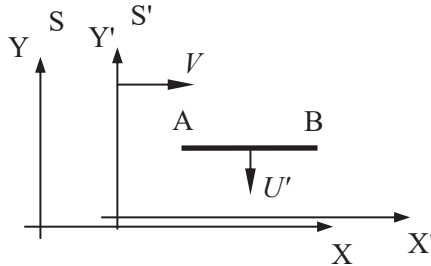


Рис. к задаче 4.44.

4.44. Частица движется вдоль оси X относительно системы отсчета S со скоростью v и ускорением a . Найти ускорение этой частицы в системе отсчета S' , которая перемещается в положительном направлении оси X системы S со скоростью V .

4.45. Частица движется вдоль оси Y относительно системы отсчета S со скоростью v и ускорением a . Найти ускорение этой частицы в системе отсчета S' , которая перемещается в положительном направлении оси X системы S со скоростью V .

4.46. Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением a' , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени $\tau = 1$ год. Определить путь, пройденный ракетой к этому моменту.

4.47. Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением a' , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени $\tau = 1$ год. Найти скорость ракеты в конце разгона.

4.48. Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением a' , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по

земному времени $\tau = 1$ год. Определить время разгона ракеты τ_0 в системе отсчета, связанной с ракетой. Учесть, что

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt, \text{ где } \tau - \text{ время разгона в системе отсчета,}$$

связанной с Землей.

Динамика материальной точки в релятивистской механике. Энергия покоя

4.49. Релятивистская частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы F . Найти зависимость скорости частицы от времени. Сравнить полученное выражение с выражением, полученным в рамках классической механики.

4.50. Электрон влетает в тормозящее постоянное однородное электрическое поле напряженностью E с начальной скоростью V_0 , параллельной направлению поля. Через какое время электрон вернется в начальную точку? Какой путь L он пройдет за это время?

4.51. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы F . Найти скорость частицы и пройденный ею путь в зависимости от времени t .

4.52. Релятивистский протон с импульсом p_0 влетел в момент $t = 0$ в плоский конденсатор параллельно его пластинам. В конденсаторе создано однородное электрическое поле напряженностью E . Найти зависимость компонент скорости протона от времени, а также его закон движения.

4.53. В ускорителе (большом адронном коллайдере) протоны из-за воздействия магнитного поля движутся по окружности радиуса $R = 4,3$ км. Индукция магнитного поля равна $B = 5,43$ Тл и ее вектор направлен перпендикулярно к плоскости траектории. Найдите полную энергию E протона.

4.54. Пучок релятивистских частиц с кинетической энергией T падает на поглощающую мишень. Сила тока в пучке равна I , заряд и масса каждой частицы равны e и m . Найти силу давления пучка на мишень.

4.55. Давлением лазерного луча зеркальная мишень удерживается в поле тяжести. Найти массу мишени, если мощность лазерного излучения равна $W = 200$ кВт.

4.56. Найти зависимость импульса p частицы массой m от ее кинетической энергии T .

4.57. Вычислить скорость электронов, если их кинетическая энергия равна:

- а) 10 кэВ (электронно-лучевая трубка осциллографа),
- б) 1 МэВ (электростатический ускоритель Ван де Граафа),
- в) 50 ГэВ (Стэнфордский линейный ускоритель).

4.58. Найти скорость частицы, кинетическая энергия которой T и импульс p .

4.59. Два протона движутся навстречу друг другу с одинаковыми кинетическими энергиями T . Найти кинетическую энергию T' одного протона в системе отсчета, где другой протон покоится. Провести численную оценку для случая, когда кинетическая энергия протона равна 50 ГэВ (энергия покоя протона $mc^2 = 1$ ГэВ).

4.60. Два протона летят навстречу друг другу. Полная энергия каждого протона равна $E = 7 \cdot 10^3$ ГэВ. Найдите энергию покоя Mc^2 этой системы протонов.

4.61. На ускорителе (большом адронном коллайдере) сталкиваются два протона, летящие навстречу друг другу. Полная энергия каждого протона равна $E = 7 \cdot 10^3$ ГэВ (энергия покоя $mc^2 = 0,94$ ГэВ). Найдите энергию E' одного из протонов в системе покоя другого.

4.62. Две релятивистские частицы, массы которых m и $2m$ и кинетические энергии T и $2T$ соответственно, движутся навстречу друг другу. Найти скорость составной частицы, образовавшейся в результате их соударения.

4.63. На покоящуюся частицу массой m_1 налетает частица массой m_2 с кинетической энергией T . Найти массу M и скорость V частицы, образовавшейся в результате столкновения.

4.64. Две частицы, каждая массой m , летят навстречу друг другу с одинаковой скоростью v . Найти v , если масса образовавшейся при столкновении частицы равна M .

4.65. Нейтрон с кинетической энергией $T = 2mc^2$, где m – его масса, налетает на другой, покоящийся нейтрон. Найти в системе их центра масс: а) суммарную кинетическую энергию \tilde{T} нейтронов; б) импульс p каждого нейтрона.

4.66. Релятивистский π -мезон массой m распадается на лету на два фотона с энергиями E_1 и E_2 относительно лабораторной системы отсчета. Найти угол θ разлета этих фотонов.

4.67. При распаде некоторой частицы появляются две частицы с массами m_1 и m_2 . Из опыта известны абсолютные величины импульсов p_1 и p_2 этих частиц и угол θ между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы.

4.68. Солнечная постоянная (плотность потока энергии, излучаемая Солнцем) равна $I = 1.36 \cdot 10^3$ Вт/м². Расстояние от Солнца до Земли равно $R = 1.5 \cdot 10^8$ км. Найдите массу Δm вещества Солнца, которая превращается в энергию за одну секунду.

4.69. Найти энергетический выход ядерной реакции:
 ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He}$. Измеренные массы ядер составляют:
 $m({}^7_3\text{Li}) = 7,0160$ а.е.м., $m({}^1_1\text{H}) = 1,0078$ а.е.м., $m({}^4_2\text{He}) = 4,0024$ а.е.м.

4.70. Найти удельную энергию связи ядра атома гелия, если известно, что атомная масса гелия равна $m = 4,002602$ а.е.м (1 а.е.м. = 931,494 МэВ). Энергии покоя протона и нейтрона равны соответственно $m_p c^2 = 938,272$ МэВ, $m_n c^2 = 939,565$ МэВ.

4.71. Какую скорость приобретет космический корабль с фотонным двигателем, когда его масса уменьшится вдвое? Корабль ускоряется от нулевой начальной скорости. Считать, что масса топлива много больше массы ракеты, а КПД двигателя равен 100%.

4.72. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость частицы массой m от $0,6c$ до $0,8c$? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

4.73. Определить энергию (в расчете на единицу массы), необходимую для сообщения первоначально покоившемуся космическому кораблю скорости $v = 0,980c$?

РАЗДЕЛ 5

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

• Момент импульса (количества движения) механической системы относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета L равен сумме момента импульса центра масс этой системы относительно данной точки $L_{\text{цм}}$ и момента импульса механической системы относительно ее центра масс L'_0 :

$$L = \sum_i [r_i p_i] = [r_{\text{цм}} p_{\text{цм}}] + \sum_i [r'_i p'_i] = L_{\text{цм}} + L'_0,$$

где $r_{\text{цм}}$ и $p_{\text{цм}} = \sum_i p_i$ – радиус-вектор и импульс центра масс относительно лабораторной системы отсчета; r_i, p_i и r'_i, p'_i – радиус-вектор и импульс материальной точки механической системы относительно лабораторной системы отсчета и системы отсчета, начало которой совпадает с центром масс механической системы и осями, ориентированными параллельно осям лабораторной системы.

• **Тензор инерции абсолютно твердого тела относительно точки:**

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix},$$

где $r_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ – радиус-вектор i -й материальной точки тела массой m_i относительно точки.

• В случае вращения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки момент импульса относительно этой точки равен:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ – угловая скорость вращения тела и \mathbf{J} – тензор

инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки.

- Момент импульса абсолютно твердого тела относительно центра масс:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_0\boldsymbol{\omega}.$$

Здесь \mathbf{J}_0 – тензор инерции абсолютно твердого тела относительно его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения.

- **Уравнение моментов (закон изменения момента импульса) для механической системы относительно точки** – скорость изменения момента импульса системы \mathbf{L} относительно данной точки в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов внешних сил \mathbf{M}^{ex} , действующих на систему:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{\text{ex}}.$$

- **Момент инерции тела относительно оси** – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где r – расстояние от элемента тела объемом dV и массой dm до оси, ρ – плотность тела.

- **Теорема Гюйгенса – Штейнера** – момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела

J_0 относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_0 + ma^2 .$$

- В случае вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной относительно инерциальной системы отсчета оси уравнением движения тела будет **уравнение моментов** для этого тела относительно данной оси:

$$J_n \frac{d\omega}{dt} = M_n^{\text{ex}},$$

где J_n – момент инерции тела относительно оси, ω – угловая скорость вращения тела, M_n^{ex} – сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

- **Кинетическая энергия абсолютно твердого тела** в случае его произвольного движения:

$$E^k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} mV^2 + mV \cdot [\omega r'_{\text{цм}}] + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega r'_i]^2$$

Здесь m_i и v_i – массы и скорости материальных точек, из которых состоит абсолютно твердое тело массой m , V – скорость начала системы отсчета S' , жестко связанной с телом, ω – угловая скорость системы S' , r'_i , $r'_{\text{цм}}$ – радиус-векторы материальных точек тела и центра масс относительно системы S' .

- **Кинетическая энергия вращающегося тела** вокруг неподвижной оси:

$$E^k = \frac{1}{2} J\omega^2 ,$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость вращения тела.

- **Работа внешних сил при повороте тела вокруг оси:**

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_n d\varphi ,$$

где M_n – момент сил относительно оси, φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значения угла поворота.

- **Теорема Кенига** – в случае плоского движения кинетическая энергия абсолютно твердого тела равна сумме кинетических энергий поступательного движения со скоростью центра масс $v_{\text{цм}}$ и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$E^k = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{цм}} \omega^2 = \frac{1}{2} J_n \omega^2,$$

где $J_{\text{цм}}$ и J_n – моменты инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, и мгновенной оси вращения соответственно.

- **Прецессия гироскопа** – вращение оси симметрии гироскопа с угловой скоростью Ω под действием момента внешних сил наряду с его собственным вращением вокруг оси симметрии.

- **Основные физические допущения элементарной теории гироскопа:**

- угловая скорость вращения гироскопа ω и его момент импульса L направлены вдоль оси симметрии гироскопа;

- величина угловой скорости вращения гироскопа вокруг своей оси ω гораздо больше величины угловой скорости прецессии Ω .

- В рамках принятых допущений момент импульса гироскопа L равен

$$L = J_z \omega,$$

а уравнение моментов относительно его неподвижной точки O имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M,$$

где J_z – момент инерции гироскопа относительно своей оси симметрии, M – сумма моментов внешних сил, действующих на гироскоп.

- **Уравнение прецессии гироскопа:**

$$\frac{dL}{dt} = M = [\Omega L] = J_z [\Omega \omega].$$

Кинематика абсолютно твердого тела

5.1. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v_0 (см. рис.). Угол между радиусом, проведенным в произвольную точку A на ободе колеса, и вертикалью равен φ . Найти горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения точки A , вертикальную компоненту v_y этой скорости и модуль полной скорости этой точки. Найти также значение угла α между вектором скорости точки на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси.

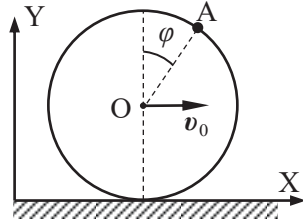


Рис. к задаче 5.1.

5.2. Колесо радиусом R катится с проскальзыванием по горизонтальной поверхности (см. рис.). Модуль скорости верхней точки обода колеса A , лежащей на вертикальном диаметре, равен v_A . Модуль скорости точки обода колеса B , лежащей на горизонтальном диаметре, равен $v_B = 5v_A$. Определить угловую скорость вращения колеса ω , скорость движения его центра v_0 и положение мгновенной оси вращения колеса M .

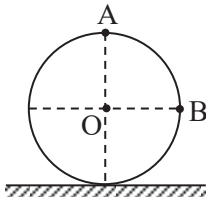


Рис. к задаче 5.2.

5.3. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением a_0 . Определить модули ускорений и скоростей относительно неподвижной системы отсчета точек A , B , C , M и N в тот момент, когда скорость центра колеса равна v_0 (см. рис.). Точки обода колеса A и M лежат на вертикальном его диаметре, точки B и C лежат на горизонтальном диаметре, причем B находится на ободе колеса, а C – на расстоянии r от центра колеса. Точка N находится на ободе колеса и смещена на угол φ относительно вертикали.

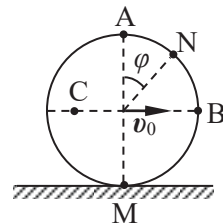


Рис. к задаче 5.3.

5.4. Колесо радиусом R равномерно катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v . Найти координаты x и y произвольной точки A на ободе колеса, выразив их как

функции времени t или угла поворота колеса φ , полагая, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$. По найденным выражениям для x и y построить график траектории точки на ободе колеса.

5.5. Колесо радиусом R равномерно катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Найти длину полного пути S каждой точки обода колеса между двумя ее последовательными касаниями полотна дороги.

5.6. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v . Угол между радиусом, проведенным в произвольную точку на ободе колеса, и вертикалью равен φ . Найти горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения этой точки колеса. Указать величину и направление вектора полного ускорения точек, лежащих на ободе колеса.

5.7. Автомобиль с колесами радиусом R движется со скоростью v по горизонтальной дороге, причем $v^2 > Rg$, где g — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту h может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колес автомобиля? Указать положение той точки на покрышке колеса, с которой при данной скорости движения автомобиля грязь будет забрасываться выше всего. Соппротивление воздуха не учитывать.

5.8. Между двумя параллельными досками зажат цилиндр радиусом R . Доски тянут в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), при этом цилиндр вращается и катится без проскальзывания. Определите скорость центра масс цилиндра v_0 , угловую скорость его вращения ω , а также расстояние l от мгновенной оси вращения до центра масс цилиндра.

5.9. Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями v_1 и v_2 относительно лабораторной системы отсчета XY . Между рейками зажата катушка с радиусами R и r , которая движется вдоль реек без проскальзывания (см. рис.). Найти координату y_M мгновенной оси вращения, угловую скорость вращения ω катушки и скорость v ее оси.

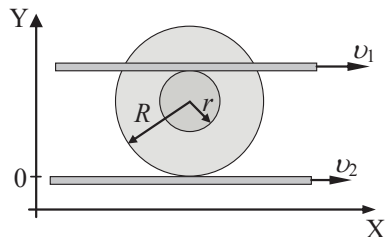


Рис. к задаче 5.9.

5.10. На цилиндрическую часть катушки, лежащую на горизонтальном столе, намотана легкая нерастяжимая нить. Внутренний радиус катушки равен r , а внешний – R . В начальный момент времени конец горизонтального отрезка нити начинают тянуть с постоянным ускорением a . При этом катушка начинает двигаться без проскальзывания так, что ее ось не меняет своей ориентации. Через какое время длина горизонтального участка нити изменится в n раз, если его первоначальная длина была равна L ?

5.11. Катушку, лежащую на горизонтальной поверхности, тянут за намотанную на ее внутреннюю цилиндрическую часть нерастяжимую нить так, что ее конец движется со скоростью V под углом α к горизонту. При этом катушка катится без проскальзывания, а ее ось движется поступательно. Найти скорость движения оси катушки v_0 , если отношение внешнего и внутреннего радиусов катушки равно $\frac{R}{r} = n$.

5.12. На тяжелый диск радиусом R намотаны две нерастяжимые нити, свободные концы которых прикреплены к потолку в точках А и В так, что нити лежат в одной вертикальной плоскости с диском (см. рис.). Найти скорость движения центра диска в тот момент, когда угол между прямолинейными отрезками нитей АС и ВD станет равным α , а угловая скорость диска будет равна ω . Нити натянуты, и ось диска все время движется поступательно.

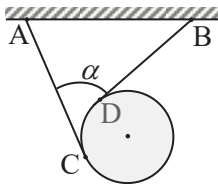


Рис. к задаче 5.12.

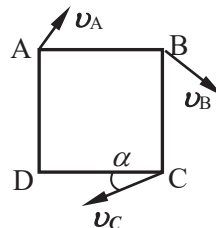


Рис. к задаче 5.13.

5.13. По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластина ABCD. В некоторый момент скорости вершин А и В оказались перпендикулярными друг другу (см. рис.). При этом вектор скорости вершины С, модуль которого равен v , составил с отрезком CD угол, тангенс которого равен 0,5. Найти скорость точки М, являющейся серединой отрезка АВ, в этот момент времени.

5.14. В некоторый момент времени скорость центра стержня АВ, движущегося в горизонтальной плоскости, составила угол $\alpha = 30^\circ$ с направлением стержня (см. рис.). Величина скорости точки В равна $v_B = 2$ м/с, а скорость точки А перпендикулярна скорости точки В. Определите величину скорости v_0 , с которой движется центр стержня в этот момент времени.

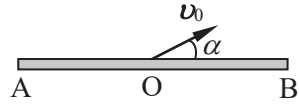


Рис. к задаче 5.14.

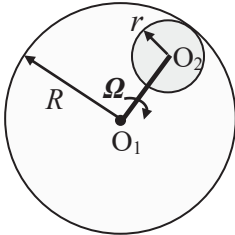


Рис. к задаче 5.15.

5.15. Кривошип соединяет оси O_1 и O_2 двух зубчатых колес. Внешнее колесо неподвижно. Кривошип вращается с угловой скоростью Ω . Радиусы колес равны r и R . Определить "абсолютную" угловую скорость внутреннего колеса (относительно лабораторной системы отсчета) ω и его относительную скорость ω' (по отношению к кривошипу).

5.16. Два соосных колеса с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) вращаются в одну сторону с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) (см. рис.). Между колесами зажато третье колесо радиусом $r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, движущееся без проскальзывания. Найти угловую скорость ω вращения третьего колеса и скорость v_0 его центра.

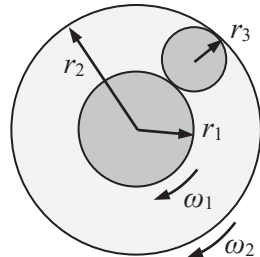


Рис. к задаче 5.16.

5.17. Конус, высота которого $h = 4$ см и

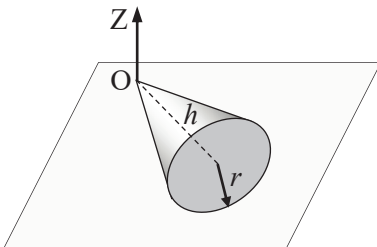


Рис. к задаче 5.17.

радиус основания $r = 3$ см, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, имея неподвижную вершину в точке O (см. рис.). Определить угловую скорость вращения конуса относительно лабораторной системы отсчета, связанной с поверхностью, если конус делает один оборот вокруг оси OZ за время $T = 3$ с.

5.18. В условии задачи **5.17** определить угловую скорость вращения конуса и модуль его углового ускорения β относительно лабораторной системы отсчета, связанной с поверхностью.

5.19. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0,5$ рад/с вокруг горизонтальной оси OA . В момент $t = 0$ ось OA начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением $\beta_0 = 0,1$ рад/с². Найти угловую скорость и угловое ускорение тела через $t = 5$ с.

5.20. Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = 3$ рад/с и $\omega_2 = 4$ рад/с. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение β одного тела относительно другого.

5.21. Круглый конус высотой h и радиусом основания r катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности (см. рис.). Вершина конуса шарнирно закреплена в точке O на уровне центра основания конуса, который движется с постоянной по модулю скоростью v . Найти угловую скорость вращения конуса ω и его угловое ускорение β .

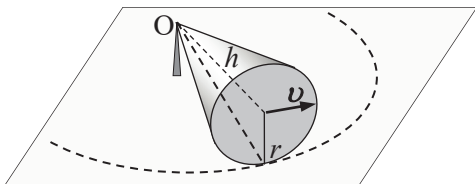


Рис. к задаче **5.21**.

5.22. Некоторое твердое тело одновременно вращается с угловыми скоростями ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ вокруг трех взаимно перпендикулярных мгновенных осей, проходящих через одну точку. Найти, как по отношению к названным трем осям должна быть ориентирована одна ось, вращение вокруг которой могло бы заменить сразу все три указанных независимых вращения. С какой угловой скоростью тогда должно вращаться тело вокруг найденной новой оси вращения?

5.23. Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси. В некоторой точке на этом диске установлен второй диск, ось которого также вертикальна и находится на расстоянии R от оси первого диска. Второй диск вращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и первый диск, но с угловой скоростью ω_2 . Где располагается та мгновенная ось вращения, движение вокруг которой второго диска будет эквивалентно его участию в двух описанных вращательных движениях с угловыми скоростями

ω_1 , и ω_2 ? С какой угловой скоростью ω должен вращаться второй диск вокруг этой мгновенной оси?

5.24. Вращение от мотора автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал – устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с разной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от мотора?

5.25. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $\alpha = 2,0 \cdot 10^{-2}$ рад/с³. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^\circ$ с ее вектором скорости?

5.26. Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta \sim \sqrt{\omega}$, где ω – его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна ω_0 .

5.27. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где ω_0 и α – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимости от времени:

а) угла поворота; б) угловой скорости.

5.28. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0,50$ рад/с вокруг горизонтальной оси АВ. В момент времени $t = 0$ ось АВ начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением $\beta_0 = 0,10$ рад/с². Найти модули угловой скорости и углового ускорения тела через $t = 3,5$ с.

Динамика абсолютно твердого тела

5.29. Система тел состоит из двух грузов, связанных между собой с помощью невесомой нерастяжимой нитью, и двух одинаковых блоков (см. рис.). Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массы грузов m_1 и m_2 , массы блоков M и их радиусы R , определить ускорения грузов a_1 и a_2 , а также разности сил натяже-

ния нитей по обе стороны каждого из блоков. Трением в оси блока пренебречь.

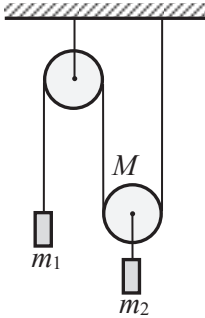


Рис. к задаче 5.29.

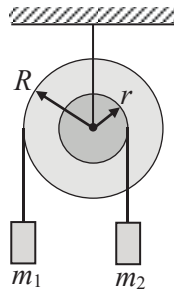


Рис. к задаче 5.30.

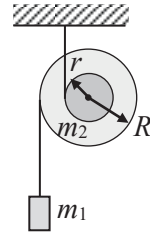


Рис. к задаче 5.31.

5.30. В системе тел, показанной на рисунке, известны массы грузов m_1 и m_2 , момент инерции блока J_0 относительно его оси и радиусы ступеней блока r и R . Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорения грузов a_1 и a_2 , угловое ускорение блока β и силы натяжения нитей.

5.31. В системе тел (см. рис.) известны масса груза m_1 , масса ступенчатого блока m_2 , момент инерции блока J_0 относительно его оси и радиусы ступеней блока R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорения груза a_1 и центра масс блока a_2 в лабораторной системе отсчета.

5.32. С каким ускорением a будет опускаться катушка массой M , внутренним радиусом r и моментом инерции J относительно оси симметрии, если она подвешена так, как показано на рисунке? На катушку намотаны еще две нити, к которым подвешен груз массой m . Определить силы натяжения нитей.

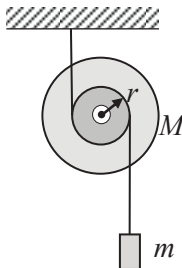


Рис. к задаче 5.32.

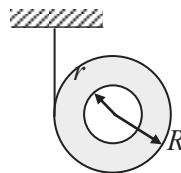


Рис. к задаче 5.33.

5.33. Шайба массой m , представляющая собой цилиндр радиусом R с круглым отверстием радиусом r , подвешена на нити, как показано на рисунке. Масса нити пренебрежимо мала. Найти ускорения центра масс шайбы a относительно лабораторной системы отсчета.

5.34. Система тел, состоящая из груза и двух одинаковых блоков, изображена на рисунке. Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массу груза m , массы блоков M и их радиусы R , определить ускорение груза a . Трением в оси блока пренебречь.

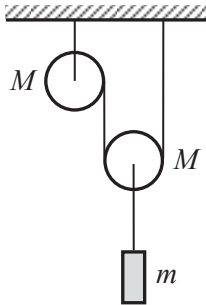


Рис. к задаче 5.34.

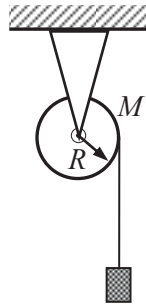


Рис. к задаче 5.35.

5.35. Однородный цилиндр массой M и радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза массой m , прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр (см. рис.). Найти угол φ поворота цилиндра в зависимости от времени, если $\varphi = 0$ при $t = 0$.

5.36. В условии задачи 5.35 груз массой m состоит из двух одинаковых частей, связанных нитью. Определить силу натяжения этой нити T .

5.37. Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображена на рисунке. На валик радиусом r наглухо насажен сплошной диск радиусом R и массой M . Валик и диск сделаны из одного материала, причем выступающие из диска части оси имеют массу m . К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск подни-

мается, а затем предоставляют диску свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

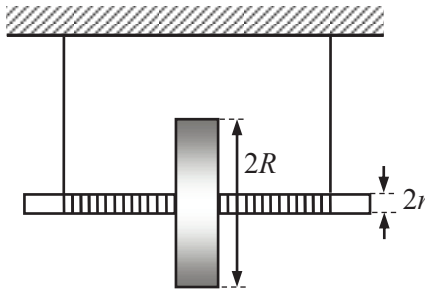


Рис. к задаче 5.37.

5.38. На горизонтальную неподвижную ось насажен блок, представляющий собой сплошной цилиндр массой M . Через него перекинута невесомая веревка, на концах которой висят две обезьяны массой m каждая. Первая обезьяна начинает подниматься с ускорением a относительно веревки. Определить, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат будет двигаться вторая обезьяна.

5.39. Система состоит из ступенчатого блока (с радиусами r и $R = 2r$ и моментом инерции J_0 относительно его оси), подвижного блока массой $2m$ и двух грузов массами m и $4m$. Тела связаны легкими нерастяжимыми нитями так, как показано на рисунке. Определить ускорение груза массой m . Трением в оси блока, сопротивлением воздуха и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

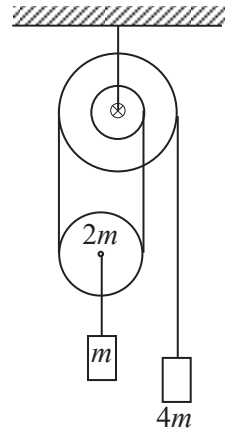


Рис. к задаче 5.39.

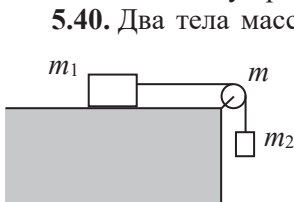


Рис. к задаче 5.40.

5.40. Два тела массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через однородный блок массой m (см. рис.). Коэффициент трения между первым телом и горизонтальной поверхностью равен μ . В процессе движения тел не происходит проскальзывания нити по поверхности блока. Найти ускорение второго тела,

пренебрегая трением в оси блока.

5.41. На подставке, имеющей массу m_1 укреплен ось, на которой может свободно вращаться цилиндр радиусом R и массой m_3 (см. рис.). Нить, намотанная на цилиндр, прикреплена к телу массой m_2 . Определить ускорения тел массами m_1 , m_2 и цилиндра при следующих условиях:

- 1) к телу массой m_2 приложена горизонтальная сила F (см. рис.) и сил трения нет;
- 2) те же условия, но при наличии сил трения между плоскостью и телами массами m_1 и m_2 , а трением в оси цилиндра пренебречь;
- 3) к веревке в точке А приложена горизонтальная сила F , тело массой m_2 убрано.

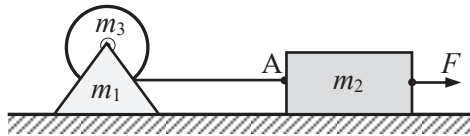


Рис. к задаче 5.41.

5.42. На сплошной цилиндр массой M и радиусом R намотана невесомая нить, к которой привязан груз массой m . Нить переброшена через невесомый блок, как показано на рисунке. Определить ускорение центра масс цилиндра a_0 и ускорение груза a . Определить, при каком коэффициенте трения скольжения μ качение цилиндра по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания. Движение цилиндра считать плоским.

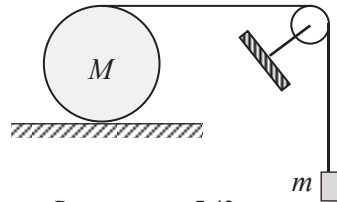


Рис. к задаче 5.42.

5.43. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой m_1 и на ней – однородный шар массой m_2 . К доске приложили постоянную горизонтальную силу F . С какими ускорениями будут двигаться доска a_1 и центр шара a_2 в отсутствие скольжения между ними?

5.44. На двух параллельных горизонтальных брусках лежит сплошной цилиндр радиусом R и массой m , на который намотана веревка (см. рис.). К опущенному вниз концу веревки приложена вертикальная сила, равная половине веса цилиндра. Найти горизонтальное ускорение цилиндра и минимальное значение коэффициента трения μ между цилиндром и брусками, при котором будет происхо-

дить качение без скольжения. Ось цилиндра перпендикулярна к брускам, центр его масс и сила лежат в вертикальной плоскости, проходящей посередине между брусками.

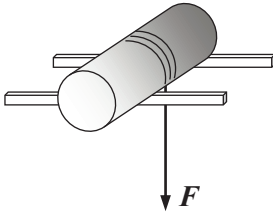


Рис. к задаче 5.44.

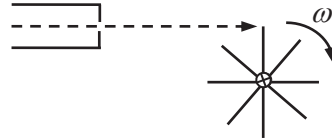


Рис. к задаче 5.45.

5.45. В мельничке Крукса на лопасти легкого колесика направляется пучок электронов, заставляющий колесико вращаться (см. рис.). Определить, с каким угловым ускорением будет вращаться мельничка Крукса, если на центр ее лопасти падает пучок электронов с силой тока $I = 3.3$ мА, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 900$ В? Момент инерции колеса мельнички относительно оси ее вращения равен $J = 2.7 \cdot 10^{-9}$ кг·м², радиус лопасти $R = 1$ см. При решении задачи пренебречь трением в оси мельнички, отражением электронов, а также вторичной электронной эмиссией из лопастей мельнички.

5.46. На лежащую на горизонтальной поверхности катушку массой $m = 100$ г и моментом инерции $J_0 = 400$ г·см² относительно ее оси намотана невесомая нерастяжимая нить. Внешний радиус катушки равен $R = 4$ см, а внутренний — $r = 1$ см. К концу нити под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной поверхности приложена сила $F = 0,2$ Н (см. рис.). Найти ускорение центра масс катушки a для случая, когда катушка движется в горизонтальном направлении без проскальзывания и величину коэффициента трения μ , при котором такое движение возможно.

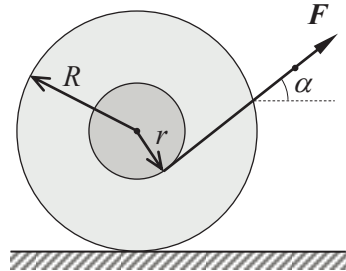


Рис. к задаче 5.46.

5.47. Два одинаковых сплошных цилиндра массой M катятся по горизонтальной поверхности таким образом, что один цилиндр толкает перед собой другой. К оси толкающего цилиндра приложена

горизонтальная сила F . Коэффициент трения между поверхностью и цилиндрами и между цилиндрами одинаков и равен k . Определить силу F , при которой начнется проскальзывание между поверхностью и хотя бы одним из цилиндров.

5.48. Тонкостенный цилиндр массой m скатывается без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис.). Найти ускорение a оси цилиндра и силу трения, действующую на него со стороны наклонной поверхности клина.

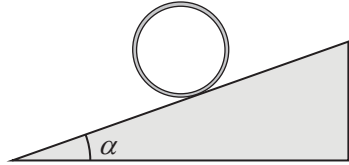


Рис. к задаче 5.48.

5.49. С наклонной поверхности клина с углом α при вершине скатывается без проскальзывания однородный шар массой m и радиусом R . Найти ускорение a центра шара.

5.50. Шар радиусом r катится по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α начинается качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен k . Решить ту же задачу в случае качения цилиндра по наклонной плоскости.

5.51. Оси сплошного и тонкостенного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис.). Радиусы цилиндров одинаковы и равны R , при этом масса сплошного цилиндра равна m_1 , а тонкостенного – m_2 . Найти угол α , при котором цилиндры будут скатываться без проскальзывания.

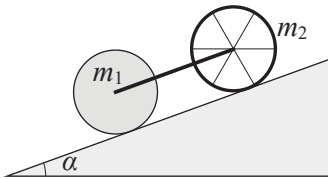


Рис. к задаче 5.51.

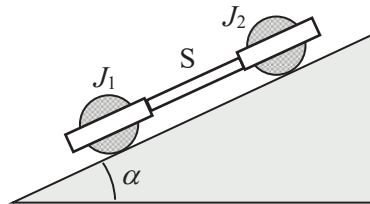


Рис. к задаче 5.53.

5.52. Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомым стержнем. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании α (см. рис. к

задаче 5.51). Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого цилиндра m . Определить силу F реакции стержня.

5.53. Два катка, связанные невесомой штангой S , скатываются без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (см. рис.) Катки имеют одинаковые массы m и одинаковые радиусы R , момент инерции первого катка J_1 , второго – J_2 . Найти угловое ускорение, с которым катки скатываются без скольжения с наклонной плоскости. Определить силу F , передаваемую штангой, если каток с бóльшим моментом инерции движется впереди, и наоборот.

5.54. Вращающийся с угловой скоростью ω сплошной однородный цилиндр радиусом r ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью, и начинает катиться вверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

5.55. С наклонной поверхности клина с углом α при вершине скатывается без проскальзывания тело, представляющее собой два одинаковых конуса, жестко соединенных вершинами (см. рис.). Масса каждого конуса равна m , радиус основания и высота конусов – R и H , соответственно. Найти ускорение a центра масс тела.

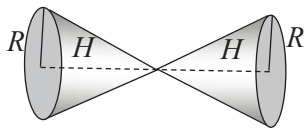


Рис. к задаче 5.55.

5.56. Цилиндрическая шайба радиусом $r = 3$ см касается борта гладкой горизонтальной площадки, имеющей форму круга радиусом $R = 10$ м. Шайбе сообщили скорость $v_0 = 30$ м/с, направленную вдоль борта. Коэффициент трения между бортом и шайбой равен $\mu = 0,1$. Определить модуль скорости шайбы v_k после того, как прекратится проскальзывание между бортом и шайбой, а также интервал времени t_k , через который это произойдет.

5.57. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечного сечения желоба изображена на рисунке.

5.58. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечного сечения желоба изображена на рисунке.

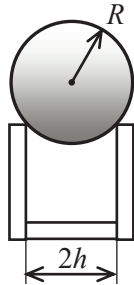


Рис. к задаче 5.57.

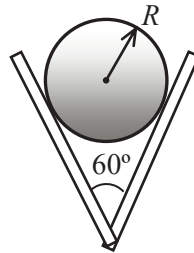


Рис. к задаче 5.58.

5.59. Сплошной цилиндр, ось которого горизонтальна, движется без вращения по идеально гладкой горизонтальной поверхности в направлении, перпендикулярном его оси, с постоянной скоростью v_0 . В некоторый момент времени цилиндр достигает границы, где поверхность становится шероховатой, и возникает постоянная (не зависящая от скорости) сила трения скольжения F_c , а сила трения качения отсутствует. Определить зависимость скорости центра масс цилиндра и его угловой скорости от времени после пересечения границы. Масса цилиндра равна M , радиус цилиндра – R .

5.60. Сплошному однородному шару радиусом r , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщается в начальный момент времени поступательная скорость v_0 без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение, перейдет в чистое качение. Определить изменение кинетической энергии шара.

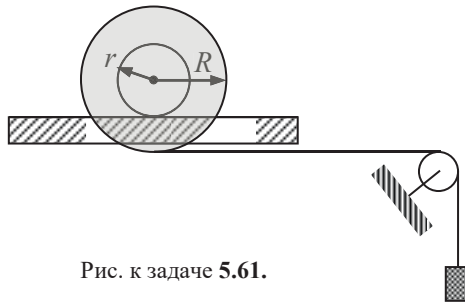


Рис. к задаче 5.61.

5.61. Цилиндр радиусом R имеет выступающие оси радиусом r . На цилиндр намотана нить, перекинутая через неподвижный невесомый блок, и к ее концу привязан груз массой m . Оси цилиндра по-

ложены на горизонтальные рельсы (см. рис.). Определить ускорение цилиндра и груза в двух случаях: а) ось катится по рельсам без проскальзывания; б) трение между рельсами и осью отсутствует. Момент инерции цилиндра с осями относительно оси цилиндра равен J_0 , масса – M .

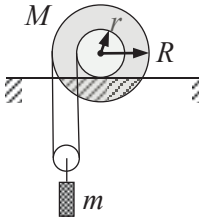


Рис. к задаче 5.62.

5.62. На дифференциальный блок массой M и радиусами r и R ($R = 2r$) намотана невесомая нить, как показано на рисунке. На нити подвешен невесомый блок с грузом массой $m = 0,8M$. Дифференциальный блок катится без скольжения по горизонтальным рельсам. Найти ускорения груза и дифференциального блока. Радиус инерции блока $r_{\text{ин}}$ связан с R следующим соотношением $r_{\text{ин}}^2 = 0,3R^2$.

5.63. Машина Атвуда (массы грузов – m_1 и m_2 , масса цилиндрического блока – M , радиус блока – R) установлена на клине, верхняя грань которого горизонтальна (см. рис.). Клин, в свою очередь, находится на закрепленной наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30^\circ$. Определите угловое ускорение блока β , если клин в результате действия некоторой внешней силы движется вверх вдоль наклонной плоскости с постоянным ускорением a . Трением можно пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой. Считать, что колебания грузов отсутствуют.

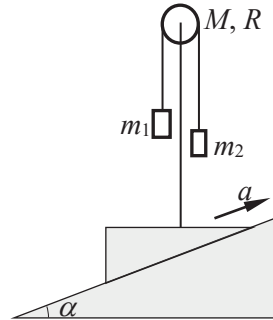


Рис. к задаче 5.63.

5.64. Горизонтальный тонкий однородный стержень АВ массой m и длиной l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец А. В некоторый момент времени на конец стержня В начала действовать постоянная сила F , которая все время перпендикулярна первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения.

5.65. Однородный диск радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили на горизонтальную поверх-

ность. Коэффициент трения между поверхностью и диском равен μ . Через какое время τ угловая скорость вращения уменьшится в два раза?

5.66. Однородный диск радиусом R , вращающийся с угловой скоростью ω_0 , осторожно положили на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ , так, что поверхность диска соприкасается с горизонтальной поверхностью. Определите время τ , за которое диск полностью остановится.

5.67. Сплошному однородному цилиндру массой m и радиусом R сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω . Затем положили его боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. На какое расстояние переместится цилиндр за время, в течение которого движение цилиндра происходило со скольжением. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндром равен μ .

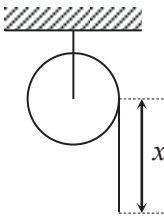


Рис. к задаче 5.68.

5.68. Однородный сплошной цилиндр массой M может свободно вращаться вокруг своей неподвижной горизонтальной оси (см. рис.). На цилиндр намотана тонкая нить длиной L и массой m . Найти ускорение a свешивающейся части нити в зависимости от ее длины x .

5.69. Обруч радиусом r свободно скатывается с вершины неподвижной цилиндрической поверхности радиусом $R > r$ (см. рис.). В какой точке поверхности начнется скольжение обруча? Коэффициент трения между обручем и поверхностью $k = 0,5$.

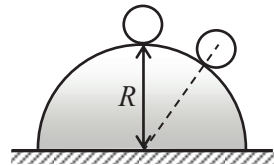


Рис. к задаче 5.69.

5.70. С какой высоты H должен скатиться по наклонному желобу шарик с радиусом инерции ρ , для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиусом R ? Радиусом шарика r по сравнению с R пренебречь.

5.71. Рассчитать момент инерции J тонкой прямоугольной пластинки массой m размером $a \times b$ относительно оси, проходящей через одну из вершин пластинки перпендикулярно ее плоскости.

5.72. Прямой круглый однородный конус имеет массу m и радиус основания R . Определить момент инерции J конуса относительно его оси.

5.73. Определить момент инерции цилиндра относительно оси вращения O_1O_2 (см. рис.). Радиус основания цилиндра равен r , высота — h , плотность материала — ρ . В цилиндре сделана сферическая полость радиусом R . Расстояние от центра полости до оси цилиндра равно — d .

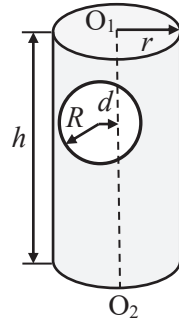


Рис. к задаче 5.73.

5.74. Найти момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через:

- его конец перпендикулярно стержню;
- его центр и составляющей угол α со стержнем.

5.75. Найти момент инерции тонкой однородной квадратной пластинки относительно оси, лежащей в ее плоскости и совпадающей с одной из ее сторон, если сторона пластинки равна a , а ее масса — m .

5.76. Тонкая однородная пластинка массой $m = 0,60$ кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого равна $a = 200$ мм.

5.77. Вычислить момент инерции медного однородного диска относительно его оси, если толщина диска $b = 2,0$ мм и радиус $R = 100$ мм.

5.78. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом a и массой m относительно оси, совпадающей с его диаметром.

5.79. Показать, что для тонкой пластинки произвольной формы имеется следующая связь между моментами инерции: $J_1 + J_2 = J_3$, где 1, 2, 3 — три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку, причем оси 1 и 2 лежат в плоскости пластинки. Используя эту связь, найти момент инерции тонкого круглого однородного диска радиусом R и массой m относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров.

5.80. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез радиусом $R/2$ (см. рис.). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска рав-

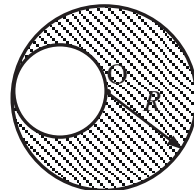


Рис. к задаче 5.80.

на m . Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей:

- а) через точку O ;
- б) через его центр масс.

5.81. Тонкая палочка длиной l и массой m вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO_1 . Угол между палочкой и осью вращения равен α (см. рис.). Определить момент импульса палочки L_ξ относительно оси вращения и L относительно точки O , а также определить момент инерции палочки относительно оси вращения J_ξ и получить элементы тензора инерции J относительно указанных на рисунке осей X, Y, Z декартовой системы координат, жестко связанной с палочкой (см. рис.).

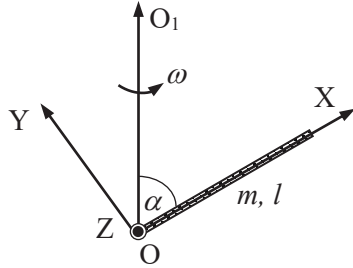


Рис. к задаче 5.81.

Законы сохранения момента импульса и механической энергии.
Гироскопы. Гироскопические силы

5.82. Тонкое кольцо радиусом R сделали из двух однородных полуколец (половинок колец), склеенных между собой (см. рис.). Масса верхнего полукольца равна m_1 , нижнего – m_2 ($m_2 > m_1$). Кольцо поставили на горизонтальную шероховатую поверхность так, что его плоскость была вертикальной, и кольцо оказалось в положении равновесия. Затем кольцу сообщили начальную угловую скорость ω_0 , в результате чего оно сразу начало катиться по поверхности без проскальзывания.

Определите, каково должно быть минимальное значение ω_0 для того, чтобы кольцо совершило не менее одного полного оборота. Потерями механической энергии можно пренебречь.

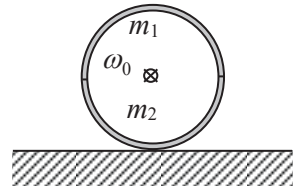


Рис. к задаче 5.82.

5.83. Два одинаковых тонких стержня длиной l , шарнирно скрепленные в верхней точке A , нижними концами опираются на гладкую горизонтальную плоскость (см. рис.). В начальный момент времени стержни удерживают так, что угол между ними составляет

$2\alpha_0$. Затем стержни отпускают. Определить скорость точки А непосредственно перед соприкосновением с плоскостью. Трением в шарнире и сопротивлением воздуха пренебречь.

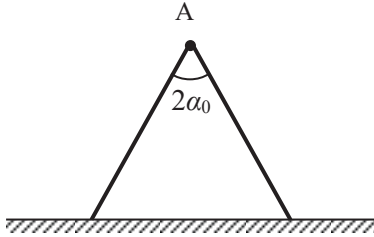


Рис. к задаче 5.83.

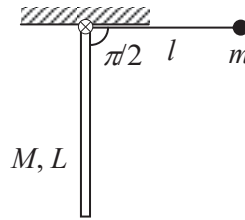


Рис. к задаче 5.84.

5.84. Вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку закрепления математического маятника массой m и длиной l , может вращаться без трения однородный стержень массой M и длиной $L \geq l$, шарнирно закрепленный в той же точке (см. рис.). Маятник отпускают из горизонтального положения. Найти максимальный угол отклонения стержня α_{\max} после абсолютно упругого соударения с маятником.

5.85. В точке А подвешены шарик на нити длиной l и однородный стержень длиной L (см. рис.). Стержень отклоняют в сторону на некоторый угол и отпускают без начальной скорости. В положении равновесия стержень упруго соударяется с шариком. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m стержень после удара остановится?

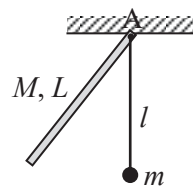


Рис. к задаче 5.85.

5.86. Полая трубка длиной l с гладкими стенками раскручена относительно оси O_1O_2 , проходящей через торец трубки, с угловой скоростью ω . (см. рис.). Внутри трубки находится гладкий шарик массой m , удерживаемый на месте нитью. При пережигании нити шарик отбрасывается к концу трубки и останавливается в результате абсолютно неупругого удара о торец трубки. Момент инерции трубки относительно оси O_1O_2 равен J , шарик до пережигания нити находился на расстоянии $l/2$ от оси вращения. Определить угловую скорость вращения трубки ω' после удара, а также изменение кинетической энергии системы.

тической энергии ΔE системы трубка – шарик. При решении задачи шарик считать материальной точкой.

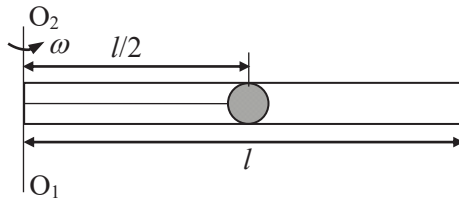


Рис. к задаче 5.86.

5.87. На покоящемся однородном горизонтальном диске массой M и радиусом R находится человек массой m . Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент времени человек начал двигаться. С какой угловой скоростью ω вращается диск, когда человек идет по окружности радиусом r , концентрической по отношению к диску, со скоростью u относительно диска?

5.88. Большой однородный свинцовый шар массой M находится на плоской горизонтальной поверхности. Летящая горизонтально с начальной скоростью v_0 небольшая пуля массой m пробивает шар в направлении его диаметра. После удара пуля шар начинает скользить по плоскости. Через некоторое время движение шара переходит в чистое качение со скоростью u_1 . Определить скорость пули v_1 после ее вылета из шара. Трением качения пренебречь.

5.89. Два диска одинаковыми радиусами, лежащие на гладкой горизонтальной поверхности, вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 относительно неподвижных вертикальных осей, проходящих через центры масс дисков (см. рис.). Моменты инерции дисков относительно этих осей вращения равны J_1 и J_2 . Трение в осях отсутствует. Диски приводят в соприкосновение, после чего через некоторое время система дисков пришла в новое установившееся состояние движения. Определить изменение момента импульса и механической энергии системы двух дисков.

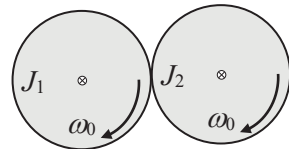


Рис. к задаче 5.89.

5.90. Горизонтальный желоб состоит из двух взаимно перпендикулярных досок. Сплошной однородный цилиндр раскрутили до

угловой скорости ω и поместили в желоб так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между стенками желоба и цилиндром равен μ . Найти время вращения цилиндра в желобе.

5.91. На краю свободно вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции J , стоит человек массой m . Диск совершает n оборотов в минуту. Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится при этом энергия системы? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

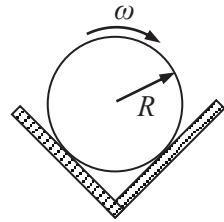


Рис. к задаче 5.90.

5.92. Стержень массой M и длиной L может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню. Для ориентации стержня в горизонтальном положении другой его конец положен на опору, как показано на рисунке. Снизу в точку A стержня, находящуюся на расстоянии d от его оси вращения, попадает тело малых размеров массой m , двигающееся со скоростью v_0 перпендикулярно стержню (см. рис.). Определите, на какой угол отклонится стержень после абсолютно упругого удара. На каком расстоянии r от оси вращения должна находиться точка A , чтобы после удара тела в эту точку стержня ось вращения не испытала дополнительных нагрузок?

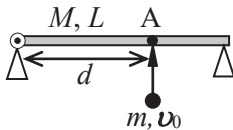


Рис. к задаче 5.92.

5.93. На гладкой горизонтальной поверхности лежат небольшая шайба массой m и тонкий однородный стержень длиной L и массой M . Шайбе сообщили скорость v в горизонтальном направлении перпендикулярно стержню (см. рис.). Шайба абсолютно упруго соударяется со стержнем в точке B на расстоянии l от его центра (точка O). Определить это расстояние, если:

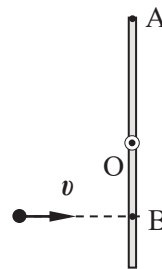


Рис. к задаче 5.93.

- 1) сразу после соударения шайба останавливается;
- 2) шайба передает стержню максимальный импульс;

3) скорость конца стержня (точка А на рис.) после соударения равна нулю.

5.94. Однородная тонкая квадратная пластинка со стороной l и массой M может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массой m со скоростью v . Найти:

а) скорость шарика сразу после удара;

б) горизонтальную составляющую результирующей силы, с которой ось действует на пластинку после удара.

5.95. Вертикально расположенный однородный стержень массой M и длиной l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой $m \ll M$, в результате чего стержень отклонился на угол α . Найти:

а) скорость летевшей пули;

б) приращение импульса системы "пуля – стержень" за время удара;

в) на какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы не изменился в процессе удара.

5.96. Тонкая палочка длиной l и массой m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Пуля массой $m_0 = m/8$, летевшая перпендикулярно палочке и параллельно поверхности со скоростью u_0 , попадает в палочку на расстоянии $l_0 = l/4$ от ее конца и застревает в ней. Найти угловую скорость вращения системы тел после соударения.

5.97. Два одинаковых однородных вращающихся тела сферической формы массой m и радиусом r движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v_0 . Угловые скорости вращения тел, ω_1 и ω_2 , составляют угол α и равны по модулю $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0$. В результате лобового абсолютно неупругого соударения образуется одно тело той же плотности, форму которого можно также считать сферической. Определить угловую скорость ω вращения образовавшегося тела и изменение кинетической энергии системы ΔE^k .

5.98. Две одинаковые гантели массой m в виде шариков, соединенных стержнем, скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 так, как изображено на рисунке. Момент инерции каждой гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно плоскости чертежа, равен J , а расстояние между центрами шариков гантели — l . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения?

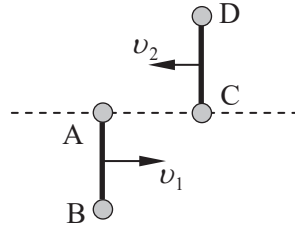


Рис. к задаче 5.98.

5.99. Тонкий однородный стержень длиной l_0 и массой $m_0 = 10g$

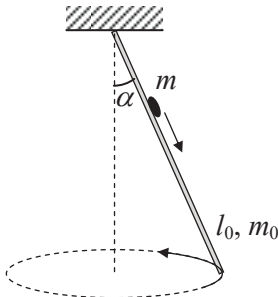


Рис. к задаче 5.99.

вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку его подвеса, описывая при этом коническую поверхность (см. рис.). Жук, сидящий на стержне, начинает медленно ползти с верхнего закрепленного его конца к нижнему концу. Начальный угол отклонения стержня от вертикали составляет $\alpha_0 = 60^\circ$. При какой массе жука m угол отклонения стержня от вертикали составит $\alpha_1 = 45^\circ$ после того, как жук достигнет нижнего конца стержня?

ня?

5.100. Диск, вращающийся с угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, падает на другой диск, вращающийся на гладкой горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω_2 вокруг той же оси (см. рисунок). Моменты инерции дисков относительно оси вращения равны J_1 и J_2 . После падения верхнего диска на нижний оба диска, благодаря трению между ними, через некоторое время стали вращаться как

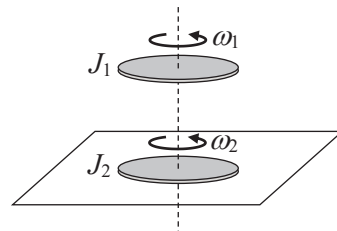


Рис. к задаче 5.100.

благодаря трению между ними, через некоторое время стали вращаться как

единое целое. Найти работу A , которую совершили при этом силы трения, действующие между дисками.

5.101. Две одинаковые шайбы скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности со скоростями v_1 и v_2 , вращаясь с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (см. рис.).

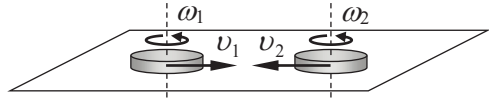


Рис. к задаче 5.101.

В некоторый момент времени происходит их центральное абсолютно неупругое соударение, в результате которого шайбы начинают скользить по поверхности и вращаться вместе. Считая известными массу m и радиус R каждой из шайб, найти изменение кинетической энергии шайб ΔE^k и угловую скорость их вращения ω после соударения.

5.102. Спутник массой m движется по эллиптической траектории вокруг планеты, находящейся в одном из ее фокусов. Известны

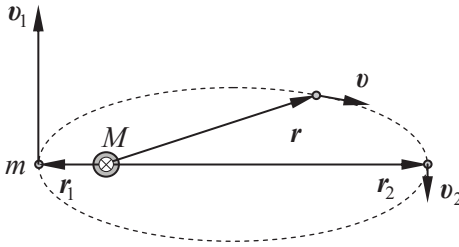


Рис. к задаче 5.102.

наименьшее r_1 и наибольшее r_2 расстояния от спутника до центра планеты, а также модуль его скорости v_1 в наиболее близкой к планете точке траектории. Найти массу планеты M , а также радиусы кривизны траектории спутника в наиболее близкой R_1 и

наиболее удаленной R_2 от планеты точках его траектории.

5.103. Доказать, что момент импульса планеты относительно Солнца может быть представлен в виде $L = 2m\sigma$, где m – масса, а σ – секториальная скорость планеты. Секториальной скоростью называется физическая величина, численно равная площади, "заметаемой" радиус-вектором планеты в единицу времени.

5.104. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без

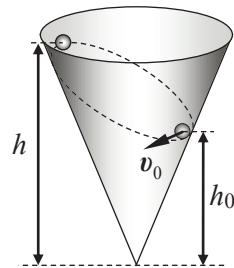


Рис. к задаче 5.104.

трения скользит маленький шарик (см. рис.). В начальный момент времени шарик находится на высоте h_0 и имеет скорость v_0 , направленную горизонтально. На какую максимальную высоту h поднимется шарик в процессе движения? Чему равна его скорость v на этой высоте?

5.105. Найти угловую скорость Ω прецессии волчка под действием силы тяжести, ось симметрии которого наклонена под углом ϑ к вертикали. Точка опоры волчка неподвижна, расстояние от этой точки до центра масс волчка равно a . Момент инерции волчка относительно его оси симметрии равен J , угловая скорость его вращения — ω . Определить также, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

5.106. На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , на расстоянии l_0 от оси находится муфта массой m (см. рис.). В некоторый момент времени муфте сообщают скорость $v_0 = l_0\omega$ вдоль стержня, направленную от оси вращения. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Как меняется расстояние муфты от оси вращения в зависимости от времени?

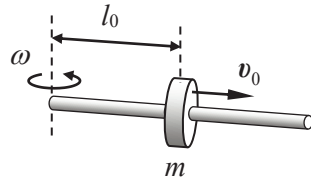


Рис. к задаче 5.106.

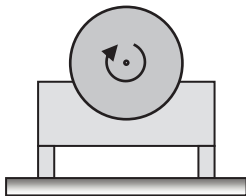


Рис. к задаче 5.107.

5.107. Электродвигатель закреплен на подставке так, что его ось и общий центр масс находятся посередине между опорами подставки, расстояние между которыми равно l . Двигатель с подставкой поставили на гладкую горизонтальную поверхность. Найти силы давления опор подставки на поверхность, если после включения ротор двигателя раскручивается с угловым ускорением β вокруг его геометрической оси, а момент инерции ротора относительно этой оси равен J . Масса двигателя с подставкой равна m .

5.108. Массивный цилиндрический каток (бегун) массой m , который может вращаться вокруг своей оси симметрии, приведен во вращение вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

ω и катится без скольжения по горизонтальной опорной плите (см. рис.). Радиус катка равен r , а момент инерции катка относительно оси симметрии – J_0 . Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

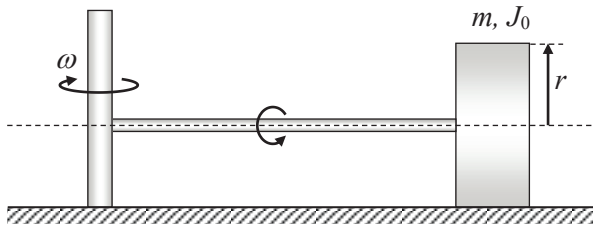


Рис. к задаче 5.108.

5.109. Гироскоп представляет собой однородный диск радиусом $R = 5$ см и массой m_0 , закрепленный на невесомом горизонтальном стержне, ориентированном вдоль оси OO' (см. рис.). Гироскоп может вращаться вокруг осей OO' и CD . Диск гироскопа уравновешен на другом конце оси OO' телом с той же массой m_0 . Гироскоп раскрутили вокруг собственной оси OO' так, что он делает $n = 50$ оборотов в секунду. Затем к телу массой m_0 подвесили еще одно тело массой $m = m_0/10$. Найти период вращения гироскопа вокруг оси CD , если расстояние l от оси CD до точки подвеса тела массой m_0 равно 10 см.

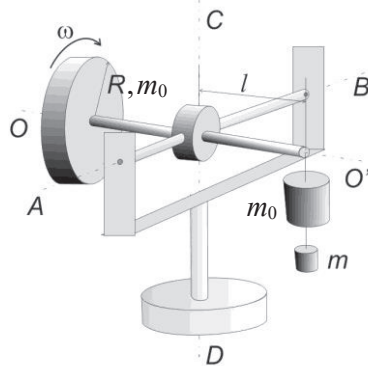


Рис. к задаче 5.109.

5.110. Корабль движется со скоростью $v = 40$ км/час по дуге окружности радиусом $R = 300$ м. Найти момент гироскопических сил M_{Γ} , действующих на подшипники двигателя корабля со стороны ротора, который имеет момент инерции относительно оси вращения $J_0 = 3,6 \cdot 10^3$ кг·м² и делает $n = 150$ оборотов в минуту. Ось вращения расположена вдоль корабля.

5.111. Гироскоп массой $m = 0,5$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 200$ рад/с. Момент инерции гироскопа $J = 5 \cdot 10^{-4}$ кг м². Угловая скорость его прецессии в поле сил тяжести Земли

$\Omega = 0,5$ рад/с. Угол между вертикалью и осью гироскопа $\alpha = 30^\circ$. Определить расстояние l от точки опоры до центра масс и угловое ускорение гироскопа.

5.112. Подсчитайте момент M гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера, если самолет при скорости $u = 300$ км/ч делает поворот радиусом $R = 100$ м. Пропеллер с моментом инерции $J = 7$ кг·м² делает $N = 1000$ оборотов в минуту.

5.113. Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа равна $m = 5 \cdot 10^3$ г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры маятника $J = 8 \cdot 10^4$ г·см², расстояние между точкой подвеса и центром масс маховичка $l = 0,25$ см. Гироскоп делает $n = 20000$ оборотов в минуту. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $a_0 = 1$ м/с². Определить угол α , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

5.114. Однородный шар массой $m = 5,0$ кг и радиусом $R = 6,0$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 1250$ рад/с вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр и укрепленной в подшипниках подставки. Расстояние между подшипниками $l = 15$ см. Подставку поворачивают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega' = 5,0$ рад/с. Найти модуль гироскопических сил.

5.115. Корабль движется со скоростью $v = 36$ км/ч по дуге окружности радиусом $R = 200$ м. Найти момент гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны вала с маховиком, которые имеют момент инерции относительно оси вращения $J = 3,8 \cdot 10^3$ кг·м² и делают $n = 300$ оборотов в минуту. Ось вращения расположена вдоль корабля.

РАЗДЕЛ 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

• **Уравнение собственных гармонических колебаний**, которое следует из уравнений движения механической системы, имеет вид:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0,$$

где ξ – одна из **обобщенных координат** – независимых физических величин, определяющих положение тел системы; ω_0 – **угловая частота** и $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – **период** собственных гармонических колебаний, определяемые характеристиками системы.

• **Закон движения** при собственных гармонических колебаниях (зависимость обобщенной координаты от времени) – решение уравнения собственных гармонических колебаний:

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Здесь $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебаний**; A – **амплитуда** и φ_0 – **начальная фаза** собственных гармонических колебаний, определяемые начальными условиями $\xi_0 \equiv \xi(t=t_0)$ и $\dot{\xi}_0 \equiv \dot{\xi}(t=t_0)$:

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \varphi_0 = -\omega_0 t_0 - \arctg\left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0 \xi_0}\right).$$

• **Уравнение** собственных затухающих колебаний:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0,$$

где δ – **коэффициент затухания** и ω_0 – частота собственных незатухающих колебаний, определяемые характеристиками системы.

• **Закон движения** при собственных затухающих колебаний с затуханием меньше критического ($\delta < \omega_0$):

$$\xi(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ – **угловая частота** и **период** затухающих колебаний.

• **Логарифмический декремент затухания** \mathcal{D} :

$$\vartheta \equiv \ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+T)} = \delta T.$$

При этом:

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+NT)} = N\delta T = N\vartheta,$$

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+N_e T)} = N_e \vartheta = 1, \quad \frac{1}{\vartheta} = N_e,$$

где N – целое число, N_e – число периодов, за которые амплитуда колебаний уменьшится в $e \cong 2.7$ раз.

- **Средняя механическая энергия** за период при собственных затухающих колебаниях:

$$\langle E \rangle_T = E_0 e^{-2\delta t}.$$

- **Средняя мощность потерь** за период при собственных затухающих колебаниях:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = - \frac{d\langle E \rangle_T}{dt} = 2\delta E_0 e^{-2\delta t}.$$

- **Добротность колебательной системы** Q определяется отношением средней за период механической энергии системы к средней мощности потерь:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle E \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{2\delta E_0 e^{-2\delta t} T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

- **Закон движения** в случае апериодического движения – с затуханием больше критического ($\delta > \omega_0$):

$$\xi(t) = A_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t},$$

где A_1 и A_2 – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

- **Закон движения** в случае критического затухания ($\delta = \omega_0$):

$$\xi(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t},$$

где A_1 и A_2 – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

- **Уравнение движения** в случае вынужденных колебаний под действием гармонической вынуждающей силы:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = B \cos(pt),$$

где $B \cos(pt)$ – обобщенная вынуждающая сила, B и p – ее амплитуда и частота.

• **Закон изменения обобщенной координаты** в случае колебания под действием гармонической вынуждающей силы:

$$\xi(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + \xi_{\text{вын}}(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + A(p) \cos(pt + \varphi(p)).$$

Здесь $\xi_{\text{соб}}(t)$ – закон изменения обобщенной координаты при собственных затухающих колебаниях в отсутствии вынуждающей силы, $\xi_{\text{вын}}(t)$ – закон изменения обобщенной координаты после затухания собственных колебаний (при $t \gg 1/\delta$), $A(p)$ – амплитуда и $\varphi(p)$ – начальная фаза установившихся вынужденных колебаний $\xi_{\text{вын}}(t)$, которые зависят от частоты вынуждающей силы:

$$A(p) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}},$$

$$\text{tg } \varphi(p) = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}.$$

• **Резонанс смещения** (обобщенной координаты) – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при изменении частоты вынуждающей силы. **Резонансная частота** при резонансе смещений:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

• **Закон изменения со временем обобщенной скорости** в случае вынужденных установившихся колебаний под действием гармонической вынуждающей силы:

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_{\text{вын}}(t) = -A(p)p \sin(pt + \varphi(p)).$$

Здесь $A(p)p$ – амплитуда изменения обобщенной скорости:

$$A(p)p = \frac{Bp}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}.$$

• **Резонанс скорости** – явление резкого возрастания амплитуды изменения обобщенной скорости при изменении частоты вынуждающей силы. **Резонансная частота** при резонансе скорости:

$$p_{\text{рез}} = \omega_0.$$

Свободные колебания систем с одной степенью свободы

6.1. Два кубика, массы которых равны m_1 и m_2 , соединили невесомой пружиной жесткостью k и положили на гладкую горизонтальную плоскость. Затем кубики немного сблизили и одновременно отпустили. Найти угловую частоту малых колебаний системы.

6.2. Сплошной однородный цилиндр массой m совершает малые колебания под действием двух горизонтальных пружин суммарной жесткостью k (см. рис.). Найти период этих колебаний в отсутствие проскальзывания цилиндра по плоскости.

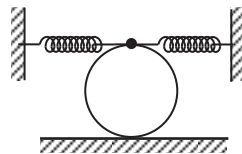


Рис. к задаче 6.2.

6.3. Тонкая однородная палочка совершает малые колебания внутри гладкого полуцилиндра радиусом R , оставаясь в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (см. рис.). Длина палочки равна радиусу полуцилиндра. Найти закон движения центра масс палочки, считая, что в начальный момент времени она покоилась и была отклонена от положения равновесия на малый угол α_0 .

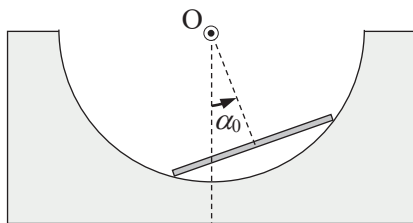


Рис. к задаче 6.3.

6.4. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока (см. рис.). Расстояние между осями блоков $l = 20$ см, коэффициент трения между стержнем и блоками $\mu = 0,18$. Найти период колебаний стержня.



Рис. к задаче 6.4.

6.5. Сплошной однородный цилиндр массой m и радиусом R , шарнирно закрепленный в нижней точке, совершает малые колебания под действием двух горизонтальных одинаковых легких пружин, жесткость каждой из которых равна k (см. рис.). Пружины прикреплены к верхней точке цилиндра и нерастянуты в положении равновесия цилиндра. Определить угловую частоту малых колебаний цилиндра.

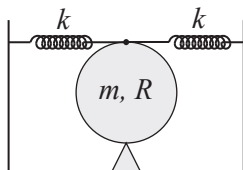


Рис. к задаче 6.5.

6.6. Шарик подвесили на нити длиной l к стенке, составляющей небольшой угол α с вертикалью (см. рис.). Затем нить с шариком отклонили на небольшой угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника.

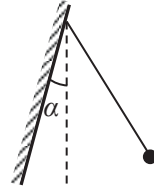


Рис. к задаче 6.6.

6.7. Жидкость, имеющая объем V , налита в U-образную трубку с площадью поперечного сечения S . Пренебрегая вязкостью, найти период малых колебаний жидкости.

6.8. Определить частоту ω_0 малых собственных гармонических колебаний жидкости в тонкой трубке U-образной формы с изменяющимся вдоль трубки поперечным сечением, помещенной в поле сил тяжести Земли. Считать заданной зависимость площади поперечного сечения трубки $S(s)$ от координаты s вдоль трубки, площади сечения свободных поверхностей жидкости S_1 и S_2 , а также длину заполненной жидкостью части трубки L .

6.9. Вычислить период малых колебаний ареометра, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра $m = 50$ г, радиус его трубки $r = 3,2$ мм, плотность жидкости $\rho = 1$ г/см³. Силами вязкого трения пренебречь.

6.10. В бочке с жидкостью плотностью ρ в вертикальном положении плавает пробирка массой M . В пробирку падает кусочек пластилина массой m . Пролетев по вертикали расстояние h , он прилипает к дну пробирки. Пренебрегая трением, найти закон движения пробирки, если площадь ее поперечного сечения равна S .

6.11. На тележке массой M , стоящей на горизонтальных рельсах, подвешен математический маятник длиной l и массой m . Тележка может катиться по рельсам без трения. Тележке сообщили начальную скорость V_0 так, что при этом нить маятника осталась вертикальной. Найти законы движения маятника и тележки относительно лабораторной системы отсчета при малых углах отклонения нити маятника от вертикали. Определить, при каких соотношениях масс маятника и тележки амплитуды их колебаний A_m и A_M будут максимальными.

6.12. Тело вращения с максимальным радиусом r , моментом инерции J (относительно его оси симметрии) и массой m катается без проскальзывания по цилиндрической поверхности опоры радиу-

сом R , совершая малые колебания около положения равновесия (см. рис.). Найти угловую частоту колебаний.

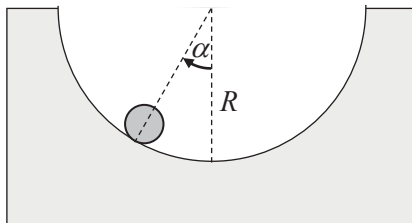


Рис. к задаче 6.12.

6.13. Спутник Земли находится на орбите радиусом $R = 7000$ км и представляет собой два маленьких шарика массой m , соединенных легким стержнем длиной l . Найти период малых колебаний спутника в плоскости его орбиты.

6.14. Однородный стержень массой $m = 1,5$ кг, висящий на двух одинаковых нитях длиной $l = 90$ см, повернули на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При этом нити отклонились на угол $\alpha = 5^\circ$. Затем стержень отпустили, и он начал совершать малые колебания. Найти период колебаний и энергию колебаний стержня.

6.15. Гладкий горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью ω . Тонкий стержень длиной l шарнирно закреплен на диске так, что может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A , смещенный относительно центра диска O на расстояние b (см. рис.). Найти угловую частоту ω_0 малых колебаний стержня.

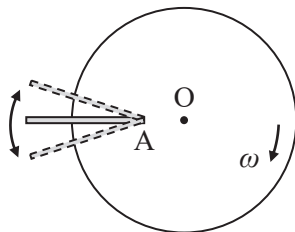


Рис. к задаче 6.15.

6.16. Найти угловую частоту малых колебаний жидкости в широком сосуде квадратного сечения длиной L . Равновесная глубина воды – h . Оценить в рамках предложенной модели период сейш² озера глубиной $h = 150$ м и длиной $L = 60$ км.

² Сейшами называются стоячие волны с периодами от нескольких минут до десятков часов на закрытых водоемах. При сейшах происходит колебательное движение

6.17. Горизонтальный пружинный маятник состоит из однородной пружины массой m_0 с большим числом витков и небольшого груза массой m , прикрепленного к одному из концов пружины. Другой конец пружины неподвижно закреплен. Коэффициент жесткости пружины равен k . Пренебрегая трением, найти частоту малых гармонических колебаний такого маятника.

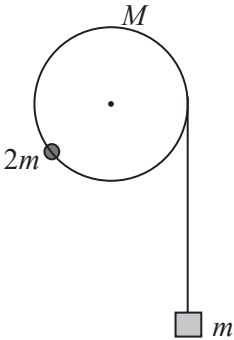


Рис. к задаче 6.18.

6.18. Однородный цилиндрический блок массой M и радиусом R может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. На блок намотана легкая нить, к свешивающемуся концу которой прикреплен груз массой m (см. рис.). Этот груз уравновешен маленьким телом с массой $2m$, закрепленным на цилиндрической поверхности блока. Груз сместили от положения равновесия на небольшое расстояние x_0 и отпустили с нулевой начальной скоростью. Найти закон его движения при малых колебаниях системы.

6.19. Изогнутая под прямым углом гладкая трубка закреплена так, что один из ее концов направлен вертикально вниз (см. рис.). Внутри трубки находится однородная гибкая веревка массой m и длиной l , диаметр которой чуть меньше диаметра трубки. Верхний конец веревки соединен легкой горизонтально расположенной пружиной жесткостью k со стеной. Веревку оттягивают вниз, смещая ее на небольшое расстояние a от положения равновесия. Найти закон движения нижнего конца веревки, если $k > \frac{mg}{l}$.

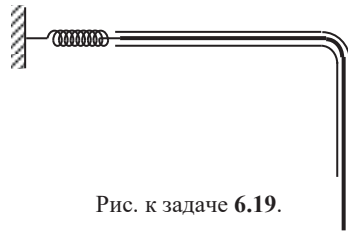


Рис. к задаче 6.19.

6.20. Четыре легких стержня длиной l шарнирно соединены с тремя маленькими шариками массами m , как показано на рисунке. Верхняя точка O шарнирного соединения стержней неподвижна. Система вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг непо-

всей массы воды, при этом поверхность водоема приобретает уклон θ_0 в одну, θ в другую сторону.

движной вертикальной оси OY . Шарики слегка выводят из положения равновесия и отпускают. Найти угловую частоту малых колебаний системы

при условии $\Omega > \frac{2g}{l}$.

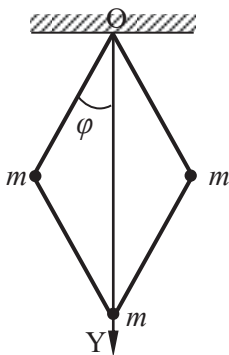


Рис. к задаче 6.20.

6.21. На гладкую невесомую нерастяжимую нить длиной l надета маленькая бусинка массой m . Концы нити прикреплены к потолку так, что глубина провисания нити оказалась равной h (см. рис.). Определить отношение периодов малых колебаний бусинки вдоль нити в плоскости чертежа и в перпендикулярной плоскости. Силами трения пренебречь.

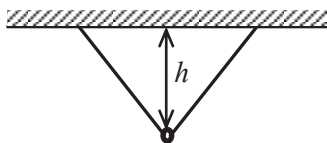


Рис. к задаче 6.21.

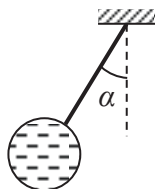


Рис. к задаче 6.22.

6.22. Сферический тонкостенный сосуд радиусом R , полностью заполненный водой, подвешен на легком стержне длиной l (см. рис.). Во сколько раз изменится частота собственных колебаний такого маятника после замерзания воды? Вязкостью воды и изменением ее объема при замерзании пренебречь.

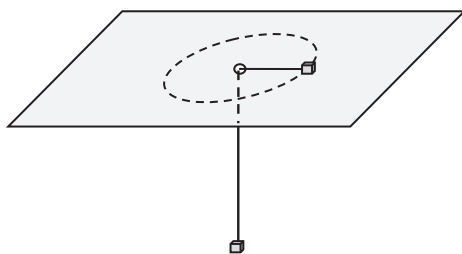


Рис. к задаче 6.23.

6.23. Два одинаковых маленьких тела массой m прикреплены к концам невесомой нерастяжимой гладкой нити, продетой через отверстие в горизонтальной пластине (см. рис.). Верхнее тело скользит по поверхности пластины по круговой траектории с угловой скоростью Ω ,

при этом нижнее тело остается неподвижным. В результате неболь-

шого толчка нижнее тело начинает совершать малые вертикальные колебания. Определить частоту этих колебаний. Трением пренебречь.

6.24. В какой точке следует подвесить однородный стержень длиной l , чтобы частота его колебаний, как физического маятника, была максимальной?

6.25. Тонкостенный цилиндр радиусом R сделан из двух однородных полуцилиндров (половинок цилиндра), склеенных между собой. Масса верхнего полуцилиндра равна m_1 , нижнего — m_2 . Цилиндр положили на горизонтальную шероховатую поверхность так, чтобы он оказался в положении устойчивого равновесия. Определите период малых колебаний цилиндра около положения равновесия.

Затухающие колебания систем с одной степенью свободы

6.26. Ступенчатый цилиндрический блок может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, совпадающей с осью симметрии блока. Радиусы цилиндров блока — R и r . Момент инерции блока относительно указанной оси равен J . На цилиндры намотаны две невесомые нерастяжимые нити, начала которых закреплены на разных цилиндрах. На конце правой нити висит тело массой m . Конец левой нити прикреплен к легкой пружине с коэффициентом жесткости k , нижний конец которой закреплен так, что ось пружины вертикальна (см. рис.). Тело совершает малые вертикальные колебания в жидкости с коэффициентом вязкого трения η . Определить закон движения тела, если в положении равновесия ему сообщили скорость V_0 .

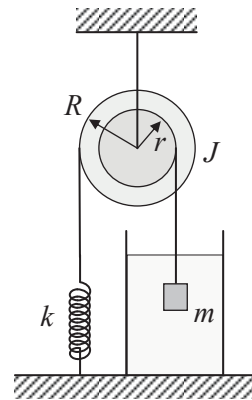


Рис. к задаче 6.26.

6.27. Тонкий однородный диск массой m и радиусом R , подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, отклонили на угол α_0 от положения равновесия и отпустили с нулевой начальной угловой скоростью. Диск совершает крутильные колебания в вязкой жидкости. Сила вязкого трения, действующая на единицу площади

поверхности диска со стороны жидкости, равна $f_b = -\eta v$, где $\eta = \text{const}$, v – скорость данного элемента диска относительно жидкости. Момент упругих сил со стороны нити равен $M_{\text{упр}} = D\alpha$, где D – постоянный коэффициент, α – угол поворота диска относительно положения равновесия. Найти закон движения диска.

6.28. Механическая энергия математического маятника за промежуток времени τ уменьшилась в n раз. Найти отношение средней за период механической энергии колебательной системы к средней мощности потерь. Затухание в системе считать малым.

6.29. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0,1$ лежит брусок массой $m = 0,5$ кг, соединенный со стеной горизонтальной недеформированной пружиной. Жесткость пружины $k = 2,45$ Н/см. Брусок сместили на расстояние $x_0 = 3$ см относительно начального положения и отпустили с нулевой начальной скоростью. Найти частоту колебаний бруска и число колебаний, которое совершит брусок до остановки.

6.30. Колебательная система (тело массой m , соединенное с пружиной жесткостью k) используется в качестве баллистического прибора. Определить баллистическую постоянную B – коэффициент пропорциональности между скоростью, сообщенной системе в результате кратковременного воздействия внешней силы, и максимальным смещением. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости с коэффициентом пропорциональности β .

6.31. Однородный диск радиусом R может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Диск отклонили от положения равновесия на небольшой угол α_0 и отпустили с нулевой начальной скоростью. Найти закон движения диска, если логарифмический декремент затухания равен \mathcal{D} . Силу сопротивления считать пропорциональной угловой скорости маятника.

6.32. Математический маятник совершает колебания в среде с логарифмическим декрементом затухания $\mathcal{D}_0 = 1,5$. Каким будет значение логарифмического декремента затухания \mathcal{D} , если сопротивление среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

6.33. Небольшой шарик массой m , радиусом r , подвешенный на легкой нерастяжимой нити, совершает колебания, опираясь на

наклонную плоскость, составляющую угол γ с вертикалью (см. рис.). Расстояние от точки подвеса до центра масс маятника равно l . Качение маятника по наклонной поверхности происходит без проскальзывания, при этом наклонная поверхность испытывает небольшие неупругие деформации. За n периодов колебаний угловая амплитуда маятника уменьшилась на величину $\Delta\alpha_n$. Определить коэффициент трения качения, пренебрегая силами вязкого трения о воздух и трением в подвесе маятника.

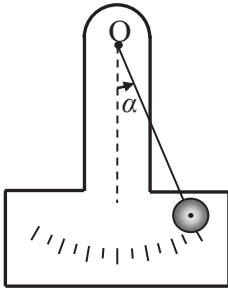


Рис. к задаче 6.33.

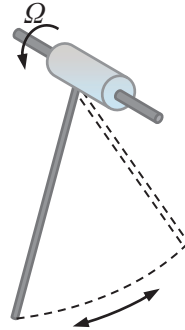


Рис. к задаче 6.34.

6.34. Легкая муфта (внутренний и внешний радиусы которой равны r и R соответственно), жестко скрепленная с тонким стержнем (масса стержня m , длина l), надета на горизонтальный вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вал (см. рис.). Стержень с муфтой представляют собой физический маятник, совершающий колебания в вертикальной плоскости. В начальный момент времени стержень находился в вертикальном положении и имел нулевую скорость. Найти закон изменения угла отклонения маятника от вертикали $\varphi(t)$ при малых колебаниях в случае, когда угловая скорость вращения вала превышает модуль максимальной угловой скорости маятника $\Omega > \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$. Считать, что сила трения скольжения между

муфтой и валом постоянна и равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$, где μ – коэффициент трения, не зависящий от скорости скольжения.

6.35. Как изменится характер колебательного движения в условиях задачи 6.34, если сила трения муфты о вал будет зависеть от скорости?

6.36. Затухающие колебания материальной точки происходят по закону $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$. Найти:

а) амплитуду смещения и скорость материальной точки в момент времени $t = 0$;

б) моменты времени, когда материальная точка достигает крайних положений.

6.37. Тело совершает крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Найти:

а) угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ тела в момент времени $t = 0$;

б) моменты времени, когда угловая скорость максимальна.

6.38. Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β по закону $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$. Найти начальную амплитуду a_0 и начальную фазу α , если в момент времени $t = 0$ смещение материальной точки $x_0 = 0$, а проекция ее скорости $v_0 > 0$.

6.39. Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β по закону $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$. Найти начальную амплитуду a_0 и начальную фазу α , если в момент времени $t = 0$ смещение материальной точки $x_0 > 0$, а проекция ее скорости $v_0 = 0$.

6.40. Осциллятор со временем релаксации $\tau = 20$ с в момент времени $t = 0$ имеет начальное смещение $x_0 = 10$ см. При каком значении начальной скорости v_0 это смещение окажется равным своей амплитуде?

6.41. Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой $\omega = 25$ рад/с. Найти коэффициент затухания β , если в начальный момент времени скорость материальной точки равна нулю, а ее смещение от положения равновесия в $\eta = 1,02$ раза меньше амплитуды.

6.42. Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β . Найти амплитуду скорости материальной точки как функцию времени, если в момент времени $t = 0$ амплитуда ее смещения равна a_0 .

6.43. Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β . Найти амплитуду скорости материальной точки как функцию времени, если в момент времени $t = 0$ смещение материальной точки $x(t = 0) = 0$ и проекция ее скорости $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

6.44. К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на $\Delta x = 9,8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\theta = 3,1$.

6.45. Частица совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\theta = 0,02$. Частицу сместили от положения равновесия на расстояние $l = 1$ см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет эта частица, двигаясь до полной остановки?

Вынужденные колебания

6.46. Тело массой $m = 100$ г, подвешенное на легкой пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, совершает установившиеся колебания под действием вертикальной вынуждающей силы $F = F_0 \cos pt$, частота которой равна $p = 25$ рад/с, а амплитуда – $F_0 = 1$ Н. Смещение тела из положения равновесия отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = \pi/4$. Определить добротность колебательной системы Q , а также резонансную частоту $p_{\text{рез}}$, соответствующие резонансу смещения, и амплитуду смещения при резонансе $A_{\text{рез}}$.

6.47. Горизонтальный пружинный маятник совершает вынужденные колебания под действием гармонической силы $F(t) = F_0 \cos(pt)$. Коэффициент затухания маятника равен δ , а угловая частота его собственных незатухающих колебаний – ω_0 . Найти отношение средней за период мощности вынуждающей силы $F(t)$ при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы.

6.48. Амплитуды скорости осциллятора при частотах вынуждающей силы $f_1 = 200$ Гц и $f_2 = 300$ Гц равны между собой. Определить частоту, соответствующую резонансу скорости. Амплитуду вынуждающей силы считать неизменной, затухание – малым.

6.49. Амплитуды смещений осциллятора при частотах вынуждающей силы p_1 и p_2 равны между собой. Определить частоту, соответствующую резонансу смещения.

6.50. Колебательная система используется для уменьшения силы давления тела массой m на опору при действии на него внешней периодической силы $F(t) = F_0 \cos(pt)$ (амортизирующее устройство).

Определить коэффициент амортизации – отношение амплитуды силы давления на опору к амплитуде вынуждающей силы F_0 . Считать силу сопротивления пропорциональной скорости с коэффициентом пропорциональности β , коэффициент жесткости пружины амортизатора равным k .

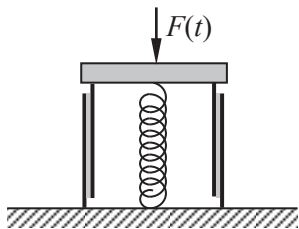


Рис. к задаче 6.50.

6.51. Тонкостенный сферический сосуд радиусом $R = 5$ см заполнен идеальной жидкостью и подвешен на легком стержне длиной $l = 20$ см, жестко связанным с сосудом. Найти амплитуду установившихся колебаний маятника, если точка его подвеса колеблется в горизонтальном направлении по закону $X(t) = A \sin \omega t$ с амплитудой $A = 0,5$ см и периодом $T = 1,1$ с. Трение не учитывать.

6.52. В момент времени $t = 0$ на частицу массой m начинают действовать две изменяющиеся во времени силы, направления которых совпадают с осями X и Y декартовой системы координат: $F_1(t) = e_x F_0 \sin(pt)$ и $F_2(t) = e_y F_0 \cos(pt)$. Определить уравнение траектории частицы и ее среднюю скорость за достаточно большой интервал времени, если в начальный момент времени частица покоилась в точке, совпадающей с началом координат.

6.53. В момент времени $t = 0$ на частицу массой m начинают действовать две изменяющиеся во времени силы, направления которых совпадают с осями X и Y декартовой системы координат: $F_1(t) = e_x F_0 \sin(pt)$ и $F_2(t) = e_y F_0 \cos(pt)$. При каких начальных условиях частица будет двигаться по окружности с центром в начале координат?

6.54. Шарик массой m , подвешенный к легкой пружинке, удлиняет ее на Δl . Под действием внешней вертикальной силы, изменяющейся по гармоническому закону, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен \mathcal{D} . Опре-

делить частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна.

6.55. Оценить, через какое время установятся колебания в системе с добротностью $Q = 100$ и собственной частотой колебаний $\omega_0 = 10$ рад/с при воздействии на эту систему вынуждающей гармонической силы.

6.56. Шарик массой m может совершать незатухающие гармонические колебания около точки $x = 0$ с собственной частотой ω_0 . В момент времени $t = 0$, когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$, совпадающую по направлению с осью X . Найти закон вынужденных колебаний шарика $x(t)$.

6.57. Найти в условиях предыдущей задачи закон движения $x(t)$, если частота вынуждающей силы p равна собственной частоте ω_0 колебаний шарика.

6.58. Частица массой m может совершать незатухающие гармонические колебания под действием упругой силы с коэффициентом k . Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу F , которая действовала в течение τ секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия силы.

6.59. На осциллятор массой m без затухания с собственной частотой ω_0 действует вынуждающая сила $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$. При каких начальных условиях с самого начала будут происходить только вынужденные колебания?

6.60. На осциллятор массой m без затухания с собственной частотой ω_0 действует вынуждающая сила $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$. Найти закон движения осциллятора в случае, если с самого начала он будет совершать только вынужденные колебания.

6.61. Найти разность фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний $\omega_0 = 50$ с⁻¹ и коэффициент затухания $\delta = 5,2$ с⁻¹.

6.62. Под действием вертикальной вынуждающей силы $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$ тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону $x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi)$. Найти работу силы F за период колебания.

6.63. Под действием момента сил $M_z(t) = M_0 \cos(pt)$ тело совершает вынужденные крутильные колебания по закону $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(pt - \varphi)$. Найти работу сил трения, действующих на тело, за период колебания.

Колебания систем с несколькими степенями свободы

6.64. Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис.). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ при малых колебаниях

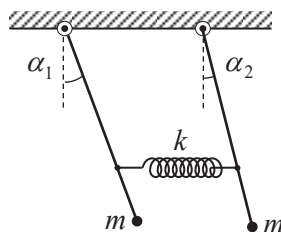


Рис. к задаче 6.64.

в общем случае задания произвольных начальных условий.

6.65. Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис. к задаче 6.64). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ при малых колебаниях в двух случаях:

1) оба маятника отклонили в одну сторону на одинаковый угол α_0 от положения равновесия в момент времени $t = 0$ и отпустили с нулевой начальной скоростью;

2) в начальный момент времени $t = 0$ маятники отклонили в разные стороны на одинаковые углы α_0 от положения равновесия и отпустили с нулевой начальной скоростью.

6.66. Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис. к задаче 6.64). В положении равновесия пружина

не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ при малых колебаниях, если в начальный момент времени $t=0$ одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость v_0 , направленную от положения равновесия.

6.67. Два маленьких шарика с массами m_1 и m_2 подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l_1 и l_2 , образуя два математических маятника, связанных между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис.). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. На один из шариков действует горизонтальная гармоническая сила $F_0 \sin pt$. Определить амплитуды вынужденных колебаний маятников в установившемся режиме. Трением пренебречь.

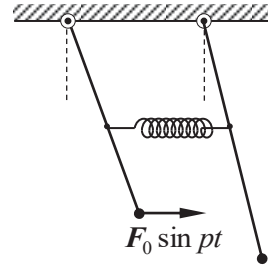


Рис. к задаче 6.67.

6.68. Два шарика одинаковой массой m , соединенные нерастянутой пружинкой длиной l_0 и жесткостью k , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила F , направленная вдоль оси пружинки (см. рис.). Определить законы движения шариков $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а также закон изменения длины пружинки $l(t)$.

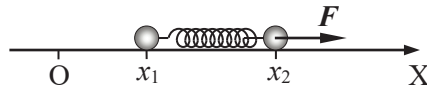


Рис. к задаче 6.68.

6.69. Найти закон движения атомов в молекуле CO_2 при возбуждении в ней продольных колебаний. Считать, что сила взаимодействия соседних атомов в линейной молекуле CO_2 является квазиупругой: $F = -k\Delta x$ (Δx – изменение расстояния между атомами, k – постоянный коэффициент). Расстояние между соседними атомами в положении равновесия равно l . Проанализировать условия возбуждения каждого из нормальных колебаний.

6.70. Два шарика массами m_1 и m_2 , находящиеся на гладкой горизонтальной поверхности, совершают колебания под действием трех легких пружин (см. рис.). В положении равновесия все пружины не деформированы. Коэффициент жесткости каждой из пружин равен k . Определить нормальные частоты продольных колебаний системы.

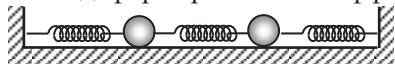


Рис. к задаче 6.70.

6.71. Тонкий стержень длиной l и массой m подвешен на двух одинаковых пружинах жесткостью k к потолку (см. рис.). В положении равновесия стержень горизонтален. В начальный момент времени один из концов стержня сместили вниз на малое расстояние A , удерживая при этом второй конец. Определить закон смещения концов стержня относительно положения равновесия.

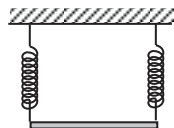


Рис. к задаче 6.71.

6.72. Два маленьких шарика с массами m_1 и m_2 подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l_1 и l_2 , образуя два математических маятника, связанных между собой легкой пружиной жесткостью k (см. рис.). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить частоты нормальных колебаний системы.

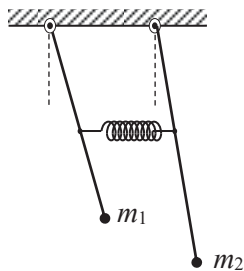


Рис. к задаче 6.72.

6.73. Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 , соединенные между собой и со стеной пружинками жесткостью k , лежат на гладкой горизонтальной плоскости (см. рис.). Определить частоты нормальных колебаний системы.

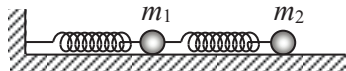


Рис. к задаче 6.73.

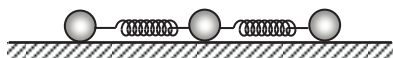


Рис. к задаче 6.74.

6.74. Три маленьких шарика, соединенные двумя одинаковыми пружинками жесткостью k , расположены вдоль одной прямой и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (см. рис.). Массы крайних шариков равны m , а масса среднего шарика – $2m$. В системе воз-

буждают продольные колебания. Определить частоты нормальных колебаний.

6.75. Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью $k \ll \frac{mgl}{2a^2}$. В положении равновесия пружина не растянута, а

точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. В начальный момент времени $t=0$ одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость v_0 , направленную от положения равновесия. Определить минимальное время, через которое смещение этого маятника от положения равновесия станет максимальным.

6.76. Два маленьких шарика массой m подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной l , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью k . В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии a от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. В начальный момент времени $t=0$ одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость v_0 , направленную от положения равновесия. Определить минимальное время, через которое смещение второго маятника от положения равновесия станет максимальным.

6.77. Тонкий стержень длиной l и массой m подвешен на двух одинаковых пружинах жесткостью k к потолку (см. рис.). В положении равновесия стержень горизонтален. В начальный момент времени один из концов стержня сместили вниз на малое расстояние, а второй – на такое же расстояние вверх. Определить частоту колебаний стержня.

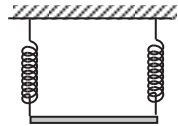


Рис. к задаче 6.77.

РАЗДЕЛ 7

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

• **Скалярное волновое уравнение** для линейной, изотропной и однородной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi(t, \mathbf{r}),$$

где $\xi(t, \mathbf{r})$ – скалярное волновое поле (в том числе и проекция векторного волнового поля на ось декартовой системы координат), c – скорость волны, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа.

• **Закон распространения (уравнение) плоской гармонической волны:**

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \xi_0 \cos(\omega(t - x/c) + \varphi_0) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t + \varphi(x)) = \xi_0 \cos(\Phi(t, x)). \end{aligned}$$

Здесь ξ_0 – амплитуда колебаний волнового поля, ω – угловая частота, связанная с частотой колебаний ν и периодом $T = \frac{1}{\nu}$ соотношениями

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$; φ_0 – начальная фаза колебаний (в точке

$x = 0$ в момент времени $t = 0$). $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – **волновое число**,

λ – **длина волны**, kx – **набег фазы** (или **фазовый сдвиг**) при прохождении волной расстояния, $\Phi(t, x) = \omega t - kx + \varphi_0$ – **(полная) фаза**.

• **Закон распространения (уравнение) экспоненциально затухающей плоской гармонической волны:**

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 e^{-\delta n \cdot r} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0),$$

где δ – коэффициент затухания, $\mathbf{k} \equiv k\mathbf{n}$ – **волновой вектор**.

• **Закон распространения (уравнение) расходящейся сферической гармонической волны:**

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega(t - r/c) + \varphi_0) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где A – величина, численно равная амплитуде волнового возмущения на единичном расстоянии от точки S .

• **Закон распространения (уравнение) экспоненциально затухающей расходящейся сферической гармонической волны:**

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega t - kr + \varphi_0) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где δ – коэффициент затухания.

• **Скорость распространения продольной упругой волны в твердом теле:**

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где ρ – объемная плотность тела, $E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}$ – модуль Юнга, σ – продольное напряжение, ε – относительная деформация.

• **Скорость поперечной упругой волны в твердом теле:**

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Здесь $G \equiv \frac{\tau}{\gamma}$ – модуль сдвига, τ – поперечное (касательное)

напряжение, $\gamma = \operatorname{tg}(\alpha(x)) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_x$ – тангенс угла сдвига α , где $\xi(x)$

– смещение частиц твердого тела при распространении поперечной упругой волны.

• **Скорость поперечной упругой волны в струне:**

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{л}}}},$$

где T – сила натяжения струны, $\rho_{\text{л}}$ – линейная плотность струны в отсутствие волны.

• **Скорость упругой волны в идеальных жидкости и газе:**

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}},$$

где P – давление и ρ – плотность жидкости или газа, ρ_0 – плотность в отсутствие волны.

• **Скорость упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического процесса ее распространения:**

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}},$$

где $\gamma \equiv c_p / c_v$, c_p и c_v – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно, P_0 – давление в отсутствие волны.

• **Объемные плотности кинетической $w^k(t, x)$ и потенциальной $w^p(t, x)$ энергии частиц тела, участвующих в продольном волновом движении, равна:**

$$w^k(t, x) = \frac{\rho \xi^2(t, x)}{2} = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0),$$

$$w^p(t, x) = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\xi_0^2 E k^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \phi_0).$$

• **Плотность потока энергии волны** – величина, численно равная энергии, переносимой волной в единицу времени через поверхность единичной площади, ориентированной перпендикулярно направлению распространения энергии волны:

$$S(x, t) \equiv \frac{w(x, t) c s dt}{s dt} = w(x, t) c,$$

где s – площадь поперечного сечения волны.

• **Вектор Умова** – вектор, направление которого совпадает с направлением распространения энергии волны, а модуль равен плотности потока энергии. В случае изотропных сред:

$$\mathbf{S}(t, x) = w(t, x) \mathbf{c}.$$

• **Интенсивность волны** – среднее значение плотности потока энергии гармонической волны за период колебаний:

$$I \equiv \langle S(x, t) \rangle_T = \langle w(x, t) \rangle_T c = \frac{w_0}{2} c.$$

• **Формулы продольного (классического) эффекта Доплера для упругих волн:**

$$v_D = \frac{c - v_D}{c - v_S} v_S.$$

Здесь ν_s и ν_D – частота колебаний источника и частота, зарегистрированная приемником, u_s и u_D – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны, c – скорость распространения волны.

- Уравнение стоячей гармонической волны:

$$\begin{aligned}\xi(t, x) &= \xi_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \xi_2 \left(t + \frac{x}{c} \right) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + \xi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}) = \\ &\equiv C \cos(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0),\end{aligned}$$

где φ_{01} и φ_{02} – начальные (при $t = 0$) фазы в точке с координатой $x = 0$, $C = 2\xi_0$, $\psi_0 = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}$ и $\varphi_0 = \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}$, а $C \cos(kx + \psi_0)$ – амплитуда стоячей волны.

Бегущие волны. Поток энергии в бегущей волне

7.1. Плоская гармоническая звуковая волна с амплитудой $\xi_0 = 1$ мкм и частотой $\nu = 1$ кГц распространяется в воздухе с плотностью $\rho = 1,3$ кг/м³ со скоростью $c = 340$ м/с в направлении, составляющем углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ с осями X и Y декартовой системы координат. Найти разность фаз $\Delta\Phi$ колебаний частиц воздуха в точках с координатами $x_1 = 1$ м, $y_1 = 1$ м, $z_1 = 1$ м и $x_2 = 6$ м, $y_2 = 6$ м, $z_2 = 6$ м, а также энергию, переносимую звуковой волной за время $\tau = 60$ с через элемент плоской поверхности площадью $s = 10$ см², ориентированной перпендикулярно оси Z.

7.2. В упругой среде с плотностью $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³ вдоль оси X распространяется плоская гармоническая звуковая волна с законом изменения скоростей частиц среды $v(t, x) = v_0 \cos(\omega t - kx)$. Амплитуда скорости частиц $v_0 = 1$ см/с, а скорость волны $c = 2$ км/с. Найти интенсивность волны, а также уравнения волн деформаций и смещений частиц среды, считая, что начальное смещение частиц $\xi(t = 0, x = 0) = 0$.

7.3. Определить скорость распространения продольной упругой волны в железном тонком стержне плотностью $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ и модулем Юнга $E = 200 \text{ ГПа}$.

7.4. Определить скорость распространения поперечной упругой волны в железном образце с плотностью $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ и модулем сдвига $G = 81 \text{ ГПа}$.

7.5. Определить скорость распространения поперечной упругой волны в струне с линейной плотностью $\rho_l = 1 \text{ г/м}$ при постоянной величине силы натяжения вдоль струны $T = 100 \text{ Н}$.

7.6. Определить скорость распространения упругой волны в идеальных жидкости и газе с плотностью ρ_0 в отсутствие волны и заданным законом зависимости давления от плотности $P = P(\rho)$. Определить также скорость распространения волны в идеальном газе, считая процесс ее распространения адиабатическим. Вычислить скорость распространения упругой волны в воздухе при нормальных условиях.

7.7. В упругой среде вдоль оси X распространяется плоская гармоническая звуковая волна с законом изменения скоростей частиц среды $v(t, x) = v_0 \cos(\omega t - kx)$. Амплитуда скорости частиц равна $v_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, скорость волны $c = 340 \text{ м/с}$, частота $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$. Найти уравнения волн смещений и ускорений частиц среды, а также уравнение волны деформаций среды, считая, что начальное смещение частиц $\xi(t = 0, x = 0) = 0$. Определить амплитуды указанных волн.

7.8. В упругой среде распространяется незатухающая плоская гармоническая волна. Найти среднее значение объемной плотности энергии волны $\langle w \rangle$, если в любой точке среды объемная плотность энергии равна w^* через шестую часть периода колебаний после прохождения максимума смещения.

7.9. Найти радиус-вектор, определяющий положение точно-го источника незатухающих сферических волн, если известно, что он находится на прямой между точками с радиус-векторами r_1 и r_2 , в которых амплитуды колебаний частиц среды равны a_1 и a_2 . Среда однородная, затухания волн нет.

7.10. Точечный изотропно излучающий источник испускает экспоненциально затухающую гармоническую звуковую волну с

частотой $\nu = 1,45$ кГц. На расстоянии $r_0 = 5$ м от источника амплитуда смещения частиц среды $\xi_0(r_0) = 50$ мкм, а в точке Р, находящейся на расстоянии $r = 10$ м от источника, амплитуда смещения $\xi_0(r)$ в $\eta = 3$ раза меньше $\xi_0(r_0)$. Найти коэффициент затухания волны δ и амплитуду колебаний скорости частиц среды $v_0(r_0)$ в точке Р.

7.11. В упругой однородной среде с плотностью ρ распространяются две плоские гармонические продольные волны смещений со скоростью c , одинаковыми амплитудами a и частотами ω , одна – вдоль оси X , другая – вдоль оси Y некоторой декартовой системы координат. Найти среднее значение плотности потока энергии результирующего волнового поля вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY , считая одинаковыми начальные фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

7.12. Точечный изотропно излучающий источник звука S находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр O . Расстояние между точкой O и источником S равно $L = 1$ м, радиус кольца – $R = 0,5$ м. Найти средний поток энергии через плоскую поверхность, ограниченную кольцом, если в точке O интенсивность звуковой волны $I_0 = 30$ мкВт/м². Затуханием волн пренебречь.

7.13. Точечный изотропный источник звука мощностью P находится в центре полого цилиндра радиусом R и длиной h . Найти среднее значение потока энергии, падающей на боковую поверхность цилиндра, считая, что стенки цилиндра полностью поглощают звук.

7.14. Звуковая волна, испущенная точечным изотропным источником, распространяется в среде с коэффициентом затухания γ . Найти мощность источника, если на расстоянии r от него интенсивность звуковой волны равна I .

7.15. Между двумя точками звуковой волны, колеблющимися в одинаковой фазе, укладывается $N = 825$ длин волн. При повышении температуры на 1 К скорость распространения звука возрастает на 0,2%. Найти минимальное повышение температуры, при котором эти две точки будут совершать колебания в противофазе.

7.16. Найти волновой вектор \mathbf{k} и скорость v волны, имеющей вид $\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)$.

7.17. Плоская волна с частотой ω распространяется так, что некоторая поверхность постоянной фазы перемещается вдоль осей X , Y , Z со скоростями v_1 , v_2 , v_3 . Найти волновой вектор \mathbf{k} , если орты осей координат \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z заданы.

7.18. Уравнение упругой волны в системе отсчета S имеет вид: $\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$. Найти уравнение этой волны в системе отсчета S' , движущейся в положительном направлении оси X с постоянной скоростью V по отношению к системе S .

7.19. Продольная упругая волна распространяется в положительном направлении оси X в стержне с плотностью $\rho = 4 \text{ г/см}^3$ и модулем Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$. Найти проекцию скорости u_x частиц среды в точках, где относительная деформация стержня равна $\varepsilon = 0,01$.

7.20. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $\xi(t, x) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$, где ξ измеряется в микрометрах, t – в секундах, x – в метрах. Найти:

а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

в) амплитуду колебаний относительной деформации среды и ее связь с амплитудой колебаний скорости частиц среды.

7.21. В однородной упругой среде распространяется плоская волна $\xi(t, x) = ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$, где a , γ , ω и k – постоянные. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на 1%, если $\gamma = 0,42 \text{ м}^{-1}$ и длина волны $\lambda = 50 \text{ см}$.

7.22. Вдоль одного направления распространяются две синусоидальные плоские волны со скоростями v_1 и v_2 и длинами волн λ_1 и λ_2 соответственно. Найти скорость u перемещения в пространстве тех точек, где колебания, соответствующие каждой волне, имеют одинаковую фазу. Найти расстояние L между двумя подобными точками.

7.23. Показать, что для бегущей акустической волны относительное изменение давления в данной точке равно $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{u}{c}$, где γ –

показатель адиабаты, u – скорость частицы, c – скорость звука. Процесс распространения звуковой волны считать адиабатическим.

Интерференция волн. Элементы акустики. Эффект Доплера

7.24. В упругой однородной среде распространяются две поперечные (направление колебаний одинаково) плоские волны, одна в направлении оси X , другая в направлении оси Y : $\xi_1(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$, $\xi_2(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - ky)$. В каких направлениях в плоскости XY частицы среды колеблются с максимальной и минимальной амплитудами?

7.25. Вдоль оси X декартовой системы координат распространяются две плоские гармонические звуковые волны (направление колебаний одинаково) с одинаковой длиной волны $\lambda = 0,65$ м и одинаковой амплитудой $A_0 = 5$ мм. Волны порождены двумя источниками, совершающими колебания в одинаковой фазе. Найти амплитуду A колебаний в точке среды, отстоящей от одного источника колебаний на расстоянии $x_1 = 2,5$ м и от другого – на $x_2 = 4,0$ м.

7.26. Направления распространения двух плоских гармонических звуковых волн с одинаковой длиной волны λ и одинаковой амплитудой составляют друг с другом малый угол α . Определить расстояние между соседними максимумами вдоль прямой, перпендикулярной биссектрисе угла α в случае, когда $\lambda = 0,7$ м и $\alpha = 3^\circ$.

7.27. Два одинаковых точечных источника, излучающих синфазно звук с частотой $\nu = 3$ кГц, расположены на расстоянии $b = 1$ м друг от друга. Точечный приемник звуковых волн, медленно движущийся параллельно прямой, на которой расположены источники на расстоянии $L = 10$ м от нее, периодически перестает регистрировать звук динамиков. Минимальное расстояние между соседними точками, в которых не слышен звук, равно $D = 1,1$ м. Определить скорость звуковой волны.

7.28. На пути плоской звуковой волны, распространяющейся в воздухе, находится шар радиусом $R = 0,5$ м. Длина звуковой волны $\lambda = 0,2$ м, частота $\nu = 1,7 \cdot 10^3$ Гц, амплитуда звукового давления $\Delta P_0 = 3,5$ Па. Найти среднее за период значение потока энергии звуковой волны, падающей на поверхность шара. Плотность воздуха $\rho_0 = 1,3$ кг/м³.

7.29. Гидролокатор подводной лодки, всплывающей вертикально, излучает короткие ультразвуковые импульсы длительностью τ_0 . Найти скорость v всплытия лодки, если длительность сигналов, принятых приемником гидролокатора после отражения от горизонтальной поверхности дна, равна τ , а скорость распространения ультразвука в воде равна c .

7.30. Два динамика расположены на расстоянии $d = 2,0$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии $L = 4,0$ м от центра динамиков. Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $b = 1,5$ м, то он фиксирует первый интерференционный максимум. Скорость звука $v = 340$ м/с. Определить частоту звуковой волны.

7.31. Амплитуда звуковой волны давлений равна $\Delta P_0 = 10$ Па. Найти среднее значение потока энергии J , попадающего в ухо человека. Считать площадь уха, ориентированного перпендикулярно направлению распространения звуковой волны, $s = 4$ см². Плотность воздуха в отсутствие волны $\rho = 1,3$ кг/м³, скорость звука в воздухе $c = 334$ м/с.

7.32. Какова максимальная скорость $(\dot{\xi})_{\max}$ колебательного движения частиц кислорода при распространении звуковой волны? Амплитуда звукового давления равна $\Delta p_0 = 0,2$ Па, температура кислорода – $T = 300$ К, давление – $p = 100$ кПа.

7.33. На расстоянии $r = 80$ м от точечного изотропного источника звука амплитуда звукового давления равна $\Delta P_0 = 0,2$ Па. Определить мощность излучения источника N , если величина удельного акустического сопротивления воздуха, определяемого произведением плотности воздуха в отсутствие волны ρ на скорость распространения волны c ($Z_s = \rho c$), равно $Z_s = 420$ Па·с/м. Поглощением звука в воздухе пренебречь.

7.34. Уровень интенсивности L_0 шума двигателя равен 50 дБ. Каков будет уровень интенсивности шума L , если одновременно будут работать $N = 5$ двигателей?

7.35. С движущегося катера посылается ультразвуковой сигнал частотой $\nu_1 = 50$ кГц, который распространяется в воде. Этот сиг-

нал отражается от второго катера, который идет встречным курсом со скоростью $v_2 = 10$ м/с, и принимается первым катером. Частота принятого после отражения сигнала равна $\nu_2 = 52$ кГц. Определите скорость движения первого катера v_1 , считая скорость звуковой волны в воде равной $c = 1,54$ км/с.

7.36. На оси X находятся приемник D и источник S звуковых гармонических волн с частотой $\nu_s = 2000$ Гц. Источник установлен на тележке, совершающей гармонические колебания вдоль этой оси с угловой частотой ω и амплитудой $A = 50$ см. Скорость звука $c = 340$ м/с. При каком значении ω ширина частотного интервала звука, воспринимаемого неподвижным приемником, будет составлять $\Delta\nu = 20$ Гц?

7.37. Источник звуковых колебаний S с частотой $\nu_0 = 1700$ Гц находится между плоским отражателем и приемником D (см. рис.). Источник и приемник неподвижны и расположены на одной и той же нормали к отражателю, который удаляется от источника со скоростью $u = 6$ см/с. Скорость звука $c = 340$ м/с. Найти частоту биений, регистрируемых приемником.

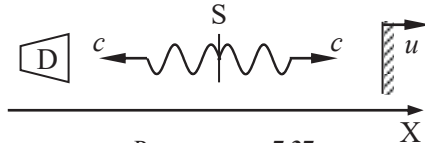


Рис. к задаче 7.37.

7.38. Человек с хорошим слухом может слышать звук с колебаниями давления до $\Delta P = 10^{-4}$ Па при частоте $\nu = 2$ кГц. Найти амплитуду смещения частиц воздуха ξ_0 в такой волне. Атмосферное давление считать равным $P = 10^5$ Па, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³ и показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

7.39. Точка A находится на $r = 1,5$ м от точечного изотропного источника звука частоты $\nu = 600$ Гц. Мощность источника $P = 0,80$ Вт. Пренебрегая затуханием волн и считая скорость звука $v = 340$ м/с, найти для точки A :

а) амплитуду колебаний давления $(\Delta p)_m$ и ее отношение к давлению воздуха;

б) амплитуду колебаний частиц среды; сравнить ее с длиной волны звука.

7.40. Плоская звуковая волна распространяется вдоль оси x . Коэффициент затухания волны $\gamma = 0,0280$ м⁻¹. В точке $x = 0$ уровень громкости $L = 60$ дБ. Найти:

- а) уровень громкости в точке с координатой $x = 50$ м;
- б) координату x точки, в которой звук уже не слышен.

7.41. Паровоз подходит к наблюдателю со скоростью 20 м/с. Какую частоту основного тона гудка он услышит, если машинист слышит тон в 300 Гц? Насколько изменится частота гармоник гудка?

7.42. Два камертона дают 20 биений за 10 с. Частота колебаний одного камертона 256 Гц. Чему равна частота колебаний другого?

7.43. Камертон, излучающий звук частотой ν_0 приближается к удаленной стене со скоростью u по нормали к ней. Неподвижный приемник звука помещается на линии движения камертона. Решить задачу в двух случаях: 1) камертон находится между стеной и приемником; 2) приемник находится между камертоном и стеной. Будет ли приемник звука регистрировать акустические биения, если скорость u много меньше скорости звука c ? Какова будет частота этих биений?

7.44. Локомотив, который движется со скоростью $u = 120$ км/час, дает гудок длительностью $\tau_0 = 5,0$ с. Найти длительность гудка для неподвижного наблюдателя, если локомотив: а) приближается; б) удаляется. Скорость звука в воздухе $\nu = 340$ м/с.

7.45. Звуковая волна распространяется со скоростью ν в положительном направлении оси x . В ту же сторону движутся наблюдатели 1 и 2 со скоростями ν_1 и ν_2 . Найти отношение частот, которые зафиксируют наблюдатели.

7.46. Источник звука с частотой $\nu_0 = 1000$ Гц движется по нормали к стенке со скоростью $u = 17$ см/с. На этой же нормали расположены два неподвижных приемника P_1 и P_2 , причем последовательность расположения этих приемников и источника S такая: $P_1 - S - P_2 -$ стенка. Какой приемник регистрирует биения и какова их частота? Скорость звука $\nu = 340$ м/с.

7.47. На оси X находятся приемник и источник звука частоты $\nu_0 = 2000$ Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с круговой частотой ω и амплитудой $a = 50$ см. При каком значении ω ширина частотного интервала, воспринимаемого неподвижным приемником, $\Delta\nu = 200$ Гц? Скорость звука $\nu = 340$ м/с.

7.48. Источник звука частотой $\nu_0 = 1700$ Гц и приемник находятся в одной точке. В некоторый момент источник начинает удаляться от приемника с ускорением $a = 10,0$ м/с². Найти частоту колебаний, воспринимаемых неподвижным приемником через время $t = 10,0$ с после начала движения источника. Скорость звука $v = 340$ м/с.

Граничные условия. Отражение и прохождение волн на границе раздела двух сред. Стоячие волны

7.49. Стальная струна длиной $L = 110$ см, плотностью $\rho = 7,8$ г/см³ и диаметром $d = 1$ мм натянута между полюсами электромагнита. При пропускании по струне переменного тока частотой $\nu = 256$ Гц в ней возбуждается упругая поперечная волна, причем на длине струны "укладывается" $n = 5$ полуволн. Найти силу натяжения струны.

7.50. Найти частоты ν_n , на которых будет резонировать труба длиной $L = 1,7$ м, закрытая с одного конца, если скорость звука в воздухе равна $c = 340$ м/с.

7.51. Определить длины стоячих волн и частоты нормальных колебаний для стержня длиной L с закрепленными концами.

7.52. Медный стержень длиной $L = 50$ см закреплен в середине. Определить число продольных собственных колебаний этого стержня в диапазоне частот 20 кГц $< \nu < 50$ кГц. Модуль Юнга принять равным $E = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па, плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

7.53. Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Найти скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, при которых наблюдается резонанс на частоте $\nu = 1$ кГц, составляет $l = 17$ см.

7.54. На плоскую границу раздела двух сред нормально падает плоская звуковая волна. Найти амплитуды прошедшей и отраженной волн смещений и напряжений (давлений) при заданной амплитуде смещения падающей волны ξ_{i0} . Как отличаются фазы указанных волн на границе раздела? Считать известными скорости звуковых волн в двух средах c_1 и c_2 , а также плотности этих сред ρ_1 и ρ_2 . Произвести численные оценки в двух случаях: при переходе волны

из воздуха в воду и из воды в воздух. Плотность воды и воздуха принять равными $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$ и $\rho_2 = 1,3 \text{ кг/м}^3$. Скорость звука в воде равна $c_1 = 1500 \text{ м/с}$, в воздухе – $c_2 = 340 \text{ м/с}$.

7.55. В однородном стержне плотностью ρ и площадью сечения S установилась стоячая волна $\xi(t, x) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$. Найти полную механическую энергию, заключенную между сечениями, через которые проходят соседние узлы смещения. Считать заданными амплитуду волны A , круговую частоту ω и волновое число k .

7.56. В трубе, открытой с одного конца, возбудили колебания воздуха на основном тоне с угловой частотой ω и максимальной амплитудой смещения A_{\max} . Найти максимальное и среднее за период значения кинетической энергии воздуха в трубе.

7.57. Плоская звуковая волна падает под углом $\alpha = 2^\circ$ на плоскую границу раздела сред воздух – стекло. Определить направление распространения преломленной волны. Модуль Юнга для стекла принять равным $E = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, плотность стекла равна $\rho = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, температура воздуха – $t = 20^\circ\text{C}$.

7.58. Определить предельный угол полного внутреннего отражения звуковой волны на границе раздела двух сред: стекло – воздух. Модуль Юнга для стекла принять равным $E = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, плотность стекла равна $\rho = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, температура воздуха – $t = 20^\circ\text{C}$.

7.59. В стержне с одним закрепленным концом возбудили стоячую волну. Нарисовать графики зависимостей смещений, скоростей и деформаций от пространственной координаты для основного тона и первого обертона в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = T/4$ (T – период волны).

7.60. Какова длина струны L , если при укорочении ее на 10 см частота колебаний повышается в полтора раза? Натяжение струны остается неизменным.

7.61. Стержень с закрепленными концами имеет длину $l = 1 \text{ м}$. При трении стержень издает звук, основная частота которого $\nu_0 = 700 \text{ Гц}$. Какова скорость звука в стержне? Какие обертоны может иметь звук, издаваемый стержнем?

7.62. Две струны имеют одинаковую длину и натяжение. Как относятся периоды их собственных колебаний, если диаметр одной струны в два раза больше диаметра другой? Струны сделаны из одного материала.

7.63. Как следует изменить натяжение струны, чтобы она давала тон в три раза более низкий?

7.64. Струна звучит с частотой 400 Гц. В каком месте и как следует зажать струну, чтобы она звучала с частотой: а) 800 Гц; б) 1200 Гц? Можно ли, зажимая струну понизить частоту ее звучания?

7.65. На струне длиной $l = 120$ см образовалась стоячая волна, причем все точки струны с амплитудой смещения 3,5 см отстоят друг от друга на 15 см. Найти максимальную амплитуду смещения a_{\max} . Какому обертону соответствуют эти колебания?

7.66. Найти отношение частот основного тона двух одинаковых струн после того, как одну из них упруго растянули на $\eta_1 = 2\%$, а другую на $\eta_2 = 4\%$.

7.67. В стержне с двумя закрепленными концами возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений $\zeta(t)$, скоростей $v(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda/2$.

7.68. В стержне с одним закрепленным концом возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений $\zeta(t)$, скоростей $v(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda/2$.

7.69. В трубе, открытой с двух концов, возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений $\zeta(t)$, скоростей $v(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda/2$.

РАЗДЕЛ 8

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

• **Коэффициент Пуассона μ** – отношение относительного поперечного сжатия стержня к его относительному удлинению, зависящее только от материала стержня:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}.$$

Здесь ε и ε_{\perp} – относительные изменения поперечного и продольного размеров стержня.

• **Деформация сдвига** – при внешнем воздействии поверхностных касательных сил возникает деформация сдвига, которая описывается величиной

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол сдвига.

• **Закон Гука – при малых упругих деформациях растяжения** величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее силы F_n (нормального напряжения σ).

Для деформации растяжения (сжатия):

$$\Delta l = \frac{1}{k} F,$$

где k – **коэффициент упругости (жесткости)** стержня.

Для деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma.$$

Здесь E – **модуль упругости (Юнга)** материала стержня.

• **Закон Гука – при малых упругих деформациях сдвига** величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее касательной силы F_{τ} (касательного напряжения σ_{τ}):

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F_{\tau}}{S} = \frac{1}{G} \sigma_{\tau},$$

где G – **модуль сдвига** материала тела.

• **Взаимосвязь относительного изменения объема и деформации удлинения** при малых деформациях:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon(1 - 2\mu),$$

где $\Delta V = V - V_0$ – изменение объема тела, V и V_0 – объем тела до и после всестороннего сжатия,

- **Взаимосвязь модуля сдвига с модулем Юнга:**

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

- **Закон Гука при всестороннем сжатии** – при малом одинаковом всестороннем упругом сжатии величина относительного изменения объема тела пропорциональна величине нормального напряжения σ :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{K}\sigma,$$

где K – модуль всестороннего сжатия тела.

- **Взаимосвязь модуля всестороннего сжатия с модулем Юнга.**

$$K = \frac{E}{3(1 - \mu)}.$$

- **Закон Гука при кручении** – при малых деформациях сдвига при кручении вала (стержня) угол кручения φ , на который повернется одно из оснований вала относительно другого, пропорционально моменту внешних сил M , вызвавших это кручение:

$$\varphi = \frac{1}{B}M.$$

Здесь $B = \frac{\pi R^4}{2l}G$ – модуль кручения; R и l – радиус и длина вала.

- **Работа, затрачиваемая на деформацию тела при малых деформациях сжатия (растяжения)** элемента тела объемом V :

$$A_\varepsilon = V \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

- **Работа, затрачиваемая на деформацию тела при малых деформациях сдвига** в элементе тела объемом V :

$$A_\tau = V \int_0^\gamma \sigma_\tau(\gamma) d\gamma.$$

- **Объемная плотность энергии при деформации растяжения:**

$$w_\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 .$$

- **Объемная плотность энергии при деформации сдвига:**

$$w_\tau = \frac{1}{2} G \gamma^2 .$$

- **Условие стационарного течения жидкости и газа** – масса Q жидкости (газа), проходящая в единицу времени через поперечное сечение трубки тока, одинакова для всех сечений:

$$Q = \rho S v = const ,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока, v – скорость частиц жидкости в сечении трубки.

- **Уравнение Бернулли** – в случае стационарного течения невязкой несжимаемой (идеальной) жидкости вдоль произвольной трубки тока:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = const .$$

Здесь ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, p – (статическое) давление жидкости, v – скорость частиц жидкости, h – высота сечения трубки тока.

Деформации

8.1. Под действием внешней силы стальной стержень массой $m = 4,5$ кг растянули таким образом, что его относительное удлинение $\varepsilon = 10^{-3}$. Определите энергию упругой деформации стержня. Модуль Юнга стали равен $E = 210$ ГПа, плотность стали – $\rho = 7850$ кг/м³.

8.2. Предел прочности стали, из которой сделана проволока диаметром $d = 1,5$ мм, равен $\sigma_n = 420$ МПа. Какое количество таких проволок N необходимо взять для того, чтобы сделать из них трос, рассчитанный на подъем груза массой $m = 1000$ кг?

8.3. Сделанное из проволоки кольцо радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости кольца. Известно, что предел прочности и плотность материала, из

которого сделано кольцо, равны соответственно $\sigma_{\text{пр}}$ и ρ . Определите, при какой угловой скорости ω может произойти разрыв кольца?

8.4. Груз массой m подвешен к балке на трех тросах, как показано на рисунке. Все тросы сделаны из одного материала и имеют одинаковое сечение, а крайние тросы – одинаковую длину. Определить натяжение тросов, считая деформации малыми, а угол между тросами известным и равным 2α .

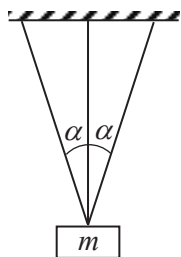


Рис. к задаче 8.4.

8.5. Сплошной медный цилиндрический стержень длиной $l_0 = 65$ см, закрепленный с одной стороны, растягивают с помощью постоянной силы $F = 1000$ Н, приложенной с другой стороны, и равномерно распределенной по торцу стержня. Определите изменение объема стержня. Модуль Юнга для меди равен $E = 12,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², а коэффициент Пуассона – $\mu = 0,35$.

8.6. Однородный упругий стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы F_0 , равномерно распределенной по его торцу. Длина стержня и площадь его торца в недеформированном состоянии равны l_0 и S_0 , модуль Юнга материала стержня – E , коэффициент Пуассона – μ . Определите зависимости напряжения упругих сил $\sigma(x)$ и относительной деформации $\varepsilon(x)$ от координаты x вдоль стержня, а также относительное удлинение стержня.

8.7. Вертикально подвешенный стержень массой m имеет площадь поперечного сечения S . Модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, равен E . Определите относительное удлинение стержня под действием силы тяжести.

8.8. Определите относительное изменение объема полого шара радиусом R , в который накачан воздух под давлением p . Толщина сферической оболочки равна d ($d \ll R$). Модуль Юнга материала, из которого сделан шар, равен E , коэффициент Пуассона – μ .

8.9. Определите относительное изменение объема шара радиусом R , а также упругую энергию, запасенную в шаре, имеющем модуль всестороннего сжатия K и подвергнутом всестороннему давлению p .

8.10. Коэффициент линейного теплового расширения стали равен $12 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Какое давление p

необходимо приложить к торцам стального цилиндра, чтобы длина его оставалась неизменной при повышении температуры на 100°C ?

8.11. Стальной канат диаметром 9 мм может выдержать вес неподвижной кабины лифта. Какой диаметр D должен иметь канат, если кабина лифта поднимается с ускорением $8g$?

8.12. Определить изменение объема упругого однородного стержня длиной l под действием силы F , сжимающей или растягивающей стержень по его длине? Считать заданными модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ .

8.13. Какую равномерно распределенную нагрузку F может выдержать гранитная плита, представляющая собой правильный шестиугольник со стороной $a = 10$ см, если допустимое механическое напряжение при сжатии гранита равно $p = 4,5 \cdot 10^6$ Н/м²?

8.14. Резиновый цилиндр высотой h , весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

8.15. Найти распределение объемной плотности энергии упругой деформации в стержне в зависимости от расстояния r до его оси. Длина стержня l , угол закручивания φ . Модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, равен E , а коэффициент Пуассона — μ .

8.16. Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси X , так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не могут. В направлении оси Z пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению P . Определить давление P_x , которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти выражение для плотности упругой энергии w , а также относительное сжатие пластинки в направлении оси Y и относительное расширение в направлении оси Z . Модуль Юнга материала, из которого сделана пластинка, равен E , а коэффициент Пуассона — μ .

8.17. Упругий стержень массой m , длиной l и площадью поперечного сечения S движется в продольном направлении с ускорением a (одинаковым для всех точек стержня). Найти энергию упругой деформации, возникающую вследствие ускоренного дви-

жения.

8.18. Тонкий однородный упругий стержень, длина которого L , масса M и модуль Юнга E , равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Найти зависимость сил упругости T от расстояния между рассматриваемым сечением стержня и осью вращения, а также полное удлинение стержня ΔL . Считать поперечное сечение неизменным и деформации малыми.

8.19. Брусok из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ подвергли всестороннему сжатию давлением p . Найти:

а) относительное уменьшение его объема;

б) связь между коэффициентом сжимаемости β и упругими постоянными E и μ .

Показать, что коэффициент Пуассона μ не может превышать 0,5.

8.20. Найти энергию упругой деформации стального стержня массой $m = 3,1$ кг, который растянут так, что его относительное удлинение равно $\varepsilon = 10^{-3}$.

8.21. Стержень круглого сечения расположен вертикально и закреплен верхним концом. К нижнему концу прикреплен горизонтально диск радиусом $R = 50$ мм. Ось стержня проходит через центр диска. От концов диаметра диска идут по касательной две нити, на которые действуют равные силы $P = 50$ Н, закручивающие диск в одном направлении. На какой угол φ закрутится стержень? Модуль сдвига материала стержня $G = 8 \cdot 10^4$ Н/мм², радиус стержня $r = 5$ мм, его длина $l = 1$ м.

8.22. Рамку чувствительного гальванометра, вращающуюся между полюсами магнита, подвешивают на тонкой платиновой нити. Найти максимальный допустимый вес рамки гальванометра, если предел прочности платины равен 300 Н/мм², а для подвеса использована нить диаметром 4 мкм.

8.23. Установить связь между крутящим моментом M и углом закручивания $\Delta\varphi$ для:

а) трубы, у которой толщина стенок Δr значительно меньше радиуса трубы;

б) сплошного стержня круглого сечения.

Их длина l , радиус r и модуль сдвига G известны.

8.24. Вычислить момент сил M , которые вызывают закручивание стальной трубы длины $l = 3$ м на угол $\varphi = 2^\circ$ вокруг ее оси, если внутренний и внешний диаметры трубы равны $d_1 = 30$ мм и $d_2 = 50$ мм.

8.25. Однородное кольцо массой m , имеющее внешний радиус r_2 , плотно насажено на вал радиусом r_1 . Вал вращают с постоянным угловым ускорением β вокруг его оси. Найти момент упругих сил деформации сдвига в кольце в зависимости от расстояния r до оси вращения.

8.26. Определить стрелу прогиба λ стержня длиной l , жестко закрепленного в стене одним из своих концов. На другой конец стержня действует сосредоточенная сила F . Сечение стержня представляет собой прямоугольник с размерами $a \times b$. Модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, равен E . Весом самого стержня пренебречь.

8.27. Коромысло весов имеет прямоугольное сечение со сторонами $a = 8$ мм (горизонтальная) и $b = 10$ мм (вертикальная). Длина коромысла $l = 250$ мм. Какова наибольшая стрела прогиба коромысла λ , если весы рассчитаны на максимальную нагрузку $P = 5$ Н, а модуль Юнга материала коромысла равен $E = 15 \cdot 10^4$ Н/мм²?

8.28. Деревянная балка длиной $l = 4$ м и квадратного сечения со стороной $a = 40$ см покоится своими концами на двух опорах и несет посередине груз весом $P = 2 \cdot 10^4$ Н. Определить стрелу прогиба λ , если модуль Юнга данного сорта дерева равен $E = 10^4$ Н/мм²?

8.29. Медная трубка, внешний и внутренний диаметры которой равны $D = 20$ мм и $d = 10$ мм, концами опирается на подставки, расстояние между которыми $l = 400$ мм. Посередине трубка несет груз весом $P = 900$ Н. Модуль Юнга для меди $E = 10^5$ Н/мм². Определить стрелу прогиба λ трубки посередине между опорами.

8.30. Круглый металлический стержень радиусом $R = 10$ мм закреплен одним концом в горизонтальном положении, а на другом его конце висит груз весом $P = 10$ Н. Длина стержня $l = 1$ м. Стержень под влиянием груза прогибается, стрела прогиба равна $\lambda = 4$ мм. Чему равен модуль Юнга E материала стержня?

8.31. Определить стрелу прогиба λ равнопрочной балки (балка с переменным поперечным сечением, площадь которого линейно уменьшается при удалении от ее закрепленного конца), жестко закрепленной в стене одним из своих концов, а также радиус кривизны изгиба балки R (см. рис.). На другой незакрепленный конец балки действует сосредоточенная сила F . Линейные размеры поперечного сечения закрепленного конца – a_0 и b , длина балки равна L . Модуль Юнга материала, из которого сделана балка, равен E . Считать балку легкой: масса балки $m \ll F/g$.

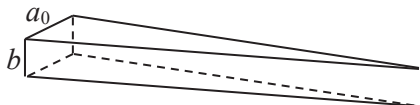


Рис. к задаче 8.31.

8.32. Из двух кусков стальной проволоки разного диаметра d_1 и $d_2 = 2d_1$, но одинаковой длины, свили две пружины. Диаметр витков первой пружины равен D_1 , а второй – $D_2 = 3D_1$. Относительное удлинение первой пружины под действием подвешенного к ней груза оказалось равным $\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{1}{9}$ (l_1 – длина первой пружины в нерастянтом состоянии). Определите относительное удлинение второй пружины под действием того же груза, считая, что у нерастянутой пружины витки плотно соприкасаются друг с другом.

Статика и динамика жидкостей и газов

8.33. Как изменится глубина погружения кубика, плавающего в сосуде с водой, если сосуд станет подниматься с ускорением?

8.34. Сосуд кубической формы, наполовину заполненный жидкостью плотностью ρ , движется с горизонтальным ускорением a , направленным вдоль ребра куба (см. рис.). Определить силу F , действующую заднюю грань куба и точку ее приложения. Длина ребра куба равна l . Атмосферным давлением пренебречь.

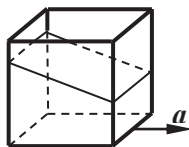


Рис. к задаче 8.34.

8.35. В стакане с водой плавает кубик льда с вмержшим в него небольшим телом. Как изменится уровень жидкости в стакане, когда лед растает? Пренебречь тепловым расширением воды и ее ис-

парением. Рассмотреть два случая: а) плотность тела больше плотности воды; б) плотность тела меньше плотности воды.

8.36. Деревянный цилиндр может вращаться вокруг закрепленной на стенке сосуда горизонтальной оси, при этом одна его половина оказывается внутри сосуда, а другая – вне этого сосуда (см. рис.). Станет ли цилиндр вращаться после того, как в него налить воду?

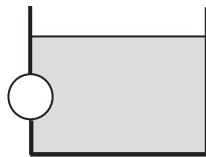


Рис. к задаче 8.36.

8.37. Цилиндрический сосуд, частично заполненный жидкостью плотностью ρ , вращают вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Определить форму свободной поверхности жидкости и распределение давления на дно сосуда, если давление в центре равно p_0 . Силу атмосферного давления не учитывать.

8.38. Горизонтально расположенная трубка длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через ее открытый конец. С какой скоростью относительно трубки будет вытекать идеальная жидкость через малое отверстие в противоположном конце трубки, если длина части трубки, заполненной жидкостью, равна h ?

8.39. Верхний конец однородного тонкого стержня массой m и плотностью ρ закреплен на шарнире, а другой погружен в жидкость плотностью ρ_0 , при этом стержень отклоняется на некоторый угол от вертикали. Найти силу, с которой стержень действует на шарнир в положении равновесия.

8.40. Тонкую деревянную палочку длиной L и площадью сечения S подвесили за один из концов на нити, а другой конец опустили в воду. При этом палочка оказалась наклоненной к горизонтали под углом α , а длина ее части, погруженной в воду, составила половину длины палочки. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить палочку из воды, прикладывая внешнюю силу к концу нити? Плотность воды равна ρ_0 .

8.41. На шероховатом горизонтальном дне бочки, наполненной водой, лежит диск толщиной d , радиусом R , изготовленный из материала плотностью ρ . В бочку вертикально опустили тонкостенную трубку радиусом r , в которую вставили поршень. Нижняя плоскость поршня совпадает с нижним торцом трубки. Трубку плотно прижали к верхней плоскости диска так, что ее ось оказа-

лась смещенной относительно оси диска на расстояние l . Затем поршень подняли вверх, зафиксировали и стали медленно поднимать трубку. На какой минимальной глубине h будет находиться верхняя плоскость диска, когда он оторвется от трубки, если до момента отрыва вода не просачивалась в трубку? Атмосферное давление считать равным p_0 .

8.42. В боковой стенке широкого вертикального цилиндрического сосуда высотой h сделана узкая вертикальная щель, нижняя граница которой находится на дне сосуда. Длина щели равна l , ширина – b . Закрыв щель, сосуд полностью наполняют водой. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды сразу после того, как щель открыли.

8.43. В дне горизонтально расположенного широкого цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью имеется небольшое круглое отверстие радиусом R_1 , а над ним, на расстоянии b , соосно закреплен круглый закрытый цилиндр радиусом $R_2 > R_1$ (см. рис.). Зазор между цилиндром и дном сосуда очень мал. Найти скорость, с которой жидкость вытекает из сосуда, и давление жидкости в зазоре как функцию расстояния r от оси отверстия цилиндра, если высота уровня жидкости равна h , а ее плотность – ρ .

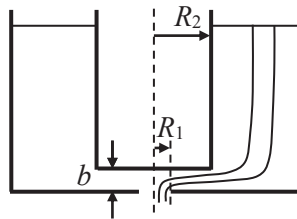


Рис. к задаче 8.43.

8.44. Жидкость вязкостью η находится между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) и длиной l . Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с постоянной угловой скоростью ω_2 . Движение жидкости стационарное. Найти зависимость угловой скорости вращения жидкости от расстояния до оси вращения и момент сил трения, действующих на внешний цилиндр со стороны жидкости.

8.45. По трубке радиусом R течет стационарный поток жидкости плотностью ρ и вязкостью η . Скорость течения жидкости зави-

сит от расстояния r до оси трубки по закону $v(r) = v_0(1 - r^2 / R^2)$. Найти объем жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени и разность давлений жидкости в точках, находящихся на расстоянии l вдоль оси трубки.

8.46. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд радиусом R , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда с внутренней стороны на шарнире прикреплена тонкая однородная палочка длиной l . Во время вращения палочка полностью погружена в жидкость и образует со стенкой сосуда угол α (см. рис.). Найдите угловую скорость вращения сосуда.

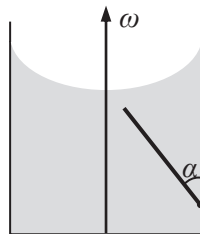


Рис. к задаче 8.46.

8.47. Цилиндрический бак диаметром основания, равным $D = 25$ см, и высотой $H = 4$ м, стоящий на горизонтальной поверхности, наполнили доверху водой. В боковой поверхности бака вблизи дна имеется отверстие, перекрытое краном, в которое вставлена короткая гладкая трубка с внутренним диаметром $d = 2,5$ см. Трубка ориентирована вверх под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонтальной поверхности. Определить скорость, с которой движется мокрое пятно, образующееся на поверхности, через $\tau = 10$ с после открытия крана.

8.48. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H (относительно поверхности стола). На какой высоте h (относительно поверхности стола) надо сделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды достигала поверхности стола на максимальном расстоянии от сосуда? Определить это расстояние.

8.49. На тележке стоит цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью плотностью $\rho = 1$ г/см³. Высота уровня поверхности жидкости в сосуде $h = 1$ м. В сосуде с противоположных сторон по ходу тележки сделано два крана с отверстиями площадью $s = 10$ см² каждое, одно на высоте $h_1 = 25$ см над дном сосуда, а другое на высоте $h_2 = 50$ см. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к тележке, чтобы она оставалась в покое при открытых кранах?

8.50. Цилиндрический сосуд радиусом R с налитой в него идеальной жидкостью вращается вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью ω . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости.

8.51. В боковой стенке сосуда имеется отверстие, нижний край которого находится на высоте h . При каком горизонтальном ускорении сосуда налитая в него жидкость не будет выливаться из отверстия, если в покоящемся сосуде (при закрытом отверстии) жидкость была налита до высоты H ? Горизонтальный размер сосуда равен l .

8.52. Какую работу нужно совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень, выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время t ? Объем воды в цилиндре равен V , плотность воды – ρ , площадь сечения отверстия – s , причем s значительно меньше площади поршня. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

8.53. Вода вытекает из большого бака по изогнутой под прямым углом трубке, внутренний радиус которой равен $r = 0,5$ см. Длина горизонтальной части трубки $l = 22$ см. Расход воды $Q = 0,5$ л/с. Найти момент сил реакции воды на стенки этой трубки относительно точки O (см. рис.), обусловленный течением воды.

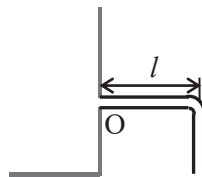


Рис. к задаче 8.53.

8.54. В боковой стенке широкого открытого бака вмонтирована суживающая трубка, через которую вытекает вода. Площадь сечения трубки уменьшается от $S = 3$ см² до $s = 1$ см². Уровень воды в баке на $h = 4,6$ м выше уровня воды в трубке. Пренебрегая вязкостью воды, найти горизонтальную составляющую силы, вырывающей трубку из бака.

8.55. Тонкий горизонтальный диск радиусом $R = 10$ см расположен в цилиндрической полости с маслом, вязкость которого равна $\eta = 8$ мПа·с. Зазоры между диском и горизонтальными торцами полости одинаковы и равны $h = 1$ мм. Найти мощность, которую развивают силы вязкости, действующие на диск при вращении его с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с. Краевыми эффектами пренебречь.

8.56. Длинный цилиндр радиусом R_1 перемешают вдоль его оси со скоростью v_0 внутри коаксиального цилиндра радиусом R_2 . Пространство между цилиндрами заполнено вязкой жидкостью. Найти скорость жидкости в зависимости от расстояния r до оси цилиндров. Течение ламинарное.

8.57. Из широкого сосуда по трубке вытекает вязкая жидкость, плотность которой равна $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Найти скорость вытекающей жидкости, если $h_1 = 10 \text{ см}$, $h_2 = 20 \text{ см}$ и $h_3 = 35 \text{ см}$ (см. рис). Расстояния l одинаковы.

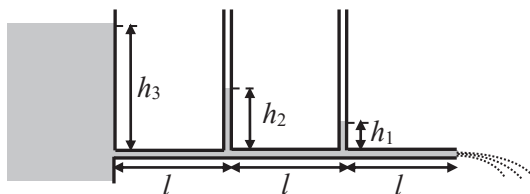


Рис. к задаче 8.57.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

РАЗДЕЛ 1

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

$$1.1. t_1 = \frac{k_1 + 2}{4k_2}.$$

$$1.2. v_{cp} = \frac{k\sqrt{s}}{2}.$$

$$1.3. \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0 + k\sqrt{l}}{kR} 2\sqrt{l} \right).$$

$$1.4. a(0) = \frac{A^2 \omega^2}{R} = 2,6 \text{ м/с}^2, a(A) = A\omega^2 = 3,2 \text{ м/с}^2.$$

$$1.5. \text{а) } \mathbf{r}(t) = cti + \frac{cbt^2}{2} \mathbf{j}; \mathbf{v}(t) = ci + cbt\mathbf{j}; \mathbf{a}(t) = cb\mathbf{j};$$

$$a_t(t) = \frac{cb^2t}{\sqrt{1+b^2t^2}}, a_n(t) = \frac{cb}{\sqrt{1+b^2t^2}};$$

$$\text{б) } y(x) = \frac{b}{2c} x^2; \text{в) } \rho(t) = \frac{c}{b} (1+b^2t^2)^{3/2}; \text{г) } \operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{1}{bt}.$$

Решение. Запишем начальные условия и закон изменения скорости тела в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, \\ v_x(0) = c, v_y(0) = b \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = c, \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = bx(t). \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим закон движения материальной точки в проекциях на оси координат и зависимость от времени радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = ct, \\ y(t) = \frac{cbt^2}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(t) = cti + \frac{cbt^2}{2} \mathbf{j}.$$

Используя найденную зависимость от времени радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, определим закон изменения скорости $\mathbf{v}(t)$ и закон изменения ускорения $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = c\mathbf{i} + cbt\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = cb\mathbf{j}.$$

Уравнение траектории находится из закона движения материальной точки путем исключения из (1) времени t :

$$y(x) = \frac{b}{2c} x^2.$$

Модуль скорости равен:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + c^2 b^2 t^2}.$$

Проекции ускорения $a_\tau(t)$ и $a_n(t)$ получим в виде:

$$\begin{cases} a_\tau(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{cb^2 t}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}, \\ a_n(t) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}. \end{cases}$$

Используя связь между радиусом кривизны траектории, скоростью и нормальным ускорением определим радиус кривизны.

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{c}{b} (1 + b^2 t^2)^{3/2}.$$

Угол $\varphi(t)$ между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$ определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{1}{bt}.$$

1.6. Закон движения тела:
$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

уравнение траектории:
$$y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2};$$

законы изменения скорости и ускорения:
$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}, \quad a = g;$$

нормальная и тангенциальная проекции ускорения:

$$a_n = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}};$$

радиус кривизны траектории:
$$\rho = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}.$$

Решение. Запишем в декартовой системе координат (см. рис.) начальные условия и закон изменения ускорения тела в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad y(0) = H, \\ v_x(0) = v_0, \quad v_y(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g. \end{cases}$$

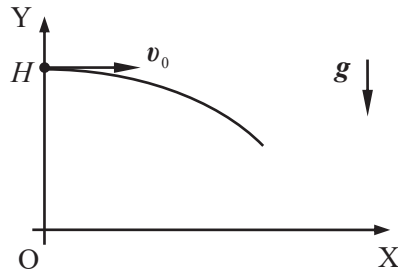


Рис. к решению задачи 1.6.

Из полученной системы уравнений найдем закон изменения скорости тела и закон его движения в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -gt, \\ \begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение траектории находится из закона движения тела в координатной форме путем исключения времени t :

$$y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Действуя так же, как при решении задачи 1.5, находим модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

и модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g.$$

Проекция ускорения на направление скорости (тангенциальная составляющая) и перпендикулярное ему направление (нормальная составляющая) равны соответственно:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Используя зависимости скорости и нормального ускорения от времени, находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}.$$

$$1.7. \quad s = \frac{2}{3\alpha} v_0^{3/2}; \quad t = \frac{2}{\alpha} \sqrt{v_0}.$$

$$1.8. \quad \text{а) } y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2; \quad \text{б) } v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}, \quad a = 2\beta; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha}{2\beta t}.$$

$$1.9. \quad \text{а) } a = 2\alpha v^2, \quad R = 1/2\alpha; \quad \text{б) } a = \beta v^2 / \alpha^2, \quad R = \alpha^2 / \beta.$$

$$1.10. \quad a = \frac{v}{t} \sqrt{1 + 4\beta^2 t^4} = 0,7 \text{ м/с}^2.$$

$$1.11. \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

Решение. Выберем ось Y декартовой системы координат так, чтобы плоскость XY совпала с плоскостью, в которой движется материальная точка M (см. рис.). Для решения задачи используем две системы координат – декартову систему ко-

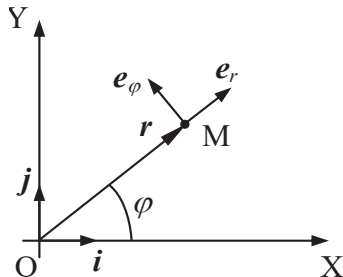


Рис. к решению задачи 1.11.

ординат XOY с ортами \mathbf{i} и \mathbf{j} , и полярную, орты которой \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ изображены на рисунке.

Закон движения материальной точки, заданный в полярной системе, запишем в декартовой системе координат XOY :

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t),$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Следовательно:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \tag{1}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$a_x = \dot{v}_x = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \varphi, \tag{2}$$

$$a_y = \dot{v}_y = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \cos \varphi.$$

Для определения скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат можно использовать разложение:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Следовательно, проекции скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые ортами рассматриваемых систем координат, связаны соотношениями:

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \tag{3}$$

$$v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi;$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \tag{4}$$

$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = a_r \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi.$$

Сравнивая соотношения (1) и (3), а также (2) и (4), получим искомые проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат:

$$v_r = \dot{r},$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}.$$

$$\mathbf{1.12.} \quad v = ab \sqrt{1 + \frac{1}{(1-bt)^2}}, \text{ при } t < \frac{1}{b}.$$

$$1.13. v = 2ab\sqrt{2+2\cos(bt)}, \quad a = 2ab^2\sqrt{5+4\cos(bt)}.$$

$$1.14. a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2p}, \quad a_\varphi = 0.$$

Решение. Введем полярную систему координат в плоскости движения планеты, полюс которой совпадает с Солнцем, а полярная ось совпадает с большой осью эллипса (см. рис.). Для нахождения проекций ускорения планеты воспользуемся формулами, полученными в задаче 1.11:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

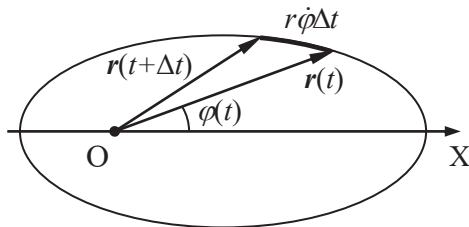


Рис. к решению задачи 1.14.

Дополним систему уравнением траектории планеты и выражением для ее секторной скорости σ :

$$r(1 - e\cos\varphi) = p, \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}. \quad (3)$$

В соответствии со вторым законом Кеплера секторная скорость σ постоянна при движении планеты по эллиптической траектории, поэтому ее производная по времени равна нулю:

$$\dot{\sigma} = r\dot{r}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}r^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с выражением (1) для проекции ускорения a_φ , видим, что $a_\varphi = 0$.

Продифференцируем (2) по времени:

$$\dot{r}(1 - e\cos\varphi) + r\sin\varphi\dot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Преобразуем (5) к виду:

$$\dot{r}p + 2\sigma e \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Продифференцируем (6) по времени

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \cos \varphi \dot{\varphi} = 0.$$

Для исключения $\cos \varphi$ и $\dot{\varphi}$ воспользуемся уравнением траектории (2) и выражением для секторной скорости (3):

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \frac{r-p}{er} \cdot \frac{2\sigma}{r^2} = \ddot{r}p + 4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3} = 0.$$

В результате находим:

$$\ddot{r} = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p}.$$

Для нахождения искомой проекции ускорения планеты a_r , как функции только координат полярной системы, подставим \ddot{r} и $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$ в выражение (1):

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p} - r \frac{4\sigma^2}{r^4} = -\frac{4\sigma^2}{r^2 p}.$$

Ускорение планеты, движущейся по эллиптической траектории, направлено к Солнцу, не зависит от полярного угла φ и обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца.

$$1.15. \mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_\varphi - gt \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a} = \frac{v_0^2}{R} \mathbf{e}_r - g \mathbf{e}_z,$$

$$\cos \alpha = \frac{g^2 t}{\sqrt{(v_0^2 + (gt)^2) \left((v_0^2 / R)^2 + g^2 \right)}}.$$

$$1.16. x' = V_1 \frac{y'}{V_2} - a \frac{y'^2}{2V_2^2}, \text{ если } 0 \leq y' \leq \frac{V_1 V_2}{a};$$

$$x' = \frac{V_1^2}{2a}, \text{ если } y' > \frac{V_1 V_2}{a}.$$

$$1.17. \text{ а) } y = -\frac{g}{2(v_{\text{сам}} + v_{\text{ч}})^2} x^2, \text{ б) } y' = -\frac{g}{2v_{\text{ч}}^2} (x')^2,$$

$$\text{ в) } y'' = \frac{gx''^2}{2v_{\text{ч}}^2}, \quad x'' < 0.$$

$$1.18. N' = \frac{v}{v+u} N.$$

$$1.19. v' = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0v \cos \varphi} \approx 40 \text{ км/ч},$$

$$\varphi' = \arctg \frac{v \sin \varphi}{v_0 + v \cos \varphi} = 19^\circ.$$

$$1.20. \text{ а) } x = \frac{\alpha}{2v_0} y^2; \text{ б) } a = a_x = \alpha v_0,$$

$$a_\tau = \alpha^2 y / \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0}\right)^2}, a_n = \alpha v_0 / \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0}\right)^2}.$$

$$1.21. \begin{cases} x(t) = V_0 t - R \sin \frac{V_0 t}{R}, \\ y(t) = R \left(1 - \cos \frac{V_0 t}{R}\right) \end{cases}, V = 2V_0 \left| \sin \frac{V_0 t}{2R} \right|, a = \frac{V_0^2}{R}.$$

$$1.22. a_A = \sqrt{\left(a + \frac{V^2}{R}\right)^2 + a^2}, a_B = \sqrt{\left(a - \frac{V^2}{R}\right)^2 + a^2}.$$

$$1.23. \vartheta = \arcsin(1/n) + \pi/2 = 120^\circ.$$

$$1.24. y = \sqrt{\frac{vd}{u}} x \text{ при } y < d/2; y = d - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{vd}{u}} x \text{ при } y > d/2;$$

$l = \frac{ud}{2v}$. Ось X направлена вдоль берега реки, а ось Y – поперек реки.

Начало системы координат совпадает с местом отплытия лодки.

$$1.25. \cos \alpha = -\frac{U_m}{2V'}.$$

$$1.26. x(y) = \frac{4u_m}{3v_{л} d^2} \left(-y^3 + \frac{3}{2} y^2 d\right), \tau = \frac{d}{v_{л}}, l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v_{л}} d.$$

Решение. Выберем декартову систему координат, жестко связанную с берегом реки (см. рис.).

В соответствии с условиями задачи начальные условия для лодки имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, \\ v_x(0) = 0, v_y(0) = v_{л}, \end{cases}$$

где v_x, v_y – проекции скорости лодки на оси выбранной системы координат.

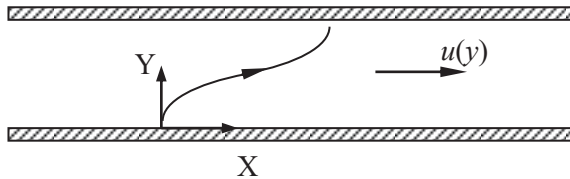


Рис. к решению задачи 1.26.

По условию задачи

$$u(y) = a(y - d/2)^2 + b, \quad (1)$$

где a и b – постоянные величины, определяемые соотношениями

$$b = u(y = d/2) = u_m, \quad (2)$$

$$a = -\frac{4}{d^2}b = -\frac{4}{d^2}u_m. \quad (3)$$

В соответствии с принципом суперпозиции движений в любой момент времени $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(y(t)) + \mathbf{v}_{л}(t)$ или в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = u(y), \\ v_y = v_{л}. \end{cases} \quad (4)$$

Система уравнений (4) с учетом (1) – (3) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{4u_m}{d^2}y^2 + \frac{4u_m}{d}y, \\ \frac{dy}{dt} = v_y = v_{л}. \end{cases}$$

После интегрирования этих уравнений с учетом начальных условий находим закон движения:

$$x(t) = -\frac{4u_m}{d^2}v_{л}^2 \frac{t^3}{3} + \frac{2u_m}{d}v_{л}t^2,$$

$$y(t) = v_{л}t.$$

Уравнение траектории при этом имеет вид:

$$x(y) = \frac{4u_m}{3v_{\text{н}}d^2} \left(-y^3 + \frac{3}{2}y^2d \right).$$

Следовательно, время движения τ и снос лодки l равны:

$$\tau = \frac{d}{v_{\text{л}}}, \quad l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v_{\text{л}}}d.$$

$$1.27. \quad u = \frac{v_0}{1/\sqrt{1-(v_0/v)^2} - 1} = 3,0 \text{ км/ч.}$$

$$1.28. \quad \tau_A / \tau_B = \eta / \sqrt{\eta^2 - 1} = 1,8.$$

$$1.29. \quad l = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \vartheta)} = 22 \text{ м.}$$

$$1.30. \quad l = (v_1 + v_2) \sqrt{v_1 v_2} / g = 2,5 \text{ м.}$$

$$1.31. \quad t = 2a / 3v.$$

$$1.32. \quad R = \frac{VL}{U}; \quad a_n = \frac{VU}{L}.$$

$$1.33. \quad t' = L \frac{V}{V^2 - U^2}.$$

$$1.34. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$1.35. \quad \dot{\alpha} = \frac{2Rv}{\sqrt{R^2 + (x_0 + vt)^2}},$$

$$r_M = \frac{R^2 + (x_0 + vt)^2}{2R}.$$

Решение. При движении правого конца стержня выполняется соотношение (см. рис.)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{x_0 + vt}.$$

После дифференцирования этого соотношения получаем:

$$\frac{\dot{\alpha}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = - \frac{Rv}{(x_0 + vt)^2}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что (см. рис.):

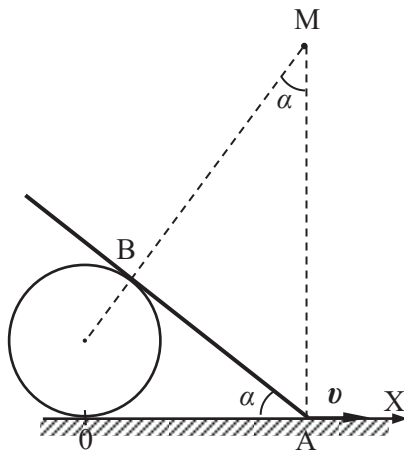


Рис. к решению задачи 1.35.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x_0 + vt}{\sqrt{R^2 + (x_0 + vt)^2}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим искомую скорость:

$$\dot{\alpha} = -\frac{2Rv}{\sqrt{R^2 + (x_0 + vt)^2}}.$$

Положение мгновенной оси вращения находим построением. Для этого проводим перпендикуляры к скоростям стержня в точке касания с цилиндром (точка В) и в точке А. Расстояние от мгновенной оси вращения М до правого конца стержня $r_M = AM$ найдем из условия $v = \dot{\alpha} r_M$:

$$r_M = \frac{v}{\dot{\alpha}} = \frac{R^2 + (x_0 + vt)^2}{2R}.$$

$$1.36. \begin{cases} a_{y1} - a_{y2} \sin \alpha = 0, \\ a_{x2} - a_{x1} - a_{y2} \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

$$1.37. a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$

$$1.38. a_2 = -a_1 \frac{R}{2r}.$$

1.39. $a_2 = -16a_1$, где a_1 и a_2 – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

$$1.40. \omega = \frac{2bt}{R}, \quad \beta = \frac{2b}{R}, \quad a = 2b\sqrt{\frac{4b^2t^4}{R^2} + 1}, \quad a_n = \frac{4b^2t^2}{R},$$

$$a_\tau = 2b, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{bt^2}{R}.$$

$$1.41. v = 2\sqrt{7}a\omega.$$

Решение. Закон движения автомобиля, заданный в полярной системе координат, запишем в декартовой системе координат ХОУ (см. рис.):

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t),$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Дифференцируя закон движения по времени, получаем:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

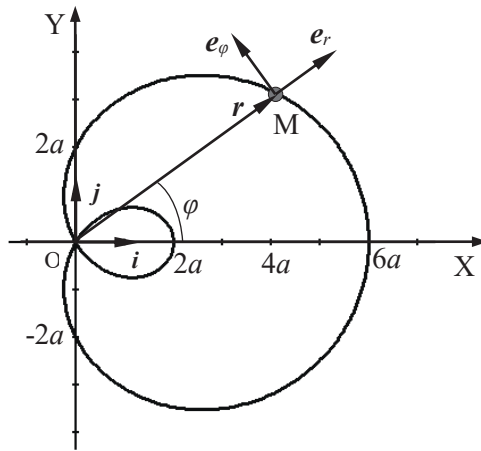


Рис. к решению задачи 1.41.

Скорость автомобиля равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

$$v_x^2 + v_y^2 = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

По условию задачи:

$$r = 2a + 4a \cos \varphi,$$

Так как $\varphi = \omega t$, то:

$$\dot{r} = -4a\omega \sin \varphi,$$

Подставляя последние два выражения в формулу для скорости, получаем:

$$v = 2\omega a \sqrt{5 + 4\cos\omega t}.$$

В тот момент, когда угол $\varphi = \pi/3$, искомая скорость равна

$$v = 2\sqrt{7}a\omega.$$

$$1.42. \omega_C = \frac{2v}{R-r}.$$

Решение. При повороте ворота на угол $\Delta\varphi$ за малый интервал времени Δt длина ненамотанной на ворот части веревки уменьшится на

$$\Delta l = \Delta\varphi \cdot R - \Delta\varphi \cdot r. \quad (1)$$

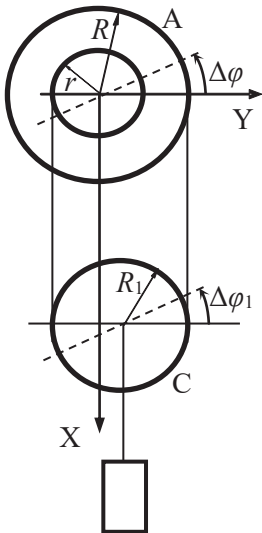


Рис. к решению задачи 1.42.

ем:

$$\Delta\varphi_1 R_1 = \Delta\varphi R - \frac{\Delta l}{2} = \Delta\varphi \left(R - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}r \right) = \Delta\varphi \frac{R+r}{2}.$$

Подставляя $R_1 = \frac{R+r}{2}$, получаем: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$.

Следовательно, угловая скорость вращения блока С равна

$$\omega_C = \omega = \frac{2v}{R-r}.$$

$$1.43. \quad v = \pi \frac{(R^2 - r^2)}{d \cdot t}.$$

$$1.44. \quad v_C = \frac{v}{2\sqrt{1 - \left(\frac{vt}{L}\right)^2}}.$$

$$1.45. \quad v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos\alpha}}{\sin\alpha},$$

Изменение координаты подвижного блока равно

$$\Delta x = -\frac{\Delta l}{2}. \quad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получаем связь между скоростью подъема груза v и угловой скоростью вращения ворота ω :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} (R-r) = \frac{\omega}{2} (R-r).$$

Следовательно:

$$\omega = \frac{2v}{R-r}. \quad (3)$$

При повороте блока А на угол $\Delta\varphi$ на блок наворачивается кусок веревки, равный:

$$\Delta\varphi R = \Delta\varphi_1 R_1 - \Delta x. \quad (4)$$

Учитывая (1) и (2), из (4) получа-

$$\beta_1 = \arccos \left(\frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}} \right), \text{ где } \beta_1 \text{ — угол между век-}$$

торами v и v_1 .

$$1.46. v_A = v \sqrt{1 + \left(\frac{L}{2H} \right)^2}.$$

$$1.47. v = \frac{\omega RL}{\sqrt{L^2 - H^2}}, \quad a = \frac{(\omega r H)^2}{(L^2 - H^2)^{3/2}}.$$

1.48. $a_4 = -(a_1 + a_2 + 2a_3)/4$, где a_1, a_2, a_3 и a_4 — проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

$$1.49. a_1 + \frac{R+r}{R} a_2 + \frac{r}{R} \left(2a_3 + \frac{1}{2} a_4 + \frac{1}{2} a_5 \right) = 0, \text{ где } a_1, a_2, a_3, a_4$$

и a_5 — проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

$$1.50. a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$1.51. a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}, \quad T_1 = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2},$$

$$T_2 = \frac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

Решение. Запишем уравнения движения грузов в проекции на ось X декартовой системы координат (см. рис.):

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$$

Здесь a_1 и a_2 — проекции ускорений грузов на ось X, T_1 и T_2 — модули сил, действующих на грузы со стороны нитей.

Уравнения кинематической связи

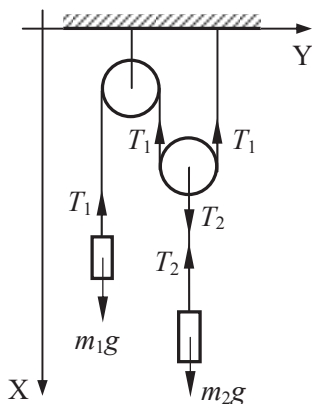


Рис. к решению задачи 1.51.

для ускорений грузов имеют вид:

$$a_1 + 2a_2 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учетом того, что $T_2 = 2T_1$, получаем:

$$a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2},$$

$$a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2},$$

$$T_1 = m_1(g - a_1) = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2},$$

$$T_2 = 2m_1(g - a_1) = \frac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

$$1.52. A_x = -g \frac{\sin \alpha}{M/m + 2(1 - \cos \alpha)}.$$

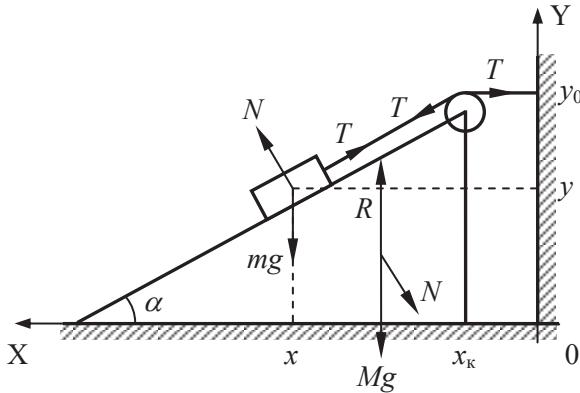


Рис. к решению задачи 1.52.

Решение. Запишем уравнения движения бруска и клина в проекциях на оси выбранной системы координат (см. рис.):

$$ma_x = N \sin \alpha - T \cos \alpha,$$

$$ma_y = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha,$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T.$$

Уравнения кинематической связи имеют вид:

$$x_{\kappa} + \frac{x - x_{\kappa}}{\cos \alpha} = \text{const}, \quad x_{\kappa} + \frac{y_0 - y}{\sin \alpha} = \text{const}.$$

Дифференцируя уравнения кинематической связи дважды по времени, получим:

$$A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \alpha} = 0,$$

$$A_x - \frac{a_y}{\sin \alpha} = 0.$$

Преобразуя записанную систему уравнений, получаем:

$$mA_x(1 - \cos \alpha) = N \sin \alpha - T \cos \alpha,$$

$$mA_x \sin \alpha = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha,$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T.$$

Искомое ускорение равно

$$A_x = -g \frac{\sin \alpha}{M/m + 2(1 - \cos \alpha)}.$$

$$1.53. \quad a_1 = g \frac{m_1 m_2 + 4m_1 m_3 - 2m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3},$$

$$a_2 = g \frac{m_1 m_2 - 2m_1 m_3 + m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3}, \quad a_3 = -g \frac{3m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + 4m_1 m_3}.$$

$$1.54. \quad x(t) = \frac{F_0}{2m} \left(t^2 - \frac{\alpha t^3}{3} \right), \quad s = \frac{4F_0}{3\alpha^2 m}.$$

$$1.55. \quad x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{Ft^2}{2m},$$

$$y = \frac{F}{2m(v_0 \sin \alpha)^2} x^2 + \text{ctg} \alpha \cdot x.$$

$$1.56. \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)}, \quad \text{сила } F,$$

действующая на частицу, направлена противоположно радиус-вектору частицы в любой момент времени.

Решение. Дифференцируя заданный в условии задачи закон движения дважды по времени, получим:

$$a_x = -A\omega^2 \sin(\omega t),$$

$$a_y = -B\omega^2 \cos(\omega t).$$

Проекции силы \mathbf{F} , действующей на частицу при ее движении в плоскости XY по эллиптической траектории равны:

$$F_x(t) = ma_x = -mA\omega^2 \sin(\omega t),$$

$$F_y(t) = ma_y = -mB\omega^2 \cos(\omega t).$$

Следовательно:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= F_x(t)\mathbf{i} + F_y(t)\mathbf{j} = -mA\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{i} - mB\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{j} = \\ &= -m\omega^2 \mathbf{r}(t), \end{aligned}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор частицы относительно начала координат. Сила \mathbf{F} , действующая на частицу, направлена противоположно радиус-вектору частицы в любой момент времени.

1.57. $F = (m v_0^2 / R) \cos^2 \alpha$.

1.58. $-F_0, -2F_0$.

1.59. $t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 \cdot v \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)}$.

1.60. $t_1 = t_2 = \frac{2l}{3v}$.

1.61. $m_3 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

1.62. $a_1 = \frac{m_1 g - m_2 (g - a_2)}{m_1 + m_2}$; $F_{\text{тр}} = \frac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2}$.

1.63. $a = \frac{\left(1 - \cos \frac{l}{R}\right) R g}{l}$.

1.64. $V(s_0) = \sqrt{2gR \left(1 - \frac{\mu mg}{2F_0}\right)}$.

1.65. $v = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\alpha(t^2 - t_0^2)}{2m} - \mu g(t - t_0)$.

1.66. $F \geq F_0 = (M+m)g(\mu_1 + \mu_2) = 22,05 \text{ Н}$.

Решение. На груз в процессе движения действуют сила тяжести mg , сила трения $F_{\text{тр1}}$ и сила нормальной реакции доски N . К доске приложены горизонтальная сила F , сила тяжести Mg , сила нормальной реакции стола R , сила нормального давления груза N и силы трения со стороны груза и стола $F_{\text{тр1}}$ и $F_{\text{тр2}}$ (см. рис.).

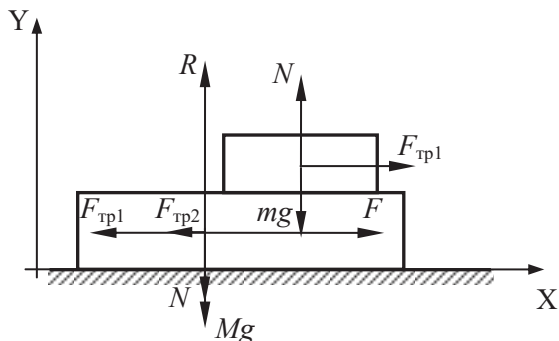


Рис. к решению задачи 1.66.

Уравнения движения груза и доски в проекциях на оси декартовой системы координат (см. рис.) имеют вид:

$$ma = F_{\text{тр1}},$$

$$0 = N - mg,$$

$$MA = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}},$$

$$0 = R - N - Mg.$$

Здесь a и A – проекции ускорений груза и доски на ось X .

В соответствии с законом Амонтона – Кулона:

$$F_{\text{тр2}} = \mu_2 R.$$

Значение силы F_0 , действующей на груз, при котором начнется его скольжение по доске, определим из условий:

$$a = A, F_{\text{тр1}} = \mu_1 N.$$

Решая полученную систему уравнений относительно F_0 , получаем:

$$F_0 = (M + m)a + F_{\text{тр2}} = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2).$$

Таким образом, для того, чтобы доска выскользнула из-под груза, необходимо приложить к доске силу F , удовлетворяющую условию:

$$F \geq F_0 = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2).$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем:

$$F \geq F_0 = 22,05 \text{ Н.}$$

1.67. $\Delta l = \sqrt{H(H + 2\mu l)}$.

Решение. Выделим характерные части каната: горизонтальную, соприкасающуюся с землей и не касающуюся земли (см. рис.1). Поскольку движение происходит с постоянной скоростью, сумма сил, действующих на каждую часть равна нулю.

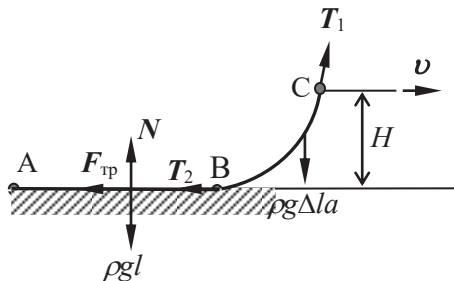


Рис.1 к решению задачи 1.67.

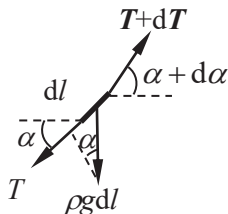


Рис. 2 к решению задачи 1.67.

Введем линейную плотность каната $\rho = \frac{m}{L}$. Для части BC, не касающейся земли, из условия равенства нулю суммы сил, действующих на нее, следует

$$T_1 = \sqrt{(\rho g \Delta l)^2 + T_2^2}, \tag{1}$$

где T_1 – сила, удерживающая верхний конец каната (точка C) на высоте H , T_2 – сила, действующая на «висящую» часть каната BC со стороны части каната AB, лежащей на поверхности.

Выделим бесконечно малый элемент длиной dl висящей части каната (рис. 2). Запишем для него условие равновесия:

$$(T + dT) \cos(d\alpha) = T + \rho g dl \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$dT = \rho g dl \sin \alpha = \rho g dh,$$

где dh – проекция элемента dl на вертикаль. Тогда

$$T_2 = T_1 - \rho g H.$$

Условие равновесия горизонтальной части каната:

$$N = \rho g l ,$$

$$T_2 = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \rho g l .$$

Решая записанную систему уравнений, получим:

$$\Delta l = \sqrt{H(H + 2\mu l)} .$$

1.68. Ускорение второго тела направлено вниз и равно:

$$a_2 = g(\eta - \sin \alpha - \mu \cos \alpha) / (\eta + 1) = 0.05 g .$$

$$\mathbf{1.69.} \quad F = \frac{(\mu_1 - \mu_2)m_1 m_2 g \cos \alpha}{m_1 + m_2}; \quad \alpha > \arctg \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} .$$

$$\mathbf{1.70.} \quad a_m = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} ,$$

$$a_M = - \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} ,$$

$$N = \frac{mg}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} ,$$

$$R = \left(\frac{m(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} + M \right) g .$$

$$\mathbf{1.71.} \quad \mu = \frac{v^2}{Rg} \approx 0.4 .$$

$$\mathbf{1.72.} \quad a > 0,98 \text{ м/с} .$$

1.73. Скорость большего шарика в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости меньшего.

$$\mathbf{1.74.} \quad m_{\min} = M \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{k} - 1 \right) .$$

$$\mathbf{1.75.} \quad v_{\text{уст}} = \frac{v_0}{2} (1 + \sin \varphi_0) .$$

Решение. Выберем систему координат так, как показано на рисунке: вид сбоку (а) и вид сверху на поверхность клина (б).

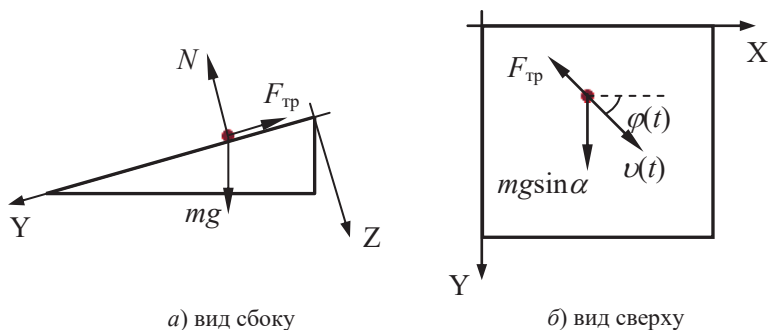


Рис. к решению задачи 1.75.

Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранные оси системы координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_{\text{тр}} \cos \varphi,$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \sin \varphi,$$

$$0 = -N + mg \cos \alpha.$$

В соответствии с законом Амонтона – Кулона

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \text{tg} \alpha \cdot N.$$

Запишем тригонометрические функции угла φ , выразив их через проекции скорости тела:

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \varphi = \frac{v_y}{v}.$$

По условию задачи требуется определить установившуюся скорость тела, т.е. значение скорости в то время, когда сумма сил, действующих на тело, станет равной нулю. Нетрудно видеть, что модуль силы трения равен величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Действующие на тело силы будут поворачивать вектор скорости тела до тех пор, пока он не совпадет по направлению с осью Y . Следовательно, ускорение обратится в ноль, когда сила трения будет направлена противоположно составляющей силы тяжести в плоскости движения тела. Дальнейшее движение будет происходить с постоянной скоростью $v_{\text{уст}}$, направленной вдоль оси Y .

Таким образом, достаточно найти уравнение, связывающее проекцию скорости тела на ось Y с модулем его скорости. Преобразовав записанную систему уравнений, получаем:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{v} g \sin \alpha,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left(1 - \frac{v_y}{v}\right) g \sin \alpha.$$

Производную от модуля скорости по времени представим в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) = \frac{v_x}{v} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_y}{v} \cdot \frac{dv_y}{dt}.$$

Следовательно

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dv_y}{dt}.$$

После интегрирования с учетом начальных условий ($v(0) = v_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$), получаем:

$$v = -v_y + v_0(1 + \sin \varphi_0).$$

Учитывая, что при установившемся движении $v = v_y = v_{\text{уст}}$, находим искомый модуль скорости установившегося движения:

$$v_{\text{уст}} = \frac{v_0}{2}(1 + \sin \varphi_0).$$

$$1.76. v = \frac{v_0}{1 + \cos \varphi}.$$

$$1.77. k = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha = 0,16.$$

$$1.78. v = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{2r^2}{9\eta} \left(1 - \exp \left(-\frac{9\eta}{2r^2 \rho_2} t \right) \right),$$

$$v_{\text{уст}} = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{2r^2}{9\eta}.$$

$$1.79. t_0 = \frac{R}{\mu v_0} (e^{\pi} - 1).$$

$$1.80. \Delta h = h - \frac{m}{2k} \ln \left(2 - e^{-\frac{2kh}{m}} \right).$$

$$1.81. T = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m\omega^2} - 1}.$$

$$1.82. n = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\sigma_{np}}{\rho}} \approx 20.8 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

$$1.83. m = \frac{4h}{gl} \left(2E\pi \frac{d^2}{4} \frac{h^2}{l^2} + F \right) \approx 36 \text{ г}.$$

$$1.84. \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F_0}{2S_0 E}.$$

$$1.85. \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2ES_0}; \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1-2\mu)mg}{2ES_0}.$$

$$1.86. F_z = G \frac{mm_1 z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}, \quad z_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Разобьем кольцо на участки бесконечно малой длины $dl = r d\varphi$ и массой dm :

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\varphi.$$

Все точки кольца находятся на расстоянии L от материальной точки (см. рис.). Сила гравитационного взаимодействия материальной точки массой m_1 и участка кольца массой dm направлена вдоль соединяющей их линии, и ее модуль согласно закону всемирного тяготения равен:

$$dF = G \frac{m_1 dm}{L^2}.$$

Из соображений симметрии ясно, что отличной от нуля будет только проекция силы гравитационного взаимодействия F на ось Z . Проекция силы dF на ось Z равна:

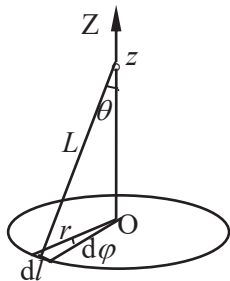


Рис. к решению задачи 1.86.

$$dF_z = dF \cos\theta = G \frac{mm_1 z}{2\pi(z^2 + r^2)^{3/2}} d\varphi.$$

Интегрируя это выражение по $d\varphi$ в пределах от 0 до 2π , получаем силу гравитационного взаимодействия тонкого кольца и материальной точки в зависимости от расстояния от точки до центра кольца:

$$F_z = G \frac{mm_1 z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона величина ускорения материальной точки равна:

$$a = \frac{F_z}{m_1} = G \frac{mz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Ускорение материальной точки будет максимальным при условии $\frac{da}{dz} = 0$. Нетрудно определить, что максимальным ускорением

будет обладать материальная точка на расстоянии $z_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

1.87. Сила гравитационного взаимодействия сферического слоя и материальной точки, находящейся внутри него, равна нулю.

Решение. Пусть радиус сферического слоя R , его толщина δ , масса материальной точки m . Проведем диаметр, проходящий через точку A – точку пространства, в которой находится материальная точка. Разобьем также сферический слой на систему колец, плоскости которых перпендикулярны выбранному диаметру. Рассмотрим два сопряженных кольца толщиной δ и радиусами r_1 и r_2 таких, что линии, соединяющие точку A и любую точку каждого из колец, лежат на поверхности конусов с углами при вершине 2β (см. рис.).

Обозначим расстояния от точки A до всех точек каждого из колец: L_1 и L_2 . Введем углы φ_1 , φ_2 , $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$, как показано на рисунке. Докажем, что силы, действующие на материальную точку со стороны этих двух колец равны по модулю и противоположны по направлению. Это и будет означать (если покрыть весь слой парами таких колец), что сила гравитационного взаимодействия сфери-

ческого слоя и материальной точки, находящейся внутри него, равна нулю.

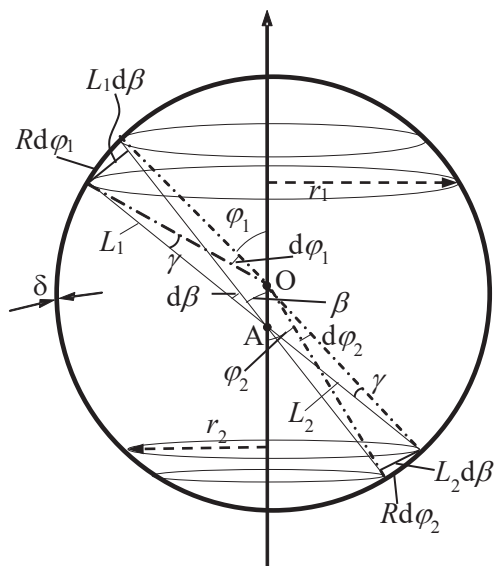


Рис. к решению задачи 1.88.

Массы рассматриваемых колец dm_1 и dm_2 равны:

$$dm_1 = \rho dV_1, \quad dm_2 = \rho dV_2,$$

где ρ – плотность кольца.

Поскольку объемы dV_1 и dV_2 колец соответственно равны:

$$dV_1 = Rd\varphi_1 \delta 2\pi r_1, \quad dV_2 = Rd\varphi_2 \delta 2\pi r_2,$$

то выражения для масс можно записать в виде:

$$dm_1 = \rho Rd\varphi_1 \delta 2\pi r_1, \quad dm_2 = \rho Rd\varphi_2 \delta 2\pi r_2.$$

В соответствии с формулой, полученной в задаче 1.86, сила гравитационного взаимодействия тонкого кольца и материальной точки, расположенной на его оси, действует вдоль оси Z и равна (с учетом обозначений, выбранных в данной задаче):

$$dF_1 = G \frac{mdm_1 L_1 \cos \beta}{L_1^3},$$

$$dF_2 = -G \frac{mdm_2 L_2 \cos \beta}{L_2^3},$$

где $L_1 \cos \beta$ и $L_2 \cos \beta$ – расстояния от точки А до центра колец соответственно.

Преобразуя записанные выражения, получим:

$$dF_1 = G \frac{m \rho R d\varphi_1 \delta 2\pi r_1 \cos \beta}{L_1^2} = G \frac{m \rho R d\varphi_1 \delta \pi \sin 2\beta}{L_1},$$

$$dF_2 = G \frac{m \rho R d\varphi_2 \delta 2\pi r_2 \cos \beta}{L_2^2} = G \frac{m \rho R d\varphi_2 \delta \pi \sin 2\beta}{L_2}.$$

Для доказательства равенства модулей сил dF_1 и dF_2 необходимо показать, что $\frac{d\varphi_1}{L_1} = \frac{d\varphi_2}{L_2}$.

При малых $d\beta$ (см. рис.)

$$L_1 d\beta = R d\varphi_1 \cos \gamma, \quad L_2 d\beta = R d\varphi_2 \cos \gamma.$$

Сравнивая последние два соотношения, получаем, что

$$\frac{d\varphi_1}{L_1} = \frac{d\varphi_2}{L_2}.$$

Таким образом, мы доказали, что сила гравитационного взаимодействия сферического слоя и материальной точки, находящейся внутри него, равна нулю.

$$1.88. \quad a = -\frac{4}{3} \pi G \rho d.$$

$$1.89. \quad R = 2 \left(\frac{t \sqrt{\gamma M}}{\pi} \right)^{2/3} - R_0.$$

Решение. После кратковременного торможения спутник будет двигаться по замкнутой траектории, и его движение будет происходить в соответствии с законами Кеплера.

Большая полуось эллиптической орбиты, по которой после торможения движется спутник (см. рис.), равна

$$a = \frac{R + R_0}{2}.$$

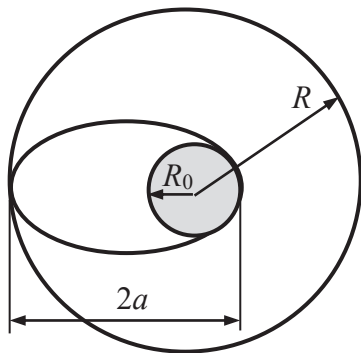


Рис. к решению задачи 1.89.

По третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3,$$

где T_1 – период обращения спутника на эллиптической орбите, а T_2 – на круговой. Период обращения спутника на круговой орбите равен

$$T_2 = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

Тогда период обращения его на эллиптической орбите

$$T_1 = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} \left(\frac{R+R_0}{2R}\right)^{3/2}.$$

Поскольку с момента торможения до посадки спутник пройдет половину орбиты (см. рис.), то

$$t = \frac{T_1}{2} = \pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} \left(\frac{R+R_0}{2R}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left(\frac{R+R_0}{2}\right)^{3/2}.$$

Следовательно

$$R = 2 \left(\frac{t\sqrt{GM}}{\pi} \right)^{2/3} - R_0.$$

$$1.90. |\Delta R| = \frac{2}{3} \beta \Delta t R \sqrt{\frac{R}{g}} = 2,5 \text{ км.}$$

Решение. Поскольку по условию задачи величина углового ускорения мала, каждый виток орбиты можно считать окружностью. Обозначим радиус и угловую скорость обращения для первоначальной орбиты через R_1 и ω_1 , а для орбиты, на которой спутник окажется через 30 дней, R_2 и ω_2 .

Второй закон Ньютона для спутника, движущегося по орбите радиуса R_1 имеет вид:

$$m\omega_1^2 R_1 = \frac{GmM}{R_1^2},$$

где M – масса Земли, m – масса спутника.

Через 30 дней движение также будет происходить по круговой орбите в соответствии с уравнением движения

$$m\omega_2^2 R_2 = \frac{GmM}{R_2^2}.$$

Из этих уравнений следует:

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \omega^2 R^3 = GM = \text{const}.$$

Используя это соотношение можно записать:

$$\Delta(\omega^2 R^3) = 2\omega R^3 \Delta\omega + 3\omega^2 R^2 \Delta R = 0,$$

следовательно

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

Поскольку $\Delta\omega = \beta\Delta t$, то

$$\Delta R = -\frac{2}{3} \frac{\Delta\omega}{\omega} R = -\frac{2}{3} \beta \Delta t R \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 2,5 \text{ км.}$$

РАЗДЕЛ 2

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

$$2.1 \quad v_{\text{ц}} = -v_0 \cos \alpha \frac{1}{1+k} = -0,14 \text{ м/сек.}$$

$$2.2. \quad V_1 = V \frac{m}{M-m} \quad V_2 = V \frac{M}{M-m}.$$

$$2.3. \quad R = \frac{mv \sin \alpha}{\Delta t} + (M+m)g \cos \alpha.$$

$$2.4. \quad \Delta x_{\text{C}} = \frac{m}{2M} \Delta x'.$$

$$2.5. \quad l = \frac{m}{M+m} (R-r).$$

$$2.6. \quad L = \frac{M}{M-m} l.$$

$$2.7. \text{ а) } V_1 = -\frac{2mu}{M+2m}, \text{ если люди спрыгивают одновременно,}$$

$$\text{б) } V_2 = -\frac{(2M+3m)mu}{(M+m)(M+2m)}, \text{ если люди спрыгивают друг за другом.}$$

Решение. Для системы тел «тележка + два человека» выполняется закон сохранения импульса. В векторном виде для первого случая, когда спрыгивают два человека одновременно, он имеет вид:

$$0 = MV_1 + 2m(\mathbf{u} + V_1),$$

где V_1 – скорость тележки после одновременного спрыгивания двух человек.

Следовательно,

$$V_1 = -\frac{2mu}{M+2m}.$$

Для получения ответа на второй вопрос задачи выделим характерные моменты времени. Момент τ_1 – непосредственно перед прыжком первого человека, τ_2 – сразу после прыжка первого человека, τ_3 – непосредственно перед прыжком второго человека, τ_4 –

сразу после прыжка второго человека. Запишем закон сохранения импульса для двух временных интервалов (τ_1 , τ_2) и (τ_3 , τ_4):

$$0 = (M + m)V + m(u + V),$$

$$(M + m)V = MV_2 + m(u + V_2).$$

Здесь V – скорость тележки со вторым человеком после того, как спрыгнул первый, V_2 – искомая скорость тележки после прыжка второго человека. Из этих уравнений получаем:

$$V = -\frac{mu}{(M + m) + m},$$

$$V_2 = -\frac{(2M + 3m)mu}{(M + m)(M + 2m)}.$$

Отношение скоростей V_2 и V_1 равно:

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{m}{2(M + m)}$$

Таким образом, в случае, когда люди прыгают друг за другом, скорость тележки оказывается больше, чем в случае, если они прыгают одновременно.

$$2.8. \quad \gamma = -90^\circ, \quad V_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}V_0.$$

Решение. За короткое время взрыва можно пренебречь импульсом силы тяжести и воспользоваться законом сохранения импульса для системы тел «снаряд и его осколки».

В проекциях на оси координат X и Y (см. рис.) закон сохранения импульса для системы тел «снаряд и его осколки» имеет вид:

$$MV_x = mV_1 \cos \beta + mV_2 \cos \gamma,$$

$$MV_y = mV_1 \sin \beta + mV_2 \sin \gamma.$$

Здесь V_x и V_y – проекции скорости снаряда на оси системы координат непосредственно перед взрывом:

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - g\tau.$$

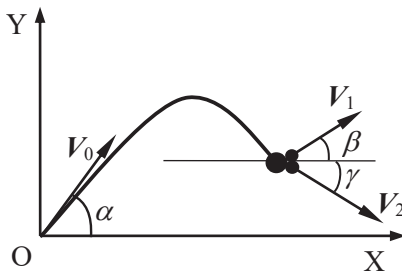


Рис. к решению задачи 2.8.

Преобразуя записанные соотношения, получаем выражения для тангенса угла γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta}{MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta}$$

и для скорости второго осколка

$$V_2 = \frac{1}{m} \left((MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta)^2 + (MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая, что $\tau = \frac{3V_0 \sin \alpha}{2g}$, а также $m = \frac{M}{2}$, получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha}{2} - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta},$$

$$V_2 = \frac{3MV_0 \sin \alpha}{2m} = \frac{3}{\sqrt{2}} V_0.$$

Знаменатель в выражении для $\operatorname{tg} \gamma$ при заданных значениях углов ($\alpha = \beta = 45^\circ$) обращается в ноль, поэтому угол γ равен $\gamma = \operatorname{arctg}(-\infty) = -90^\circ$.

Таким образом, второй осколок после взрыва полетит вертикально вниз.

$$2.9. V = \frac{\mu g \tau (m + M)}{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}, \quad (\mu < \operatorname{tg} \alpha).$$

Решение. Закон изменения импульса системы тел «ящик с песком + пуля» в проекциях на оси выбранной системы координат имеет вид (см. рис.):

$$0 - mV \cos \alpha = N \Delta t,$$

$$(m + M)V_1 - mV \sin \alpha = -F_{\text{тр}} \Delta t.$$

Здесь V – начальная скорость пули, Δt – интервал времени, в течение которого скорость пули относительно ящика с песком стала равной нулю, N – сила реакции опоры, действующая в течение корот-

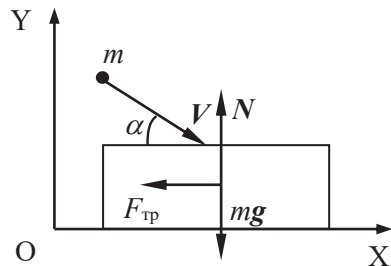


Рис. решению задачи 2.9.

кого интервала времени Δt , V_1 – скорость ящика с пулей сразу после соударения. Здесь учтено, что в соответствии с условием задачи, $mV \gg Mg\Delta t$.

Закон сохранения импульса дополним связью между силой трения скольжения и силой реакции опоры, а также уравнениями, описывающими движение ящика с пулей после соударения:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= \mu N, \\ (m + M)a &= -F_{\text{тр1}}, \\ 0 &= V_1 - a\tau. \end{aligned}$$

Здесь $F_{\text{тр1}} = \mu(M + m)g$ – сила трения, действующая после того, как пуля перестанет двигаться относительно ящика.

Решая полученную систему уравнений, находим скорость ящика с пулей сразу после соударения:

$$V_1 = \frac{mV(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(m + M)} = \mu g \tau$$

и искомую скорость пули:

$$V = \frac{\mu g \tau (m + M)}{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что при выполнении условия $\mu > \text{tg} \alpha$ ящик при попадании в него пули вообще не сдвинется с места.

$$2.10. T = \frac{m_1 m_2 V^2}{(m_1 + m_2)l}$$

$$2.11. S = \frac{3ml}{2(M + 2m)}.$$

Решение. Выберем лабораторную систему отсчета так, как показано на рисунке. Ее начало выберем в центре платформы.

В начальный момент времени координата центра масс системы равна:

$$x_{\text{цм1}} = \frac{M \cdot 0 - 2m \frac{l}{2}}{(M + 2m)}.$$

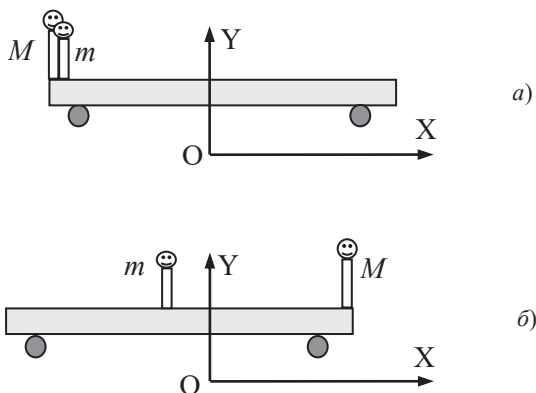


Рис. к решению задачи 2.11. Расположение тел в начале (а) и в конце (б) движения.

Определим координаты людей x_1 и x_2 в конце их движения. Поскольку первый человек остановился в центре платформы, то $x_1 = x$, где x – координата центра платформы после всех перемещений. Положение второго человека после окончания движения определяется координатой

$$x_2 = x + \frac{l}{2}.$$

Учитывая, что координата центра масс всей системы после окончания всех перемещений не меняется и остается равной $x_{\text{цм1}}$, получаем:

$$\frac{-2m \frac{l}{2}}{M + 2m} = \frac{x \cdot M + xm + (x + \frac{l}{2})m}{(M + 2m)}.$$

Из этого соотношения получаем окончательно:

$$x = -\frac{3ml}{2(M + 2m)}.$$

Знак «минус» показывает, что платформа сместилась в направлении, противоположном движению людей.

$$2.12. S = \frac{m \frac{l}{2} + \frac{2}{15} Mb}{M + m}$$

Решение. Определим положение центра масс системы тел «человек + плот» в начальный момент времени, непосредственно перед тем, как человек начал свое движение (см. рис.):

$$x_{\text{цм1}} = \frac{m \left(-\frac{l}{2} \right) + M x_{\text{п}}}{(M + m)},$$

где $x_{\text{п}}$ – центр масс плота.

После того, как человек окажется в точке О, положение центра масс определится из соотношения

$$x_{\text{цм2}} = \frac{m(0 + x) + M(x_{\text{п}} + x)}{(M + m)},$$

где x – координата центра плота после окончания движения человека.

Поскольку система тел «человек + плот» замкнута,

$$x_{\text{цм1}} = x_{\text{цм2}}.$$

Определим $x_{\text{п}}$ – положение центра масс плота с отверстием. Для этого воспользуемся определением центра масс, а также введем поверхностную плотность материала ρ , из которого сделан плот:

$$\rho = \frac{M}{l^2 - \left(\frac{l}{4} \right)^2} = \frac{16M}{15l^2}.$$

Мысленно разобьем весь плот на отдельные элементы с площадями s_i и координатами x_i . Запишем выражение для центра масс плота, прибавляя и вычитая в числителе одно и то же слагаемое

$$\left(\frac{l^2}{16} \right) \rho b :$$

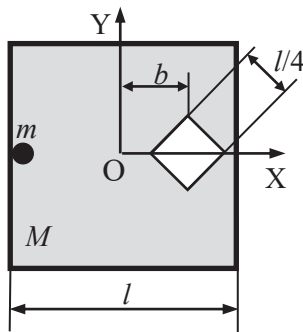


Рис. к решению задачи 2.12.

$$x_{\text{п}} = \frac{\sum_i \rho s_i x_i + \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho b - \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho b}{M}.$$

Для дальнейшего анализа удобно объединить два первых слагаемых в числителе правой части этого выражения. Их сумма соответствует определению центра масс плота без отверстия. Он, очевидно, находится в точке О. Таким образом (см. рис.):

$$x_{\text{п}} = -\frac{\rho l^2 \cdot 0 - \frac{l^2}{16} \rho b}{M} = -\frac{l^2 \rho b}{16M}$$

Подставляя $x_{\text{п}}$ в выражения для $x_{\text{цм1}}$ и $x_{\text{цм2}}$, получаем:

$$-\frac{m \frac{l}{2} + \frac{\rho l^2}{16} b}{M + m} = \frac{(0 + x)m + M \left(\frac{\rho l^2}{16} b \frac{1}{M} + x \right)}{(M + m)}.$$

В результате несложных преобразований находим координату x центра плота после остановки человека:

$$x = -\frac{m \frac{l}{2} + \frac{2}{15} Mb}{M + m}.$$

Знак «минус» означает, что центр плота сместился в направлении, противоположном движению человека.

$$2.13. v_1 = v + \frac{m_1}{m + m_1} u, v_2 = v, v_3 = v - \frac{m_1}{m + m_1} u.$$

$$2.14. x = \frac{3m}{2(3m + M)} l.$$

$$2.15. v_{\text{ш}} = -\frac{m}{m + M} U, v_{\text{ж}} = \frac{M}{m + M} U.$$

$$2.16. p = p_0 + mgt, \text{ где } p_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, m = m_1 + m_2;$$

$$r_{\text{с}} = v_0 t + gt^2 / 2, \text{ где } v_0 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2).$$

$$2.17. \text{ а) } l = -l' \frac{m}{M + m}; \text{ б) } F = -\frac{mM}{M + m} \frac{dv'}{dt}.$$

$$2.18. v' = \sqrt{9v_0^2 + 2v^2} = 14 \text{ м/с.}$$

$$2.19. v_{\text{задн}} = v_0 - \frac{m}{m+M}u; v_{\text{пер}} = v_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}u.$$

$$2.20. F(t) = \frac{3}{2} \frac{mg^2 t^2}{l} \text{ при } t \leq \sqrt{\frac{2l}{g}}, F(t) = mg \text{ при } t > \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

$$2.21. \text{Для первой тележки: } v_1(t) = v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t},$$

$$x_1(t) = \frac{M_0 v_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{M_0}t} \right), t_1 = \frac{M_0}{k} \ln \frac{1}{1 - \frac{Lk}{M_0 v_0}} \cong 23,0 \text{ с};$$

$$\text{для второй тележки } v_2 = v_0 \frac{M_0}{M_0 + kt}, x_2 = \frac{M_0 v_0}{k} \ln \left(1 + \frac{kt}{M_0} \right),$$

$$t_2 = \frac{M_0}{k} \left(e^{\frac{Lk}{M_0 v_0}} - 1 \right) \cong 14,6 \text{ с}.$$

$$2.22. V = u \ln \frac{M_0}{M_0 - \mu t} - gt \cong 120 \text{ м/с}.$$

$$2.23. M(t) = M_0 e^{-\frac{at}{u}}.$$

$$2.24. t = \frac{u}{g} \ln \frac{m_1 + m_2 + m_0}{m_1 + m_2} \cong 22 \text{ с}.$$

$$2.25. \alpha = \frac{u}{V_0} \ln \frac{M_0}{M}, M_0 - M = M_0 \left(1 - e^{-\frac{\alpha V_0}{u}} \right) \cong 95634 \text{ кг}.$$

$$2.26. \mu(t) = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{g}{u}t}, m(t)|_{t=1\text{с}} \cong M_0 \frac{g}{u} t \Big|_{t=1\text{с}} \cong 384,6 \text{ кг}.$$

$$2.27. V = u(1 - e^{-\frac{u}{M}t}) \cong 1,3 \text{ м/с}.$$

$$2.28. H = u\tau \frac{M_0}{m} \left(\frac{M_0 - m}{M_0} \ln \frac{M_0}{M_0 - m} + \frac{m}{M_0} \right) - \frac{g\tau^2}{2} + \frac{\left(u \ln \frac{M_0}{M_0 - m} - g\tau \right)^2}{2g} \approx 407 \text{ м}.$$

Решение. Запишем уравнение Мещерского в проекции на вертикальную ось декартовой системы координат:

$$M(t) \frac{dV}{dt} = \mu u - M(t)g,$$

где $\mu = \frac{m}{\tau}$, $M(t) = M_0 - \mu t$.

Интегрируя методом разделения переменных, получаем зависимость скорости от времени

$$V(t) = \int_0^t \left(\frac{\mu u}{M_0 - \mu t'} - g \right) dt' = -u \ln \frac{M(t)}{M_0} - gt$$

В момент окончания сгорания топлива τ ракета будет находиться на высоте

$$h(\tau) = \int_0^\tau V(t) dt = -u \int_0^\tau \ln \frac{M(t)}{M_0} dt - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Для удобства интегрирования перейдем к новой переменной

$$\zeta = \frac{M(t)}{M_0} = \frac{M_0 - \mu t}{M_0}.$$

С учетом принятых обозначений $d\zeta = -\frac{\mu}{M_0} dt$, а высота в момент времени τ определяется выражением:

$$h(\tau) = u \int_1^{\frac{M(\tau)}{M_0}} \ln \zeta \frac{M_0}{\mu} d\zeta - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Используя табличный интеграл $\int \ln \zeta d\zeta = \zeta \ln \zeta - \zeta$, получаем окончательное выражение для $h(\tau)$:

$$h(\tau) = u \frac{M_0}{\mu} \left(\frac{M(\tau)}{M_0} \ln \frac{M(\tau)}{M_0} - \frac{M(\tau)}{M_0} + 1 \right) - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Поскольку в момент времени τ скорость ракеты не равна нулю, то после окончания работы двигателей ракета поднимется до высоты

$$H = h(\tau) + \frac{V^2(\tau)}{2g}.$$

Подставляя $h(\tau)$, получаем:

$$H = u\tau \frac{M_0}{m} \left(\frac{M_0 - m}{M_0} \ln \frac{M_0 - m}{M_0} + \frac{m}{M_0} \right) - \frac{g\tau^2}{2} +$$

$$+ \frac{\left(u \ln \frac{M_0}{M_0 - m} - g\tau \right)^2}{2g}.$$

$$2.29. a(\tau) = \frac{2 + \frac{3g}{u}\tau}{1 - \frac{3g}{u}\tau} g \approx 2.9g.$$

Решение. Уравнение Мещерского для начального момента времени имеет вид (ось X декартовой системы координат направлена вертикально вверх):

$$M_0 a = \mu u - M_0 g.$$

Из этого уравнения определим расход топлива:

$$\mu = \frac{M_0 a + M_0 g}{u} = \frac{3M_0 g}{u}.$$

Ускорение ракеты через время τ после начала полета определим с помощью уравнения Мещерского, записанного в этот момент времени:

$$M(\tau) a(\tau) = \mu u - M(\tau) g.$$

Учитывая, что $M(\tau) = M_0 - \mu\tau$, получаем

$$a(\tau) = \frac{\mu u - (M_0 - \mu\tau)g}{M_0 - \mu\tau}.$$

Подставляя в это уравнение найденное выражение для расхода топлива, получаем окончательно:

$$a(\tau) = \frac{2 + \frac{3g}{u}\tau}{1 - \frac{3g}{u}\tau} g \approx 2.9g.$$

$$2.30. u = \frac{\mu}{\rho S} + \frac{(M + \rho S H)g}{\mu} \approx 22.5 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \text{ где } S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$2.31. v_2 = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m} \cdot \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m} \right) - g(\tau_1 + \tau_2).$$

Решение. Ось X декартовой системы координат направим вертикально вверх. Запишем уравнение Мещерского для первого этапа движения ракеты, когда работает первая ступень:

$$M(t) \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} u - M(t)g.$$

Здесь $M(t)$ – масса ракеты.

Интегрируя методом разделения переменных и учитывая, что масса ракеты изменилась от $m_1 + m_2 + m$ до $(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m$, получаем выражение для скорости ракеты после окончания работы первой ступени:

$$v_1 = -u \ln \frac{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} - g\tau_1.$$

Найдем аналогичным образом скорость ракеты после окончания работы второй ступени, учитывая, что масса ракеты после отделения первой ступени равна $m_2 + m$, а после окончания работы второй ступени равна $(1 - \alpha_2)m_2 + m$:

$$v_2 = v_1 - u \ln \frac{(1 - \alpha_2)m_2 + m}{m_2 + m} - g\tau_2.$$

Подставляя полученное выражение для скорости v_1 , находим искомую скорость ракеты v_2 :

$$v_2 = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m} \cdot \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m} \right) - g(\tau_1 + \tau_2).$$

$$2.32. x = v_0 t - \frac{kg t^2}{2} - u \frac{m_0}{\mu} \left(\frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} - \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} + 1 \right),$$

$$v = v_0 - kgt - u \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} \text{ при } \mu t \leq m(t)g.$$

Решение. Ось X лабораторной системы координат направим горизонтально, ось Y направим вертикально вверх, так как показано на рисунке. Действие реактивной силы приводит к уменьшению силы реакции опоры, что в свою очередь приводит к уменьшению

силы трения. Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранные оси системы координат:

$$ma = F_{\text{тр}},$$

$$0 = N - mg + F_p.$$

Масса тела равна:

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

Реактивная сила определяется расходом топлива и относительной скоростью его истечения:

$$F_p = \mu u,$$

Сила трения скольжения равна $F_{\text{тр}} = -kN$.

Решая полученную систему уравнений, находим зависимость ускорения от времени:

$$a = \frac{kN}{m} = -\frac{k(mg - \mu u)}{m} = -kg + k \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}.$$

Очевидно, что это соотношение справедливо в случае, когда $N \geq 0$ или $\mu u \leq m(t)g$.

Для определения зависимости скорости и координаты от времени воспользуемся связью скорости тела в произвольный момент времени с ускорением

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt'$$

и координаты со скоростью:

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt'.$$

Преобразуя записанные соотношения и интегрируя, получаем:

$$v = v_0 - kgt - u \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0}.$$

$$x = v_0 t - \frac{kg t^2}{2} - u \frac{m_0}{\mu} \left(\frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} - \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} + 1 \right).$$

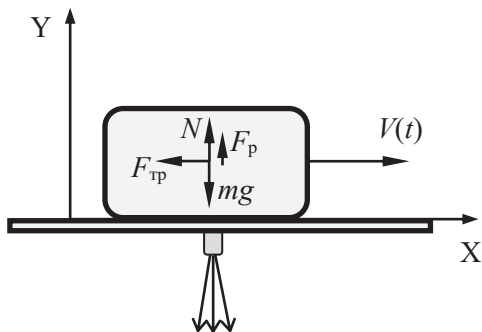


Рис. к решению задачи 2.32.

Последнее выражение получено с использованием табличного интеграла $\int \ln \zeta d\zeta = \zeta \ln \zeta - \zeta$.

$$2.33. v = -u \ln \frac{m_0}{m}.$$

$$2.34. v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

$$2.35. t = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta) = 20 \text{ с.}$$

$$2.36. a = \frac{F}{m_0 - \mu t}, v = \frac{F}{\mu} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right).$$

$$2.37. a = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}, v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}.$$

$$2.38. v = \sqrt{2gh \ln \frac{l}{h}}.$$

$$2.39. F = \frac{\Delta ml}{(\Delta t)^2} = 25 \text{ кН.}$$

$$2.40. \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} - \sqrt{\frac{m}{m_1 + m_2 + m}}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} \frac{m}{m_1 + m_2 + m}}} \sqrt{\frac{m}{m_1 + m_2 + m}}.$$

$$2.41. A = mgh + \mu mgl.$$

Решение. Для удобства выберем две декартовых системы координат (см. рис.): основную XY и вспомогательную X'Y' (ее начало совпадает с той точкой, где в данный момент находится материальная точка).

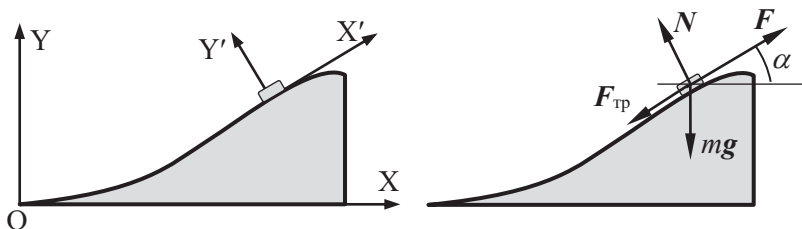


Рис. к решению задачи 2.41.

В процессе движения на тело действуют четыре силы: сила тяжести mg , сила реакции опоры N , сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$ и сила F , причем сила F зависит от координаты тела, так как профиль горки произвольный.

Поскольку движение происходит медленно, то будем считать, что ускорение тела равно нулю:

$$0 = F - F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha,$$

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

Поскольку сила F направлена по касательной к поверхности горки, то элементарная работа δA этой силы равна

$$\delta A = F ds = (mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) ds = mg dy + \mu mg dx.$$

Здесь учтено, что $ds \sin \alpha = dy$ и $ds \cos \alpha = dx$. Полную работу находим в результате интегрирования:

$$A = \int_1^2 F ds = \int_0^h mg dy + \int_0^l \mu mg dx = mgh + \mu mgl.$$

Таким образом, при медленном подъеме, в отличие от подъема с конечной скоростью, полная работа не зависит от профиля горки.

$$2.42. \quad v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}}.$$

$$2.43. \quad A = \frac{m \alpha^4 t^2}{8}.$$

$$2.44. \quad A = -\frac{\mu mgl}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha} = -0,05 \text{ Дж}.$$

$$2.45. \quad A_{\text{тр}} = -\frac{2F^2}{\gamma mg} = -0,12 \text{ Дж}.$$

$$2.46. \quad \langle P \rangle = -\mu mg v_0 / 2 = -2,0 \text{ Вт}.$$

$$2.47. \quad v = \sqrt{2(2gh - A/m)} = 2,0 \text{ м/с}.$$

$$2.48. \quad F_{\min} = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \mu g.$$

$$2.49. \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{2FR}{m v}.$$

$$2.50. k = \frac{F}{l_{\max} - l_0}.$$

$$2.51. l_{\max} = l_0 + \Delta l, l_{\min} = l_0 - \Delta l,$$

$$\text{где } \Delta l = \nu m \sqrt{\frac{m_0}{(m_0 + m)(2m_0 + m)k}}.$$

$$2.52. \nu = \nu_0 + \sqrt{2gR}.$$

2.53. Ускорение a_1 направлено вниз, модуль равен

$$a_1 = \frac{mgtg^2\alpha}{M + mtg^2\alpha}, \quad a_2 \text{ направлено влево, модуль равен}$$

$$a_2 = \frac{mgtg\alpha}{M + mtg^2\alpha}.$$

$$2.54. h = \frac{H}{2}, l_{\max} = H.$$

Решение. Скорость шайбы в момент отрыва находим из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH,$$

$$\nu = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Расстояние l , которое пролетит шайба за время полета

$$t_{\Pi} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ равно:}$$

$$l = \nu t_{\Pi} = \sqrt{4(Hh - h^2)}.$$

Для определения максимального расстояния, которое пролетит шайба, найдем условия, при котором производная расстояния по высоте h обращается в ноль. В данном случае удобнее искать производную от квадрата расстояния:

$$\frac{dl^2}{dh} = 4H - 8h = 0.$$

Таким образом, расстояние будет максимальным при

$$h = \frac{H}{2}.$$

В этом случае расстояние l_{\max} равно:

$$l_{\max} = \sqrt{4(Hh - h^2)} = H.$$

$$2.55. h_{\text{т}} = \frac{50}{54} H.$$

Решение. Для удобства выберем две декартовых системы координат (см. рис.): основную XY и вспомогательную $X'Y'$ (ее начало совпадает с точкой отрыва тела).

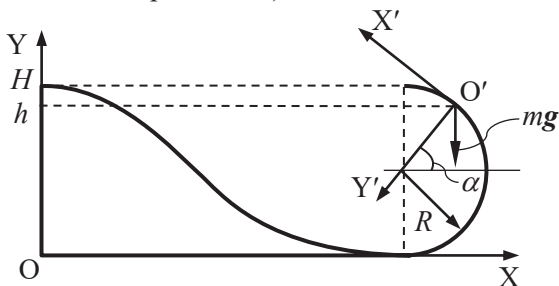


Рис. к решению задачи 2.55.

Для определения скорости материальной точки в точке отрыва воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH,$$

где h – высота, на которой происходит «отрыв» тела от направляющей поверхности, v – скорость тела в этой точке.

Для определения неизвестной высоты h запишем уравнение движения в проекции на ось $O'X'$, учитывая, что в точке отрыва сила реакции опоры N обращается в ноль:

$$m \frac{v^2}{R} = mg \sin \alpha,$$

$$\text{где } \sin \alpha = \frac{h - R}{R}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$h = \frac{2H + R}{3}, \quad v = \sqrt{\frac{2}{3} g(H - R)}.$$

После отрыва тело поднимется на высоту Δh , определяемую вертикальной составляющей ее скорости v_y в точке отрыва:

$$\Delta h = \frac{v_y^2}{2g}.$$

Для v_y можно записать:

$$v_y = v \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{27} g (H - R) \frac{5R^2 - 4H^2 + 8HR}{R^2}}.$$

Таким образом, после отрыва тело поднимется на высоту

$$\Delta h = (H - R) \frac{5R^2 - 4H^2 + 8HR}{27R^2}$$

Учитывая, что по условию задачи $R = \frac{H}{2}$, полная высота подъема $h_{\text{п}}$ будет равна

$$h_{\text{п}} = h + \Delta h = \frac{50}{54} H.$$

$$2.56. v_1 = v_0, v_2 = 0, \text{ если } H < \frac{v_0^2}{2g \left(\frac{m}{M} + 1 \right)};$$

$$v_1 = \frac{m - M}{m + M} v_0, v_2 = \frac{2m v_0}{M + m}, \text{ если } H > \frac{v_0^2}{2g \left(\frac{m}{M} + 1 \right)}.$$

$$2.57. l_{\text{max}} = \frac{l_0}{1 - \frac{l_0 (v_1 + v_2)^2}{2G(m_1 + m_2)}} \text{ при } l_0 < G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2},$$

$$l_{\text{max}} \rightarrow \infty \text{ при } l_0 > G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2}.$$

Решение. Задачу решаем в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, в которой тела движутся под действием сил гравитационного взаимодействия $F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$, при этом на максимальном расстоянии друг от друга $l = l_{\text{max}}$ скорости тел одновременно обращаются в ноль. Закон сохранения импульса в этой системе отсчета имеет вид:

$$0 - (m_1(v_1 - v_{\text{цм}}) + m_2(-v_2 - v_{\text{цм}})) = 0,$$

где v_1 , v_2 и $v_{\text{цм}}$ – проекции скоростей шариков и их центра масс на направление движения первого шарика.

Воспользуемся также законом сохранения механической энергии:

$$\Delta E^k + \Delta E^p = 0,$$

где

$$\Delta E^k = 0 - \left(\frac{m_1(v_1 - v_{\text{цм}})^2}{2} + \frac{m_2(-v_2 - v_{\text{цм}})^2}{2} \right),$$

$$\Delta E^p = \int_{l_0}^{l_{\text{max}}} G \frac{m_1 m_2}{l^2} dl = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{\text{max}}} \right).$$

Решая записанную систему уравнений, находим искомое расстояние между телами l_{max} в момент их максимального удаления:

$$l_{\text{max}} = \frac{l_0}{1 - \frac{l_0(v_1 + v_2)^2}{2G(m_1 + m_2)}}.$$

Поскольку наибольшее расстояние между шариками в процессе их движения $l_{\text{max}} > 0$, то полученное выражение имеет смысл при $l_0 < G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2}$, иначе шарики разлетятся на бесконечно большое расстояние.

$$2.58. v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{(m_1 + m_2)l}}, \quad v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{(m_1 + m_2)l}}.$$

$$2.59. v = \sqrt{2Fl - \mu mgl}.$$

Решение. Будем считать, что все звенья цепочки в каждый момент времени имеют одинаковые скорости. Введем в рассмотрение длину отдельного звена цепочки d и общее число звеньев цепочки N . Будем считать $d \ll l$ и $N \gg 1$.

В соответствии с теоремой о кинетической энергии, представим кинетическую энергию цепочки как сумму работ внешней силы F ($A_F = F \cdot l$) и сил трения при перемещении каждого звена цепочки:

$$\frac{mv^2}{2} = A_F + A_{\text{тр}}.$$

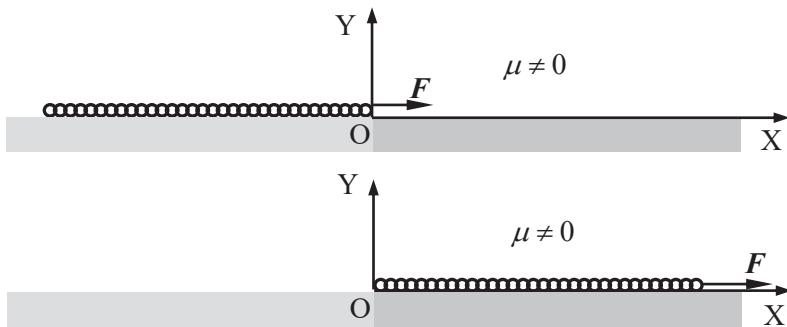


Рис. к решению задачи 2.59.

Работу силы трения представим как сумму работ сил трения, действующих на каждое звено цепочки

$$A_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N \mu m_i g \Delta x_i.$$

Здесь обозначено: i – номер звена цепочки, m_i и Δx_i его масса и перемещение по шероховатой поверхности в направлении оси X (см. рис.).

Учитывая, что

$$\Delta x_i = id,$$

получаем окончательно для работы силы трения:

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= \sum_{i=1}^N \mu m_i g id = \mu m_i g d \sum_{i=1}^N i = \\ &= \mu m_i g d \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{\mu(m_i N) \cdot g(dN)}{2} = \frac{\mu m g l}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в теорему о кинетической энергии, находим искомую скорость цепочки

$$v = \sqrt{2Fl - \mu m g l}.$$

$$2.60. (x_{11} - x_{10}) = l \frac{2}{3}, v_1 = \sqrt{2gl \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3} \right)}.$$

Решение. Искомая максимальная скорость тел достигается в момент прохождения положения равновесия, а смещение центрального груза становится максимальным в момент времени, когда скорости тел системы равны нулю.

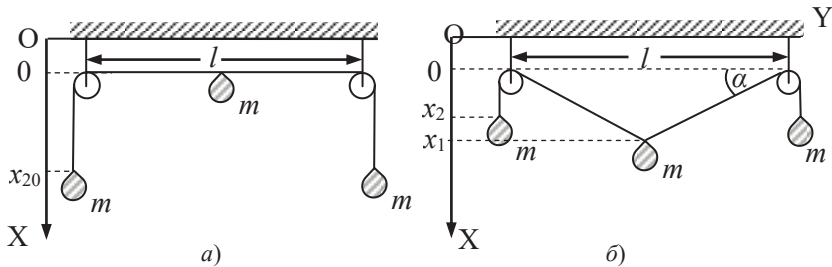


Рис. к решению задачи 2.60: а) – конфигурация системы в начальный момент времени, б) – конфигурация системы в процессе движения.

Будем считать потенциальную энергию тел равной нулю для положения с координатой $x = 0$ (см. рис.). В начальный момент времени механическая энергия системы равна:

$$E_0 = -2mgx_{20}. \quad (1)$$

Здесь x_{20} – координата тела, висящего на конце нити в начальный момент времени.

В произвольный момент времени выражение для механической энергии имеет вид:

$$E = -mgx_1 - 2mgx_2 + \frac{mv_1^2}{2} + 2 \frac{mv_2^2}{2}, \quad (2)$$

где v_1 – скорость центрального тела, v_2 – скорость тел, висящих на концах нити.

В момент времени, когда отклонение тел от начального положения максимально, скорость тел равна нулю и механическая энергия определяется только потенциальной энергией:

$$E = -mgx_{11} - 2mgx_{21}. \quad (3)$$

Здесь x_{11} и x_{21} – координаты центрального и крайнего тела в указанный момент времени.

Запишем уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$2 \frac{l}{2 \cos \alpha} + 2x_2 = l + 2x_{20}. \quad (4)$$

Запишем также связь координаты центрального тела с углом отклонения нити (см. рис.):

$$x_1 = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Для определения максимального смещения центрального груза x_{11} от начального положения воспользуемся законом сохранения механической энергии и уравнениями кинематической связи (4) и (5). Из (1) и (3) следует:

$$x_{11} + 2(x_{21} - x_{20}) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство $(x_{21} - x_{20})$, определенное из соотношения (4), и x_{11} , определяемое соотношением (5), получаем:

$$1 - \frac{1}{2} \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Решая тригонометрическое уравнение, получаем значение угла отклонения нити в момент максимального смещения центрального тела:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Этому значению угла соответствует смещение центрального тела, равное

$$x_{11} = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha = l \frac{2}{3}.$$

Для определения максимальной скорости в процессе движения также воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$-mgx_1 - 2mgx_2 + \frac{mv_1^2}{2} + 2 \frac{mv_2^2}{2} = -2mgx_{20}.$$

Максимальная скорость достигается в момент прохождения положения равновесия. Условия равновесия для центрального груза и груза, подвешенного к концу нити, имеют вид:

$$2T \sin \alpha_p - mg = 0, \quad T - mg = 0,$$

где T – сила натяжения нити, α_p – равновесное значение угла отклонения нити. Следовательно $\alpha_p = \pi/6$.

Для определения связи между v_1 и v_2 воспользуемся соотношениями (4) и (5). После дифференцирования по времени и несложных преобразований получаем связь между скоростями тел:

$$2v_1 \sin \alpha + 2v_2 = 0.$$

Используя эту связь, закон сохранения механической энергии и найденное выражение для α_p , находим окончательное выражение для максимальной скорости центрального груза в процессе движения

$$v_1 = \sqrt{2gl \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3} \right)}.$$

$$2.61. v_1 = 0,5\sqrt{gl}, \quad x = l\sqrt{2}.$$

$$2.62. v = \sqrt{v_0^2 + 2FR/m} = 16 \text{ м/с}.$$

$$2.63. h = 0,005 \frac{M}{m} l - 0,01l.$$

$$2.64. v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

$$2.65. p'_1 = p_1 \sqrt{1 - \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \theta}, \quad p'_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \theta.$$

$$2.66. 1) \beta_{\max} = \arcsin \left(\frac{m_2}{m_1} \right), \quad 2) \beta_{\max} = \pi.$$

$$2.67. \frac{\Delta E_{k1}}{E_{k1}} = \frac{16}{25}.$$

$$2.68. E_{\text{упр}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Решение. Запишем законы сохранения механической энергии и импульса для двух моментов времени: первый момент – перед соударением, второй момент – тот, в который энергия упругой деформации максимальна:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + E_{\text{упр}},$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.$$

Здесь v_1' и v_2' – скорости первого и второго шаров в момент, когда энергия упругой деформации максимальна, $E_{\text{упр}}$ – величина этой энергии.

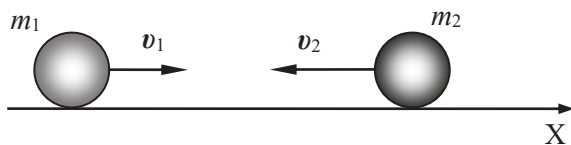


Рис. к решению задачи 2.68.

В тот момент, когда деформация максимальна, происходит остановка шаров друг относительно друга, поэтому их скорости относительно лабораторной системы отсчета равны между собой:

$$v'_1 = v'_2 = u.$$

Решая полученную систему уравнений, находим искомое значение максимальной энергии упругой деформации:

$$E_{\text{упр}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

2.69. $v = v_0 \frac{d^2 - 8r^2}{24r^2 - d^2}$. Первый шар после соударения остановится при $d = 2\sqrt{2}r = \sqrt{2}D$; отскочит назад при $d < \sqrt{2}D$, будет двигаться вперед при $d > \sqrt{2}D$.

2.70. $q = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. При $m_1 \gg m_2$ доля потерянной кинетической энергии минимальна; при $m_1 \ll m_2$ доля потерянной кинетической энергии максимальна.

$$\mathbf{2.71.} \quad \Delta E = \frac{3}{8} m v^2 \left(1 - 3 \frac{m}{M} \right).$$

$$\mathbf{2.72.} \quad x_{\text{max}} = \frac{2m v_0}{M + m} \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

2.73. 120° .

$$\mathbf{2.74.} \quad \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

$$\mathbf{2.75.} \quad \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

$$2.76. \frac{m_1}{m_2} = 2.$$

$$2.77. E_{\text{He}} = E_{\alpha 0} \sin^2 \varphi = 0,75 \text{ МэВ}, E_{\alpha} = E_{\alpha 0} \cos^2 \varphi = 0,25 \text{ МэВ}.$$

$$2.78. \Delta E_k = -\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

$$2.79. M = \frac{m(p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \alpha)}{p_0^2 - p^2}.$$

$$2.80. \cos \theta' = \left(\frac{v_1 v_2}{v_1' v_2'} \right) \cos \theta.$$

$$2.81. m_2 = 3m_1.$$

$$2.82. u_1 = \frac{\sqrt{3v_1^2 + v_2^2}}{2}, u_2 = \frac{\sqrt{3v_2^2 + v_1^2}}{2}.$$

Решение. Запишем закон изменения импульса для каждого из шаров:

$$m \Delta v = F \Delta t.$$

Здесь m – масса каждого из шаров, Δv – вектор изменения его скорости, F – сила упругого взаимодействия, возникающая в процессе удара.

Положение шаров показано на рисунке.

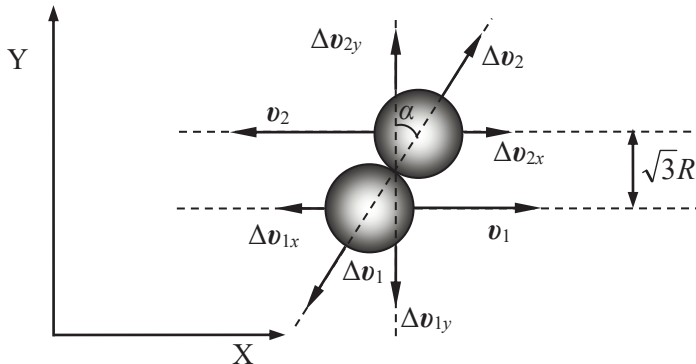


Рис. к решению задачи 2.82.

Косинус угла α , который составляет вектор Δv с осью Y (см. рис.) равен $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишем выражения для проекций изменения скорости шаров на оси координат. Пусть Δv_{1x} , Δv_{1y} – проекции скорости первого шара, а Δv_{2x} , Δv_{2y} – второго шара, тогда:

$$\Delta v_{1x} = -\Delta v \sin \alpha, \quad \Delta v_{1y} = -\Delta v \cos \alpha,$$

$$\Delta v_{2x} = \Delta v \sin \alpha, \quad \Delta v_{2y} = \Delta v \cos \alpha.$$

Проекции искоемых скоростей шаров u_1 и u_2 после удара равны:

$$u_{1x} = v_1 - \Delta v \sin \alpha, \quad u_{1y} = -\Delta v \cos \alpha,$$

$$u_{2x} = -v_2 + \Delta v \sin \alpha, \quad u_{2y} = \Delta v \cos \alpha.$$

При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шаров сохраняется:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим выражение для модуля изменения скорости шаров

$$\Delta v = (v_1 + v_2) \sin \alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

и искоемые скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3v_1^2 + v_2^2}}{2},$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{3v_2^2 + v_1^2}}{2}.$$

2.83. $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$

Решение. Законы сохранения механической энергии и импульса для первого и второго шаров для моментов времени «до столкновения» и «сразу после столкновения» имеют вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

где u_1 и u_2 – скорости шаров после столкновения.

Решая записанную систему уравнений, получаем:

$$u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Аналогичные уравнения можно записать и для второго и третьего шаров, решая которые получаем скорость третьего шара после столкновения равна:

$$u_3 = \frac{2m_2u_2}{m_2 + m_3} = \frac{4m_2m_1v_1}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)}.$$

По условию задачи масса второго шара m_2 должна быть такой, чтобы скорость u_3 была максимальной. Для нахождения m_2 дифференцируем это соотношение по m_2 и приравняем производную к нулю, в результате чего получаем выражение для искомой массы второго шара:

$$m_2 = \sqrt{m_1m_3}.$$

2.84. Если отклонить один правый шар, то после удара отскочит крайний левый шар на угол, равный углу отклонения правого шара. Если отклонить одновременно два шара и отпустить их, то после удара отскочат два крайних левых шара. Если отклонить три правых шара, то отскочат три левых, и т.д.)

2.85. Ударяющий шарик отскочит назад, шарики, находящиеся между стальным и ударяющим, останутся неподвижными. Стальной шарик и все последующие начнут двигаться влево, причем скорости их будут различны. Наиболее быстро будет двигаться крайний левый шарик. Следующий будет двигаться медленнее, и т.д.

$$\mathbf{2.86.} \quad v_1^{2020} = v_1, \quad v_2^{2020} = v_2.$$

Решение. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии на интервале времени «до первого соударения», «сразу после первого соударения»:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2, \\ \frac{m_1(v_1)^2}{2} + \frac{m_2(v_2)^2}{2} = \frac{m_1(v'_1)^2}{2} + \frac{m_2(v'_2)^2}{2}.$$

Здесь v_1 и v_2 – скорости шаров до соударения, v'_1 и v'_2 – после соударения.

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Аналогично после второго соударения:

$$v_1'' = \frac{(m_1 - m_2)v_1' + 2m_2v_2'}{m_1 + m_2}, \quad v_2'' = \frac{(m_2 - m_1)v_2' + 2m_1v_1'}{m_1 + m_2}.$$

Здесь v_1'' и v_2'' – скорости первого и второго шарика после второго соударения.

Подставляя в эти соотношения найденные выражения для v_1' и v_2' , получаем:

$$v_1'' = v_1, \quad v_2'' = v_2.$$

Полученный результат означает, что после второго удара (и после каждого четного) скорости шариков принимают первоначальные значения. Таким образом, после 2020 столкновения скорости шариков будут равны v_1 и v_2 .

$$2.87. \quad N = \pi \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Решение. Ось X лабораторной системы координат направим вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении движения большого шара. Предварительно рассмотрим в общем виде столкновение двух шаров массами m_1 и m_2 , движущихся со скоростями v_{01} и v_{02} . Законы сохранения механической энергии и импульса имеют вид:

$$\frac{m_1v_{01}^2}{2} + \frac{m_2v_{02}^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}. \quad (1)$$

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2. \quad (2)$$

Преобразуем соотношение (1)

$$\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_{01} \right)^2 + (v_{02})^2 = \left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_1 \right)^2 + v_2^2 \quad (3)$$

и перейдем к новым переменным

$$u_1 = v_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad u_2 = v_2.$$

В этих обозначениях выражение (3) представится в виде:

$$u_{01}^2 + u_{02}^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (4)$$

Введем прямоугольную систему координат, по горизонтальной оси которой будем откладывать величины u_1 , а по вертикальной – u_2 (см. рис.). Каждая точка этой плоскости будет соответствовать скоростям первого и второго шаров. В результате столкновений скорости шаров будут изменяться, а значит будут изменяться координаты u_1 и u_2 . При любом ударе скорости шаров будут такими, что соответствующие им точки с координатами u_1 и u_2 будут принадлежать окружности радиуса R такого, что

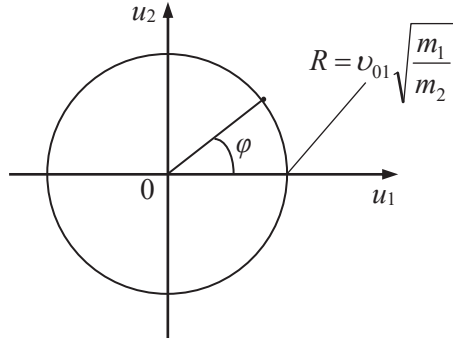


Рис. к решению задачи 2.87.

$$R^2 = u_{01}^2 + u_{02}^2.$$

По условию задачи второй шар первоначально покоился, поэтому $u_{02} = v_{02} = 0$, и

$$R = v_{01} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Используя уравнения (1) и (2), получаем выражение для скоростей шаров после соударения:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02}, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{02}.$$

Перепишем эти выражения, используя переменные u_1 и u_2 :

$$u_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left((m_1 - m_2) u_{01} + 2\sqrt{m_1 m_2} u_{02} \right),$$

$$u_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(2\sqrt{m_1 m_2} u_{01} + (m_2 - m_1) u_{02} \right).$$

Полученные соотношения удобно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & 2\sqrt{m_1 m_2} \\ 2\sqrt{m_1 m_2} & m_2 - m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}.$$

После соударения второй шар летит к стене, соударяется с ней, в результате его скорость изменяет знак на противоположный.

Если обозначить за U_1 и U_2 скорости шаров, которые они приобрели в результате соударения и отражения второго шара от стенки, то

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & -2\sqrt{m_1 m_2} \\ 2\sqrt{m_1 m_2} & m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}.$$

Получившееся соотношение запишем в виде преобразования координат точки при повороте на угол φ против часовой стрелки:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix},$$

где

$$\cos\varphi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2}$$

Таким образом, при каждом ударе и отражении от стенки происходит поворот точки на плоскости (u_1, u_2) против часовой стрелки на угол φ (см. рис.).

По условию задачи $m_1 \gg m_2$, поэтому

$$\sin\varphi \approx \varphi = 2\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Соударения прекратятся, когда скорости шаров станут одинаковыми. Сначала большой шар будет двигаться в сторону стенки, затем остановится, изменит направление движения и затем настанет момент, когда скорости большого и маленького шара станут близкими, тогда, после очередного столкновения маленький шар остановится. Очевидно, этому соответствует поворот точки на диаграмме на угол π .

Таким образом, общее число ударов N определяется выражением:

$$N = \frac{\pi}{2\sqrt{m_2/m_1}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

2.88. $m_1/m_2 = 5,83$.

2.89. $\frac{m}{M} \geq \frac{1}{3}$.

2.90. После абсолютно упругого соударения гантели начнут вращаться, после чего произойдет второе абсолютно упругое

соударение; после этого гантели будут двигаться поступательно, сохраняя величину и направление скорости первоначального движения.

$$2.91. \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{m}{M} + \sin^2 \alpha \right] = \frac{2}{5}.$$

$$2.92. k = \frac{20}{27}.$$

Решение. Будем считать, что маленьких шариков много и дрожанием поршня в результате соударений с шариками можно пренебречь. Кроме того, поскольку шарики малы, не будем учитывать соударения между ними.

Запишем закон сохранения механической энергии произвольного шарика на интервале времени между последовательными его соударениями с дном цилиндра и поршнем:

$$\frac{m v_0^2}{2} = mgH + \frac{m v_1^2}{2},$$

где v_0 и v_1 – модули скоростей шарика у дна цилиндра и поверхности поршня соответственно (см. рис.), H – расстояние между дном цилиндра и поршнем.

В результате соударения с поршнем проекция импульса шарика на ось X изменяется на величину

$$\Delta p = 2m v_1.$$

За время t_0 между двумя последовательными ударами произвольного шарика о поршень произойдет N соударений всех шариков с поршнем. Изменение импульса механической системы, состоящей из N шариков, за время t_0 равно импульсу средней на данном интервале времени силы F , действующей на поршень со стороны шариков:

$$\Delta p N = F t_0.$$

Условие равновесия поршня найдем, используя второй закон Ньютона:

$$Mg - F = 0.$$

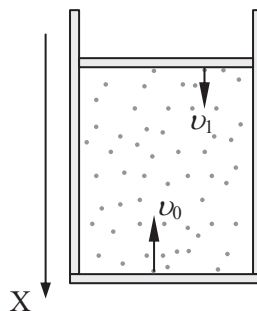


Рис. к решению задачи 2.92.

Поскольку в поле сил тяжести Земли движение шариков происходит с постоянным ускорением g , модули скоростей произвольного шарика у дна цилиндра и поверхности поршня связаны соотношением:

$$v_0 = v_1 + g \frac{t_0}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем расстояние H между дном цилиндра и поршнем:

$$H = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 2M)mN}{g(mN + M)^2}.$$

При увеличении массы поршня в два раза расстояние H_2 между дном цилиндра и поршнем, находящимся в новом равновесном состоянии, становится равным:

$$H_2 = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 4M)mN}{g(mN + 2M)^2}.$$

Следовательно:

$$k = \frac{H_2}{H} = \frac{(mN + 4M)(mN + M)^2}{(mN + 2M)^3}.$$

Учитывая, что по условию задачи $mN = M$, окончательно получим:

$$k = \frac{20}{27}.$$

РАЗДЕЛ 3

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

$$3.1. k = \frac{F}{l_{\max} - l_0}.$$

Решение. Направим ось X лабораторной системы отсчета и ось X' неинерциальной системы отсчета, связанной с центром масс системы тел, вдоль направления действия силы F (см. рис.). В инерциальной системе отсчета система тел движется под действием одной внешней силы F . В неинерциальной системе к указанной силе добавляются две переносные силы инерции $F_{\text{пер}} = -ma_{\text{цм}}$ ($a_{\text{цм}}$ – ускорение центра масс системы относительно инерциальной системы отсчета). Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

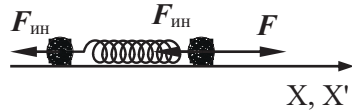


Рис. к решению задачи 3.1.

В соответствии с теоремой о движении центра масс, ускорение центра масс системы «два шарика + пружинка» в инерциальной системе отсчета:

$$a_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}.$$

Закон изменения механической энергии системы «два шарика + пружинка» в неинерциальной системе отсчета на интервале времени от начала движения до момента максимального растяжения пружины:

$$\frac{k(l_{\max} - l_0)^2}{2} = -F_{\text{пер}}\Delta x'_1 + (F - F_{\text{пер}})\Delta x'_2,$$

где $F_{\text{пер}}$ – модуль силы инерции, $\Delta x'_1$ и $\Delta x'_2$ – изменения координат заднего и переднего шариков (по отношению к направлению действия силы) за указанный промежуток времени. Здесь учтено, что в момент максимального растяжения пружинки относительная скорость шариков становится равной нулю.

Из записанных уравнений с учетом $\Delta x_2 - \Delta x_1 = l_{\max} - l_0$, получаем искомый коэффициент упругости пружинки $k = \frac{F}{l_{\max} - l_0}$.

3.2. $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g-a}{l}}t + \varphi_0\right)$, где α_0 и φ_0 определяются

начальными условиями.

3.3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$.

3.4. $H = R \cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)} R$, $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} gR$.

3.5. $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$, $a_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$.

3.6. $t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}}$.

Решение. Уравнение движения тела в проекциях на оси координат неинерциальной системы отсчета (см. рис.) и выражения для силы трения и переносной силы инерции имеют вид:

$$ma_x = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F_{\text{пер}} \cos \alpha,$$

$$0 = N - mg \cos \alpha + F_{\text{пер}} \sin \alpha.$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N, F_{\text{пер}} = ma.$$

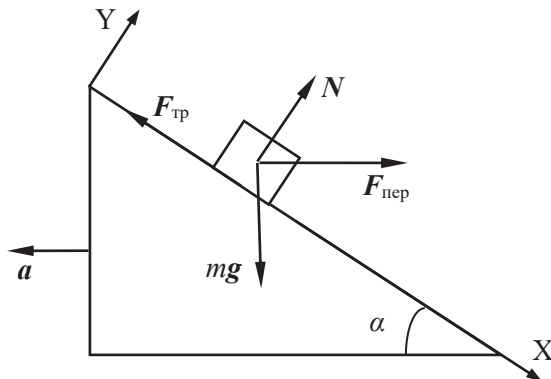


Рис. к решению задачи 3.6.

Время соскальзывания тела с наклонной плоскости равно:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_x}}.$$

Записанные уравнения позволяют найти искомое время:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}}.$$

3.7. $a > (m_2/m_1)g$.

3.8. а) $T = \frac{m_1 m_2 (g - a \cos\alpha)}{(m_1 + m_2) \cos\alpha}$, где $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$;

б), в) $T = \frac{m_1 m_2 (g + a)}{m_1 + m_2}$.

3.9. $N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{a^2 + g^2}{R}}$.

Решение. Свяжем неинерциальную систему отсчета с движущимся полуцилиндром. Оси системы координат, а также силы, действующие на тело в некоторый момент времени, показаны на рисунке.

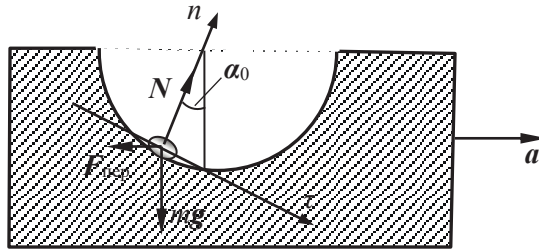


Рис. к решению задачи 3.9.

Нетрудно показать, что сумма сил, действующих на тело, оказывается равна нулю при значении угла отклонения от вертикали

$$\alpha_0 = \arctg \frac{a}{g} = \frac{\pi}{6}.$$

Этот угол соответствует положению равновесия тела.

При отклонении тела от положения равновесия на некоторый угол α возникнет «возвращающая» сила, проекция которой на тангенциальную ось равна:

$$F_{\text{возвр}} = -\sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} \sin\alpha.$$

Уравнение движения тела в проекциях на тангенциальную ось имеет вид:

$$ma' = -m\sqrt{a^2 + g^2} \sin \alpha,$$

где a' – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета. Это ускорение связано с углом отклонения α соотношением $a' = \ddot{\alpha}R$.

Искомая сила нормальной реакции опоры равна:

$$N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos \alpha.$$

С учетом записанных соотношений уравнение движения тела имеет вид:

$$\ddot{\alpha}R = -\sqrt{a^2 + g^2} \sin \alpha.$$

При малых отклонениях тела от положения равновесия получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{R} \alpha = 0.$$

Решение его будем искать в виде:

$$\alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, $\omega_0 = \sqrt{\frac{a^2 + g^2}{R}}$ – угловая частота,

φ_0 – начальная фаза.

Используя начальные условия $\alpha(0) = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, получаем:

$$A = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_0 = 0.$$

Следовательно, закон изменения силы реакции опоры имеет вид:

$$N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos \omega_0 t\right).$$

3.10. При $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ $F \leq (M + m)g \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$, при $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$

проскальзывание будет при любом значении модуля силы F .

$$3.11. a = \frac{2}{3}(g - a_0) \sin \alpha.$$

$$3.12. (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \text{ при } \mu < \operatorname{ctg} \alpha ;$$

$$(M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq \infty \text{ при } \mu \geq \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$3.13. a = g \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} .$$

$$3.14. F = \frac{2Ml}{t^2} + \mu g(M + m).$$

$$3.15. T = (\rho - \rho_0)V(a + g \operatorname{tg} \alpha) .$$

Решение. Оси неинерциальной системы отсчета и силы, действующие на шар, показаны на рисунке: сила тяжести mg , сила нормальной реакции опоры N , вертикальная составляющая выталкивающей силы $F_{Ay} = \rho_0 g V$, горизонтальная составляющая выталкивающей силы $F_{Ax} = \rho_0 a V$, переносная сила инерции $F_{\text{пер}} = -ma$.

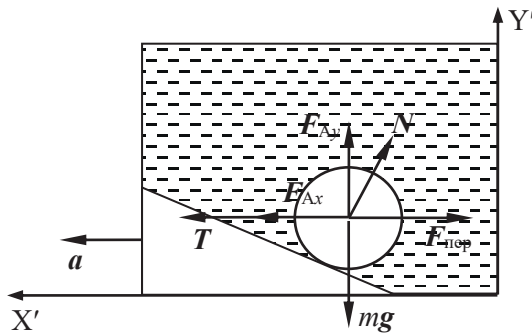


Рис. к решению задачи 3.15.

Условие равновесия шара в проекциях на оси координат:

$$0 = -F_{\text{пер}} + T + F_{Ax} - N \sin \alpha ,$$

$$0 = N \cos \alpha + F_{Ay} - mg .$$

Решение записанной системы уравнений приводит к выражению для искомой силы натяжения нити:

$$T = (\rho - \rho_0)V(a + g \operatorname{tg} \alpha) .$$

$$3.16. T = \frac{2}{5}(g \sin \alpha + a \cos \alpha) \rho V .$$

$$3.17. N = 2 \rho V a .$$

$$3.18. N = V_0 g (\rho_0 - \rho) (g + a \operatorname{ctg} \alpha) .$$

$$3.19. a = \frac{8}{3} k g .$$

$$3.20. N_{\text{гор}} = \frac{m \omega^2 R}{4} = 45 \text{ Н} .$$

$$3.21. F_{\text{ин}} = m \omega^2 r \sqrt{\left(\frac{2R}{r}\right)^2 - 1} .$$

$$3.22. F = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2} .$$

Решение. Выберем неинерциальную систему отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанную с вращающимся диском (см. рис.). В этой системе отсчета на тело действуют сила тяжести mg , сила реакции диска F , переносная сила инерции, равная в данном случае центробежной силе инерции $F_{\text{цб}} = -m[\omega[\omega r]]$, и сила инерции Кориолиса $F_{\text{Кор}} = -2m[\omega V]$.

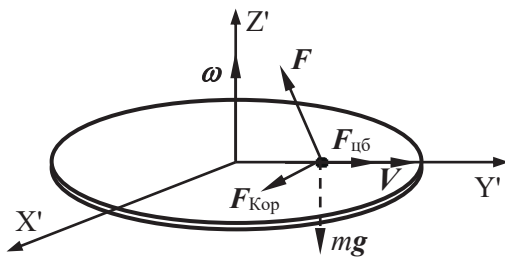


Рис. к решению задачи 3.22.

Под действием этих сил тело движется с постоянной относительно диска скоростью V . Уравнение движения тела в проекциях на оси координат имеет вид:

$$0 = F_{X'} + F_{\text{Кор}}, \quad 0 = F_{Y'} + F_{\text{цб}}, \quad 0 = F_{Z'} - mg .$$

Записанные равенства приводят к выражениям для проекций на оси координат системы $X'Y'Z'$ силы реакции диска:

$$F_{x'} = -2m\omega V,$$

$$F_{y'} = -m\omega^2 r,$$

$$F_{z'} = mg.$$

При этом модуль силы реакции диска F равен

$$F = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2},$$

а направляющие косинусы силы F относительно системы отсчета $X'Y'Z'$ равны:

$$\cos\alpha' = \frac{2m\omega V}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}},$$

$$\cos\beta' = \frac{m\omega^2 r}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}.$$

$$3.23. F_{\text{кор}} = 2m\omega\sqrt{V_0^2 + \omega^2 R^2}.$$

$$3.24. v = \sqrt{2}\omega R.$$

$$3.25. \omega = 2\sqrt{\frac{F^2 - (mg)^2}{mR}}$$

Решение. Выберем неинерциальную систему отсчета, связанную с вращающейся платформой (см. рис.). В этой системе отсчета на тело действуют: сила тяжести mg , сила реакции платформы N , переносная сила инерции, равная в данном случае центробежной силе инерции $F_{\text{цб}} = -m[\omega[\omega r]]$ и сила инерции Кориолиса $F_{\text{кор}} = -2m[\omega V]$ (V – скорость человека относительно платформы).

Уравнение движения тела в векторной форме в выбранной неинерциальной системе отсчета имеет вид:

$$ma = mg + N + F_{\text{кор.}} + F_{\text{цб.}}$$

По условию задачи

$$F_{\text{кор.}} + F_{\text{цб.}} = 0, \text{ т.е. } 2m\omega V = m\omega^2 R.$$

В системе отсчета, связанной с диском, тело движется равномерно по окружности радиусом R , следовательно его центростремительное ускорение равно $a_{\text{цс.}} = \frac{V^2}{R}$.

Записанные выражения позволяют определить величину скорости $V = \frac{\omega R}{2}$.

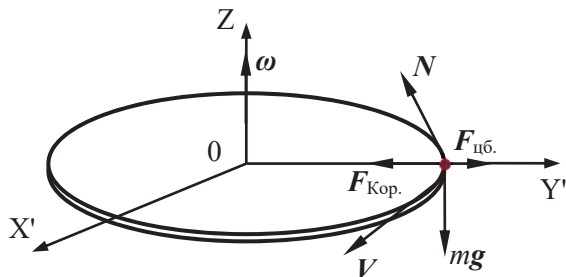


Рис. к решению задачи 3.25.

При равномерном движении по окружности центростремительное ускорение сообщается телу горизонтальной составляющей силы реакции платформы; поэтому уравнение движения может быть записано следующим образом в проекциях на ось Y' :

$$\frac{mV^2}{R} = N_{Y'},$$

где $N_{Y'}$ – горизонтальная составляющая силы реакции платформы. В результате несложных преобразований получаем выражение для $N_{Y'}$:

$$N_{Y'} = \frac{m\omega^2 R}{4}.$$

Уравнение движения в проекциях на ось Z' имеет вид:

$$0 = N_{Z'} - mg,$$

где $N_{Z'}$ – вертикальная составляющая силы реакции платформы.

Сила, с которой тело действует на платформу, равна

$$F = \sqrt{N_{Y'}^2 + N_{Z'}^2}.$$

Записанные соотношения позволяют определить искомую угловую скорость:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{F^2 - (mg)^2}{mR}}.$$

$$3.26. \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi v}{15g}\right).$$

3.27. Пол комнаты представляет собой параболоид вращения $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$, ось Z направлена вдоль оси вращения, X, Y – в горизонтальной плоскости.

$$3.28. v \geq \omega R.$$

$$3.29. \text{Парабола, } y' = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x'^2.$$

$$3.30. \alpha = \arccos\left(\frac{3g}{2L\omega^2}\right) \text{ при } \omega > \sqrt{\frac{3g}{2L}}; \alpha = 0 \text{ при } \omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной со стержнем и вертикальной осью вращения. На стержень действуют три силы: сила тяжести mg , сила реакции со стороны шарнира и центробежная сила инерции (см. рис.). Поскольку стержень покоится в выбранной неинерциальной системе отсчета, сумма моментов всех сил, действующих на стержень в этой системе, относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.) и направленной из плоскости чертежа, равна нулю:

$$M_{mg} + M_{\text{ин}} = 0.$$

Выражение для момента силы тяжести имеет вид:

$$M_{mg} = -mg \frac{L}{2} \sin \alpha.$$

Центробежная сила инерции, действующая на элемент стержня длиной dl , находящийся на расстоянии r от точки O , равна

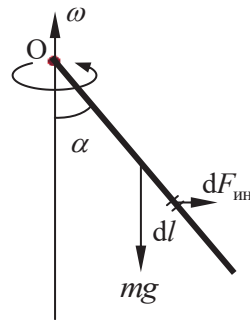


Рис. к решению задачи 3.30.

$$dF_{\text{ин}} = \rho S dl \omega^2 r,$$

где ρ – плотность стержня, S – площадь его поперечного сечения.

Момент силы $dF_{\text{ин}}$ относительно горизонтальной оси имеет вид:

$$dM_{\text{ин}} = dF_{\text{ин}} l \cos \alpha = \rho S dl \omega^2 l \sin \alpha l \cos \alpha.$$

Суммарный момент сил инерции равен

$$M_{\text{ин}} = \int dM_{\text{ин}} = \frac{1}{3} L^2 \omega^2 m \sin \alpha \cos \alpha.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\cos \alpha = \frac{3g}{2L\omega^2}, \quad \sin \alpha = 0.$$

При $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ значение угла $\alpha = \arccos\left(\frac{3g}{2L\omega^2}\right)$ соответствует устойчивому вращению стержня, а значение $\alpha = 0$ соответствует неустойчивому вращению стержня. В случае $\omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ устойчивым является вертикальное положение стержня $\alpha = 0$.

3.31. $\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}}$; равновесие устойчиво, если $kl > \frac{mg}{\sqrt{2}}$.

3.32. $t_0 = \frac{1}{\omega} \ln\left(\frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1}\right)$, $v_0 = \omega\sqrt{2L^2 - l^2}$.

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с трубкой и вертикальной осью вращения.

В направлении оси X' (см. рис.) на шарик действует центробежная сила инерции $F = m\omega^2 x'$ (x' – координата шарика по оси X').

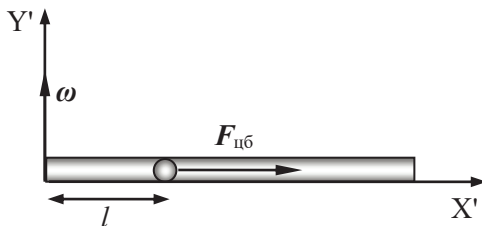


Рис. к решению задачи 3.32.

Уравнение движения шарика в проекции на ось X' имеет вид:

$$ma' = m\omega^2 x'.$$

Выразим проекцию ускорения шарика a' через производную проекции скорости по пространственной координате x' :

$$a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dx'} \frac{dx'}{dt} = \frac{dv'}{dx'} v'.$$

Используя записанные соотношения, получаем:

$$v' \frac{dv'}{dx'} = \omega^2 x'.$$

Полученное уравнение решаем методом разделения переменных:

$$\int_0^{v'} v' dv' = \int_l^{x'} \omega^2 x' dx'.$$

В результате интегрирования получаем связь проекции скорости шарика v' и его координаты x' :

$$v' = \omega \sqrt{x'^2 - l^2}.$$

Это уравнение также решаем методом разделения переменных:

$$\int_l^L \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - l^2}} = \int_0^{t_0} \omega dt,$$

в результате чего находим искомое время движения шарика в трубке:

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} \right).$$

Вектор скорости шарика относительно трубки равен:

$$\mathbf{v}' = \omega \sqrt{x'^2 - l^2} \mathbf{e}_{X'},$$

где $\mathbf{e}_{X'}$ – единичный вектор вдоль оси X' .

Скорость шарика относительно лабораторной инерциальной системы отсчета имеет вид:

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{x}'] + \mathbf{v}' = -\omega x' \mathbf{e}_{Z'} + \omega \sqrt{x'^2 - l^2} \cdot \mathbf{e}_{X'},$$

где $\mathbf{e}_{Z'}$ – единичный вектор вдоль оси Z' . Следовательно, модуль скорости шарика относительно лабораторной системы отсчета равен:

$$v = \omega \sqrt{2x'^2 - l^2},$$

а в момент вылета из трубки $v_0 = \omega \sqrt{2L^2 - l^2}$.

$$3.33. F = m\sqrt{4\omega^2(L^2 - l^2) + g^2}.$$

$$3.34. \omega = \sqrt{\frac{gtg\alpha}{R - (r + l)\sin\alpha}}.$$

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета $X'Y'$, жестко связанной с сосудом (см. рис.). Поскольку центробежная сила инерции – массовая сила, и она действует на все тела и объекты в системе, то за счет нее появляется составляющая выталкивающей силы F_X . Относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с сосудом, шарик покоится. Уравнение движения шарика в проекциях на оси выбранной системы координат имеет вид:

$$T \sin \alpha + F_{цб} - F_X = 0,$$

$$-T \cos \alpha - mg + F_Y = 0,$$

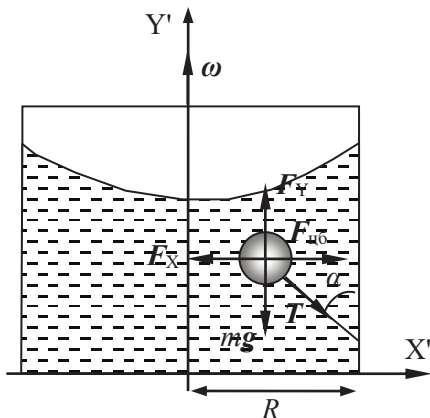


Рис. к решению задачи 3.34.

где $F_{цб} = m\omega^2 r$, $r = R - (r_0 + l)\sin\alpha$ – расстояние от шарика до оси вращения.

Выражения для составляющих выталкивающей силы можно представить в виде:

$$F_Y = \rho g V, F_X = \rho \omega^2 r V.$$

Здесь V – объем шарика.

Решая полученную систему уравнений, приходим к выражению для искомой угловой скорости вращения сосуда:

$$\omega = \sqrt{\frac{gtg\alpha}{R - (r_0 + l)\sin\alpha}}.$$

Заметим, что в полученное выражение вошли только геометрические параметры эксперимента. Этот ответ можно было бы получить, рассуждая несколько иначе. Относительно вращающегося сосуда, за счет появления центробежной силы инерции (массовой!) направление «вертикали» изменится – новая «вертикаль» будет направлена так же, как вектор

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_{\text{цб}}}{m}.$$

Тогда из векторного треугольника для ускорений можно записать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g},$$

откуда следует полученный выше ответ.

$$\mathbf{3.35.} \quad l = \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{V} \approx 7 \text{ см.}$$

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанной с Землей, оси которой направлены так, как показано на рисунке. Силы, действующие на пулю в процессе полета – сила гравитационного взаимодействия с Землей $F_{\text{гр}}$ и силы инерции – центробежная сила инерции $F_{\text{цб}}$ и сила инерции Кориолиса $F_{\text{Кор}}$ (см. рис. 1).

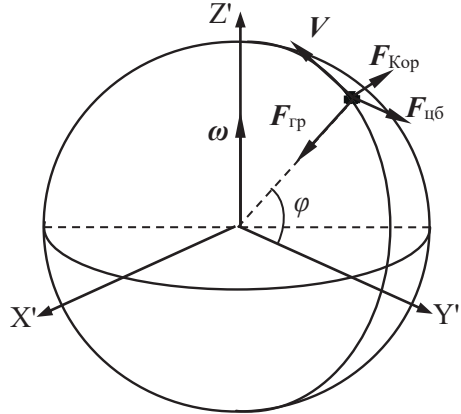


Рис.1 к решению задачи 3.35.

Отклонение пули от вертикальной черты мишени вызывает сила инерции Кориолиса.

Центробежная сила инерции имеет горизонтальную составляющую, и, следовательно, изменяет горизонтальную проекцию скорости пули. Однако учет центробежной силы инерции даст малые поправки к величине и направлению скорости полета пули.

Сила инерции Кориолиса, не меняя величины скорости пули, изменяет направление ее полета. При этом проекция скорости полета пули на направление выстрела практически не меняется. Поэтому будем считать, что в первом приближении движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью, равной начальной скорости пули.

Время полета пули t находим из условия равномерного движения в направлении выстрела:

$$t = \frac{s}{V}.$$

Ускорение в восточном направлении, перпендикулярном начальной скорости пули, определяется силой инерции Кориолиса (см. рис. 1) и равно

$$a = 2\omega V \sin \varphi.$$

Отклонение пули от вертикальной черты мишени при ускоренном движении в течение времени t равно

$$l = \frac{at^2}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим искомое значение отклонения от вертикальной черты мишени:

$$l = \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{V} \approx 7 \text{ см.}$$

Оценим изменение горизонтальной проекции скорости пули ΔV_τ под действием горизонтальной составляющей центробежной силы инерции $F_{цб}^\tau$. Уравнение движения пули в проекции на тангенциальную ось (см. рис. 2) имеет вид:

$$ma_\tau = F_{цб}^\tau.$$

Используя выражение для величины центробежной силы инерции $F_{цб} = -m[\omega[\omega r']]$, получаем для горизонтальной проекции ускорения пули:

$$a_\tau = -\omega^2 r \sin \varphi = -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi.$$

Изменение горизонтальной проекции скорости пули под действием центробежной силы инерции за время полета $t = s/V$ равно:

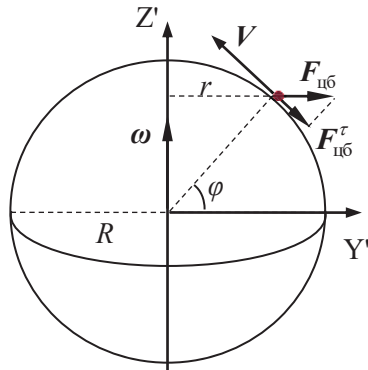


Рис. 2 к решению задачи 3.35.

$$\Delta V_\tau \cong a_\tau t = -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi \frac{S}{V}.$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин дает $\Delta V_\tau \cong -0,01 \text{ м/с} \ll V = 900 \text{ м/с}$, что подтверждает справедливость принятого допущения.

$$\mathbf{3.36.} \quad h = \frac{2\omega V L \sin \alpha}{g} \cong 1,3 \text{ см.}$$

Решение. Выделим мысленно небольшой объем жидкости вблизи ее поверхности и рассмотрим его движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с Землей. Оси системы координат и силы, действующие на элемент объема жидкости, сила тяжести mg , равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды N и сила инерции Кориолиса $F_{\text{Кор}}$, изображены на рисунке. Равнодействующая сил давления направлена перпендикулярно поверхности жидкости и образует угол α с вертикалью.

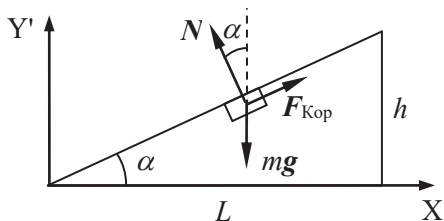


Рис. к решению задачи 3.36.

Жидкость движется в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, следовательно, векторная сумма сил, лежащих в плоскости чертежа, равна нулю.

Уравнение движения в проекциях на оси выбранной системы координат имеет вид:

$$-N \sin \alpha + F_{\text{Кор}} = 0,$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

Разность высот правого и левого берегов реки равна $h = Ltg \alpha$.

Для силы инерции Кориолиса справедливо выражение:

$$F_{\text{Кор}} = 2m\omega V \sin \varphi,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Решая полученную систему уравнений, определяем, что уровень воды у правого берега будет выше на величину

$$h = \frac{2\omega V L \sin \alpha}{g} \cong 1,3 \text{ см.}$$

3.37.
$$x' = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета $X'Y'Z'$, жестко связанной с Землей (см. рис.). На тело в процессе падения действуют сила гравитационного взаимодействия с Землей $F_{\text{гр}} = mg$, центробежная сила инерции $F_{\text{цб}}$ и сила инерции Кориолиса $F_{\text{кор}}$. Отклонение падающего тела от вертикали определяется действием силы инерции Кориолиса $F_{\text{кор}} = -2m[\omega V]$, где ω – угловая скорость вращения Земли, V – скорость тела.

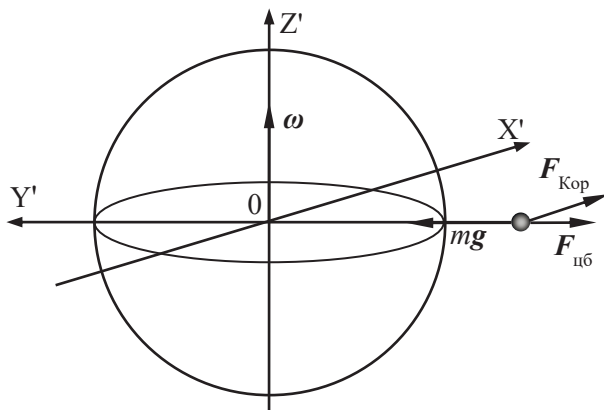


Рис. к решению задачи 3.37.

Уравнение движения тела в проекциях на оси X' и Y' имеет вид:

$$ma_{x'} = 2m\omega V_{y'}, \quad ma_{y'} = mg - m\omega^2 y'.$$

В последнем уравнении можно пренебречь величиной центробежной силы инерции по сравнению с силой тяжести (чтобы убедиться в том, что это можно сделать, достаточно оценить значение центростремительного ускорения $\omega^2 R_3$ вблизи

поверхности Земли и сравнить его с ускорением свободного падения g). Тогда в вертикальном направлении тело совершает свободное падение, и зависимость его скорости от времени (с учетом начального условия $V_0 = 0$) можно записать следующим образом:

$$V_{y'}(t) = gt.$$

Время движения при свободном падении с высоты h равно:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Интегрируя выражение для $a_{x'}$ с учетом записанного выражения для проекции скорости $V_{y'}(t)$, получаем зависимость от времени проекции скорости на ось X' :

$$V_{x'}(t) = \int_0^t a_{x'} dt = \omega g t^2.$$

Искомое отклонение тела от вертикали за все время падения равно:

$$x' = \int_0^{t_{\text{пад}}} V_{x'} dt = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3.38. Пуля отклонится к западу на расстояние $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_0^3 \omega \cos \varphi}{g^2} \approx 0,5$ м, где ω – угловая скорость вращения Земли.

3.39. Ствол ружья надо наклонить к востоку под углом $\alpha = \frac{2V_0 \omega \cos \varphi}{3g} \approx 51''$, где ω – угловая скорость вращения Земли.

$$\mathbf{3.40.} \quad \alpha = \frac{4\pi R}{vT}.$$

$$\mathbf{3.41.} \quad \varepsilon = \frac{4v_0 \omega_0}{D}.$$

3.42. $x = vt^2 \omega \sin \varphi = 5,8$ см, на запад (ω – угловая скорость вращения Земли).

$$3.43. y = \frac{4\omega v_0^3 \sin\varphi \cos\alpha \sin^2\alpha}{g^2} = 71 \text{ м, на юг } (\omega - \text{угловая}$$

скорость вращения Земли).

$$3.44. \text{ К востоку: } s_{\text{вост}} = \frac{2}{3} \omega t h \cos\varphi, \quad \text{к экватору:}$$

$s_{\text{эkv}} = \frac{1}{2} \omega t \sin\varphi \cdot s_{\text{вост}}$, где φ – широта местности, h – высота, с которой падает тело, t – время падения, ω – угловая скорость вращения Земли.

3.45. $F = 2mV\omega \sin\varphi$ (на правый по ходу поезда рельс), где ω – угловая скорость вращения Земли.

$$3.46. N = m \left(g - \frac{(\omega R \pm v)^2}{R} \right).$$

3.47. $R' = 2m\omega V \sin\varphi$, $V = \frac{\omega R \cos\varphi}{2}$, с востока на запад (ω – угловая скорость вращения Земли, R – радиус Земли).

3.48. Вертикальная составляющая равна $F_{\text{верт}} = 2m\omega \cos\varphi$, горизонтальная составляющая (направленная на юг) $F_{\text{гориз}} = 2m\omega \sin\varphi$, где ω – угловая скорость вращения Земли.

$$3.49. P = P_0 \left[1 - \frac{2\omega v \cos\varphi + v^2/R}{g} \right] \quad (R - \text{радиус Земли, } \omega -$$

угловая скорость вращения Земли).

$$3.50. \Delta v = \frac{2\omega v_0^2}{g - \omega^2 R} \quad (R - \text{радиус Земли, } \omega - \text{угловая скорость}$$

вращения Земли).

$$3.51. F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P, \text{ где } P - \text{вес тела на поверхности Земли, } T -$$

период вращения Земли, R – радиус Земли.

$$3.52. x(t) = 0, \quad y(t) = \frac{t^3}{3} g \omega, \quad z(t) = h - \frac{gt^2}{2} + \frac{t^4}{6} g \omega^2, \text{ где } \omega -$$

угловая скорость вращения Земли.

РАЗДЕЛ 4 РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

$$4.1. l_0 = c\Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2} = 4,5 \text{ м.}$$

Решение. Свяжем систему отсчета S' с движущимся стержнем. Пусть стержень, а значит и система S' , движутся со скоростью V вдоль оси X системы S . С такой же по величине скоростью, но в обратном направлении, движется метка относительно стержня. Определим события A и B , как моменты пролета метки мимо обоих концов стержня. Обозначим пространственно-временные координаты этих событий, как (x'_1, t'_1) и (x'_2, t'_2) в системе отсчета S' и как (x_1, t_1) и (x_2, t_2) в системе отсчета S (см. рис.).

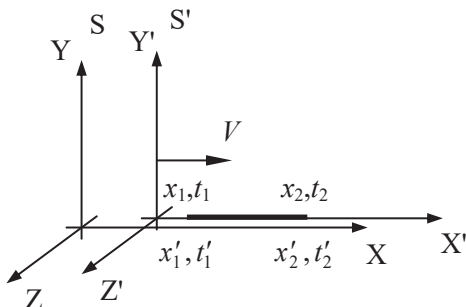


Рис. к решению задачи 4.1.

Искомая собственная длина стержня l_0 равна пространственному интервалу между событиями A и B в системе отсчета, связанной со стержнем — $l_0 = x'_2 - x'_1$. Поскольку метка движется относительно стержня со скоростью V , то

$$l_0 = V\Delta t',$$

где $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ — временной интервал между рассматриваемыми событиями в системе отсчета S' .

Для нахождения V запишем преобразования Лоренца для временных интервалов $\Delta t'$ и $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Заметим, что в данном случае сокращается интервал времени Δt , поскольку в системе отсчета S события А и В происходят в одной точке пространства $x_1 = x_2$ (наблюдается «замедление времени»).

Преобразуя записанные соотношения, находим собственную длину стержня

$$l_0 = V\Delta t' = c\Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2} = 4,5 \text{ м.}$$

$$4.2. V = \frac{2l_0 c^2 \Delta t}{(c\Delta t)^2 + l_0^2}.$$

$$4.3. l_0 = \frac{\Delta x(t_3 - t_2)}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (\Delta x/c)^2}}.$$

$$4.4. l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2} = 6 \text{ м, } v = c\sqrt{1 - (\Delta x_1 \Delta x_2)} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

4.5. Противоречия нет; в системе отсчета, связанной со стержнем, совпадение концов В и В' и А и А' стержня и трубки произойдет не одновременно; эти события будут разделены промежутком времени

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-l_0 V}{c\sqrt{c^2 - V^2}}.$$

4.6. $t_2 - t_1 = \frac{lV}{c^2 - V^2} = 2,0 \text{ мкс}$, частица, двигавшаяся впереди, распалась позже.

Решение. Свяжем систему отсчета S' с движущимися частицами. Пусть событие А состоит в распаде частицы, двигавшейся впереди, а событие В – в распаде частицы, двигавшейся сзади, пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета S равны (x_1, t_1) и (x_2, t_2) , а в системе отсчета S' – (x_1', t_1') и (x_2', t_2') , причем $t_1' = t_2'$. Собственное расстояние между частицами – это расстояние между ними в системе отсчета S', где частицы распались одновременно:

$$l_0 = x_1' - x_2'.$$

Согласно преобразованиям Лоренца, моменты времени t_1 и t_2 равны, соответственно:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Поскольку события А и В в системе отсчета S' происходят одновременно, то между этими событиями в S' наблюдается сокращение пространственного интервала по сравнению с системой S вдоль направления движения частиц. Собственное расстояние между частицами и расстояние между ними в лабораторной системе отсчета связаны соотношением:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Искомый промежуток времени между событиями А и В в системе отсчета S с учетом выражений для t_1 , t_2 и l_0 равен:

$$t_1 - t_2 = \frac{l_0 \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - (V/c)^2}},$$

а с учетом связи между l_0 и l окончательно получаем:

$$t_2 - t_1 = \frac{lV}{c^2 - V^2} = 2,0 \text{ мкс}.$$

Поскольку $t_1 - t_2 > 0$, то частица, двигавшаяся впереди, распалась позже частицы, двигавшейся сзади, в лабораторной системе отсчета.

$$4.7. \quad l = c\Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = 5,2 \text{ м}.$$

$$4.8. \text{ а) } \Delta t_0 = (l/v) \sqrt{1 - (v/c)^2} = 1,4 \text{ мкс},$$

$$\text{б) } l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} = 0,42 \text{ км}.$$

$$4.9. \quad l_0 = v\Delta t / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 17 \text{ м}.$$

4.10. $v = v_0 \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}$.

4.11. $v = v_0 \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c - V \cos \alpha}$.

4.12. $x_{A_j} = x'_{A_j} \sqrt{1 - (V/c)^2}$, $x_{B_k} = x_{B_k} \sqrt{1 - (V/c)^2}$;

$t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} x'_{A_j}$, $t_{B_k} = \frac{V}{c^2} x_{B_k}$.

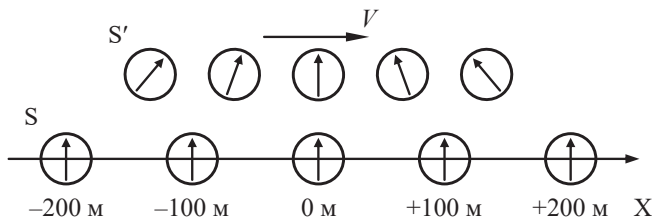


Рис.1 к решению задачи 4.12.

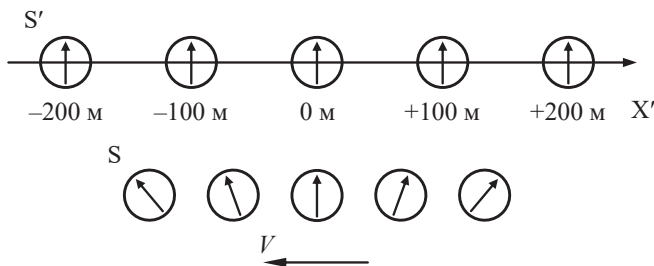


Рис. 2 к решению задачи 4.12.

Решение. Пусть событие A_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) заключается в том, что в момент времени $t_{A_j} = 0$ по часам системы S фиксируется показания j -ых часов, расположенных в системе S' в точке с координатой x'_{A_j} (принимаяющей значения -200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м для разных часов) в системе S' . Событие B_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) – фиксация показания k -ых часов системы S ,

имеющих координату x_{B_k} (-200 м, -100 м, 0 м, 100 м и 200 м) в системе S в момент времени $t'_{B_k} = 0$ по часам системы S' . Все события A_j происходят в один и тот же момент времени в системе S , а все события B_j происходят в один и тот же момент времени в системе S' .

Пространственно-временные координаты событий A_j и B_k в системах S и S' связаны преобразованиями Лоренца, полученными с учетом $t_{A_j} = 0$ и $t'_{B_k} = 0$:

$$x'_{A_j} = \gamma x_{A_j}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} \gamma x_{A_j};$$

$$x_{B_k} = \gamma x'_{B_k}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} \gamma x'_{B_k}.$$

Здесь t'_{A_j} – показания часов системы S' , x_{A_j} – координаты часов системы S' в системе S , t_{B_k} – показания часов системы S , x'_{B_k} –

координаты часов системы S в системе S' , $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$.

Решая записанную систему уравнений, получим:

$$x_{A_j} = \frac{1}{\gamma} x'_{A_j} = x'_{A_j} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} x'_{A_j};$$

$$x'_{B_k} = \frac{1}{\gamma} x_{B_k} = x_{B_k} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} x_{B_k}.$$

На рис. 1 показано расположение часов и положение их стрелок, соответствующее случаю, когда наблюдатель находится в системе S , а на рис. 2 – когда наблюдатель находится в системе S' .

Оценим максимальное различие в показаниях часов, которое соответствует часам, расположенным на максимальном расстоянии друг от друга. В соответствии с условием задачи $V = 0,9c$, $x'_{A_1} = x_{B_1} = -200$ м и $x'_{A_5} = x_{B_5} = 200$ м, следовательно:

$$\begin{aligned} t'_{A_5} - t'_{A_1} &= -\frac{V}{c^2} x'_{A_5} + \frac{V}{c^2} x'_{A_1} = \frac{V}{c^2} (x'_{A_1} - x'_{A_5}) = \\ &= -1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = -1,2 \text{ мкс} \end{aligned}$$

и

$$t_{B_3} - t_{B_1} = \frac{V}{c^2} x_{B_3} - \frac{V}{c^2} x_{B_1} = \frac{V}{c^2} (x_{B_3} - x_{B_1}) = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 1,2 \text{ мкс} .$$

$$4.13. \quad l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cos^2 \varphi_0} \approx 0,935 \text{ м},$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \operatorname{tg} \varphi_0 \right) \approx 49^\circ .$$

Решение. Определим два события – А и В, состоящие в том, что одновременно измерены положения двух концов стержня в системе S (см. рис.). Пусть пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета S равны (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2) , причем $t_1 = t_2$. В системе отсчета S' события А и В происходят не одновременно, их пространственно-временные координаты равны соответственно (x'_1, y'_1, t'_1) и (x'_2, y'_2, t'_2) .

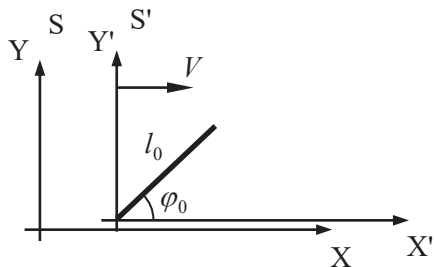


Рис. к решению задачи 4.13.

Собственная длина стержня равна:

$$l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 .$$

Интервалы $\Delta x'$ и $\Delta y'$ связаны с собственной длиной стержня l_0 и углом его наклона в системе отсчета S' соотношением:

$$\Delta x' = l_0 \cos \varphi_0 \quad \text{и} \quad \Delta y' = l_0 \sin \varphi_0 .$$

Поскольку события А и В происходят одновременно в системе отсчета S, то вследствие «сокращения длины» $\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'$. При

этом сокращение интервала Δy между координатами y_1 и y_2 наблюдаться не будет: $\Delta y = \Delta y'$.

Длина стержня l определяется его проекциями на оси системы отсчета S:

$$l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Угол наклона стержня в системе S:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Решая записанную систему уравнений, получаем длину стержня в системе отсчета S:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi_0} \approx 0,935 \text{ м.}$$

Угол наклона стержня в той же системе отсчета равен

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) \approx 49^\circ.$$

$$4.14. l_0 = l \sqrt{\frac{1 - (V/c)^2 \sin^2 \vartheta}{1 - (V/c)^2}} = 1,08 \text{ м.}$$

$$4.15. \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \vartheta, L' = \frac{\sqrt{3 + \cos^2 \vartheta}}{2}.$$

$$4.16. \Delta t = \frac{LV}{c^2} \approx 0,05 \text{ года} \approx 18 \text{ сут.}$$

Решение. Пусть S – инерциальная система отсчета, связанная с Землей и звездой, S' – инерциальная система отсчета, связанная с движущимся относительно Земли со скоростью V межзвездным кораблем. Определим события:

A – межзвездный корабль начал двигаться со скоростью V к звезде;

B – корабль долетел до звезды;

C – межзвездный корабль возвратился обратно на Землю.

Интервалы времени между событиями A и B и событиями B и C в системе отсчета S равны

$$T_{AB} = T_{BC} = \frac{L}{V}.$$

С точки зрения космонавта, находящегося в корабле, события А, В и события В, С происходят в одной точке пространства. Следовательно, для системы отсчета, связанной с кораблем, происходит сокращение интервала времени между событиями А, В и В, С, то есть наблюдается «замедление времени». Тогда в системе отсчета S':

$$T'_{AB} = T'_{BC} = \frac{L}{V\gamma}.$$

Время Δt , на которое часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю, равно:

$$\Delta t = (T_{AB} + T_{BC}) - (T'_{AB} + T'_{BC}).$$

Решая полученную систему уравнений относительно Δt получаем:

$$\Delta t = \frac{2L}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right).$$

По условию задачи $\beta = V/c \cong 0.33 \cdot 10^{-2} \ll 1$, следовательно, $1 - \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{V^2}{2c^2}$ и искомое время, на которое часы на корабле отстанут от земных часов, равно

$$\Delta t = \frac{LV}{c^2} \approx 0,05 \text{ года} \approx 18 \text{ сут.}$$

4.17. $V = c \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 0,6c$, $T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} \cong 1 \text{ месяц.}$

Решение. Определим события:

- А – испускание кораблем первого светового импульса;
- В – испускание кораблем второго светового импульса;
- А₁ – отражение первого импульса от поверхности Земли;
- В₁ – отражение второго импульса от поверхности Земли;
- А₂ – регистрация первого импульса кораблем;
- В₂ – регистрация второго импульса кораблем;
- С – прилет корабля на Землю.

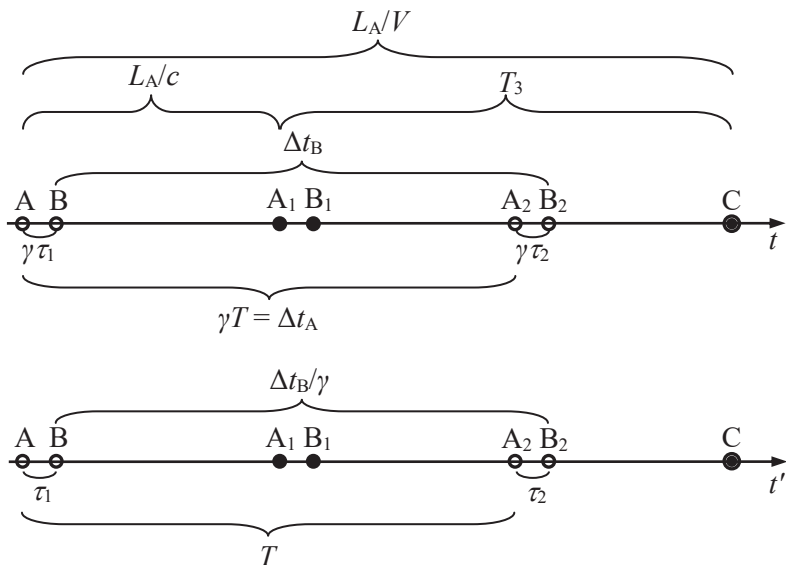


Рис. к решению задачи 4.17.

На рисунке схематично (без соблюдения масштаба) изображена временная последовательность указанных событий в системах отчета, связанных с Землей (верхняя на рисунке ось времени t) и с кораблем (нижняя ось t'). События, произошедшие на корабле, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на Земле, – закрашенными кружками. На рисунке изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи по часам корабля, – τ_1 , τ_2 и T . В соответствии с «замедлением времени» интервалы времени, соответствующие тем же парам событий, измеренные по земным часам, увеличиваются в γ раз.

Интервал времени Δt_A между событиями A и A_2 в системе отсчета, связанной с Землей, равен:

$$\Delta t_A = \frac{L_A + (L_A - V\Delta t_A)}{c},$$

где L_A – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие A в системе отсчета, связанной с Землей.

Вследствие «замедления времени» $\Delta t_A = \gamma T$.

Интервал времени Δt_B между событиями В и В₂ в системе отсчета, связанной с Землей, равен

$$\Delta t_B = \frac{L_B + (L_B - V\Delta t_B)}{c},$$

где L_B – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие В в системе отсчета, связанной с Землей. Интервал времени Δt_B выразим через заданные в задаче интервалы τ_1 , τ_2 и T (см. рис.):

$$\Delta t_B = \gamma T - \gamma \tau_1 + \gamma \tau_2.$$

Пройденный кораблем путь с момента испускания первого светового импульса до момента испускания второго светового импульса (пространственный интервал между событиями А и В) в системе отсчета, связанной с Землей (за время $\gamma \tau_1$), равен:

$$L_A - L_B = V\gamma \tau_1.$$

Искомый интервал времени между событиями А₁ и С:

$$T_3 = \frac{L_A}{V} - \frac{L_A}{c}.$$

Решая систему полученных уравнений, находим скорость движения корабля V и время T_3 , которое пройдет на Земле от момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля:

$$V = c \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 0,6c, \quad T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} \cong 1 \text{ месяц.}$$

$$4.18. \Delta t' = \tau \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} = 45 \text{ сут.}$$

$$4.19. \tau_2 = \tau_1 \left(\frac{c + V_1}{c - V_1} \right) \left(\frac{c - V_2}{c + V_2} \right).$$

$$4.20. l_0 = c\Delta\tau \frac{\tau_1}{\tau_2} = 600 \text{ м, } U = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2} c = \frac{3}{5} c.$$

Решение. Свяжем систему отсчета S с первым звездолетом, тогда второй звездолет, с которым свяжем систему отсчета S', будет двигаться относительно системы S со скоростью U (см. рис. 1).



Рис. 1 к решению задачи 4.20.

Определим события:

A и B – две ближайшие по времени вспышки, происходящие на носу первого звездолета;

A₁ и B₁ – регистрация этих вспышек на втором звездолете;

C – вспышка на корме первого звездолета, которая произошла одновременно в системе отсчета S со вспышкой на носу этого звездолета (событие A);

C₁ – регистрация на втором звездолете вспышки, произошедшей на корме первого звездолета.

На рис. 2 схематично изображена временная последовательность указанных событий в системах отсчета, связанных с первым (верхняя на рисунке ось времени t) и со вторым звездолетом (нижняя ось t').

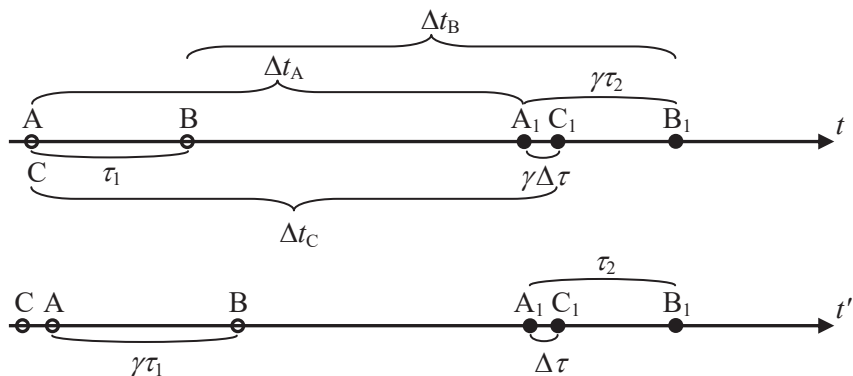


Рис. 2 к решению задачи 4.20.

События, произошедшие на первом звездолете, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на втором звездолете, – закрашенными кружками.

На рис. 2 изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи, – τ_1 , τ_2 и $\Delta\tau$. Эти интервалы

времени относятся к событиям, происходящим в одной точке пространства, – А и В в системе S (интервал τ_1), A_1 и B_1 в системе S' (интервал τ_2), A_1 и C_1 в системе S' (интервал $\Delta\tau$). В соответствии с «замедлением времени» эти интервалы времени, соответствующие тем же парам событий, измеренные по часам другой системы отсчета, увеличиваются в $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (U/c)^2}}$ раз.

Пусть в момент вспышки света на носу первого звездолета (событие А) второй звездолет находился на расстоянии L_A в системе отсчета S. Тогда интервал времени Δt_A между событиями А и A_1 в этой системе отсчета с учетом скорости сближения звездолетов равен:

$$\Delta t_A = \frac{L_A}{c + U}.$$

Вспышка света на корме первого звездолета (событие С), произошедшая одновременно с первой вспышкой на его носу (событие А) будет зарегистрирована на втором звездолете через время Δt_C по часам первого звездолета:

$$\Delta t_C = \frac{L_A + l_0}{c + U}.$$

Интервал времени Δt_B между событиями В и B_1 в системе отсчета S с учетом уменьшения расстояния между звездолетами за время τ_1 равен:

$$\Delta t_B = \frac{L_A - U\tau_1}{c + U}.$$

Рассматриваемые интервалы времени связаны между собой соотношениями (см. рис. 2):

$$\Delta t_C = \Delta t_A + \gamma\Delta\tau, \quad \Delta t_B = \Delta t_A - \tau_1 + \gamma\tau_2.$$

Решая полученную систему уравнений относительно искомых величин l_0 и U , получаем:

$$l_0 = c\Delta\tau \frac{\tau_1}{\tau_2} = 600 \text{ м}, \quad U = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2} c = \frac{3}{5} c.$$

$$4.21. \quad V = Tc / \sqrt{4\tau_0^2 + T^2}.$$

$$4.22. L = \frac{v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} T, \text{ где } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}.$$

$$4.23. 1) t_2 = \frac{t_1}{1-V/c} = 10 \text{ с}, 2) t_3 = \left(1 + \frac{V}{c}\right)t_1 = 9,9 \text{ с}, 3) x_2 = Vt_2,$$

$$4) t_4 = \frac{1+V/c}{1-V/c}t_1 = 11 \text{ с}.$$

$$4.24. S = (24/25)c\Delta t'\gamma = 72 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

$$4.25. |\Delta x'|_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} = 4 \text{ м}, |\Delta t'|_{\min} = 0,$$

$$V = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{5}c, \text{ данные события не могут быть связаны}$$

причинно-следственной связью.

Решение. Величина квадрата пространственно-временного интервала между событиями:

$$S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = -16\text{м}^2 < 0,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$. Так как $S_{12}^2 < 0$, то интервал между рассматриваемыми событиями – пространственно-подобный, и поэтому события А и В не могут быть связаны причинно-следственной связью.

Поскольку пространственно-временной интервал инвариантен ($S_{12} = S'_{12}$), то величина $|\Delta x'|$ будет минимальна в системе S' , когда $\Delta t' = 0$. Следовательно, $|\Delta t'|_{\min} = 0$ в той же системе отсчета S' .

Для определения скорости системы отсчета S' можно воспользоваться одним из преобразований Лоренца:

$$\Delta t' = \left(\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}\right)\gamma,$$

отсюда при $\Delta t' = 0$, получим:

$$\beta = \frac{V}{c} = c \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \text{ и } V = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}.$$

Используя численные значения пространственно-временных координат событий, получим значения искомых величин:

$$|\Delta x'|_{\min} = 4 \text{ м}, \beta = \frac{3}{5} \text{ и } V = \frac{3}{5}c.$$

4.26. $V = \frac{c^2 \tau}{l} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с} .$

4.27. $V = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с} .$

4.28. $\Delta t'_{AB} = 1,33 \cdot 10^{-8} \text{ с} , \quad \Delta x'_{AC} = 4 \text{ м} ;$ причинно-следственная связь возможна между событиями А и В; причинно-следственная связь между событиями В и С может существовать в том случае, если сигнал передается со скоростью света.

4.29. $v_{\text{сблж}} = v_1 + v_2 , \quad v_{\text{отн}} = -\frac{(v_1 + v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} .$

4.30. $|v_{\text{отн}}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos^2 \alpha - \frac{v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}} .$

Решение. Пусть S – лабораторная инерциальная система отсчета. Свяжем систему отсчета S' с первой частицей (см. рис.).

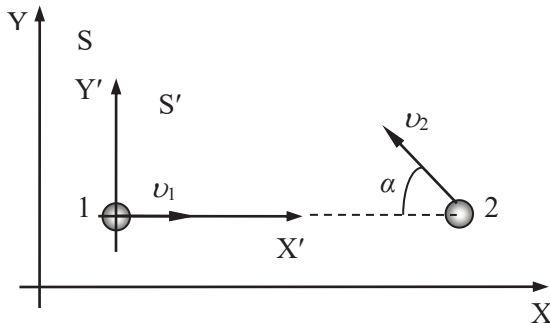


Рис. к решению задачи 4.30.

Для нахождения относительной скорости воспользуемся формулами преобразования компонент скорости, а также выражением для модуля скорости:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} , \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} ,$$

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2(1 - (V/c)^2)}}{1 - v_x V/c^2}.$$

Здесь v_x, v_y – компоненты скорости второй частицы относительно системы отсчета S, v_x', v_y' – относительно системы отсчета S', движущейся относительно системы S со скоростью $V = v_1$.

В соответствии с условием задачи $v_{2x} = -v_2 \cos \alpha$, $v_{2y} = v_2 \sin \alpha$.

Относительная скорость частиц равна:

$$|v_{\text{отн}}| = v' = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos^2 \alpha - \frac{v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}.$$

$$4.31. V = \frac{2v}{1 + (v/c)^2} = 0,6c.$$

$$4.32. v_{\text{сбл}} = (a_1 + a_2)c > c, |v_{\text{отн}}| = \frac{(a_1 + a_2)c}{1 + a_1 a_2} < c.$$

$$4.33. l = \frac{l_0}{(1 + v_1 v_2 / c^2)} \sqrt{1 + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} - \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{c^2}}.$$

$$4.34. |v_{\text{отн}}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}.$$

$$4.35. s = \Delta t_0 \sqrt{\frac{V^2 + (1 - \beta^2)v'^2}{(1 - \beta^2)(1 - v'^2/c^2)}}, \text{ где } \beta = V/c.$$

$$4.36. \varphi = \arctg \left(\frac{\sin \varphi' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi' + V/v'} \right).$$

Решение. S – лабораторная система отсчета, а S' – система отсчета, движущаяся относительно S со скоростью V в направлении оси X (см. рис.). В системе отсчета S компоненты вектора скорости частицы равны v_x и v_y , в системе S' – соответственно v_x' и v_y' .

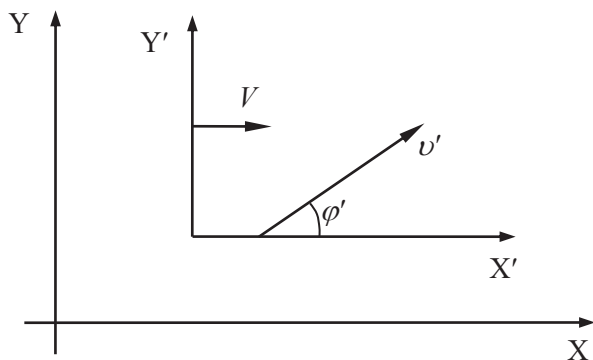


Рис. к решению задачи 4.36.

Для тангенсов углов φ' и φ справедливы соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{v'_y}{v'_x}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}.$$

Для нахождения v_x и v_y воспользуемся формулами преобразования скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} v'_x}.$$

Компоненты скорости v'_x и v'_y могут быть представлены в виде:

$$v'_x = v' \cos \varphi', \quad v'_y = v' \sin \varphi'.$$

Дальнейшие преобразования приводит к следующему выражению для искомого угла φ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi' + V/v'} \right).$$

$$4.37. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha'}{2 \cos \alpha' + \sqrt{2}}.$$

$$4.38. \varphi' = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi - V/v'} \right).$$

$$4.39. \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \right); \quad \text{классическая формула}$$

$\theta = \operatorname{arctg}(V/c)$ и релятивистская формулы совпадают с точностью до $(V/c)^3$.

Решение. В системе отсчета S' (система отсчета, движущейся со скоростью V относительно лабораторной системы отсчета S) луч света распространяется вдоль положительного направления оси OY' (см. рис.). Обозначим искомый угол за θ .

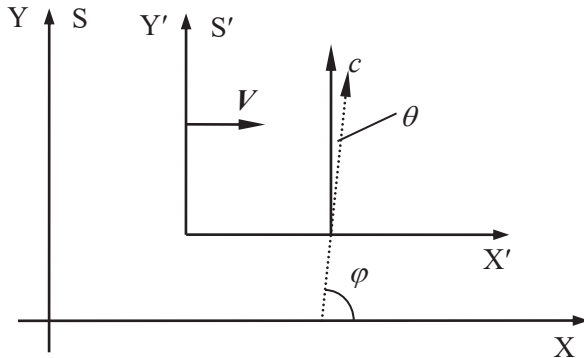


Рис. к решению задачи 4.39.

Вспользуемся результатом решения задачи 4.36. В данном случае $v' = c$ и $\varphi' = 90^\circ$. Тогда для угла, который составит луч с осью OX системы S получаем следующее выражение:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{V/c} \right).$$

Искомый угол – дополнительный к углу φ ($\varphi + \theta = 90^\circ$). Поэтому для угла θ имеем:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \right).$$

В соответствии с классическими формулами сложения скоростей получаем:

$$v'_x = 0, v'_y = c, v'_z = 0,$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}.$$

$$v_x = V, v_y = c, v_z = 0,$$

$$\theta = \arctg(V/c).$$

Воспользовавшись разложением выражения $\sqrt{1-(V/c)^2}$ по малому параметру V/c , обнаруживаем, что классическая и релятивистская формулы совпадают с точностью до $(V/c)^3$.

$$4.40. v_x \approx \frac{c}{n} \pm V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Решение. S – лабораторная система отсчета, а система S' – система отсчета, связанная с движущейся водой. Направим ось OX системы отсчета S по направлению скорости течения, ось OX' системы S' – параллельно ей. Тогда V – скорость движения системы S' относительно S. Пусть направление распространения света совпадает с направлением скорости V. В системе S' скорость света равна:

$$v'_x = c/n.$$

Для нахождения скорости света относительно лабораторной системы отсчета S воспользуемся формулой преобразования скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}.$$

Подставляя первое выражение во второе, получаем:

$$v_x = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{\frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{V^2}{cn}}{\left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{V^2}{c^2} \right)}.$$

Скорость воды $V \ll c$, следовательно знаменатель с точностью до $(V/c)^2$ можно считать равным единице. Тогда

$$v_x = \frac{c}{n} \left[1 + \frac{V}{c/n} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{V^2}{c^2} \right] \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

также с точностью до $(V/c)^2$.

Если направление распространения света противоположно направлению течения воды, аналогичным образом получаем:

$$v_x \approx \frac{c}{n} - V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$4.41. l'_1 = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}.$$

$$4.42. U = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

$$4.43. \varphi = \arctg \left(\frac{UV}{c^2 \sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) \cong 27,7^\circ.$$

$$4.44. a'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta v_x/c)^3} a_x, \quad a'_y = 0.$$

Решение. Пусть S – система отсчета, относительно которой частица движется со скоростью v и ускорением a в направлении оси X . Система отсчета S' движется относительно S со скоростью V в положительном направлении оси X .

Запишем каждую проекцию ускорения частицы в системе отсчета S' следующим образом:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt} \frac{1}{dt'/dt},$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{dv'_y}{dt} \frac{1}{dt'/dt}.$$

Для проекций скорости частицы воспользуемся формулами преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}.$$

Используя преобразование Лоренца $t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$ и

учитывая, что $v_y = 0$, находим:

$$\frac{dv'_x}{dt} = \frac{a_x(1-\beta^2)}{\left(1-\frac{\beta v_x}{c}\right)^2}, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right),$$

где $\beta \equiv V/c$.

Преобразуя записанные соотношения, получим:

$$a'_x = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta v_x/c)^3} a_x, \quad a'_y = 0.$$

4.45. $a'_x = 0$, $a'_y = (1-\beta^2)a_y$, где $\beta \equiv V/c$.

$$\mathbf{4.46.} \quad s = \frac{c^2}{a'} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a'\tau}{c}\right)^2} - 1 \right).$$

Решение. Воспользуемся связью между ускорением a' ракеты в сопутствующей системе отсчета и ускорением a (см. решение задачи **4.44**):

$$a'_x = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta v_x/c)^3} a_x,$$

где $\beta = V/c$.

Преобразуем записанное соотношение, учитывая, что $a'_x = a'$, $a_x = a$, $V = v_x = v$ (v – скорость ракеты в момент времени t):

$$a' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt}.$$

Проинтегрируем это выражение по времени t при $a' = \text{const}$:

$$\int_0^t a' dt = \int_0^t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv,$$

$$\frac{a't}{c} = \int_0^t (1-u^2)^{-3/2} d(u),$$

где введено обозначение $u = v/c$. Используя подстановку

$z = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ и проводя несложные преобразования, получаем

выражение для скорости:

$$v = \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}}.$$

Интегрируя полученное выражение, определяем искомое расстояние, пройденное ракетой:

$$s = \int_0^{\tau} \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}} dt = \frac{c^2}{a'} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a'\tau}{c}\right)^2} - 1 \right).$$

$$4.47. v = \frac{a'\tau}{\sqrt{1 + (a'\tau/c)^2}}.$$

$$4.48. \tau_0 = \frac{c}{a'} \ln \left[\frac{a'\tau}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{a'\tau}{c}\right)^2} \right].$$

$$4.49. v(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}.$$

Решение. Уравнение движения частицы в проекции на ось, направленную вдоль силы \mathbf{F} , имеет вид:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Релятивистский импульс частицы равен:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Следовательно:

$$d \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = F dt.$$

Интегрируя полученное выражение с учетом начального условия $v(t=0) = 0$ и постоянства силы \mathbf{F} , получаем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = Ft.$$

Следовательно, искомая скорость равна:

$$v(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}}.$$

Сравним полученное выражение с выражением для скорости $v_{\text{кл}}$, получаемым в классическом случае. Согласно второму закону Ньютона,

$$a = \frac{F}{m},$$

$$v_{\text{кл}} = at = \frac{Ft}{m}.$$

Представим выражение для скорости в релятивистском случае с учетом записанного выражения для классического случая в виде:

$$v(t) = \frac{v_{\text{кл}}(t)}{\sqrt{1+(v_{\text{кл}}(t)/c)^2}}.$$

Скорость в релятивистском случае растет со временем медленнее, чем в классическом, причем при $t \rightarrow \infty$ скорость $v \rightarrow c$. Импульс частицы при этом будет расти линейно со временем: $p = Ft$.

$$4.50. t = \frac{2mV_0}{eE\sqrt{1-(V_0^2/c^2)}}, L = \frac{2mc^2(\gamma-1)}{eE}.$$

$$4.51. v = \frac{c}{\sqrt{1+(mc/Ft)^2}}, s = \frac{(\sqrt{1+(Ft/mc)^2}-1)mc^2}{F}.$$

$$4.52. v_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}, v_y = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}},$$

$$x(t) = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsh}\left(\frac{ceEt}{E(0)}\right), y(t) = \frac{1}{eE} \sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2} - \frac{E(0)}{eE},$$

где $E(0) = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}$.

$$4.53. E = ecBR = 7000 \text{ ГэВ}.$$

Решение. Ось X лабораторной системы отсчета направим к центру окружности, по которой движутся протоны. Релятивистский импульс частицы массой m , движущейся со скоростью v , равен:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Полная энергия частицы (протона) выражается формулой:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma mc^2.$$

Релятивистское уравнение движения частицы с импульсом p , на которую действует сила F , имеет следующий вид:

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

где $F = e[v \times B]$, e – заряд протона (равный по модулю заряду электрона).

Это выражение можно преобразовать следующим образом, учитывая, что скорость протона при движении по окружности не изменяется по модулю и изменяется по направлению:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(m\gamma v)}{dt} = m\gamma \frac{dv}{dt} = m\gamma a.$$

Центростремительное ускорение протона равно $a = v^2/R$.

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{eBR}{mc}\right)^2} \approx ecBR = 7000 \text{ ГэВ}.$$

$$4.54. F = \frac{I}{ec} \sqrt{T(T + 2mc^2)}.$$

Решение. Сила, с которой мишень действует при ударе на частицу (а значит, по третьему закону Ньютона, и частица на мишень) связана с изменением импульса частицы соотношением:

$$F_0 = \frac{|\Delta p|}{\Delta t},$$

где $|\Delta p| = p$, а Δt – время взаимодействия. Тогда сила, которая действует на мишень со стороны частиц пучка выражается следующим образом:

$$F = NF_0 = N \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = N \frac{p}{\Delta t},$$

где N – число частиц, попавших в мишень за время Δt .

Сила тока в пучке равна $I = \frac{Ne}{\Delta t}$.

Используя соотношения $m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ и $E = T + mc^2$, получаем связь импульса частицы и ее кинетической энергии:

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2Tmc^2)}}{c}.$$

Следовательно, искомая сила давления пучка на мишень равна

$$F = \frac{I}{ec} \sqrt{T(T + 2Tmc^2)}.$$

4.55. $m = \frac{2W}{cg} = 10^{-4}$ г.

4.56. $p = \sqrt{T(T + 2Tmc^2)} / c$.

4.57. а) $3 \cdot 10^7$ м/с, б) $2.5 \cdot 10^8$ м/с, в) $3 \cdot 10^8$ м/с.

4.58. $v = \frac{2pT}{p^2 + T^2 / c^2}$.

4.59. $T' = \frac{2T(T + 2Tmc^2)}{mc^2} = 5 \cdot 10^3$ ГэВ.

Решение. Выберем неподвижную инерциальную лабораторную систему отсчета S, относительно которой движутся протоны, и движущуюся систему отсчета S', относительно которой один из протонов покоится.

Воспользуемся инвариантностью величины

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 c^2 = m^2 c^4,$$

где $\sum_{i=1}^n E_i$ и $\sum_{i=1}^n p_i$ – соответственно полная энергия и импульс

системы из n невзаимодействующих частиц, m – масса системы. Запишем эту величину первый раз в S – системе, а второй раз – в системе S', относительно которой один из протонов покоится и приравняем эти величины:

$$(2E)^2 = (E_0 + E')^2 - (\mathbf{p}')^2 c^2.$$

Здесь учтено, что относительно системы S суммарный импульс системы протонов равен нулю, а относительно системы S' один из

протонов покоится, поэтому его полная энергия равна энергии покоя

$$E_0 = mc^2,$$

а второй протон движется, и его полная энергия равна некоторому значению E' , а импульс – величине p' .

Полная энергия и импульс релятивистской частицы, в данном случае – второй частицы, следующим образом связаны с ее кинетической энергией T' :

$$E' = T' + mc^2, \quad p' = \frac{\sqrt{T'(T' + 2mc^2)}}{c}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$(2(T' + mc^2))^2 = (mc^2 + (T' + mc^2))^2 - T'(T' + 2mc^2).$$

Следовательно, искомая кинетическая энергия T' одного протона в системе отсчета, относительно которой другой протон покоится, равна:

$$T' = \frac{2T(T + 2mc^2)}{mc^2} = 5 \cdot 10^3 \text{ ГэВ.}$$

$$4.60. \quad Mc^2 = 2E = 1.4 \cdot 10^4 \text{ ГэВ.}$$

$$4.61. \quad E' = mc^2 \left(2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 \right) = 1,1 \cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

$$4.62. \quad |V| = \frac{c\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{3(mc^2 + T)}.$$

Решение. Ось X лабораторной системы отсчета направим вдоль импульса первой частицы. Запишем закон сохранения полной энергии для частиц на интервале времени «до соударения, после соударения»:

$$E_1 + E_2 = E.$$

Закон сохранения импульса для частиц на том же интервале времени имеет вид

$$p_1 + p_2 = p,$$

а в проекциях на ось X лабораторной системы отсчета:

$$p_1 - p_2 = p.$$

Запишем также выражения для полной энергии и релятивистского импульса составной частицы

$$E = \gamma M c^2, \quad \mathbf{p} = \gamma M \mathbf{V},$$

что позволяет получить выражение для скорости составной частицы, получившейся в результате соударения:

$$V = \frac{pc^2}{E}.$$

Взаимосвязь импульса и кинетической энергии для релятивистской частицы и выражение для ее полной энергии имеют вид:

$$p^2 c^2 = T(T + 2mc^2), \quad E = T + mc^2.$$

Для первой и второй частиц запишем:

$$p_1^2 c^2 = T_1(T_1 + 2m_1 c^2), \quad p_2^2 c^2 = T_2(T_2 + 2m_2 c^2).$$

Полная энергия соударяющихся частиц равна:

$$E = E_1 + E_2 = T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2.$$

Преобразуя полученные соотношения, находим искомую скорость составной частицы:

$$V = \frac{(p_2 - p_1)c^2}{E_1 + E_2} = \frac{-c\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{3(mc^2 + T)}.$$

$$4.63. \quad M = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2m_1 T}}{c}, \quad V = \frac{c\sqrt{T(T + 2m_2 c^2)}}{(m_1 + m_2)c^2 + T}.$$

$$4.64. \quad v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2}.$$

$$4.65. \quad \text{а) } \tilde{T} = 2mc^2 \sqrt{1 + T/2mc^2} - 1, \quad \text{б) } p = \sqrt{\frac{mT}{2}}.$$

$$4.66. \quad \theta = 2 \arcsin \left(\frac{mc^2}{\sqrt{E_1 E_2}} \right).$$

Решение. Выберем лабораторную систему отсчета S , относительно которой первоначально двигался π -мезон, и систему отсчета S' , связанную с π -мезоном.

Воспользуемся инвариантностью величины

$$m^2 c^4 = \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right)^2 c^2.$$

Запишем эту величину до распада π -мезона относительно системы отсчета S' , связанной с ним а сразу после распада – относительно лабораторной системы отсчета S :

$$m^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2,$$

где p_1 и p_2 – импульсы разлетающихся фотонов.

Учтем связь энергии и импульса фотонов:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{E_1}{c^2} \mathbf{c}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{E_2}{c^2} \mathbf{c}.$$

Преобразуем инвариант

$$m^2 c^4 = E_1^2 + 2E_1 E_2 + E_2^2 - \mathbf{p}_1^2 c^2 - \mathbf{p}_2^2 c^2 - 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 c^2$$

с учетом выражений для импульсов и представим их скалярное произведение через угол θ между ними:

$$m^2 c^4 = 2E_1 E_2 - 2E_1 E_2 \cos \theta.$$

Преобразуя записанное соотношение, получаем:

$$\theta = 2 \arcsin \left(\frac{m c^2}{2 \sqrt{E_1 E_2}} \right).$$

4.67.

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{(m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2 \left(\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)} \sqrt{(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta \right)}$$

$$\mathbf{4.68.} \quad \Delta m = \frac{I(4\pi R^2)}{c^2} \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{ кг.}$$

Решение. Энергия, переносимая через площадь сферы, радиус которой равен расстоянию от Солнца до Земли, равна

$$E = I \cdot 4\pi R^2.$$

Связь между массой и энергией имеет вид:

$$E = \Delta m c^2.$$

Искомая масса равна:

$$\Delta m = \frac{I(4\pi R^2)}{c^2} \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{ кг.}$$

4.69. $Q = 17,7 \text{ МэВ.}$

Решение. Применим к данной реакции закон сохранения полной энергии:

$$E_1 + E_2 = E_3,$$

где E_1 , E_2 , E_3 – полные энергии частиц, участвующих в реакции.

Полная энергия частицы может быть представлена в виде:

$$E = mc^2 + T,$$

где T – кинетическая энергия частицы.

Из записанных выражений получаем:

$$(m_1c^2 + T_1) + (m_2c^2 + T_2) = (m_3c^2 + T_3),$$

где $m_1 = m({}_3^7\text{Li})$, $m_2 = m({}_1^1\text{H})$, $m_3 = m({}_2^4\text{He})$ – массы ядер, T_1 , T_2 , T_3 – их кинетические энергии.

Преобразуем последнее из записанных выражений следующим образом:

$$(m_1 + m_2 - m_3)c^2 = T_3 - (T_1 + T_2).$$

Здесь в левой части стоит выражение для дефекта масс составного ядра, а в правой части – приращение суммарной кинетической энергии рассматриваемых ядер. Это приращение называется *энергетическим выходом ядерной реакции*. Обозначим эту величину Q :

$$Q = T_3 - (T_1 + T_2).$$

Подставляя в полученное выражение численные данные из условия задачи и учитывая, что 1 а.е.м. = 931,4 МэВ, получаем: $Q = 17,7$ МэВ.

4.70. $E_{\text{уд}} = 6,8$ МэВ.

4.71. $V = c \frac{M_0^2 - M^2}{M_0^2 + M^2} = \frac{3}{5}c.$

4.72. $A = 0,42mc^2$. В нерелятивистском случае $A = 0,14mc^2$.

4.73. $\frac{\Delta E}{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) c^2 = 3,6 \cdot 10^{17}$ Дж/кг.

РАЗДЕЛ 5

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$5.1. v_x = v_0(1 + \cos\varphi) = 2v_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad v_y = -v_0 \sin\varphi,$$

$$v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = -\arctg\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2}.$$

5.2. Задача имеет два решения:

$$1) v_{01} = -3v_A, \quad \omega_1 = 4 \frac{v_A}{R}, \quad y_{M1} = \frac{7}{4}R;$$

$$2) v_{02} = 4v_A, \quad \omega_2 = -3 \frac{v_A}{R}, \quad y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

Решение. При движении колеса не происходит его отрыва от горизонтальной поверхности, следовательно, скорость нижней точки обода колеса, может быть направлена только вдоль поверхности. Мгновенная ось вращения проходит через одну из точек вертикального диаметра колеса и может находиться как выше, так и ниже поверхности, по которой катится колесо.

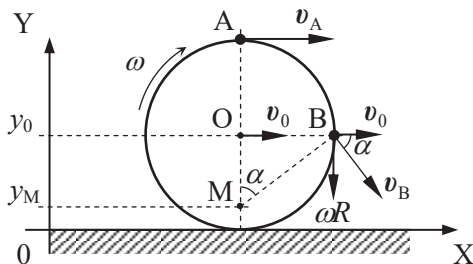


Рис. к решению задачи 5.2.

Пусть y_M – координата мгновенной оси вращения в лабораторной системе отсчета. Введем вторую систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с центром колеса со скоростью v_0 относительно лабораторной системы, с осями координат, параллельными осям лабораторной системы координат X и Y .

В движущейся со скоростью v_0 системе отсчета модули скоростей точек обода колеса A и B одинаковы и равны $|\omega R|$. Для мо-

дулей этих скоростей относительно лабораторной системы отсчета можно записать:

$$v_A = v_0 + \omega R, \quad v_B = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}.$$

Здесь и далее положительным значениям ω соответствует вращение колеса по часовой стрелке.

Воспользуемся очевидными геометрическими соотношениями:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega R}{v_0}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{R - y_M},$$

где α – угол между скоростью точки В и направлением движения центра колеса.

Используя приведенные соотношения, получим уравнение относительно угловой скорости ω вращения колеса:

$$\omega^2 - \omega \frac{v_A}{R} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2R^2} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, определим два значения угловой скорости:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_A}{2R} \pm \frac{1}{2R} \sqrt{2v_B^2 - v_A^2}.$$

По условию задачи $v_B = 5v_A$, следовательно:

$$\omega_1 = 4 \frac{v_A}{R} \quad \text{и} \quad \omega_2 = -3 \frac{v_A}{R}.$$

Этим значениям угловой скорости вращения колеса соответствуют два значения скорости центра колеса:

$$v_{01} = -3v_A \quad \text{и} \quad v_{02} = 4v_A.$$

Для координаты мгновенной оси вращения, получаем следующее выражение:

$$y_M = R - \frac{v_0}{\omega}.$$

Для различных значений скорости колеса получаем два значения координаты мгновенной оси вращения:

$$y_{M1} = \frac{7}{4}R, \quad y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

$$\mathbf{5.3.} \quad v_N(t) = v_0(t) \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}, \quad v_C(t) = v_0(t) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2},$$

$$v_A = 2\omega R, \quad v_B = \sqrt{2}\omega R, \quad v_M = 0,$$

$$a_N(t) = \sqrt{2a_0^2(1 + \cos\varphi) + \frac{v_0^4(t)}{R^2} - 2a_0 \frac{v_0^2(t)}{R} \sin\varphi},$$

$$a_C(t) = \sqrt{\left(\frac{v_0^2(t)}{R^2} r + a_0\right)^2 + \left(\frac{r}{R} a_0\right)^2}, \quad a_A(t) = \sqrt{4a_0^2 + \frac{v_0^4(t)}{R^2}}.$$

$$\begin{aligned} 5.4. \quad x &= R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t), \\ y &= R(1 - \cos\varphi) = R(1 - \cos\omega t), \end{aligned}$$

где $\varphi = \omega t$, а $\omega = v/R$ – угловая скорость вращения колеса. Траекторией точек, находящихся на ободе движущегося колеса, является циклоида, уравнение которой получено в параметрическом виде.

$$5.5. \quad S = 8R.$$

5.6. $a_{\text{top}} = \frac{v^2}{R} \sin\varphi$, $a_{\text{верт}} = \frac{v^2}{R} \cos\varphi$, при равномерном вращении полное ускорение всегда направлено к центру колеса.

$$5.7. \quad h_{\text{max}} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}, \quad \cos\varphi = -\frac{Rg}{v^2},$$

где φ – угловая координата искомой точки на ободе колеса.

$$5.8. \quad v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{2R}, \quad l = \frac{R(v_1 + v_2)}{v_1 - v_2}.$$

$$5.9. \quad y_M = \frac{v_2(R+r)}{v_1 - v_2}, \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{(R+r)}, \quad v = \frac{v_1 R + v_2 r}{R+r}.$$

$$5.10. \quad t = \sqrt{\frac{2L(n-1)(R-r)}{na_A r}}.$$

$$5.11. \quad v_0 = \frac{Vn}{n \cos\alpha - 1}.$$

$$5.12. \quad v_0 = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}.$$

$$5.13. \quad v_{M1} = \frac{v(\sqrt{5}+1)}{4}, \quad v_{M2} = \frac{v(\sqrt{5}-1)}{4}, \quad \text{вектора } v_{M1} \text{ и } v_{M2} \text{ перпендикулярны отрезку } CM.$$

$$5.14. v_0 = v_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м/с}; v_0 = v_B = 2 \text{ м/с.}$$

Решение. Мгновенная ось вращения перпендикулярна плоскости и находится на пересечении перпендикуляров, проведённых к векторам скоростей точек стержня (А, В и центра стержня) (см. рис.). Поскольку скорости точек А и В взаимно перпендикулярны по условию задачи, то мгновенная ось вращения будет пересекать плоскость чертежа в точках, лежащих на окружности, диаметром которой является отрезок АВ. Мгновенные оси вращения могут проходить через точки М и N, являющиеся точками пересечения окружности и проведенного к скорости v_0 перпендикуляра.

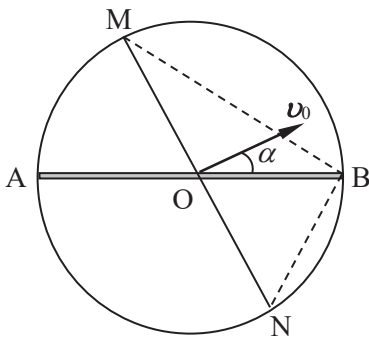


Рис. к решению задачи 5.14.

В случае, когда мгновенная ось проходит через точку М,

$$v_B = \omega \cdot BM, v_0 = \omega \cdot OM,$$

где ω – угловая скорость вращения стержня. Искомая скорость равна $v_0 = v_B \cdot \frac{OM}{BM}$.

В треугольнике МОВ угол МОВ равен 120° . Пусть радиус окружности равен R , тогда $BM = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$. Отсюда

$$v_0 = v_B \cdot \frac{R}{R\sqrt{3}} = v_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м/с.}$$

В случае, когда мгновенная ось проходит через точку N,

$$v_B = \omega \cdot BN, v_0 = \omega \cdot ON, v_0 = v_B \cdot \frac{ON}{BN}.$$

В треугольнике NOB угол NOB равен 60° , $NB = R$.

$$v_0 = v_B = 2 \text{ м/с.}$$

$$5.15. \omega = \Omega \left(\frac{r-R}{r} \right), \omega' = -\Omega \frac{R}{r}.$$

$$5.16. \omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2r_3}, \nu_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}.$$

Решение. Скорости точек А и В связаны с их угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соотношениями:

$$\nu_A = \omega_2 r_2, \nu_B = \omega_1 r_1.$$

Мгновенная ось вращения третьего колеса, относительно которой колесо вращается с угловой скоростью ω , проходит через точку М (см. рис.), лежащую на расстоянии r_x от точки О. Тогда

$$\nu_A = \omega(r_1 - r_x + 2r_3),$$

$$\nu_B = \omega(r_1 - r_x),$$

$$\nu_0 = \omega(r_1 - r_x + r_3).$$

Решая систему уравнений, получим:

$$\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2r_3}, \nu_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}.$$

$$5.17. \omega = \frac{h}{r} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2,79 \text{ рад/с.}$$

Решение. Движение каждой материальной точки конуса (за исключением точек, лежащих на оси конуса ОС) является суперпозицией двух движений – вращения с угловой скоростью ω_1 вокруг оси конуса ОС и вращения с угловой скоростью ω_2 вокруг оси Z (см. рис. 1).

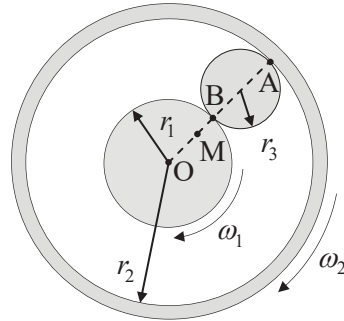


Рис. к решению задачи 5.16.

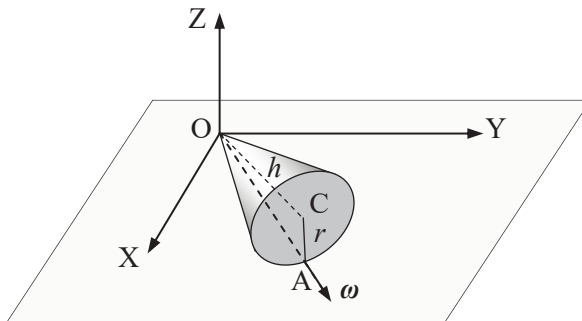


Рис. 1 к решению задачи 5.17.

Прямая OA является мгновенной осью вращения, вокруг которой конус вращается с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Материальная точка C в центре основания конуса участвует только в одном движении – вращении вокруг оси Z по окружности радиуса R (см. рис. 2) со скоростью

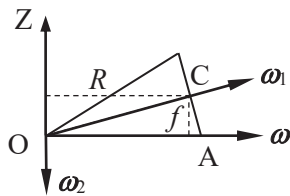


Рис. 2 к решению задачи 5.17.

$$v_C = \omega_2 R = \frac{2\pi}{T} R.$$

В течение бесконечно малого интервала времени точка C вращается вокруг мгновенной оси вращения OA с угловой скоростью ω , ее скорость относительно выбранной системы отсчета равна $v_C = \omega f$.

Для R и f выполняются следующие соотношения (см. рис. 2):

$$\frac{r}{f} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - f^2}}, \quad R = \sqrt{h^2 - f^2}.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{R}{f} \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad R = \frac{h^2}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Искомая угловая скорость вращения конуса вокруг мгновенной оси относительно лабораторной системы отсчета равна

$$\omega = \frac{h}{r} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2,79 \text{ рад/с.}$$

$$5.18. \quad \beta = \frac{R}{f} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 5.85 \text{ рад/с}^2.$$

$$5.19. \quad \omega = \sqrt{(\omega_0)^2 + (\beta_0 t)^2} \approx 0,7 \text{ рад/с,}$$

$$\beta = \beta_0 \sqrt{1 + (\omega_0 t)^2} \approx 0,2 \text{ рад/с}^2.$$

Решение. Направим ось X лабораторной системы отсчета вдоль горизонтальной оси OA , а ось Y – вертикально вверх (см. рис.). Угловая скорость тела ω_0 направлена вдоль оси X , а угловое ускорение β_0 – вдоль оси Y .

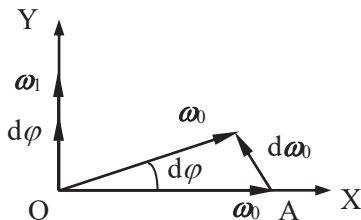


Рис. к решению задачи 5.19.

Угловая скорость вращения тела относительно вертикальной оси равна $\omega_1 = \beta_0 t$. Угловая скорость тела равна:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \beta_0 t.$$

Угловое ускорение тела является суммой двух слагаемых:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} + \beta_0.$$

Учитывая, что $d\omega_0 = [d\varphi\omega_0]$ и $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$,

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \left[\frac{d\varphi}{dt} \omega_0 \right] = [\omega_1 \omega_0] = [\beta_0 t \omega_0].$$

Поскольку вектора ω_0 и ω взаимно перпендикулярны, модуль угловой скорости равен:

$$\omega = \sqrt{(\omega_0)^2 + (\beta_0 t)^2} = \sqrt{(0,5)^2 + (0,1 \cdot 5)^2} \approx 0,7 \text{ рад/с.}$$

Искомое угловое ускорение и его модуль равны соответственно:

$$\beta = [\beta_0 t \omega_0] + \beta_0, \beta = \sqrt{\beta_0^2 + (\omega_0 \beta_0 t)^2} \approx 0,2 \text{ рад/с}^2.$$

$$\mathbf{5.20.} \quad \omega = \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ рад/с,}$$

$$\beta = \omega_1 \omega_2 = 12 \text{ рад/с}^2.$$

Решение. Угловая скорость первого тела, вращающегося с угловой скоростью ω_1 относительно неподвижного наблюдателя, относительно второго тела равна:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_2.$$

Относительное угловое ускорение можно получить, используя результат задачи 5.19.

$$\beta = [\omega_1 \omega_2].$$

Поскольку вектора ω_1 и ω_2 взаимно перпендикулярны, модуль угловой скорости ω' равен:

$$\omega' = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5 \text{ рад/с.}$$

В силу взаимной перпендикулярности векторов ω_1 и ω_2 , модуль относительного углового ускорения равен

$$\beta = \omega_1 \omega_2 = 12 \text{ рад/с}^2.$$

$$5.21. \omega = \frac{v}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}, \beta = \frac{v^2}{rh}.$$

5.22. Косинусы углов между новой осью вращения и тремя прежними осями определяются выражениями: $\cos \alpha = 1/\sqrt{14}$, $\cos \beta = 2/\sqrt{14}$ и $\cos \gamma = 3/\sqrt{14}$, угловая скорость вращения вокруг новой оси будет равна $\omega_1 \sqrt{14}$.

5.23. Искомая мгновенная ось вращения будет описывать окружность радиусом $r = \omega_2 R / (\omega_1 + \omega_2)$ вокруг оси первого диска. Угловая скорость вращения вокруг этой мгновенной равна $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

5.24. При повороте автомобиля его внешние и внутренние (по отношению к центру закругления дороги) колеса описывают разные окружности, т. е. проходят разные пути, и угловая скорость вращения колес, если они не скользят по дороге, должна быть различной. Это условие для задних ведущих колес обеспечивает дифференциал в заднем мосте автомобиля. Колеса, не имеющие привода от мотора, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

$$5.25. t = \sqrt[3]{(4/\alpha) \operatorname{tg} \varphi} = 7 \text{ с.}$$

$$5.26. \langle \omega \rangle = \omega_0 / 3.$$

$$5.27. \text{ а) } \varphi = (1 - \exp(-\alpha t)) \omega_0 / \alpha ; \text{ б) } \omega = \omega_0 \exp(-\alpha t).$$

$$5.28. \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5 \text{ рад/с, } \beta = \omega_1 \omega_2 = 12 \text{ рад/с}^2.$$

$$5.29. a_1 = -\frac{4(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g, a_2 = \frac{2(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g,$$

$$T_1 - T_3 = -\frac{2M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M}g, \quad T_3 - T_4 = -\frac{M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M}g.$$

$$5.30. \quad a_1 = gR \frac{m_1 R - m_2 r}{J_0 + m_1 R^2 + m_2 r^2}, \quad a_2 = -gr \frac{m_1 R - m_2 r}{J_0 + m_1 R^2 + m_2 r^2},$$

$$\beta = g \frac{m_1 R - m_2 r}{J_0 + m_1 R^2 + m_2 r^2}, \quad T_1 = m_1 g \frac{J_0 + m_2 r(r + R)}{J_0 + m_1 R^2 + m_2 r^2},$$

$$T_2 = m_2 g \frac{J_0 + m_1 R(r + R)}{J_0 + m_1 R^2 + m_2 r^2}.$$

$$5.31. \quad a_1 = \frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0}(R_2 - R_1),$$

$$a_2 = -\frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0}R_1.$$

$$5.32. \quad a = \frac{M + 2m}{4m + M + J/r^2}g, \quad T_1 = \left(2m + \frac{J}{r^2}\right)a - mg,$$

$$T_2 = m(g - 2a).$$

$$5.33. \quad a = \frac{2g}{3 + \frac{r^2}{R^2}}.$$

$$5.34. \quad a = \frac{m + M}{m + \frac{7}{2}M}g.$$

$$5.35. \quad \varphi = \frac{gt^2}{2R(1 + M/2m)}.$$

$$5.36. \quad T = \frac{Mg}{4(1 + M/2m)}.$$

$$5.37. \quad a = \frac{2(M + m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M + m)r^2}g.$$

$$5.38. \quad a_2 = \frac{2ma}{M + 4m}.$$

$$5.39. \quad a_1 = -\frac{13mgr^2}{4J_0 + 76mr^2}.$$

Решение. Направим ось Y лабораторной системы отсчета вертикально вниз. Уравнения движения двух грузов и подвижного блока, и уравнения моментов имеют для двух блоков следующий вид:

$$ma_1 = mg - T_1,$$

$$4ma_2 = 4mg - T_2,$$

$$2ma_1 = 2mg + T_1 - T_3 - T_4,$$

$$J_0 \ddot{\alpha} = T_2 R - T_3 R + T_4 r,$$

$$\frac{1}{2} 2m \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 \ddot{\beta} = T_3 \frac{R+r}{2} - T_4 \frac{R+r}{2},$$

где $\ddot{\alpha}$ и $\ddot{\beta}$ – угловые ускорения ступенчатого и подвижного блоков соответственно.

Запишем уравнения кинематической связи:

$$a_2 = \ddot{\alpha} R, \quad a_1 + \frac{R-r}{2R} a_2 = 0, \quad a_1 + \ddot{\beta} \frac{R+r}{2} = \ddot{\alpha} r.$$

Из уравнений кинематической связи с учетом условия задачи $R = 2r$ получаем:

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\beta}, \quad a_2 = 2\ddot{\alpha} r, \quad a_1 = -\frac{\ddot{\alpha} r}{2}.$$

Выразим силы натяжения нитей через $\ddot{\alpha}$:

$$T_1 = mg + \frac{m\ddot{\alpha} r}{2}, \quad T_2 = 4mg - 8m\ddot{\alpha} r, \quad T_3 = \frac{3}{2}mg + \frac{3}{2}m\ddot{\alpha} r,$$

$$T_4 = \frac{3}{2}mg.$$

Решая записанную систему уравнений, получаем:

$$\ddot{\alpha} = \frac{13mgr}{2J_0 + 38mr^2}, \quad a_1 = -\frac{13mgr^2}{4J_0 + 76mr^2}.$$

5.40. $a = g \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m/2}$ при $m_2 > \mu m_1$;

$a = 0$ при $m_2 \leq \mu m_1$.

5.41.

1) ускорение тела m_1 $a = \frac{F}{(\mu + m_2)}$, где $\mu = \frac{m_1 + m_3}{3 + 2(m_1/m_3)}$;

$$\text{ускорение тела } m_2 \quad b = \frac{a}{3 + 2(m_1/m_3)};$$

$$\text{угловое ускорение цилиндра } \beta = 2 \frac{(1 + m_1/m_3)}{bR}.$$

$$2) \quad a = \frac{F}{(\mu + m_2)} - kg, \quad b = \frac{a}{3 + 2(m_1/m_3)} - 2kg \frac{\mu}{m_3};$$

$$\beta = \frac{a - b}{R}, \text{ где } k - \text{ коэффициент трения.}$$

$$3) \quad a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} \text{ в отсутствие силы трения;}$$

$$a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} - kg \text{ при наличии трения; } \beta = \frac{2F}{m_3 R}.$$

$$5.42. \quad a_0 = g \frac{4m}{3M + 8m}, \quad a = g \frac{8m}{3M + 8m}, \quad \mu \geq \frac{m}{3M + 8m}.$$

$$5.43. \quad a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2} \text{ и } a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2} \text{ при } F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}.$$

Решение. В лабораторной системе отсчета движение шара будем рассматривать как суперпозицию его поступательного движения и вращения шара относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр масс.

Уравнение движения центра масс шара в проекциях на оси X и Y имеют вид:

$$m_2 a_2 = F_{\text{тр}}, \quad 0 = N - m_2 g,$$

где $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя, действующей на шар со стороны доски, N – сила нормальной реакции.

Запишем уравнение моментов для шара относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости чертежа:

$$J_0 \beta = F_{\text{тр}} R.$$

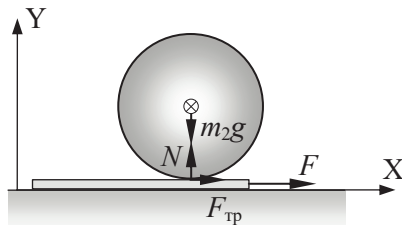


Рис. к решению задачи 5.43.

Здесь $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шара относительно данной оси, β – угловое ускорение шара.

Уравнение движения доски имеет вид:

$$m_1 a_1 = F - F_{\text{тр}}.$$

Запишем также уравнение кинематической связи, которое следует из условия отсутствия проскальзывания между шаром и доской:

$$a_2 = a_1 - \beta R.$$

В результате получим искомые ускорения доски и центра шара:

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2},$$

$$a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2}.$$

Для движения шара по доске без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения в соответствии с законом Амонтона – Кулона удовлетворяла неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N,$$

где μ – коэффициент трения.

Используя записанные выше соотношения, получим:

$$F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}.$$

$$5.44. a = \frac{g}{3} \text{ и } \mu \geq \frac{2}{9}.$$

$$5.45. \frac{d\omega}{dt} = \frac{RI}{J} \sqrt{\frac{Um}{2e}} = 0.62 \text{ рад/сек}^2.$$

$$5.46. a = \frac{FR^2}{J_0 + mR^2} \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right) = 0.4 \text{ м/с}^2,$$

$$\mu \geq \frac{F}{mg - F \sin \alpha} \cdot \frac{J_0 \cos \alpha + mrR}{J_0 + mR^2} \geq 0,075.$$

$$5.47. F = \frac{6kMg}{1 + 2k + 3k^2}.$$

Решение. Ось X лабораторной системы отсчета направим вправо вдоль горизонтальной плоскости, а ось Y – вертикально вверх (см. рис.).

Обозначим силы трения цилиндров о поверхность, соответственно, T_1 и T_2 . Друг с другом цилиндры взаимодействуют с силами давления P и силами трения скольжения, равными в соответствии с законом Амонтона – Кулона kP (см. рис.).

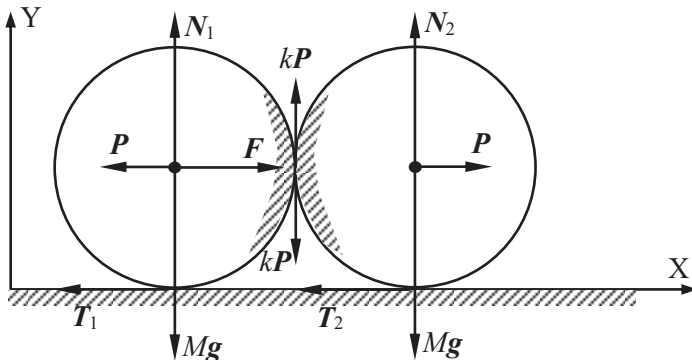


Рис. к решению задачи 5.47.

Уравнения движения каждого из цилиндров в проекции на выбранные оси декартовой системы координат, а также уравнения моментов имеют следующий вид:

$$Ma_1 = F - P - T_1, \quad 0 = Mg - N_1 - kP,$$

$$Ma_2 = P - T_2, \quad 0 = Mg - N_2 - kP,$$

$$\frac{MR^2}{2} \varepsilon_1 = (T_1 - kP)R, \quad \frac{MR^2}{2} \varepsilon_2 = (T_2 - kP)R.$$

Уравнения кинематической связи:

$$a_1 = a_2, \quad \varepsilon_1 = a_1/R, \quad \varepsilon_2 = a_2/R.$$

Из записанных уравнений получим выражения для сил трения, действующих на цилиндры со стороны горизонтальной поверхности:

$$T_1 = \frac{F(1+2k)}{6}, \quad T_2 = \frac{F(1+2k)}{6}.$$

Условия проскальзывания для первого (толкающего) и второго цилиндров имеют вид:

$$T_1 = (T_1)_{\max} = kN_1, \quad T_2 = (T_2)_{\max} = kN_2.$$

Решая записанную систему уравнений, определяем силу, необходимую для начала проскальзывания первого цилиндра:

$$F_1 = \frac{6kMg}{1 + 2k + 3k^2},$$

а для проскальзывания второго – $F_2 = \frac{6kMg}{1 + 2k - 3k^2}$.

Первый (толкающий) цилиндр начинает проскальзывать при меньшем значении силы F , что и является ответом к данной задаче.

$$F = F_1 = \frac{6kMg}{1 + 2k + 3k^2}.$$

5.48. $a = \frac{1}{2}g \sin \alpha$, $F_{\text{тр}} = \frac{1}{2}mg \sin \alpha$.

5.49. $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$ при $\text{tg} \alpha \leq \mu \frac{7}{2}$.

Решение. Ось X лабораторной системы отсчета направим вдоль наклонной поверхности клина, а ось Y – перпендикулярно, причем плоскость XY параллельна плоскостям, в которых движутся материальные точки шара (см. рис.). Мгновенная ось вращения в данный момент времени проходит через точку M соприкосновения шара с поверхностью параллельно ребру клина (перпендикулярно скорости центра масс шара).

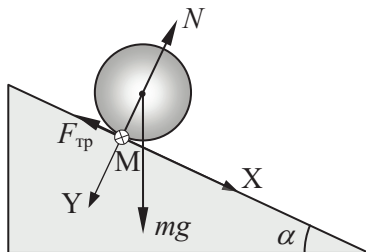


Рис. к решению задачи 5.49.

На шар в процессе движения действуют сила тяжести mg , сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (проскальзывания нет) и сила нормальной реакции опоры N (см. рис.).

Уравнение вращательного движения шара относительно мгновенной оси вращения имеет вид:

Уравнение вращательного движения шара относительно мгновенной оси вращения имеет вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} = mgR \sin \alpha,$$

где ω – угловая скорость вращения шара, J – момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения.

Уравнение кинематической связи между ускорением центра масс a и угловым ускорением шара $\frac{d\omega}{dt}$ (вследствие движения шара без проскальзывания) имеет следующий вид:

$$a = R \frac{d\omega}{dt}.$$

Момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, равен:

$$J = J_0 + mR^2,$$

где $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя полученные уравнения, определим ускорение центра масс шара:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{J_0}{mR^2}} g \sin \alpha = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

Для движения шара по поверхности клина без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения удовлетворяла неравенству $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, где μ – коэффициент трения.

Модули сил трения и нормальной реакции опоры можно найти из уравнения движения шара, записанного в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат (см. рис.):

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad 0 = mg \cos \alpha - N.$$

Решая систему этих уравнений с учетом неравенства и найденного ускорения центра шара, получим условие качения шара без проскальзывания по наклонной поверхности клина:

$$\text{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} \mu.$$

5.50. $\operatorname{tg} \alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$, где ρ – радиус инерции катящегося тела.

Для сплошного шара $\operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} k$, для полого – $\operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{2} k$. Для сплошного цилиндра $\operatorname{tg} \alpha > 3k$, для полого – $\operatorname{tg} \alpha > 2k$.

5.51. $\alpha \leq \arctg \left(\mu \frac{3m_1 / m_2 + 4}{2(m_1 / m_2 + 1)} \right)$.

5.52. $F = mg \sin \alpha / 7$.

5.53. $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mRg \sin \alpha}{J_1 + J_2 + 2mR^2}$, $F = \frac{J_1 - J_2}{2R} \frac{d\omega}{dt}$. Если каток с

бóльшим моментом инерции внизу, штанга сжимается; если он сверху, штанга растягивается.

5.54. $t = \frac{r\omega_0}{2g \sin \alpha}$.

5.55. $a = \frac{10}{13} g \sin \alpha$ при $\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{13}{3}$.

5.56. $v_k = \frac{2}{3} v_0 = 20 \text{ м/с}$, $t_k = \frac{R - r}{2\mu v_0} \cong 1,66 \text{ с}$.

Решение. Движение шайбы рассматриваем относительно лабораторной системы отсчета. При плоском движении шайбы вдоль борта площадки на нее в горизонтальной плоскости действуют сила нормальной реакции N и сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны борта (см. рис. 1). При этом момент силы трения относительно оси, проходящей через центр масс шайбы, вызывает ее вращение вокруг указанной оси. Скорость центра масс шайбы будет уменьшаться, а угловая скорость ее вращения – увеличиваться, до тех пор, пока не прекратится проскальзывание шайбы о борт площадки. Начиная с этого момента времени сила трения шайбы о борт равна нулю, а модуль скорости центра масс шайбы не изменяется.

Запишем уравнение движения центра масс шайбы в проекциях на нормальную \mathbf{n} и тангенциальную $\boldsymbol{\tau}$ оси (см. рис.1):

$$ma_n = N, \quad ma_\tau = -F_{\text{тр}}.$$

Нормальная и тангенциальная проекции ускорения центра масс шайбы определяются следующими соотношениями:

$$a_n = \frac{v^2}{R-r}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

где v – модуль скорости центра масс шайбы и $(R-r)$ – радиус кривизны его траектории.

Уравнение моментов для вращающейся шайбы относительно оси, проходящей через ее центр масс, имеет вид:

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} r.$$

Момент инерции шайбы относительно указанной оси равен

$$J_0 = \frac{mr^2}{2}.$$

На начальном этапе ($t < t_k$) шайба движется с проскальзыванием, и на нее в соответствии с законом Амонтона – Кулона действует сила трения скольжения, равная:

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Запишем уравнение кинематической связи между угловой скоростью вращения и скоростью центра масс шайбы после прекращения проскальзывания (при $t \geq t_k$):

$$v = r\omega.$$

Преобразуя записанные соотношениями, получим дифференциальное уравнение для модуля скорости центра масс шайбы на начальном этапе движения шайбы ($t < t_k$):

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R-r}.$$

Решаем полученное уравнение методом разделения переменных:

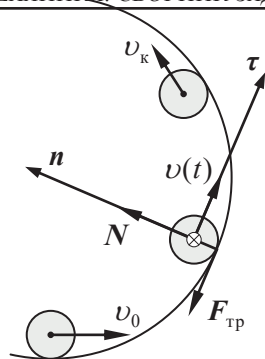


Рис. 1 к решению задачи 5.56.

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R-r} \int_0^t dt,$$

$$v(t) = v_0 \frac{R-r}{R-r + v_0 \mu t}.$$

Из записанных выше соотношений определим связь угловой скорости вращения шайбы с модулем скорости ее центра:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\mu}{r(R-r)} v^2,$$

$$\omega(t) = \frac{2\mu v_0^2 (R-r)}{r} \int_0^t \frac{1}{(R-r + v_0 \mu t)^2} dt.$$

Угловая скорость шайбы на начальном этапе ее движения равна:

$$\omega(t) = \frac{2v_0^2 \mu t}{r(R-r + v_0 \mu t)}.$$

На рис. 2 представлены зависимости модуля скорости центра масс шайбы v и произведения угловой скорости вращения шайбы на ее радиус ωr .

Графики представленных зависимостей пересекаются в момент времени t_k :

$$t_k = \frac{R-r}{2\mu v_0} \cong 1,66 \text{ с.}$$

После прекращения проскальзывания при дальнейшем движении шайбы модуль скорости ее центра масс не меняется и равен:

$$v_k \equiv v(t = t_k) = \frac{2}{3} v_0 = 20 \text{ м/с.}$$

5.57. $a = \frac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha$, где ρ – радиус инерции шарика,

$2h$ – ширина желоба;

5.58. $a = \frac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha$, где ρ – радиус инерции шарика.

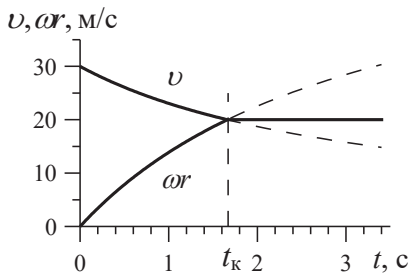


Рис. 2 к решению задачи 5.56.

$$5.59. \nu(t) = \nu_0 - \frac{F_c}{M}t \text{ и } \omega(t) = \frac{2F_c}{MR}t \text{ при } t < \frac{\nu_0 M}{3F_c};$$

$$\nu(t_k) = \frac{2}{3}\nu_0 \text{ и } \omega(t) = \frac{2}{3}\frac{\nu_0}{R} \text{ при } t \geq \frac{\nu_0 M}{3F_c}.$$

$$5.60. \omega = \frac{5}{7}\frac{\nu_0}{r}; \Delta E_{\text{кин}} = \frac{m\nu_0^2}{7}.$$

5.61.

$$a) a_1 = \frac{mgr(r-R)}{J_0 + Mr^2 + m(r-R)^2}, a_2 = \frac{mg(r-R)^2}{J_0 + Mr^2 + m(r-R)^2};$$

$$б) a_1 = \frac{mg}{M + m + \frac{MmR^2}{J_0}}, a_2 = \frac{(MR^2 + J_0)mg}{J_0M + J_0m + MmR^2}.$$

$$5.62. a_x = g \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{4\sqrt{3} - 6}} \left(1 - \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3}) \right),$$

$$a_y = g \frac{3(2 - \sqrt{3})}{2\sqrt{4\sqrt{3} - 6}} \sqrt{4\sqrt{3} - 6}, A = g \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{4\sqrt{3} - 6}}.$$

$$5.63. \beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + ag}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся клином ось блока машины Атвуда покоится. На грузы в этой системе отсчета действуют силы натяжения нити, силы тяжести и силы инерции (см. рис.).

Для удобства решения задачи можно рассматривать воздействие на грузы сил тяжести и инерции как эффективную силу тяжести

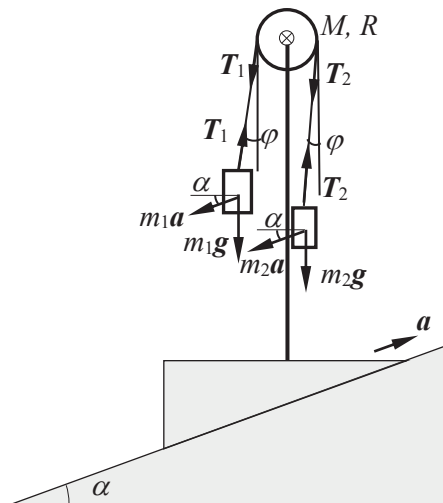


Рис. к решению задачи 5.63.

mg' , полученную в результате векторного сложения этих сил:

$$mg' = m\sqrt{a^2 + g^2 + 2ags\sin\alpha}.$$

Направим ось неинерциальной системы отсчета вниз вдоль нити и запишем уравнения движения грузов в проекциях на эту ось:

$$m_1 a_1 = m_1 g' - T_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g' - T_2,$$

Выберем положительное направление оси вращения блока перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.). Уравнение моментов для блока относительно этой оси вращения имеет вид:

$$J\beta = T_2 R - T_1 R.$$

Момент инерции цилиндрического блока относительно оси вращения, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости чертежа, равен

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Уравнения кинематической связи для ускорений имеют вид:

$$a_2 = -a_1 = \beta R.$$

Решая систему записанных уравнений, определим угловое ускорение блока:

$$\beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + 2ags\sin\alpha}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

При $\alpha = 30^\circ$ получаем:

$$\beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + ag}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

$$5.64. \omega = \sqrt{6Fs\sin\varphi/ml}.$$

$$5.65. \tau = \frac{3}{8} \cdot \frac{\omega R}{\mu g}.$$

$$5.66. \tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$$

$$5.67. \Delta x = \frac{\omega^2 R^2}{18\mu g}.$$

$$5.68. a = \frac{2mgx}{(M + 2m)L}.$$

$$5.69. h = R \cos \varphi = 0,8R.$$

$$5.70. H = \frac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R. \text{ Для сплошного шара } H = \frac{27}{10} R, \text{ для по-}$$

$$\text{лого} - H = \frac{17}{6} R.$$

$$5.71. J = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}.$$

$$5.72. J = \frac{3mR^2}{10}.$$

Решение. Направим ось Z лабораторной системы отсчета вдоль оси конуса (см. рис.). Представим конус как совокупность дисков толщиной dz . Момент инерции диска равен:

$$dJ = \frac{1}{2} dm r^2,$$

где dm – масса диска, r – его радиус.

$$\text{Поскольку } r = \frac{R}{H} z \text{ и } dm = \rho \pi r^2 dz,$$

момент инерции диска равен:

$$dJ = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{R}{H} z \right)^4 dz.$$

После интегрирования получим:

$$J = \int_0^H \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{\pi \rho R^4 H}{10}.$$

Выразим плотность материала, из которого сделан конус, используя величину объема конуса $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$:

$$\rho = \frac{3m}{\pi R^2 H}.$$

Следовательно, искомый момент инерции конуса равен:

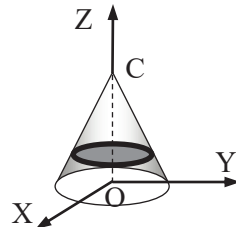


Рис. к решению задачи 5.72.

$$J = \frac{3mR^2}{10}.$$

$$5.73. J = \rho\pi \left(\frac{r^4 h}{2} - \frac{8R^5}{15} - \frac{4R^3 d^2}{3} \right).$$

$$5.74. \text{ а) } J = \frac{ml^2}{3}; \text{ б) } J = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha.$$

$$5.75. J = \frac{ma^2}{3}.$$

$$5.76. J = \frac{ma^2}{6} = 4 \text{ Г}\cdot\text{М}^2.$$

$$5.77. J = \frac{\pi\rho bR^4}{2} = 2,8 \text{ Г}\cdot\text{М}^2$$

$$5.78. J = \frac{ma^2}{2}.$$

$$5.79. J = \frac{mR^2}{4}.$$

$$5.80. \text{ а) } J_O = \frac{13mR^2}{24}; \text{ б) } J_C = \frac{37mR^2}{72}.$$

$$5.81. L_\xi = \frac{ml^2 \omega \sin^2 \alpha}{3}, \mathbf{L} = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3} \mathbf{e}_y,$$

$$J_\xi = \frac{ml^2 \sin^2 \alpha}{3}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение. Выберем систему отсчета так, как это предложено в условии задачи. Введем также дополнительную ось ξ , совпадающую с осью вращения OO_1 .

Для определения момента инерции палочки относительно оси ξ выделим малый элемент палочки длиной dx и массой $dm = \frac{m}{l} dx$.

Момент инерции элемента палочки dm относительно оси ξ равен:

$$dJ_{\xi} = r_{\xi}^2 dm,$$

где $r_{\xi} = x \sin \alpha$ – расстояние от выбранного элемента до оси вращения ξ .

Определим момент инерции палочки J_{ξ} относительно оси ξ :

$$J_{\xi} = \int_0^l (x \sin \alpha)^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2 \sin^2 \alpha}{3}.$$

Момент импульса элемента палочки dm относительно точки O равен

$$d\mathbf{L} = [\mathbf{r} dm \mathbf{v}],$$

где \mathbf{v} – скорость элемента палочки dm . Направление вектора скорости совпадает с осью Z , а его модуль равен $v = \omega x \sin \alpha$.

Поскольку скорость элемента палочки направлена перпендикулярно плоскости рисунка и перпендикулярно радиус-вектору \mathbf{r} , то направление вектора момента импульса элемента палочки $d\mathbf{L}$ относительно точки O совпадает с направлением оси Y . Определим модуль вектора момента импульса палочки \mathbf{L} относительно точки O :

$$L = \int_0^l x^2 \omega \sin \alpha \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3}.$$

Таким образом, момент импульса палочки \mathbf{L} относительно точки O равен:

$$\mathbf{L} = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3} \mathbf{e}_y,$$

где \mathbf{e}_y – орт оси Y декартовой системы координат.

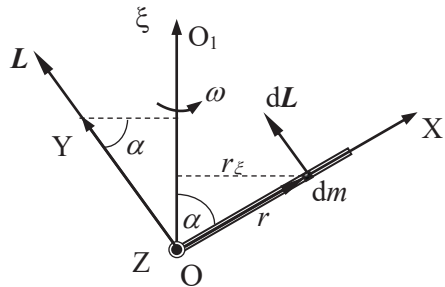


Рис. к решению задачи 5.81.

Определим момент импульса палочки относительно оси ξ как проекцию вектора \mathbf{L} на ось ξ :

$$L_\xi = \frac{ml^2 \omega \sin^2 \alpha}{3}.$$

Заметим, что момент импульса палочки относительно оси ξ и момент инерции относительно той же оси связаны следующим соотношением:

$$L_\xi = J_\xi \cdot \omega.$$

Для определения элементов тензора палочки относительно неподвижной точки O воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix}.$$

В нашем случае тензор инерции преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \int_0^m dm (r^2 - x^2) & -\int_0^m dm xy & -\int_0^m dm xz \\ -\int_0^m dm yx & \int_0^m dm (r^2 - y^2) & -\int_0^m dm yz \\ -\int_0^m dm zx & -\int_0^m dm zy & \int_0^m dm (r^2 - z^2) \end{pmatrix},$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В выбранной системе координат палочка ориентирована вдоль оси X ортогонально осям Y и Z , поэтому

$$y = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^m x^2 dm & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^m x^2 dm \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем интеграл, определяющий элементы тензора инерции:

$$\int_0^m x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{3}.$$

Тогда искомый тензор инерции приобретет следующий вид:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$5.82. \omega_0 = 2 \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)g}{R(m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2))}}.$$

Решение. Выберем декартову систему координат с началом в центре кольца. Ось Y направим вертикально вверх, ось X вдоль горизонтальной поверхности в направлении перемещения кольца. Определим положение центра масс верхнего полукольца массой m_1 :

$$y_1 = \frac{1}{m_1} \int_0^{m_1} y dm.$$

Пусть φ – угол между осью X и радиус-вектором в направлении элемента полукольца массой dm , тогда $y = R \sin \varphi$, $dm = \frac{m_1}{\pi} d\varphi$, а положение центра масс полукольца определяется координатой

$$y_1 = \int_0^{\pi} R \sin \varphi \frac{1}{\pi} d\varphi = \frac{2R}{\pi}.$$

Таким образом, положение центра масс верхнего полукольца находится выше центра кольца на величину y_1 и не зависит от массы полукольца. Очевидно, что центр масс нижней половины полукольца находится ниже центра кольца на величину y_1 .

Моменты инерции полуколец относительно оси кольца равны соответственно:

$$J_{01} = m_1 R^2, \quad J_{02} = m_2 R^2.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J_{01} = J_{Ц1} + m_1 y_1^2, \quad J_{02} = J_{Ц2} + m_2 y_1^2,$$

где $J_{Ц1}$, $J_{Ц2}$ – момент инерции полуколец относительно своих центров масс.

Следовательно,

$$J_{Ц1} = m_1 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \quad J_{Ц2} = m_2 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера моменты инерции полуколец относительно оси, проходящей через точку касания кольца горизонтальной поверхности равны:

$$J_1 = J_{Ц1} + m_1 (R + y_1)^2, \quad J_2 = J_{Ц2} + m_2 (R - y_1)^2.$$

Момент инерции всего кольца равен:

$$J = J_1 + J_2 = 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \right).$$

Запишем закон сохранения механической энергии для начального и конечного моментов времени:

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = 2(m_2 - m_1)gy_1,$$

где J – момент инерции кольца относительно оси, проходящей через точку касания кольца с горизонтальной поверхностью.

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)g}{R(m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2))}}.$$

5.83. $v_A = \sqrt{3gl \cos \alpha_0}.$

Решение. Ось X лабораторной системы отсчета направим горизонтально вдоль плоскости, ось Y – вертикально вверх. Начало координат – на плоскости под точкой A .

Запишем закон сохранения механической энергии для двух стержней на интервале времени от начала движения до момента времени, когда угол между стержнем и вертикалью равен α :

$$2mg \frac{l}{2} \cos \alpha_0 = mv^2 + J\omega^2 + 2mg \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

Здесь v – скорость центра масс.

Момент инерции стержня длиной l относительно оси, проходящей через его центр масс, равен:

$$J = \frac{ml^2}{12}.$$

Координаты центров масс стержней и точки A равны соответственно:

$$|x| = \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad y = \frac{l}{2} \cos \alpha, \quad x_A = 0, \quad y_A = l \cos \alpha.$$

Скорости центра масс и точки A связаны с координатами следующим образом:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = |\dot{y}_A|.$$

Определим скорость центра масс с учетом того, что $\omega = \dot{\alpha}$:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \frac{l}{2}.$$

Из закона сохранения энергии получим:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Скорость точки A в произвольный момент времени равна:

$$v_A = l \sin \alpha \dot{\alpha} = l \sin \alpha \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}.$$

Перед соприкосновением с плоскостью $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и

$$v_A = \sqrt{3gl \cos \alpha_0}.$$

$$5.84. \alpha_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right).$$

Решение. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с точкой подвеса математического маятника и стержня. Направим горизонтальную ось вращения за плоскость чертежа (см. рис. к задаче 5.84).

Выберем четыре момента времени: t_1 – момент начала движения математического маятника, t_2 – момент непосредственно перед соударением маятника со стержнем, t_3 – момент сразу после соударения, t_4 – момент, соответствующий максимальному отклонению стержня. В течение временного интервала (t_1, t_2) сохраняется механическая энергия математического маятника. В промежутке времени (t_2, t_3) сохраняются механическая энергия и момент импульса системы тел «маятник + стержень». Импульс системы тел в этом промежутке не сохраняется, поскольку в точке подвеса стержня во время соударения возникают дополнительные силы, импульс которых отличен от нуля. В промежутке времени (t_3, t_4) сохраняется механическая энергия стержня вследствие отсутствия сил трения.

Потенциальные энергии математического маятника и стержня будем считать равными нулю при их вертикальной ориентации.

Запишем закон сохранения механической энергии для математического маятника на интервале времени (t_1, t_2) :

$$mgl = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}.$$

Здесь J_1 – момент инерции маятника относительно оси вращения, ω_1 – его угловая скорость перед соударением.

Для временного интервала (t_2, t_3) закон сохранения момента импульса и механической энергии для системы тел «маятник + стержень» имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1 \omega_1 &= J_2 \omega_2 + J_1 \omega_3, \\ \frac{J_1 \omega_1^2}{2} &= \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_1 \omega_3^2}{2}, \end{aligned}$$

где J_2 – момент инерции стержня, ω_2 и ω_3 – угловые скорости вращения стержня и маятника сразу после соударения.

Запишем также закон сохранения механической энергии для стержня на интервале времени (t_3, t_4) :

$$\frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{MgL}{2} (1 - \cos \alpha_{\max}).$$

Моменты инерции маятника J_1 и стержня J_2 относительно выбранной оси вращения равны:

$$J_1 = ml^2, \quad J_2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

Решая систему записанных выше уравнений относительно искомого максимального угла отклонения стержня, получаем:

$$\alpha_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right).$$

Поскольку α_{\max} не может превышать $\pi/2$, то на соотношения масс M/m и длин L/l стержня и математического маятника накладывается условие:

$$\frac{24}{\left(3 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} < 1,$$

при нарушении которого стержень ударится о потолок.

На рис. 1 изображены области значений отношений длин и масс маятника и стержня, при которых максимальный угол отклонения стержня в результате соударения с математическим маятником меньше или равен $\pi/2$. Кривая, изображенная на рисунке, соответствует значениям отношений длин l/L и масс m/M маятника и стержня, при которых стержень принимает горизонтальное положение, не соударяясь с потолком. Область значений отношений длин и масс, расположенная выше изображенной кривой, соответствует случаю соударения стержня с потолком.

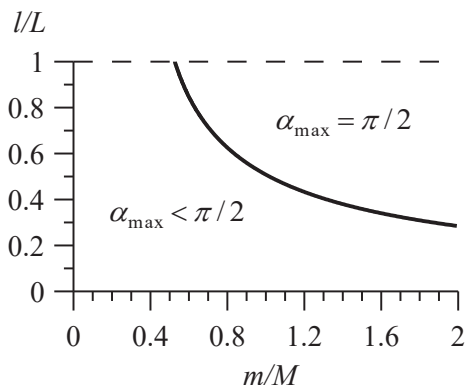


Рис. 1 к решению задачи 5.84.

На рис. 2 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения длин маятника и стержня $\alpha_{\max}(l/L)$ при различных значениях отношения их масс (m/M).

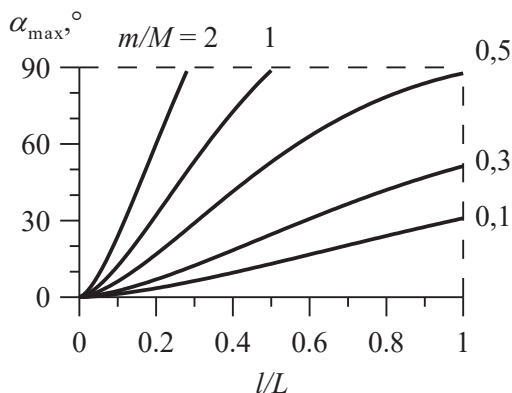


Рис. 2. к решению задачи 5.84.

Как видим, при увеличении отношения длин маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, причем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения масс маятника и стержня.

На рис. 3 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения масс маятника и

стержня $\alpha_{\max}(m/M)$ при различных значениях отношения их длин (l/L).

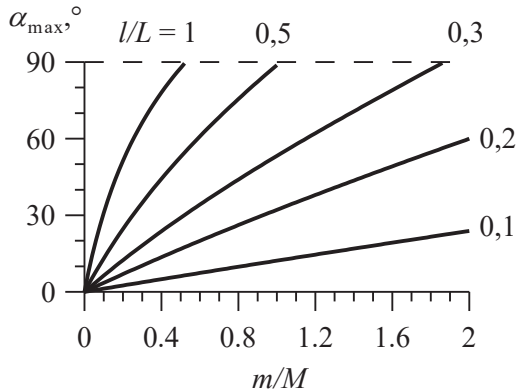


Рис. 3 к решению задачи 5.84.

Как видим, при увеличении отношения масс маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, причем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения длин маятника и стержня.

$$5.85. \frac{M}{m} = 3 \frac{l^2}{L^2}.$$

$$5.86. \omega' = \omega \left(\frac{J + m \frac{l^2}{4}}{J + ml^2} \right), \Delta E = - \frac{3ml^2 \omega^2 \left(J + m \frac{l^2}{4} \right)}{8(J + ml^2)}.$$

$$5.87. \omega = - \frac{2mur}{MR^2 + 2mr^2}.$$

$$5.88. v_1 = v_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} u_1.$$

$$5.89. \Delta L = - \frac{4J_1 J_2 \omega_0}{J_1 + J_2}, \Delta E = - \frac{2J_1 J_2}{J_1 + J_2} \omega_0^2.$$

$$5.90. T = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{R\omega}{g\mu}.$$

5.91. Скорость вращения возрастет в $1 + mR^2/J$ раз. Кинетическая энергия вращения возрастет во столько же раз. Увеличение энергии произойдет за счет работы, произведенной человеком при перемещении его по диску.

$$\mathbf{5.92.} \quad \alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{4Lm\nu_0 d}{3g \left(md^2 + \frac{1}{3} ML^2 \right)} \right), \quad r = \frac{2}{3} L.$$

5.93. 1) шайба остановится сразу после удара, если $l = L \sqrt{\frac{M-m}{12m}}$;

2) шайба передаст стержню максимальный импульс, если она попадет в центр масс стержня ($l = 0$);

3) скорость точки А сразу после удара будет равна нулю при условии $l = \frac{1}{6} L$.

$$\mathbf{5.94.} \quad \text{а) } \nu' = \frac{3m-4M}{3m+4M} \nu; \quad \text{б) } F = \frac{8M\nu^2}{l(1+4M/3m)^2}.$$

$$\mathbf{5.95.} \quad \text{а) } \nu = (M/m) \sqrt{2gl/3} \sin(\alpha/2); \quad \text{б) } \Delta p = M \sqrt{gl/6} \sin(\alpha/2);$$

в) $x \approx 2l/3$.

$$\mathbf{5.96.} \quad \omega = \frac{4}{13} \cdot \frac{\nu_0}{l}.$$

5.97. Вектор ω направлен по биссектрисе угла α , образованного векторами угловых скоростей ω_1 и ω_2 ; $\omega = \omega_0 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$;

$$\Delta E^k = \frac{2}{5} m r^2 \omega_0^2 \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4} (1 + \cos \alpha) - 1 \right) - m \nu_0^2.$$

5.98. В лабораторной системе отсчета движение гантелей после абсолютно упругого соударения представляет собой суперпозицию поступательного движения их центров масс с одинаковыми скоростями $\nu'_1 = \nu'_2 = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ и вращательного движения с одинако-

вой угловой скоростью $\omega = \frac{v_1 + v_2}{l}$ относительно осей, проходящих через их центры масс. Гантели после соударения испытают повторное соударение.

Решение. Задачу решаем в двух системах отсчета: лабораторной системе, ось X декартовой системы координат которой направим так, как показано на рис. 1, и системе отсчета, связанной с центром масс системы тел, с осью X' , изображенной на рис. 2.

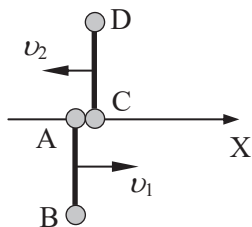


Рис. 1 к решению задачи 5.98.

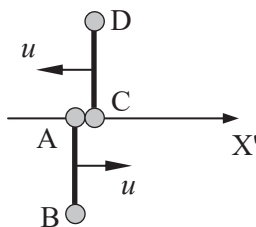


Рис. 2 к решению задачи 5.98.

По условию задачи гантели движутся по гладкой горизонтальной поверхности, следовательно, центр масс системы тел, состоящей из двух гантелей, движется с постоянной скоростью, и система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной. Поскольку рассматриваемая система тел замкнута, а соударение абсолютно упругое, то выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса для этой системы в любой из выбранных систем отсчета.

По условию задачи в лабораторной системе отсчета гантели движутся поступательно со скоростями v_1 и v_2 , следовательно, проекция скорости центра масс на ось X лабораторной системы отсчета равна $v_{\text{цм}} = \frac{v_1 - v_2}{2}$, а проекции скоростей центров масс гантелей u_1 и u_2 на ось X' относительно системы центра масс обеих гантелей определяются выражениями:

$$u_1 = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = u, \quad u_2 = -v_2 - v_{\text{цм}} = -\frac{v_1 + v_2}{2} = -u.$$

Запишем закон сохранения проекции импульса на ось X' для системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент их соударения, в выбранной системе центра масс:

$$mu_1 + mu_2 = mu'_1 + mu'_2,$$

где u'_1 и u'_2 – скорости центров масс гантелей после соударения.

В общем случае после соударения движение каждой гантели будет суперпозицией поступательного движения ее центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей (см. рис. 3).

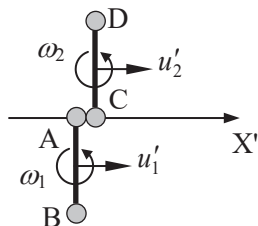


Рис. 3 к решению задачи 5.98.

Запишем закон сохранения механической энергии системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент соударения, в системе их центра масс:

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} = \frac{mu_1'^2}{2} + \frac{mu_2'^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}.$$

Здесь ω_1 и ω_2 – угловые скорости вращения гантелей после соударения.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы двух гантелей относительно оси, проходящей через их центр масс перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей, на том же интервале времени:

$$\frac{l}{2}mu_1 + \frac{l}{2}mu_2 = \frac{l}{2}mu'_1 + J\omega_1 - \frac{l}{2}mu'_2 + J\omega_2.$$

Здесь учтено, что момент импульса гантели относительно выбранной оси равен сумме момента импульса центра масс гантели относительно этой оси в системе центра масс двух гантелей и момента импульса гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс, в системе отсчета, связанной с этим центром масс.

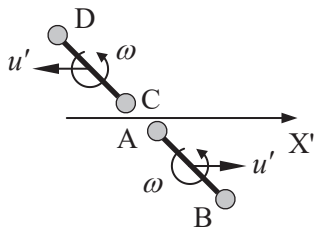


Рис. 4 к решению задачи 5.98.

Учитывая симметрию задачи в системе центра масс двух гантелей, запишем очевидные соотношения между угловыми скоростями вращения гантелей и скоростями их центров масс после соударения (см. рис. 4):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad u'_2 = -u'_1 = u'.$$

Решим систему записанных выше уравнений относительно u'_1 , u'_2 , ω_1 и ω_2 :

$$u'_1 = -u'_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{ml^2 - 4J}{ml^2 + 4J} = u', \quad \omega_1 = \omega_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{4lm}{ml^2 + 4J} = \omega.$$

Заметим, что момент инерции гантели при заданной массе m максимален в случае, когда ее масса сосредоточена на концах гантели:

$$J \leq 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{4}.$$

Следовательно, $u' = u'_1 = -u'_2 \geq 0$ (см. рис. 4).

Скорости центров масс гантелей после соударения в лабораторной системе отсчета равны:

$$v'_1 = u' + v_{\text{цм}} = \frac{v_1 ml^2 - 4v_2 J}{ml^2 + 4J},$$

$$v'_2 = -u' + v_{\text{цм}} = -\frac{v_2 ml^2 - 4v_1 J}{ml^2 + 4J}.$$

Итак, в результате абсолютно упругого соударения, движение гантелей представляет собой суперпозицию поступательного движения их центров масс и вращательного движения с одинаковой угловой скоростью относительно осей, проходящих через их центры масс (см. рис. 5).

В случае, когда масса гантели сосредоточена на ее концах, момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, равен

$$J = \frac{ml^2}{4}.$$

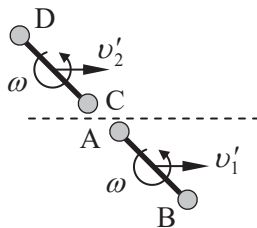


Рис. 5 к решению задачи 5.98

При этом скорости центров масс гантелей после первого соударения в лабораторной системе отсчета и угловая скорость их вращения равны:

$$v'_1 = v'_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}, \quad \omega = \frac{v_1 + v_2}{l}.$$

Скорости центров масс гантелей после соударения в системе центра масс системы тел равны нулю. Следовательно, в рассматриваемом частном случае гантели, вращаясь с одинаковой угловой скоростью, испытают повторное соударение.

$$5.99. \quad m = \frac{1}{12} \left(-5 + \sqrt{1 + 24 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}} \right) m_0 \approx 0,32 m_0 = 3,2 \text{ г}.$$

Решение. При движении жука вдоль стержня на систему тел «стержень + жук» действуют силы тяжести и силы реакции со стороны подвеса. Поскольку моменты этих сил относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, равны нулю, момент импульса рассматриваемой системы тел относительно этой оси в лабораторной инерциальной системе отсчета не изменяется. Поэтому при решении задачи будем использовать закон сохранения момента импульса относительно вертикальной оси для двух моментов времени: начала движения ($l = 0, \alpha = \alpha_0$) и момента достижения жуком конца стержня ($l = l_0, \alpha = \alpha_1$). Здесь введены обозначения: l – расстояние от жука до точки подвеса стержня и α – угол отклонения стержня от вертикали.

В процессе движения жука расстояние l , угол α , а также угловая скорость вращения стержня ω изменяются. Для нахождения взаимосвязи между углом отклонения α и угловой скоростью ω удобно перейти к неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с вращающимся стержнем. В этой системе отсчета на систему тел «стержень + жук» действуют силы тяжести, сила реакции подвеса в точке крепления стержня и силы инерции.

Поскольку жук в соответствии с условием задачи движется по стержню медленно, то угловая скорость вращения стержня ω также медленно изменяется ($\dot{\omega} \cong 0$), следовательно, переносная сила инерции примерно равна центробежной силе инерции: $F_{\text{пер}} \cong F_{\text{цб}}$.

Силой инерции Кориолиса, действующей на медленно движущегося жука, также пренебрегаем: $F_{\text{Кор}} \cong 0$.

Сумма моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук, равна нулю относительно любой оси, неподвижной относительно выбранной неинерциальной системы отсчета. Для расчета суммарного момента сил инерции, действующих на стержень, необходимо просуммировать моменты сил инерции, действующих на каждый из элементов стержня.

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета и условием равенства нулю суммарного момента сил, действующих на эту систему тел относительно оси, жестко связанной с вращающимся стержнем и проходящей через точку подвеса, в неинерциальной системе отсчета.

Момент импульса системы тел «стержень + жук» L складывается из моментов импульсов стержня $L^{\text{ст}}$ и жука $L^{\text{ж}}$:

$$\begin{aligned} L &= L^{\text{ст}} + L^{\text{ж}} = \int_0^{l_0} x \sin \alpha \frac{m_0}{l_0} dx \alpha x \sin \alpha + l \sin \alpha m \omega l \sin \alpha = \\ &= \omega \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{3} m_0 l_0^2 + ml^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь x – координата элемента стержня длиной dx вдоль стержня относительно точки подвеса.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета на интервале времени от начала движения жука ($l = 0$, $\alpha = \alpha_0$) до момента достижения им нижнего конца стержня ($l = l_0$, $\alpha = \alpha_1$):

$$L_1 - L_0 = \frac{1}{3} \omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) l_0^2 - \frac{1}{3} \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 l_0^2 = 0,$$

где L_0 и ω_0 – момент импульса системы тел и угловая скорость их вращения в начальный момент времени, а значения этих величин в конечный момент времени – L_1 и ω_1 .

Запишем равенство нулю суммы моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук», относительно горизонтальной оси, неподвижной в выбранной неинерциальной системе отсчета и проходящей через верхний конец стержня O (см. рисунок):

$$M_{ГЖ}^{ст} + M_{ГЖ}^{жк} + M_{ЦБ}^{ст} + M_{ЦБ}^{жк} = 0.$$

Моменты сил тяжести, действующих на стержень $M_{ГЖ}^{ст}$ и жука $M_{ГЖ}^{жк}$, равны:

$$M_{ГЖ}^{ст} = -\frac{1}{2} m_0 g l_0 \sin \alpha,$$

$$M_{ГЖ}^{жк} = -mgl \sin \alpha.$$

Момент центробежной силы инерции $M_{ЦБ}^{жк}$, действующей на жука, определяется выражением:

$$M_{ЦБ}^{жк} = m\omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Центробежная сила инерции, действующая на элемент стержня длиной dx равна:

$$dF_{ЦБ}^{ст} = \frac{m}{l_0} dx \omega^2 x \sin \alpha.$$

Суммарный момент сил инерции, действующих на стержень:

$$M_{ЦБ}^{ст} = \int_0^{l_0} \frac{m_0}{l_0} dx \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} m_0 \omega^2 l_0^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m_0 l_0 + 2ml)}{2(m_0 l_0^2 + 3ml^2) \cos \alpha}}.$$

Для начального ($l = 0, \alpha = \alpha_0$) и конечного ($l = l_0, \alpha = \alpha_1$) моментов времени можно записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0 \cos \alpha_0}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3g(m_0 + 2m)}{2l_0 \cos \alpha_1 (m_0 + 3m)}}.$$

Преобразуя закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук», получаем:

$$\omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) - \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 = 0.$$

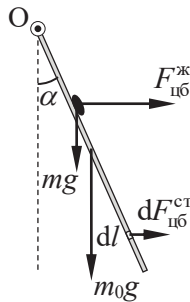


Рис. к решению задачи 5.99.

Подстановка ω_0 и ω_1 полученное соотношение дает квадратное уравнение для определения искомой массы жука m :

$$6m^2 + 5m_0m + m_0^2 \left(1 - \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0} \right) = 0.$$

Решая уравнение, окончательно получим:

$$m = \frac{1}{12} \left(-5 + \sqrt{1 + 24 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}} \right) m_0 \approx 0,32m_0 = 3,2 \text{ г.}$$

$$5.100. A = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

$$5.101. \Delta E^k = -\frac{m}{24} \left[6(\nu_1 + \nu_2)^2 + 6R^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - R^2(\omega_1 + \omega_2)^2 \right],$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{6}.$$

$$5.102. M = \frac{\nu_1^2}{2G} (r_2 + r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \quad R_1 = R_2 = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Решение. Лабораторную систему отсчета, связанную с планетой, будем считать инерциальной. При дальнейшем рассмотрении будем считать спутник материальной точкой, а планету – сферически симметричным телом. Движение спутника по эллиптической траектории происходит под действием силы гравитационного взаимодействия спутника и планеты. Поскольку эта сила является центральной, то момент импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траекторий спутника, не меняется со временем.

Запишем закон сохранения момента импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траектории спутника (см. рис.), и закон сохранения механической энергии для моментов времени нахождения спутника на минимальном r_1 и максимальном r_2 расстоянии от планеты:

$$r_2 m \nu_2 - r_1 m \nu_1 = 0, \quad \frac{m \nu_2^2}{2} + E_2^p - \frac{m \nu_1^2}{2} - E_1^p = 0,$$

где v_2 – модуль скорости спутника при максимальном удалении от планеты, E_1^P и E_2^P – потенциальные энергии системы тел «спутник + планета» в рассматриваемые моменты времени.

Выберем ноль отсчета потенциальной энергии, соответствующий положению спутника на физически бесконечно большом расстоянии от планеты. Тогда в соответствии с определением потенциальной энергии механической системы можно записать:

$$E^P = \int_r^{\infty} -G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r}.$$

Следовательно, потенциальная энергия системы тел «спутник + планета» в моменты нахождения спутника на минимальном r_1 и максимальном r_2 расстоянии от планеты равна:

$$E_1^P = -G \frac{mM}{r_1}, \quad E_2^P = -G \frac{mM}{r_2}.$$

Для определения радиуса кривизны траектории спутника запишем уравнение его движения в проекции на нормальную ось, направленную к центру кривизны траектории перпендикулярно скорости спутника, в рассматриваемые моменты времени:

$$m \frac{v_1^2}{R_1} = G \frac{mM}{r_1^2}, \quad m \frac{v_2^2}{R_2} = G \frac{mM}{r_2^2}.$$

Решая систему записанных уравнений, получаем искомое выражения для массы планеты и радиусов кривизны траектории в рассматриваемые моменты времени:

$$M = \frac{v_1^2}{2G} (r_2 + r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \quad R_1 = R_2 = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

5.104.
$$h = \frac{v_0^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}} \right);$$

скорость шарика направлена горизонтально и ее модуль равен:

$$v = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}}.$$

5.105.
$$\Omega = \frac{Mga}{J\omega}, \quad \beta = \arctg \frac{M^2 a^3 g \sin \vartheta}{J^2 \omega^2}.$$

$$5.106. M(t) = 2ml_0^2 \omega^2 e^{2\alpha t}, \quad l(t) = l_0 e^{\alpha t}.$$

$$5.107. F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{J\beta}{l}, \quad F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{J\beta}{l}.$$

Решение. Направим ось Z лабораторной системы отсчета вертикально вверх. Ось, относительно которой записываем моменты сил и импульса тел, выберем совпадающей с геометрической осью ротора и направленной за плоскость чертежа (см. рис.).

При включении электродвигателя момент сил, действующих на ротор со стороны статора, закрепленного на подставке, изменяет момент импульса ротора L . В соответствии с

третьим законом Ньютона такой же по величине момент сил действует со стороны ротора на статор с подставкой. При этом на подставку действуют также моменты сил реакции со стороны поверхности, на которой она находится. Подставка с закрепленным на ней статором остается в покое, поэтому суммарный момент всех внешних сил, действующих на них относительно произвольно выбранной оси, равен нулю.

Для ротора двигателя запишем уравнение моментов относительно выбранной оси:

$$\frac{dL}{dt} = J\beta = M.$$

Поскольку момент силы тяжести относительно оси ротора равен нулю, суммарный момент внешних сил M равен моменту сил, действующих на ротор со стороны статора с подставкой.

Условия равновесия для статора и подставки запишем в следующем виде:

$$-M + F_1 \frac{l}{2} - F_2 \frac{l}{2} = 0, \quad F_1 + F_2 - mg = 0,$$

где F_1 и F_2 – силы, действующие на подставку со стороны поверхности (см. рис.).

Решая систему записанных выше уравнений относительно F_1 и F_2 , получаем:

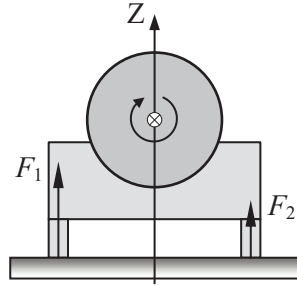


Рис. к решению задачи 5.107.

$$F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{J\beta}{l}, \quad F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{J\beta}{l}.$$

Заметим, что при угловом ускорении ротора $\beta \geq \frac{mgl}{2J}$ правая опора подставки двигателя отрывается от поверхности.

$$5.108. \quad N = \frac{J_0}{r} \omega^2 + mg.$$

$$5.109. \quad T = 2\pi^2 n \frac{m_0 R^2}{mgl} = 12,5 \text{ с}.$$

$$5.110. \quad M_\Gamma = 2\pi n J_0 \frac{v}{R} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$5.111. \quad l = \frac{\Omega J \omega}{mg} = 0,5 \text{ см}, \quad \beta = \omega \Omega \sin \alpha = 50 \text{ рад/с}^2.$$

$$5.112. \quad M = \frac{2\pi J N u}{R} = 612 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$5.113. \quad \alpha \approx \tan^{-1} \tau / J \omega \approx 0,43^\circ \approx 25'.$$

$$5.114. \quad F' = 2mR^2 \omega \omega' / 5l = 0,30 \text{ кН}.$$

$$5.115. \quad N = 2\pi n J v / R = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

РАЗДЕЛ 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

$$6.1. \omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

$$6.2. T = \pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

$$6.3. \alpha(t) = \alpha_0 \cos \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} t \right).$$

Решение. Уравнение моментов для палочки относительно оси, совпадающей с осью полуцилиндра, имеет вид:

$$\left(\frac{mR^2}{12} + ml^2 \right) \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha,$$

где α – угол отклонения палочки от положения равновесия,
 $l = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ – расстояние от оси вращения до центра масс палочки.

С учетом малости угла отклонения палочки от положения равновесия, получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\sqrt{3}g}{5R} \alpha = 0.$$

Следовательно, угловая частота собственных колебаний палочки определяется соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}},$$

а закон движения имеет вид:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитуду A и начальную фазу φ_0 определяем из начальных условий $\alpha(0) = \alpha_0 = A \cos \varphi_0$, $\dot{\alpha}(0) = 0 = -A \sin \varphi_0$:

$$A = \alpha_0, \varphi_0 = 0.$$

Искомый закон движения центра масс палочки принимает вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} t \right).$$

6.4. $T = \pi \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 1,5 \text{ с}.$

6.5. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right)}.$

6.6. $T = 2 \sqrt{\frac{l}{g} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right)}.$

6.7. $T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{2gS}}.$

6.8. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 \int_0^L \frac{ds}{S}}}$. В случае постоянного поперечного сечения трубки полученное выражение для частоты собственных колебаний жидкости принимает вид: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$

6.9. $T = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}} = 2,5 \text{ с}.$

6.10.

$$x(t) = \frac{m+M}{\rho S} + \frac{m}{\rho S} \sqrt{1 + \frac{2h\rho S}{m+M}} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho g S}{m+M}} t + \arctg \left(\sqrt{\frac{2\rho h S}{m+M}} \right) \right).$$

6.11. $x_m(t) = \frac{1}{1+m/M} V_0 t - A_m \sin(\omega_0 t),$

$$A_m = \frac{1}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}, \quad A_m^{\max} = V_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{при } m/M \rightarrow 0.$$

$$x_M(t) = \frac{1}{1+m/M} V_0 t + A_M \sin(\omega_0 t),$$

$$A_M = \frac{m/M}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}, \quad A_M^{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} V_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{при } m/M = 2.$$

$$6.12. \omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}}.$$

Решение. Кинетическая энергия тела $E^k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ определяется скоростью центра масс тела $V = (R-r)\dot{\alpha}$ и угловой скоростью вращения ω . Уравнение кинематической связи скорости центра масс и угловой скорости вращения $V = \omega r$ является следствием качения тела без проскальзывания.

Если принять потенциальную энергию тела в положении его равновесия равной нулю, то при отклонении центра масс на угол α потенциальная энергия становится равной

$$E^p = mg(R-r)(1 - \cos\alpha) \approx \frac{mg}{2}(R-r)\alpha^2.$$

Поскольку механическая энергия тела сохраняется, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^k + E^p) = 0.$$

Записанная система уравнений позволяет получить уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}\alpha = 0.$$

Следовательно, угловая частота собственных гармонических колебаний тела вращения равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}}.$$

$$6.13. T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{3\gamma M}} \approx 56 \text{ мин.}, \quad \gamma - \text{гравитационная постоянная,}$$

M – масса Земли.

$$6.14. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}} = 1,1 \text{ с}, \quad E = \frac{mgl\alpha^2}{2} = 0,05 \text{ Дж}.$$

$$6.15. \omega_0 = \sqrt{\frac{3b}{2l}}\omega.$$

$$6.16. \omega_0 = \frac{2\sqrt{3gh}}{L}; \quad T \approx 47 \text{ мин.}$$

$$6.17. \omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}}.$$

$$6.18. x(t) = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}mg}{(M + 6m)R}} t \right).$$

$$6.19. y(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} t.$$

$$6.20. \omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}, \text{ где } \Omega_0^2 = \frac{2g}{l}.$$

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω . Координаты шариков (см. рис.) определяются выражениями:

$$|x_1| = |x_2| = l \sin \varphi, \quad x_3 = 0,$$

$$y_1 = y_2 = l \cos \varphi, \quad y_3 = 2l \cos \varphi,$$

где φ – угол отклонения стержней от вертикальной оси OY . Индексы в обозначениях координат соответствуют нумерации шариков на рисунке.

Дифференцируя координаты шариков по времени, получим выражения для проекций скоростей шариков:

$$|v_{1x}| = |v_{2x}| = l \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad |v_{3x}| = 0,$$

$$|v_{1y}| = |v_{2y}| = l \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad |v_{3y}| = 2l \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

С учетом полученных соотношений кинетическая энергия системы принимает вид:

$$\begin{aligned} E^k &= 2 \frac{ml^2 (\cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2)}{2} + \frac{m(2l)^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2}{2} = \\ &= ml^2 (1 + 2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы тел в поле силы тяжести и поле сил инерции равна:

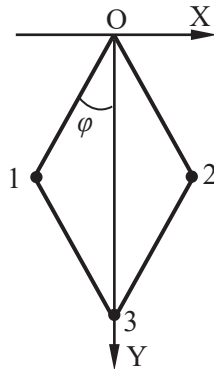


Рис. к решению задачи 6.20.

$$E^p = -ml^2 \left(\frac{4g}{l} \cos \varphi + \Omega^2 \sin^2 \varphi \right).$$

При записи последнего соотношения ноль потенциальной энергии в поле силы тяжести выбран в точке подвеса стержней, а ноль потенциальной энергии в поле сил инерции – при вертикальном положении стержней.

Положение равновесия системы найдем из условия минимума потенциальной энергии $\frac{dE^p}{d\varphi} = 0$:

$$\frac{4g}{l} \sin \varphi_0 - \Omega^2 2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

1) $\sin \varphi_0 = 0$, соответствующее неустойчивому положению равновесия;

2) $\cos \varphi_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$, соответствующее устойчивому положению равновесия. Здесь введено обозначение $\Omega_0^2 = \frac{2g}{l}$.

Обозначим угол отклонения от положения равновесия $\theta = \varphi - \varphi_0$. Разложим кинетическую и потенциальную энергию в окрестности точки $\varphi = \varphi_0$ в ряд по степеням малого параметра θ и ограничимся квадратичными членами:

$$E^k = ml^2 \dot{\theta}^2 \left(3 - 2 \frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} \right),$$

$$E^p = ml^2 \left(\left(\Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega^2} \right) \theta^2 + \frac{\Omega_0^4}{\Omega^2} + \Omega^2 \right).$$

Подставляя E^k и E^p в закон сохранения механической энергии $\frac{\partial}{\partial t} (E^k + E^p) = 0$, получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \left(\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} \right) \theta = 0.$$

Следовательно, искомая угловая частота малых колебаний равна:

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}.$$

6.21. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{2h}.$

Решение. Эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до фокусов имеет одинаковое значение. Поскольку нить нерастяжима, траектория движения бусинки при колебаниях в плоскости чертежа является полуэллипсом с положением фокусов в точках подвеса нитей (см. рис.). Уравнение эллипса в декартовых координатах, изображенных на рисунке, имеет вид:

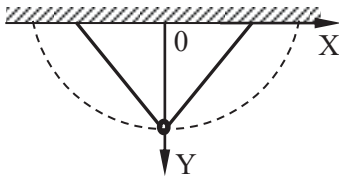


Рис. к решению задачи 6.21.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – полуоси эллипса, связанные с глубиной провисания нити и ее длиной соотношениями $b = h$, $2a = l$.

При малых колебаниях в плоскости чертежа можно считать, что бусинка движется по дуге окружности с радиусом, равным радиусу кривизны эллипса в нижней точке.

Радиус кривизны плоской линии определяется выражением:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

При задании уравнения кривой в параметрической форме выражение для радиуса кривизны траектории принимает вид:

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}, \text{ где } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

В нижней точке эллипса с координатами $x = 0$, $y = b$ радиус кривизны равен:

$$R = \frac{a^2}{b} = \frac{l^2}{4h}.$$

Период колебаний бусинки в плоскости чертежа определяется формулой для периода колебаний математического маятника длиной R :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{4hg}} = \frac{\pi l}{\sqrt{gh}}.$$

Период колебаний бусинки в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, определяется формулой для периода колебаний математического маятника длиной h :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Искомое отношение периодов равно:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{2h}.$$

Второй способ нахождения круговой частоты колебаний бусинки вдоль нити.

Выразим вертикальную координату бусинки из уравнения эллипса:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = h \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}.$$

Разложим полученное выражение в ряд по степеням малого параметра $\left(\frac{x}{l}\right)^2$ и ограничимся линейным членом:

$$y \approx h \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2}{l^2} \right) = h - \frac{2hx^2}{l^2}.$$

Потенциальную энергию бусинки примем равной нулю в нижнем положении. В момент времени, когда горизонтальная координата бусинки становится равной x , ее потенциальная энергия принимает значение

$$E^p = mg(h - y) = \frac{2mghx^2}{l^2}.$$

Кинетическая энергия бусинки в произвольный момент времени равна

$$E^k = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}.$$

При малых колебаниях вертикальная координата отличается от h на величину, пропорциональную квадрату горизонтальной координаты x . Поэтому, пренебрегая членами второго порядка малости

кинетическую энергию можно считать равной $E^k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$.

Подставляя E^k и E^p в закон сохранения механической энергии $\frac{\partial}{\partial t}(E^k + E^p) = 0$, получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{4gh}{l^2}x = 0.$$

Следовательно, круговая частота колебаний бусинки вдоль нити равна

$$\omega_1^2 = \frac{4gh}{l^2}.$$

$$6.22. \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{R+l}\right)^2}}.$$

$$6.23. \omega_0 = \Omega \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Решение. В состоянии равновесия системы уравнения движения верхнего и нижнего тел имеют вид:

$$m\Omega^2 R = T, \quad mg - T = 0,$$

где R – радиус траектории верхнего тела, T – сила натяжения нити.

Следовательно, радиус круговой траектории верхнего тела равен:

$$R = \frac{g}{\Omega^2}.$$

При смещении нижнего тела вниз из положения равновесия на расстояние x происходит изменение траектории верхнего тела под

действием изменившейся силы натяжения нити. Запишем закон сохранения момента импульса для верхнего тела при изменении радиуса окружности на x :

$$mR^2\Omega = m(R-x)^2\Omega'.$$

Здесь Ω' – угловая скорость вращения верхнего тела при смещении нижнего тела на расстояние x вниз от положения равновесия.

Закон сохранения механической энергии для системы «два тела + нить» имеет вид:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{m(R-x)^2\Omega'^2}{2} - mgx = \text{const},$$

где V – скорость нижнего тела, равная проекции скорости верхнего тела на направление нити.

Закон сохранения механической энергии с учетом закона сохранения момента импульса преобразуем к виду:

$$mV^2 + \frac{m\Omega^2 R^4}{2(R-x)^2} - mgx = \text{const}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени, получаем:

$$2\ddot{x} + \frac{\Omega^2 R^4}{(R-x)^3} - g = 0.$$

Раскладывая второе слагаемое в левой части в ряд в окрестности точки $x = 0$ и ограничиваясь линейным членом разложения

$$\frac{1}{(R-x)^3} \approx \frac{1}{R^3} + \frac{3x}{R^4},$$

получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\Omega^2 x = 0.$$

Следовательно, искомая угловая частота колебаний равна:

$$\omega_0 = \Omega\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

6.24. Расстояние от точки подвеса до середины стержня

$$S = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

$$6.25. T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{(m_1 + m_2)\pi}{(m_2 - m_1)_1} - 2 \right)}.$$

Решение. Выберем декартову систему координат с началом в центре кольца. Ось Y направим вертикально вверх, ось X вдоль горизонтальной поверхности в направлении перемещения кольца. Определим положение центра масс верхнего полуцилиндра массой m_1 :

$$y_1 = \frac{1}{m_1} \int_0^{m_1} y dm.$$

Поскольку $y = R \sin \varphi$ и $dm = \frac{m_1}{\pi} d\varphi$ (φ – угол между осью X и радиус-вектором в направлении элемента полукольца массой dm), то

$$y_1 = \int_0^{\pi} R \sin \varphi \frac{1}{\pi} d\varphi = \frac{2R}{\pi}.$$

Положение центра масс полуцилиндра не зависит от массы полуцилиндра. Следовательно, центр масс нижней половины полуцилиндра находится ниже центра цилиндра на величину y_1 .

Механическая энергия цилиндра при его повороте на малый угол α равна

$$E = (m_2 - m_1)gy_1(1 - \cos \alpha) + \frac{J\dot{\alpha}^2}{2},$$

где J – момент инерции полого цилиндра относительно оси, проходящей через точку касания цилиндра с горизонтальной поверхностью.

Для вычисления момента инерции цилиндра J определим сначала моменты инерции полуцилиндров относительно оси цилиндра:

$$J_{01} = m_1 R^2, \quad J_{02} = m_2 R^2.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J_{01} = J_{Ц1} + m_1 y_1^2, \quad J_{02} = J_{Ц2} + m_2 y_1^2,$$

где $J_{Ц1}$, $J_{Ц2}$ – моменты инерции полуцилиндров относительно своих центров масс.

Тогда

$$J_{Ц1} = m_1 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right), \quad J_{Ц2} = m_2 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right).$$

По теореме Гюйгенса – Штейнера моменты инерции полуцилиндров относительно оси, проходящей через точку касания цилиндра с горизонтальной поверхностью, равны:

$$J_1 = J_{Ц1} + m_1 (R + y_1)^2, \quad J_2 = J_{Ц2} + m_2 (R - y_1)^2.$$

Момент инерции всего цилиндра относительно указанной оси равен:

$$J = J_1 + J_2 = 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right).$$

Для определения частоты гармонических колебаний продифференцируем выражение для механической энергии по времени и приравняем полученную производную нулю:

$$\dot{E} = (m_2 - m_1) g y_1 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} + J \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = 0.$$

Учитывая малость угла α ($\sin \alpha \approx \alpha$), получим уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{(m_2 - m_1) g y_1}{J} \alpha = 0.$$

Следовательно, угловая частота ω_0 определяется выражением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1) g y_1}{J}}.$$

Период малых колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{(m_1 + m_2)\pi}{(m_2 - m_1)_1} - 2 \right)}.$$

$$6.26. \quad x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t\right) \text{ при } \delta < \omega_0;$$

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right) \text{ при } \delta \geq \omega_0.$$

$$6.27. \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t\right) \text{ при } \delta < \omega_0;$$

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \quad \text{при } \delta \geq \omega_0,$$

где $\delta = \frac{\pi\eta R^2}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{mR^2}}$.

6.28. $\frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{\tau}{\ln n}$.

6.29. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $n = \frac{x_0 k}{4\mu mg} - \frac{1}{4} = 3,5$.

6.30. $B = \frac{\omega}{\sin \omega t_1} e^{\delta t_1}$, где $t_1 = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{\omega}{\delta}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$, $\delta = \frac{\beta}{2m}$.

6.31. $\alpha(t) = \alpha_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2g\varrho^2}{3R(\varrho^2 + 4\pi^2)}}t\right) \cos\left(2\pi\sqrt{\frac{2g}{3R(\varrho^2 + 4\pi^2)}}t\right)$.

Решение. Уравнение моментов для диска относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -mgR \sin \alpha - \beta\dot{\alpha}.$$

Здесь $J = \frac{3}{2}mR^2$ – момент инерции диска относительно указанной оси, α – угол отклонения диска от положения равновесия (см. рис.), β – коэффициент пропорциональности между моментом силы сопротивления и угловой скоростью.

Уравнение моментов приведем к виду уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

в котором введены следующие обозначения:

$$\delta = \frac{\beta}{3mR^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}.$$

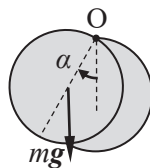


Рис. к решению задачи 6.31.

Логарифмический декремент затухания \mathcal{D} связан с коэффициентом затухания δ и периодом затухающих колебаний T соотношением:

$$\mathcal{D} = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}.$$

Частота затухающих колебаний ω равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Преобразуя записанную систему уравнений, находим связь коэффициента затухания δ с логарифмическим декрементом затухания

$$\delta = \sqrt{\frac{2g\mathcal{D}^2}{3R(\mathcal{D}^2 + 4\pi^2)}},$$

а также частоту затухающих колебаний:

$$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{2g}{3R(\mathcal{D}^2 + 4\pi^2)}}.$$

Решение уравнения затухающих колебаний имеет вид:

$$\alpha(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

В соответствии с условием задачи начальный угол отклонения диска равен α_0 , а начальная скорость равна нулю. Нетрудно показать, что в этом случае амплитуда колебаний $A = \alpha_0$, а начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$. Следовательно, искомым закон движения диска принимает вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2g\mathcal{D}^2}{3R(\mathcal{D}^2 + 4\pi^2)}}t\right) \cos\left(2\pi\sqrt{\frac{2g}{3R(\mathcal{D}^2 + 4\pi^2)}}t\right).$$

$$6.32. \quad \mathcal{D} = \frac{n\mathcal{D}_0}{\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)\mathcal{D}_0^2}{4\pi^2}}} \approx 3,3, \quad n' = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\mathcal{D}_0^2}} \approx 4,3.$$

Решение. Логарифмический декремент затухания \mathcal{D}_0 и частота затухающих колебаний ω связаны с коэффициентом затухания δ следующим образом:

$$\mathcal{D}_0 = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем связь логарифмического декремента затухания с коэффициентом затухания

$$\mathcal{D}_0 = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1}}.$$

Аналогичное выражение запишем в случае увеличения сопротивления среды в n раз:

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi n\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2\delta^2}} = \frac{2\pi n}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - n^2}}.$$

Следовательно, искомый логарифмический декремент затухания равен:

$$\mathcal{D} = \frac{n\mathcal{D}_0}{\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)\mathcal{D}_0^2}{4\pi^2}}} \approx 3,3.$$

Колебания становятся невозможными при коэффициенте затухания, равном собственной частоте незатухающих колебаний. Следовательно, при увеличении коэффициента затухания в n' раз выполняется соотношение:

$$n'\delta = \omega_0.$$

Выражая отношение $\frac{\omega_0}{\delta}$ через логарифмический коэффициент затухания \mathcal{D}_0 , получаем

$$n' = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\mathcal{D}_0^2}} \approx 4,3.$$

В случае, когда коэффициент затухания превышает частоту собственных незатухающих колебаний, движение маятника становится аperiодическим.

6.33. $k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctgy}.$

Решение. Движение шарика представим в виде суперпозиции колебательного движения центра масс относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно плоскости колеба-

ний, и вращения вокруг оси ОС, проходящей через центр масс шарика С и лежащей в плоскости колебаний маятника (см. рис. 1).

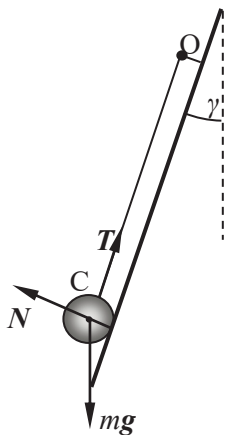


Рис. 1 к решению задачи 6.33. Силы, действующие на шарик в вертикальной плоскости.

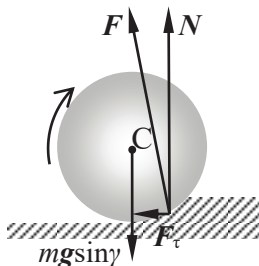


Рис. 2 к решению задачи 6.33. Силы, действующие на шарик в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний маятника.

При качении шарика по наклонной поверхности возникают ее неупругие деформации. Следовательно, сила реакции поверхности F , приложенная к шарикау, оказывается смещенной в сторону движения центра масс (см. рис. 2). Силу реакции F раскладываем на нормальную составляющую N , перпендикулярную недеформированной поверхности, и тангенциальную составляющую F_τ . Уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса, имеет вид:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mg \cos \gamma l \sin \alpha - F_\tau l.$$

Запишем также второй закон Ньютона для центра масс шарика в проекции на направление, перпендикулярное плоскости колебаний:

$$0 = N - mg \sin \gamma.$$

Поворот шарика вокруг оси ОС при качении без проскальзывания будем описывать углом φ . Уравнение моментов для шарика относительно указанной оси имеет вид:

$$\frac{2}{5} mr^2 \ddot{\varphi} = F_\tau r - Nk,$$

где k – плечо силы нормальной реакции опоры относительно оси ОС. В соответствии с определением, k является коэффициентом трения качения. Плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры F_τ не сильно отличается от радиуса шарика при малых остаточных деформациях.

Уравнение кинематической связи для угловых ускорений $\ddot{\alpha}l = \ddot{\varphi}r$ является следствием качения шарика без проскальзывания по наклонной поверхности. Преобразуя записанную систему уравнений, получаем дифференциальное уравнение относительно угла φ :

$$\frac{7}{5}mr^2\ddot{\varphi} = -\frac{r^2}{l}mg \cos \gamma \varphi \pm M_{\text{тк}}.$$

Здесь $M_{\text{тк}} = kmg \sin \gamma$ – момент сил трения качения, в качестве которого выступает момент смещенной силы нормальной реакции опоры при неупругих деформациях.

Знак момента силы нормальной реакции опоры (момента трения качения) меняет знак дважды за период одновременно с изменением направления скорости центра масс шара, при этом модуль момента силы трения качения остается неизменным. Затухание колебаний возникает за счет изменения положения равновесия аналогично затуханию колебаний при наличии силы трения скольжения.

Последнее уравнение можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi \pm \Delta\varphi) = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{5g \cos \gamma}{7l}}$, $\Delta\varphi = \frac{kl}{r^2} \text{tg} \gamma$.

Величина $\Delta\varphi$ определяет смещение положение равновесия дважды за период, при этом за период колебаний амплитуда уменьшается на $4\Delta\varphi$. Используя уравнение кинематической связи $\alpha l = \varphi r$, получаем выражение для изменения угловой амплитуды колебаний маятника за период:

$$\Delta\alpha = \frac{4k}{r} \text{tg} \gamma.$$

Следовательно, искомый коэффициент трения качения равен:

$$k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \text{ctg} \gamma.$$

$$6.34. \alpha(t) = \frac{2\mu r}{l+2R} (1 - \cos \omega_0 t), \text{ где } \omega_0^2 = \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2}.$$

Решение. В соответствии с условием задачи угловая скорость вращения вала превышает максимальную угловую скорость маятника $\Omega > \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max}$.

Следовательно, момент силы трения относительно оси вращения не изменяет знак, поскольку сила трения скольжения направлена противоположно скорости относительного движения соприкасающихся тел, а знак относительной скорости не изменяется при колебаниях маятника. На физический маятник, состоящий из стержня и жестко связанной с ним муфты, действуют сила тяжести и сила со стороны вращающегося вала. Ненулевой момент относительно оси вращения имеют сила тяжести и тангенциальная составляющая силы реакции вала – сила трения скольжения. Как будет доказано ниже, постоянный момент силы трения скольжения не изменяет частоты колебаний, не приводит к их затуханию, а лишь смещает положение равновесия.

Запишем уравнение моментов относительно оси вращения, направление которой совпадает с направлением угловой скорости вращения вала:

$$J\ddot{\alpha} = M_{\text{тр}} + M_{mg},$$

где $M_{\text{тр}} = \mu mgr$ – момент силы трения, $M_{mg} = -mg \left(\frac{l}{2} + R \right) \sin \alpha$ – момент силы тяжести. По условию задачи муфту можно считать легкой, следовательно, точка приложения силы тяжести маятника совпадает с центром стержня и находится на расстоянии $\frac{l}{2} + R$ от оси вращения.

Момент инерции стержня относительно оси вращения находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} + R \right)^2.$$

В приближении малых углов отклонения маятника уравнение моментов преобразуем к виду:

$$\left(\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} + R \right)^2 \right) \ddot{\alpha} = -mg \left(\frac{l}{2} + R \right) \alpha + \mu mgr.$$

С учетом условия равновесия $0 = -mg \left(\frac{l}{2} + R \right) \alpha_{\text{равн}} + \mu mgr$

уравнение колебаний принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\alpha - \alpha_{\text{равн}}) + \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2} (\alpha - \alpha_{\text{равн}}) = 0.$$

Следовательно, частота колебаний равна

$$\omega_0^2 = \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2}.$$

Как видим, наличие силы трения скольжения не всегда приводит к затуханию колебаний. Постоянный момент силы трения в данной задаче лишь смещает положение равновесия:

$$\alpha_{\text{равн}} = \frac{2\mu r}{l+2R}.$$

Решением уравнения гармонических колебаний является функция

$$\alpha(t) - \alpha_{\text{равн}} = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитуду A и начальную фазу φ_0 определяем из начальных условий $\alpha(t=0) = 0$, $\dot{\alpha}(t=0) = 0$:

$$A = \alpha_{\text{равн}}, \quad \varphi_0 = \pi.$$

Искомый закон движения маятника принимает вид:

$$\alpha(t) = \frac{2\mu r}{l+2R} (1 - \cos \omega_0 t).$$

6.35. Если сила трения увеличивается со скоростью скольжения, то колебания будут затухающими. Если сила трения уменьшается со скоростью скольжения, то амплитуда колебаний будет возрастать.

6.36. а) $a_0, a_0 \omega$; б) $t_n = \frac{\arctg(\omega / \beta) + \pi n}{\omega}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

6.37. а) $\dot{\varphi}(0) = -\beta \varphi_0$, $\ddot{\varphi}(0) = (\beta^2 - \omega^2) \varphi_0$;

$$\text{б) } t_n = \frac{1}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega} \right) + \pi n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$6.38. \quad a_0 = \frac{v_0}{\omega}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

$$6.39. \quad a_0 = x_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

$$6.40. \quad v_0 = -\frac{x_0}{\tau} = -0,5 \text{ см/с}.$$

$$6.41. \quad \beta = \omega \sqrt{\eta^2 - 1} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

$$6.42. \quad v(t) = a_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t}.$$

$$6.43. \quad v(t) = |v_0| \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} e^{-\beta t}.$$

$$6.44. \quad T = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \theta^2)\Delta x}{g}} = 0,7 \text{ с}.$$

$$6.45. \quad S \approx \frac{l(1 + e^{-\theta/2})}{(1 - e^{-\theta/2})} = 2 \text{ м}.$$

$$6.46. \quad Q = \sqrt{\frac{kmp^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2} - \frac{1}{4}} \approx 2,17;$$

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{2m^2 p^2}} \approx 19,0 \text{ рад/с};$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0 p}{(mp^2 - k) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{4m^2 p^2}}} \approx 5,7 \text{ см}.$$

$$6.47. \quad \frac{P_{\text{ср}}^{\text{рез}}}{P_{\text{ср}}^{\text{max}}} = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

$$6.48. \quad f_{\text{рез}} = \sqrt{f_1 f_2} \approx 245 \text{ Гц}.$$

$$6.49. p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2}}.$$

$$6.50. \alpha = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\delta^2 p^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \text{ где } \delta = \frac{\beta}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$6.51. a = A \frac{T^2}{T^2 - 4\pi^2 \frac{l+R}{g}} \approx 2,9 \text{ см}.$$

Решение. Сосуд с жидкостью колеблется подобно математическому маятнику длиной $l + R$, поскольку жидкость является идеальной и проскальзывает относительно сосуда. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с точкой подвеса маятника (см. рис.).

Уравнение моментов для маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний, имеет вид:

$$m(l+r)^2 \ddot{\alpha} = -mg(l+R) \sin \alpha - m\ddot{X}(l+R) \cos \alpha.$$

Здесь X – координата точки подвеса, α – угол отклонения маятника.

Преобразуя уравнение моментов в случае малых колебаний с учетом закона колебаний точки подвеса, получаем уравнение вынужденных колебаний для угла отклонения маятника:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l+R} \alpha = \frac{A\omega^2}{l+R} \sin \omega t.$$

В установившемся режиме ищем решение уравнения в виде $\alpha(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$.

Подставляя $\alpha(t)$ в уравнение колебаний, получаем:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A\omega^2}{l+R} \sin \omega t.$$

Преобразуем полученное уравнение, раскрывая $\sin(\omega t + \varphi)$:

$$\left(\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \cos \varphi - \frac{A\omega^2}{l+R}\right) \sin \omega t +$$

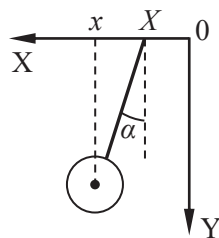


Рис. к решению задачи 6.51.

$$+\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right)B \sin \varphi \cos \omega t = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться в любой момент времени, то коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ равны нулю:

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right)B \sin \varphi &= 0, \\ \left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right)B \cos \varphi - \frac{A\omega^2}{l+R} &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученную систему двух уравнений относительно амплитуды вынужденных колебаний B и фазы φ , получаем:

$$B = A \frac{\omega^2}{(l+R)(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \sin \varphi = 0.$$

Здесь введено обозначение $\omega_0^2 = \frac{g}{l+R}$.

Запишем уравнение кинематической связи для координат центра масс маятника $x(t)$ и точки его подвеса $X(t)$ относительно лабораторной системы отсчета:

$$x(t) = X(t) + (l+R) \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$x(t) = A \sin \omega t + (l+R)B \sin \omega t = A \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, находим искомую амплитуду колебаний маятника:

$$a = A \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = A \frac{T^2}{T^2 - 4\pi^2 \frac{l+R}{g}} a \approx 2,9 \text{ см.}$$

Нетрудно убедиться, что при таких колебаниях угол отклонения маятника можно считать малым, и принятое допущение $\sin \alpha \approx \alpha$ является правомерным.

$$\mathbf{6.52.} \quad x(t) = \frac{F_0}{mp^2}(pt - \sin(pt)), \quad y(t) = \frac{F_0}{mp^2}(1 - \cos(pt));$$

$$\bar{v}_x = \frac{F_0}{mp}, \quad \bar{v}_y = 0.$$

Решение. Запишем уравнение движения частицы в проекциях на оси выбранной системы координат

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(pt), \quad m\ddot{y} = F_0 \cos(pt)$$

и проинтегрируем по времени:

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m} \int \sin(pt) dt = -\frac{F_0}{mp} \cos(pt) + C_1,$$

$$\dot{y} = \frac{F_0}{m} \int \cos(pt) dt = \frac{F_0}{mp} \sin(pt) + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, значения которых определяем из начальных условий $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}(t=0) = 0$:

$$C_1 = \frac{F_0}{mp}, \quad C_2 = 0.$$

Интегрируя выражения для проекций скорости

$$v_x = \dot{x} = \frac{F_0}{mp}(1 - \cos(pt)), \quad v_y = \dot{y} = \frac{F_0}{mp} \sin(pt),$$

получаем закон движения частицы в координатной форме:

$$x = \frac{F_0}{mp} \int (1 - \cos(pt)) dt = \frac{F_0}{mp} t - \frac{F_0}{mp^2} \sin(pt) + C_3,$$

$$y = \frac{F_0}{mp} \int \sin(pt) dt = \frac{F_0}{mp^2} \cos(pt) + C_4.$$

Здесь C_3 и C_4 – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями $x(t=0) = 0$, $y(t=0) = 0$:

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{F_0}{mp^2}.$$

С учетом полученных значений C_3 и C_4 законы изменения координат частицы принимают вид:

$$x(t) = \frac{F_0}{mp^2}(pt - \sin(pt)), \quad y(t) = \frac{F_0}{mp^2}(1 - \cos(pt)).$$

Как видим, получено уравнение циклоиды в параметрической форме.

Определим средние значения проекций скорости частицы:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t} \int_0^t v_x dt = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_0}{mp} (1 - \cos(pt)) dt = \frac{F_0}{mp}.$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{t} \int_0^t v_y dt = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_0}{mp} \sin(pt) dt = 0.$$

В соответствии с условием задачи усреднение проводилось за достаточно большой промежуток времени, поэтому интервал времени t считали равным целому числу периодов. При этом средняя скорость частицы оказалась направленной вдоль оси X .

$$\mathbf{6.53.} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{F_0}{mp^2}, \quad \mathbf{v}_0 = -\frac{F_0}{mp} \mathbf{e}_x.$$

Решение. Аналогично решению задачи **6.52** получаем закон движения материальной точки в координатной форме:

$$x = \int \left(-\frac{F_0}{mp} \cos(pt) + C_1 \right) dt = -\frac{F_0}{mp^2} \sin(pt) + C_1 t + C_3,$$

$$y = \int \left(\frac{F_0}{mp} \sin(pt) + C_3 \right) dt = -\frac{F_0}{mp^2} \cos(pt) + C_2 t + C_4.$$

В случае, когда константы интегрирования в выражениях равны нулю ($C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$), зависимости координат материальной точки от времени принимают вид:

$$x(t) = -\frac{F_0}{mp^2} \sin(pt), \quad y(t) = -\frac{F_0}{mp^2} \cos(pt).$$

Полученные выражения представляют собой уравнение окружности с центром в начале координат в параметрической форме.

Проекции скорости получаем, дифференцируя закон движения к координатной форме:

$$\dot{x}(t) = -\frac{F_0}{mp} \cos(pt), \quad \dot{y}(t) = \frac{F_0}{mp} \sin(pt).$$

Для определения начальных условий подставим значения $t = 0$ и $C_1 = C_2 = 0$ в выражения для проекций скорости и координат частицы:

$$\dot{x}(t=0) = -\frac{F_0}{mp}, \quad \dot{y}(t=0) = 0,$$

$$x(t=0) = 0, \quad y(t=0) = -\frac{F_0}{mp^2}.$$

Как видим, для движения по окружности с центром в начале координат под действием двух ортогональных гармонических сил $\mathbf{F}_1(t) = \mathbf{e}_x F_0 \sin(pt)$ и $\mathbf{F}_2(t) = \mathbf{e}_y F_0 \cos(pt)$ материальной точке следует сообщить начальную скорость, направленную в отрицательном направлении оси X и равную $\mathbf{v}_0 = -\frac{F_0}{mp} \mathbf{e}_x$. Необходимо также, чтобы в начальный момент времени материальная точка имела координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = -\frac{F_0}{mp^2}$.

При воздействии на материальную точку внешних сил, изменяющихся во времени по гармоническому закону, закон движения материальной точки не всегда является гармоническим. Характер движения существенно зависит от начальных условий.

$$6.54. \quad p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \frac{g}{\Delta l}.$$

Решение. Искомая резонансная частота $p_{\text{рез}}$ связана с частотой собственных незатухающих колебаний ω_0 и коэффициентом затухания δ соотношением:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Преобразуем выражение для частоты собственных незатухающих колебаний груза на пружине, используя условие равновесия $mg = k\Delta l$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

Заданный в условии задачи логарифмический декремент затухания \mathcal{G} определяется выражением:

$$\mathcal{G} = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega},$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Используя записанные соотношения нетрудно выразить коэффициент затухания δ и резонансную частоту $p_{\text{рез}}$ через логарифмический коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{g^2}}},$$

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \omega_0^2 = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \frac{g}{\Delta l}.$$

6.55. $\tau \approx \frac{2Q}{\omega_0} = 20 \text{ с}.$

Решение. При произвольных начальных условиях в колебательной системе возможна суперпозиция собственных и вынужденных колебаний. Задачу решаем в предположении, что сила трения, приводящая к затуханию собственных колебаний, пропорциональна скорости осциллятора. В этом случае амплитуда собственных колебаний уменьшается по экспоненциальному закону. Будем считать временем установления вынужденных колебаний интервал времени, через которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в e раз.

В общем случае закон движения имеет вид:

$$\xi(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A(p) \cos(pt + \varphi(p)),$$

где A_0 – амплитуда собственных колебаний в начальный момент времени, δ – коэффициент затухания, $A(p)$ – амплитуда вынужденных колебаний, p – частота вынуждающей силы.

Следовательно, интервал времени, через которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в e раз, равен:

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Добротность колебательной системы и коэффициент затухания связаны соотношением:

$$Q = \frac{\omega}{2\delta},$$

где ω – частота собственных затухающих колебаний.

Частоты затухающих и собственных незатухающих колебаний связаны соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Преобразуя полученную систему уравнений, получаем связь добротности и коэффициента затухания колебательной системы:

$$\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{4Q^2 + 1}}.$$

Следовательно, искомое время установления вынужденных колебаний равно:

$$\tau = \frac{\sqrt{4Q^2 + 1}}{\omega_0} \approx \frac{2Q}{\omega_0} = 20 \text{ с}.$$

$$6.56. x(t) = \frac{F_0(\cos(\omega_0 t) - \cos(pt))}{m(p^2 - \omega_0^2)}.$$

$$6.57. x(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

$$6.58. A = \frac{2F}{k} \left| \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{t}{2} \right) \right|.$$

$$6.59. x(t=0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)}, \quad \dot{x}(t=0) = 0.$$

$$6.60. x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)} \cos pt.$$

$$6.61. \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta} \right)^2 - 2}, \quad \varphi = 84^\circ.$$

$$6.62. A = \pi \alpha F_0 \sin \varphi.$$

$$6.63. A = -\pi \alpha_0 M_0 \sin \varphi.$$

$$6.64. \alpha_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

$$6.65. 1) \alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t;$$

$$2) \alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t, \quad \alpha_2(t) = -\alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t.$$

$$6.66. \alpha_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t,$$

$$\alpha_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t.$$

$$6.67. A_1 = \frac{F_0}{m_1 l_1} \cdot \frac{\omega_{02}^2 - p^2}{(\omega_{01}^2 - p^2)(\omega_{02}^2 - p^2) - \lambda_1 \lambda_2},$$

$$A_2 = \frac{F_0 \lambda_2}{m_1 l_1} \cdot \frac{1}{(\omega_{01}^2 - p^2)(\omega_{02}^2 - p^2) - \lambda_1 \lambda_2},$$

$$\text{где } \lambda_1 = \frac{ka^2}{m_1 l_1^2}, \lambda_2 = \frac{ka^2}{m_2 l_2^2}, \omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1} + \frac{ka^2}{m_1 l_1^2}}, \omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2} + \frac{ka^2}{m_2 l_2^2}}.$$

$$6.68. x_1(t) = \frac{F}{4m} (t^2 - 1 + \cos(\omega_0 t)) - \frac{l_0}{2},$$

$$x_2(t) = \frac{F}{4m} (t^2 + 1 - \cos(\omega_0 t)) + \frac{l_0}{2},$$

$$l(t) = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_0 t) + l_0.$$

Решение. Направим ось X лабораторной системы отсчета вдоль направления действия силы и совместим начало отсчета с центром масс системы тел «два шарика + пружинка» в начальный момент времени (см. рис. к задаче **6.68**). Уравнения движения шариков имеют вид:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0),$$

$$m\ddot{x}_2 = F - k(x_2 - x_1 - l_0).$$

Полученную систему легко свести к двум независимым уравнениям для длины пружинки $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$ и координаты центра масс системы $x_{\text{цм}}(t) = \frac{x_2(t) + x_1(t)}{2}$:

$$m\ddot{l} = F - 2k(l - l_0),$$

$$\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}.$$

Уравнение для длины пружинки l заменой переменной $l(t) = z(t) + l_0 + \frac{F}{2k}$ сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$z = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где угловая частота гармонических колебаний равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, а амплитуда A и начальная фаза φ_0 определяются начальными условиями, заданными в задаче:

$$x_1(t=0) = -\frac{l_0}{2}, \quad x_2(t=0) = \frac{l_0}{2},$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0.$$

Используя записанные соотношения, нетрудно получить закон изменения длины пружинки:

$$l(t) = \frac{F}{2k}(1 - \cos \omega_0 t) + l_0.$$

Решение уравнения для координаты центра масс с учетом начальных условий имеет вид:

$$x_{\text{цм}}(t) = \frac{Ft^2}{4m}.$$

Переходя от переменных $l(t)$ и $x_{\text{цм}}(t)$ к координатам шариков, получаем законы движения шариков:

$$x_1(t) = x_{\text{цм}}(t) - \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m}(t^2 - 1 + \cos(\omega_0 t)) - \frac{l_0}{2},$$

$$x_2(t) = x_{\text{цм}}(t) + \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m} (t^2 + 1 - \cos(\omega_0 t)) + \frac{l_0}{2}.$$

Движение шариков является суперпозицией равноускоренного движения с ускорением центра масс системы $\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}$ и колебательного движения с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, при этом колебания шариков происходят в противофазе.

6.69. При возбуждении первой моды:

$$x_1 = -x_0 \cos(\omega_1 t) - l,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = x_0 \cos(\omega_1 t) + l, \text{ где } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

При возбуждении второй моды:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_2 t) - l,$$

$$x_2 = -\frac{2m}{M} x_0 \cos(\omega_2 t),$$

$$x_3 = x_0 \cos(\omega_2 t) + l, \text{ где } \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{2m}{M} + 1\right) \frac{k}{m}}.$$

При возбуждении третьей моды колебаний не возникает.

$$\mathbf{6.70.} \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m_1 m_2} \left(m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2} \right)}.$$

$$\mathbf{6.71.} \quad x_1(t) = \frac{A}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right),$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right).$$

Решение. Будем считать, что при колебаниях стержень и пружины не отклоняются от вертикальной плоскости, в которой находились в положении равновесия, а центр масс стержня остается на одной вертикальной прямой. Искривлением пружин также пренебрегаем. Стержень имеет две степени свободы, поскольку его положение полностью задается вертикальной координатой центра

масс и углом поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колебаний стержня.

Направим ось X лабораторной системы отсчета вертикально вниз (см. рис.). Начало отсчета по оси X совместим с координатой центра масс стержня в положении равновесия.

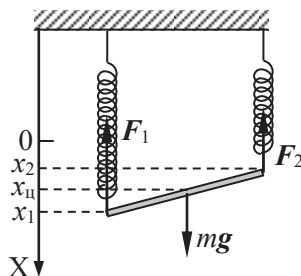


Рис. к решению задачи 6.71.

Запишем уравнение движения центра масс стержня:

$$m\ddot{x}_{\text{ц}} = mg - k(x_1 + x_{1\text{равн}}) - k(x_2 + x_{2\text{равн}}),$$

где $x_{\text{ц}}$ – координата центра масс стержня; x_1, x_2 – смещения концов пружин от положения равновесия; $x_{1\text{равн}}, x_{2\text{равн}}$ – деформации пружин в положении равновесия.

С учетом условия равновесия $kx_{1\text{равн}} + kx_{2\text{равн}} = mg$ уравнение движения центра масс приобретает вид:

$$m\ddot{x}_{\text{ц}} = -kx_1 - kx_2.$$

Запишем также уравнение вращательного движения стержня вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колебаний:

$$J\ddot{\alpha} = -kx_1 \frac{l}{2} + kx_2 \frac{l}{2}.$$

Здесь $J = \frac{ml^2}{12}$ – момент инерции стержня относительно указанной

оси.

Угол поворота стержня связан с координатами концов стержня и координатой его центра масс соотношениями:

$$\alpha = \frac{x_1 - x_{\text{ц}}}{l/2}, \quad \alpha = \frac{x_{\text{ц}} - x_2}{l/2}.$$

Записанную систему уравнений легко привести к системе связанных дифференциальных уравнений относительно координат концов стержня:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}(x_1 + x_2),$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{6k}{m}(x_2 - x_1),$$

которая с помощью замены переменных $\xi_1 = x_1 + x_2$, $\xi_2 = x_1 - x_2$ преобразуется к виду:

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{2k}{m}\xi_1 = 0,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \frac{6k}{m}\xi_2 = 0.$$

Решением полученных уравнений гармонических колебаний являются функции

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Здесь A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 – амплитуды и начальные фазы, определяемые начальными условиями; $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$.

Осуществляя переход от координат ξ_1 и ξ_2 к координатам концов стержня, получаем:

$$x_1 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Начальные условия, заданные в условии задачи, имеют вид:

$$x_1(t=0) = A, \quad x_2(t=0) = 0, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0.$$

Амплитуды и начальные фазы колебаний концов стержня получаем, подставляя начальные условия в выражения для координат концов стержня и их первых производных:

$$A_1 = A_2 = A, \quad \sin \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = 0.$$

С учетом полученных выражений закон движения концов стержня принимает вид:

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right),$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right).$$

$$6.72. \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left((\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}} \right),$$

где $\omega_{0i} = \sqrt{\frac{g}{l_i} + \frac{k a^2}{m_i l_i^2}}$, $i = 1, 2$.

$$6.73. \omega_1 = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m}}.$$

$$6.74. \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

$$6.75. t \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$6.76. t \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g} \frac{mgl}{ka^2}}.$$

$$6.77. \omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

РАЗДЕЛ 7

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

$$7.1. \Delta\Phi = \frac{\omega}{c} \left((x_2 - x_1) \cos\alpha + (y_2 - y_1) \cos\beta + \right. \\ \left. + (z_2 - z_1) \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} \right) \cong \pi/2, \\ E = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c s \tau}{2} \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$7.2. I = \frac{\nu_0^2 \rho c}{2} = 200 \text{ Вт/м}^2, \quad \varepsilon(t, x) = -\frac{\nu_0}{c} \cos(\omega t - kx), \\ \xi(t, x) = \frac{\nu_0}{\omega} \sin(\omega t - kx).$$

Решение. Закон смещения частиц среды от положения равновесия:

$$\xi(t, x) = \int v(t, x) dt = \frac{\nu_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) + C(x).$$

Константу интегрирования находим из начального условия $\xi(t=0, x=0) = 0$. Волны смещений и деформаций описываются выражениями:

$$\xi(t, x) = \frac{\nu_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) = \xi_0 \sin(\omega t - kx), \\ \varepsilon(t, x) = \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} = -\xi_0 k \cos(\omega t - kx) = -\frac{\nu_0}{c} \cos(\omega t - kx).$$

Интенсивность упругой волны равна:

$$I = \frac{w_0}{2} c = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c}{2} = \frac{\nu_0^2 \rho c}{2} = 200 \text{ Вт/м}^2.$$

$$7.3. c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cong 5,06 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

$$7.4. c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cong 3,2 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

$$7.5. c = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\pi}}} \cong 320 \text{ м/с.}$$

$$7.6. c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \cong 330 \text{ м/с.}$$

$$7.7. \xi(t, x) = \xi_0 \sin(\omega t - kx), \quad \xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = 1 \text{ мкм,}$$

$$a(t, x) = a_0 \sin(\omega t - kx + \pi), \quad a_0 = v_0 \omega = 25 \text{ м/с}^2,$$

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}), \quad \varepsilon_0 = \frac{\xi_0 \omega}{c} \cong 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

$$7.8. \langle w(t, x) \rangle = \frac{2}{3} w^*.$$

$$7.9. R = \frac{a_1 r_1 + a_1 r_2}{a_1 + a_1}.$$

$$7.10. \delta = \ln\left(\eta \frac{r_0}{r}\right) / (r - r_0) \cong 0,08 \text{ м}^{-1},$$

$$v_0(r) = 2\pi v \frac{\xi_0(r_0)}{\eta} \cong 15 \text{ см/с}.$$

$$7.11. I = \sqrt{2} a^2 \rho \omega^2 c.$$

Решение. Законы распространения бегущих плоских продольных гармонических волн смещений имеют вид:

$$\xi_1(t, x) = a e_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

$$\xi_2(t, y) = a e_y \cos(\omega t - ky + \varphi_0),$$

где e_x и e_y – единичные векторы вдоль осей X и Y, $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число для обеих волн, φ_0 – начальные фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

Результирующее волновое поле смещений вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY описывается выражением:

$$\xi(t, x, y) = \xi_1(t, x) + \xi_2(t, y) = a(e_x + e_y) \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Направим вспомогательную ось Г вдоль прямой $y = x$ в плоскости XY и обозначим единичный вектор вдоль этого направления как e_γ . Поскольку $e_x + e_y = \sqrt{2} e_\gamma$, то

$$\xi = a\sqrt{2}e_\gamma \cos(\alpha t - kx + \varphi_0) = Ae_\gamma \cos(\alpha t - kx + \varphi_0),$$

где амплитуда волнового поля вдоль оси Γ равна $A = \sqrt{2}a$.

Подставляя в выражение для смещения частиц среды вдоль оси Γ соотношение координат вдоль осей X и Γ — $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$,

получаем:

$$\xi = Ae_\gamma \cos\left(\omega\left(t - \frac{\gamma}{\sqrt{2}c}\right) + \varphi_0\right).$$

Волновое поле вдоль оси Γ можно интерпретировать как бегущую продольную волну смещений с амплитудой A и скоростью $c_\gamma = \sqrt{2}c$.

Среднее значение плотности потока энергии волнового возмущения вдоль прямой $y = x$ равно:

$$I = \langle S(x, t) \rangle_T = \frac{A^2 \rho \omega^2}{2} c_\gamma = \sqrt{2} a^2 \rho \omega^2 c.$$

$$7.12. J = 2I_0 \pi L^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/L^2 + 1}}\right) = 20 \text{ мкВт.}$$

Решение. Разобьем поверхность, ограниченную кольцом, на концентрические кольцевые зоны с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ (см. рис.). Поскольку интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения, то интенсивность волны, проходящей через кольцевую зону радиусом ρ , определяется выражением:

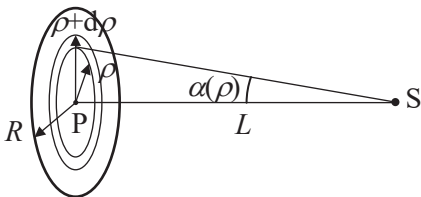


Рис. к решению задачи 7.12.

$$I(\rho) = I_0 \frac{L^2}{\rho^2 + L^2}.$$

Поток энергии dJ через выделенную кольцевую зону равен:

$$dJ = I(\rho) \cos \alpha(\rho) 2\pi \rho d\rho = I(\rho) \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} 2\pi \rho d\rho.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем:

$$J = \int_0^R I_0 \frac{\pi L^3}{(\rho^2 + L^2)^{3/2}} d(\rho^2) = 2I_0 \pi L^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/L^2 + 1}} \right) = 20 \text{ мкВт}.$$

7.13. $\Phi = \frac{Ph}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$

Решение. Направим ось Z вдоль оси симметрии цилиндра (см. рис.), а начало отсчета совместим с положением точечного источника звука. На кольцевую полоску поверхности цилиндра бесконечно малой площади $dS = 2\pi R dz$ падает поток энергии звуковой волны, равный

$$d\Phi = j_n dS = j \cos \varphi dS,$$

где j – плотность потока энергии в волне, j_n – его нормальная к поверхности цилиндра составляющая, φ – угол между радиус-вектором, проведенным в некоторую точку выделенной кольцевой области цилиндра и плоскостью, перпендикулярной оси Z .

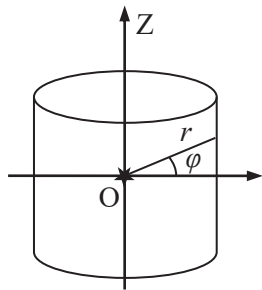


Рис. к решению задачи 7.13.

Плотность потока энергии в звуковой волне на расстоянии r от источника мощностью P равна:

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Расстояние от начала координат до выделенной области поверхности цилиндра равно:

$$r = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

Координата z и ее дифференциал определяются соотношениями:

$$z = R \operatorname{tg} \varphi, \quad dz = \frac{R d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Преобразуя записанную систему уравнений, получаем выражение для потока энергии звуковой волны через бесконечно малую кольцевую зону поверхности цилиндра:

$$d\Phi = \frac{P}{2} \cos\varphi d\varphi.$$

Интегрируя последнее соотношение по углу φ в пределах от значения $(-\varphi_0)$ до $\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}\right)$, получаем выражение для искомого потока энергии:

$$\Phi = \frac{Ph}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

$$7.14. P = 4\pi r^2 I e^{-2r}.$$

Решение. Поток энергии Φ через сферическую поверхность радиусом r связан с интенсивностью волны I соотношением:

$$\Phi = 4\pi r^2 I.$$

При распространении сферической затухающей звуковой волны ее амплитуда изменяется по закону:

$$A = \frac{a_0}{r} e^{-r},$$

где a_0 – величина, численно равная амплитуде волны на единичном расстоянии от источника в отсутствие затухания.

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны:

$$I = \alpha \frac{e^{-2r}}{r^2}.$$

Здесь α – постоянный коэффициент, не зависящий от координаты r .

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\Phi = 4\pi\alpha e^{-2r} = \Phi_0 e^{-2r},$$

где Φ_0 – поток энергии при $r = 0$, т.е. мощность источника звука P .

Следовательно, искомая мощность равна

$$P = 4\pi r^2 I e^{2r}.$$

$$7.15. \Delta T = \frac{1}{\alpha(2N-1)} \approx 0,3 \text{ К}, \text{ где } \alpha = 0,002.$$

7.16. $\mathbf{k} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z$, $v = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ –

орты осей координат.

7.17. $\mathbf{k} = \omega \left(\frac{\mathbf{e}_x}{v_1} + \frac{\mathbf{e}_y}{v_2} + \frac{\mathbf{e}_z}{v_3} \right)$.

7.18. $\xi(t, x) = \xi_0 \cos \left(\left(1 - \frac{V}{v} \right) \omega t - kx' \right)$, где $v = \frac{\omega}{k}$.

7.19. $u_x = -\varepsilon \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

7.20. а) $\frac{\xi_m}{\lambda} = 5,1 \cdot 10^{-5}$; б) $u_0 = 11$ см/с, $\frac{u_m}{v} = 3,2 \cdot 10^{-4}$;

в) $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_m = 3,2 \cdot 10^{-4}$, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_m = v \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_m$, где $v = 0,34$ км/с.

7.21. $\Delta \varphi = -\frac{2\pi}{\gamma \lambda} \ln(1 - \eta) \approx \frac{2\pi \eta}{\gamma \lambda} = 0,3$ рад., где $\eta = 0,01$.

7.22. $u = \frac{v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $A = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

7.24. Частицы среды в точках на прямых $y = x \pm n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$ колеблются с максимальной амплитудой, на прямых $y = x \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – не колеблются вовсе.

7.25. $A = 2A_0 \cos \left(\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \right) \approx 9,8$ мм.

7.26. $\Delta y \approx \frac{\lambda}{\alpha} \approx 13,4$ м.

7.27. $v = \frac{b v D}{L} = 330$ м/с.

7.28. $J = \pi R^2 \frac{\Delta P_0^2}{2\lambda v \rho} = 11 \cdot 10^{-3}$ Вт.

7.29. $v = \frac{c(\tau - \tau_0)}{\tau + \tau_0}$.

$$7.30. \nu = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2}} \approx 496 \text{ Гц.}$$

Решение. Расстояния от динамиков до точки наблюдения А (см. рис.) соответственно равны:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2}.$$

Условием наблюдения первого максимума интенсивности суммарной волны является равенство разности хода волн длине волны λ :

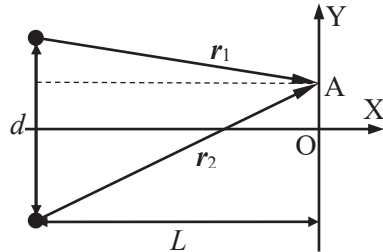


Рис. к решению задачи 7.30.

$$\Delta l = r_2 - r_1 = \lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Следовательно, искомая частота равна

$$\nu = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2}} \approx 496 \text{ Гц.}$$

$$7.31. J = s \frac{\Delta P_0^2}{2c\rho} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

$$7.32. \left(\dot{\xi}\right)_{\max} = \frac{\Delta P_0 \sqrt{RT}}{p \sqrt{\mu\gamma}} = 4,37 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

$$7.33. N = 2\pi r^2 \frac{\Delta P_0^2}{Z_S} \approx 3,83 \text{ Вт.}$$

Решение. Задачу решаем в сферической системе координат, в начале которой расположен источник гармонических звуковых колебаний.

Амплитуда звукового давления равна:

$$\Delta P_0 = c\rho\xi_0\omega.$$

Здесь ξ_0 – амплитуда колебаний волнового поля.

Интенсивность волны определяется средним значением объемной плотности энергии гармонической волны за период колебаний:

$$I \equiv \langle w(x,t) \rangle_T c = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} c.$$

Тогда искомая мощность источника равна:

$$N = 4\pi r^2 I = 2\pi r^2 \frac{\Delta P_0^2}{Z_S} \approx 3,83 \text{ Вт.}$$

$$7.34. L = 10 \lg N + L_0 \approx 57.$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся определением уровня интенсивности звука в децибелах:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

где I – интенсивность звуковой волны, I_0 – интенсивность звуковой волны, принятая за базис (опорная).

В нашем случае

$$L_0 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0}$$

В том случае, когда работают N двигателей, интенсивность звука будет равна

$$I_2 = NI_1,$$

а уровень интенсивности –

$$L = 10 \lg \frac{I_2}{I_0}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$I_1 = I_0 10^{0,1L_0},$$

$$L = 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \frac{NI_0 10^{0,1L_0}}{I_0} = 10 \lg N + L_0 \approx 57.$$

$$7.35. v_1 = \frac{c(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \approx 20,2 \text{ м/с, где } \alpha = \frac{v_2(c - v_2)}{v_1(c + v_2)}.$$

Решение. Частоты колебаний движущихся источника и приемника звуковой волны связаны соотношением

$$v_D = \frac{c - v_D}{c - v_S} v_S,$$

где v_S и v_D – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны, c – скорость распространения волны в среде, v_S – частота излучаемой источником звуковой волны, v_D – частота волны, которую регистрирует детектор.

На первом этапе импульс распространяется в горизонтальном направлении по воде от первого катера ко второму. Направим в этом случае ось X_1 декартовой системы координат в этом же направлении от источника к приемнику. На втором этапе импульс распространяется в обратном направлении. Направим в этом случае ось X_2 декартовой системы координат от источника (второго катера) к приемнику (первому катеру).

В первом случае источник (первый катер) движется в положительном направлении оси X_1 , а детектор (второй катер) – в отрицательном направлении ($v_S = v_1$, $v_D = -v_2$), поэтому частота v'_1 , которую фиксирует детектор, равна:

$$v'_1 = \frac{c + v_2}{c - v_1} v_1.$$

Во втором случае источником является второй катер, который движется в положительном направлении оси X_2 , а детектор (первый катер) в отрицательном направлении этой оси ($v_S = v_2$, $v_D = -v_1$), поэтому частота v_2 , которую фиксирует детектор, равна:

$$v_2 = \frac{c + v_1}{c - v_2} v'_1.$$

Тогда

$$v_2 = \frac{c + v_1}{c - v_2} v'_1 = \frac{c + v_1}{c - v_1} \cdot \frac{c + v_2}{c - v_2} v_1.$$

Введем переменную α :

$$\alpha = \frac{v_2(c - v_2)}{v_1(c + v_2)}.$$

Искомая скорость первого катера равна:

$$v_1 = \frac{c(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \approx 20,2 \text{ м/с.}$$

$$7.36. \omega \cong \frac{c\Delta v}{2Av_s} \cong 3,4 \text{ рад/с.}$$

$$7.37. v_{\text{биен}} = v_0 \frac{2u}{c + u} = 0,6 \text{ Гц.}$$

$$7.38. \xi_0 = \frac{\Delta P}{2\pi v \sqrt{\gamma P \rho}} \cong 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

$$7.39. \text{ а) } (\Delta p)_m = \sqrt{\frac{\rho v P}{2\pi r^2}} = 5 \text{ Па, } \frac{(\Delta p)_m}{p} = 5 \cdot 10^{-5};$$

$$\text{ б) } a = \frac{(\Delta p)_m}{2\pi v \rho v} = 3 \text{ мкм, } \frac{a}{\lambda} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

$$7.40. \text{ а) } L' = L - 20\gamma x \lg e = 50 \text{ дБ; б) } x = 0,3 \text{ км.}$$

7.41. Высота тона повышается приблизительно на 18 Гц, высота гармоник – на $n \cdot 18$ Гц, где n – номер гармоники.

7.42. 254 или 258.

7.43. Биения с частотой $2\nu_0 u/c$ будут зарегистрированы приемником только в первом случае.

$$7.44. \tau = (1 \mp u/v)\tau_0 = \begin{cases} 4,5 \text{ с,} & \text{если приближается} \\ 5,5 \text{ с,} & \text{если удаляется} \end{cases}$$

$$7.45. \omega_2/\omega_1 = (v - v_2)/(v - v_1).$$

$$7.46. v_1 = 2\nu_0 v u / (v^2 - u^2) \approx 2\nu_0 u / v = 1,0 \text{ Гц.}$$

$$7.47. \omega = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_0} \right)^2} - 1 \right) \frac{v v_0}{a \Delta v} = 34 \text{ с}^{-1}.$$

$$7.48. v = v_0 / \sqrt{1 + 2at/v} = 1,35 \text{ кГц.}$$

$$7.49. T = \frac{\pi d^2 L^2 v^2 \rho}{n^2} \cong 77,7 \text{ Н.}$$

$$7.50. v_n = (2n + 1) \frac{c}{4L} = (50 + 100n) \text{ Гц, где } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$7.51. \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad v_n = n \frac{c}{2L}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$7.52. v_3 = 26,6 \text{ кГц}, \quad v_4 = 34,2 \text{ кГц}, \quad v_5 = 41,8 \text{ кГц}, \\ v_6 = 49,4 \text{ кГц}.$$

$$7.53. c = 2\nu l = 340 \text{ м/с}.$$

$$7.54. \xi_{d0} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}, \quad \xi_{r0} = \left| \frac{c_1 \rho_1 - c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2} \right| \xi_{i0},$$

$$\left(\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{вода} \rightarrow \text{воздух}} \approx 2, \quad \left(\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{воздух} \rightarrow \text{вода}} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

Решение. При падении звуковой волны на границу раздела двух сред возникает волна, прошедшая во вторую среду, и волна, отраженная от границы раздела. Выберем лабораторную систему отсчета, ось X декартовой системы координат которой совпадает с направлением волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_1 . Начало отсчета по оси X выберем на границе раздела. Частоты всех трех указанных волн совпадают $\omega_i = \omega_r = \omega_d = \omega$, а длины волн различаются вследствие различия скоростей звуковых волн в разных средах. Здесь и далее индекс i относится к падающей волне (*incident*), r – к отраженной (*reflected*), d – к прошедшей (*diffracted*). Волновой вектор отраженной волны противоположен волновому вектору падающей волны при нормальном падении, а направления волновых векторов прошедшей \mathbf{k}_2 и падающей волн \mathbf{k}_1 в этом случае совпадают. Модули волновых векторов падающей и отраженной волн равны между собой и отличаются от модуля прошедшей во вторую среду волны. Индексы 1 и 2 в обозначениях физических величин относятся к первой и второй среде соответственно.

Запишем закон изменения смещений частиц среды при распространении плоских волн:

$$\xi_i(t, x) = \xi_{i0} \cos(\omega t - k_1 x), \\ \xi_r(t, x) = \xi_{r0} \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1), \\ \xi_d(t, x) = \xi_{d0} \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2).$$

Здесь φ_1 – разность фаз падающей и отраженной волн на границе раздела сред, φ_2 – разность фаз падающей и прошедшей волн на

границе раздела; ξ_{r0} и ξ_{d0} – амплитуды смещений в отраженной и прошедшей волнах.

Условие непрерывности волны смещений на границе раздела двух сред:

$$\xi_i(t, x = 0) + \xi_r(t, x = 0) = \xi_d(t, x = 0).$$

Сначала будем считать, что продольная звуковая волна падает на границу раздела двух твердых тел. Запишем условие равенства напряжений на границе раздела:

$$\sigma_i(t, x = 0) + \sigma_r(t, x = 0) = \sigma_d(t, x = 0).$$

Напряжение, возникающее в твердом теле при распространении упругой волны, связано законом Гука с относительной деформацией:

$$\sigma(t, x) = E \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x}.$$

Здесь E – модуль Юнга.

Скорость продольной упругой волны в твердом теле определяется выражением:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где ρ – плотность среды.

Преобразуя записанные соотношения, получаем связь амплитуд смещений частиц среды при распространении падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\xi_{i0} \cos(\omega t) + \xi_{r0} \cos(\omega t + \varphi_1) = \xi_{d0} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1)$$

Для волн деформаций получаем выражения:

$$\frac{\partial \xi_i(t, x)}{\partial x} = k_1 \xi_{i0} \sin(\omega t - k_1 x) = \frac{\omega}{c_1} \xi_{i0} \sin(\omega t - k_1 x),$$

$$\frac{\partial \xi_r(t, x)}{\partial x} = -\frac{\omega}{c_1} \xi_{r0} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_1),$$

$$\frac{\partial \xi_d(t, x)}{\partial x} = \frac{\omega}{c_2} \xi_{d0} \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2).$$

Подставляя полученные выражения в закон Гука, и используя условие равенства напряжений на границе раздела сред, легко получить уравнение:

$$\frac{E_1}{c_1} (\xi_{i0} \sin(\omega t) - \xi_{r0} \sin(\omega t + \varphi_1)) = \frac{E_2}{c_2} \xi_{d0} \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) должны выполняться в любой момент времени, следовательно, коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в этих выражениях должны быть равны нулю. Раскрывая в (1) и (2) косинусы и синусы суммы двух углов и, приравнявая нулю коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получаем четыре уравнения:

$$\xi_{i0} + \xi_{r0} \cos \varphi_1 = \xi_{d0} \cos \varphi_2, \quad (3)$$

$$\xi_{r0} \sin \varphi_1 = \xi_{d0} \sin \varphi_2, \quad (4)$$

$$-\xi_{i0} + \xi_{r0} \cos \varphi_1 = -\frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} \xi_{d0} \cos \varphi_2, \quad (5)$$

$$\xi_{r0} \sin \varphi_1 = -\frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} \xi_{d0} \sin \varphi_2. \quad (6)$$

Поскольку амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн отличны от нуля, то из уравнений (4) и (6) следует, что $\sin \varphi_1 = 0$ и $\sin \varphi_2 = 0$.

Вычитая из уравнения (3) уравнение (5), получаем:

$$2\xi_{i0} = \left(1 + \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2}\right) \xi_{d0} \cos \varphi_2.$$

Поскольку амплитуды волн являются положительными величинами, а $\sin \varphi_2 = 0$, то $\cos \varphi_2 = +1$. Следовательно, разность фаз φ_2 падающей и прошедшей волн на границе раздела двух сред равна нулю.

Тогда амплитуда прошедшей во вторую среду волны имеет вид:

$$\xi_{d0} = \frac{2}{1 + \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2}} \xi_{i0} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}.$$

При записи последнего соотношения было учтено выражение для скорости продольной звуковой волны в твердом теле. Произведение скорости звука на плотность среды $c\rho$ называется *акустическим волновым сопротивлением*.

Подставляя последнее выражение для амплитуды прошедшей волны в (3), получаем:

$$\xi_{r0} \cos \varphi_1 = \frac{1 - \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}.$$

Было доказано, что $\cos \varphi_1 = \pm 1$. Следовательно, если $\frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} < 1$,

то $\cos \varphi_1 = 1$ и $\varphi_1 = 0$, а если $\frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} > 1$, то $\cos \varphi_1 = -1$ и $\varphi_1 = \pi$. Та-

ким образом, если акустическое волновое сопротивление второй среды меньше, чем первой, то отраженная волна сохраняет фазу падающей на границу раздела волны. Если акустическое волновое сопротивление второй среды больше, чем первой, то фаза отраженной волны отличается на границе раздела от фазы падающей волны на π .

Окончательно, для искомой амплитуды отраженной волны получаем выражение:

$$\xi_{r0} = \left| \frac{c_1 \rho_1 - c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2} \right| \xi_{i0}.$$

Амплитуды волн деформаций отличаются от амплитуд волн смещений множителем $\frac{E\omega}{c}$. Следовательно, отношение амплитуд смещений в отраженной и падающей волне равно отношению амплитуд напряжений, так как эти волны распространяются в одной среде.

$$\frac{\sigma_{d0}}{\sigma_{i0}} = \frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} = \frac{2}{1 + \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}}.$$

Задача решена в случае падения звуковой волны на границу раздела двух твердых тел. Если волна падает на границу раздела жидких или газообразных сред, в решении задачи следует заменить условие равенства напряжений на границе раздела условием равенства давлений, а также использовать соответствующие формулы для скоростей звука в жидкостях и газах.

В случае падения плоской звуковой волны на границу раздела жидкость – газ амплитуда смещения в прошедшей волне определяется выражением

$$\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}}.$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем, что при распространении звуковой волны из воды в воздух $c_1 \rho_1 \approx 14,2 \cdot 10^4 \text{ г}/(\text{см}^2 \text{ с})$, $c_2 \rho_2 \approx 43 \text{ г}/(\text{см}^2 \text{ с})$ отношение амплитуд смещений равно

$$\left(\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{вода} \rightarrow \text{воздух}} \approx 2,$$

а при распространении из воздуха в воду

$$\left(\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{воздух} \rightarrow \text{вода}} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

В случае падения плоской звуковой волны на границу раздела жидкость – газ отношение амплитуд давления в прошедшей волне к амплитуде давления в падающей волне определяется выражением

$$\frac{p_{d0}}{p_{i0}} = \frac{2}{1 + \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}}.$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем, что при падении звуковой волны на границу раздела вода – воздух отношение амплитуд давлений равно:

$$\left(\frac{p_{d0}}{p_{i0}} \right)_{\text{вода} \rightarrow \text{воздух}} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

При падении звуковой волны на границу раздела воздух – вода отношение амплитуд давлений равно:

$$\left(\frac{p_{d0}}{p_{i0}} \right)_{\text{воздух} \rightarrow \text{вода}} \approx 2.$$

Заметим, что амплитуда давления в прошедшей из воздуха в воду волне на четыре порядка превосходит амплитуду давления в

волне, прошедшей из воды в воздух при одинаковых амплитудах падающих волн.

$$7.55. W = \frac{\pi A^2 S \rho \omega^2}{4k}.$$

$$7.56. W_k^{\max} = \frac{1}{4} m \omega^2 A_{\max}^2, \langle W_k \rangle = \frac{1}{8} m \omega^2 A_{\max}^2.$$

$$7.57. \sin \beta = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R (t + 273) \rho}} \approx 31^\circ.$$

Решение. Задача может быть решена в рамках геометрической акустики – упрощенной теории распространения звука, пренебрегающей дифракционными явлениями. Геометрическая акустика применима, если размеры препятствий существенно превосходят длину волны звука. В этом случае преломление звука можно рассматривать как преломление звуковых лучей, для которых справедлив закон Снеллиуса. По аналогии с геометрической оптикой можно ввести относительный показатель преломления двух сред, равный отношению скоростей звука в этих средах.

Скорость продольной упругой волны в стекле равна:

$$c_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где ρ – плотность среды, E – модуль Юнга.

Скорость упругой волны в воздухе в случае адиабатического процесса распространения волны имеет вид:

$$c_{\text{в}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}},$$

где $\gamma \equiv c_P / c_V$ – показатель адиабаты, c_P и c_V – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно, P_0 – давление в отсутствие волны.

Считая воздух идеальным двухатомным газом и используя уравнение Клапейрона – Менделеева, приведем последнее соотношение к виду:

$$c_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}}.$$

Здесь μ – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная термодинамическая температура.

Закон преломления имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha}{c_{\text{в}}} = \frac{\sin \beta}{c_{\text{ст}}}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\sin \beta = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R T \rho}} = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R (t + 273) \rho}}.$$

Подставляя численные значения величин, заданные в условии задачи, а также молярную массу воздуха $\mu = 29$ г/моль и показатель адиабаты для двухатомного газа $\gamma = 1,4$, получаем:

$$\beta \approx 31^\circ.$$

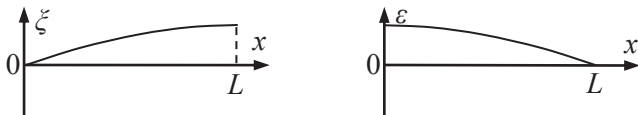
$$7.58. \alpha_{\text{пред}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma R (t + 273) \rho}{\mu E}} \approx 3,84^\circ.$$

Решение. Задачу решаем в рамках геометрической акустики. Ввиду существенного различия скоростей звуковых волн в воздухе и стекле, угол преломления значительно превосходит угол падения при распространении звуковой волны из воздуха в стекло. Существует предельный угол, при падении под которым преломленный луч оказывается скольльзящим вдоль границы раздела сред. При падении волны под углом, большим предельного, происходит явление полного внутреннего отражения. Звуковая волна при этом не проходит во вторую среду.

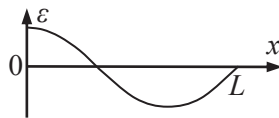
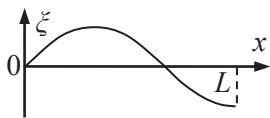
Используя формулу, полученную при решении задачи 7.57 и учитывая, что в условиях данной задачи угол преломления $\beta = \frac{\pi}{2}$, получаем выражение для предельного угла падения:

$$\alpha_{\text{пред}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma R T \rho}{\mu E}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma R (t + 273) \rho}{\mu E}} \approx 3,84^\circ.$$

7.59.



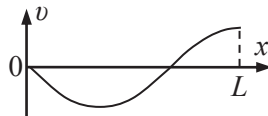
Зависимости $\xi(x)$ и $\varepsilon(x)$ для основного тона в момент времени $t = 0$.



Зависимости $\zeta(x)$ и $\varepsilon(x)$ для первого обертона в момент времени $t = 0$.



Зависимость скорости частиц стержня $v(x)$ для основного тона в момент времени $t = T/4$.



Зависимость скорости частиц стержня $v(x)$ для первого обертона в момент времени $t = T/4$.

7.60. $L = 30$ см.

7.61. $c = 2v_0l = 1400$ м/с. Обертонны $v = kv_0$, $k = 2, 3, \dots$

7.62. Период колебаний тонкой струны в два раза меньше.

7.63. Уменьшить в девять раз.

7.64. а) зажать струну на очень коротком участке в середине;
б) зажать на расстоянии $1/3$ от конца. Понизить тон звучания таким способом невозможно.

7.65. $a_{\max} = 5$ мм; третьему обертому.

$$7.66. \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\eta_2(1+\eta_1)}{\eta_1(1+\eta_2)}} = 1,4.$$

РАЗДЕЛ 8

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

$$8.1. W = \frac{mE\varepsilon^2}{2\rho} \approx 60 \text{ Дж.}$$

$$8.2. N = \frac{4mg}{\sigma_{\text{н}}\pi d^2} \approx 14.$$

$$8.3. \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{нр}}}{\rho}}.$$

$$8.4. T_1 = \frac{mg \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}, T_2 = \frac{mg}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

$$8.5. \Delta V \approx l_0 \frac{F}{E} (1 - 2\mu) = 1,6 \text{ см}^3.$$

Решение. Длина l и диаметр деформированного d стержня определяются выражениями:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right), \quad d = d_0 + \Delta d = d_0 \left(1 + \frac{\Delta d}{d_0} \right),$$

где l_0 и d_0 – длина и диаметр стержня в недеформированном состоянии.

Изменение объема стержня в результате деформации равно:

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\pi d^2}{4} l - \frac{\pi d_0^2}{4} l_0.$$

Выразим диаметр стержня после деформации через коэффициент Пуассона $\mu = -\frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0}$:

$$d = d_0 \left(1 - \frac{\mu \Delta l}{l_0} \right).$$

В случае малых деформаций искомая величина изменения объема равна:

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} (d^2 l - d_0^2 l_0) \approx \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 \frac{\Delta l}{l_0} (1 - 2\mu).$$

Преобразуем последнее равенство, используя закон Гука $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{SE} = \frac{4F}{\pi d_0^2 E}$:

$$\Delta V = l_0 \frac{F}{E} (1 - 2\mu) = 1,6 \text{ см}^3.$$

8.6. $\sigma(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0}$, $\varepsilon(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0 E}$, $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F_0}{2S_0 E}$.

8.7. $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2SE}$.

Решение. Выберем декартову систему координат с осью X, направленной вверх вдоль стержня с началом отсчета $x = 0$ в нижней незакрепленной точке стержня. Рассмотрим слой dx недеформированного стержня с координатой x вдоль него. Масса dm выделенного элемента стержня не изменяется при деформации и остается равной $dm = \frac{m}{l_0} dx$ (l_0 – длина недеформированного стержня).

Условие равновесия стержня:

$$0 = gdm - (S\sigma(x+dx) + \zeta(x+dx)) - S\sigma(x) + \zeta(x).$$

Здесь $\zeta(x)$ и $\zeta(x+dx)$ – смещения границ выделенного фрагмента при деформации (см. рис.). Пренебрегая членами второго порядка малости и используя закон Гука, получим:

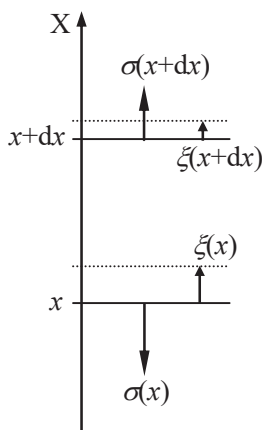


Рис. к решению задачи 8.7.

$$g \frac{m}{l_0} dx = SE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом граничного условия $\sigma(x=0) = 0$, находим относительную деформацию:

$$\varepsilon(x) = \frac{mgx}{l_0 SE}.$$

Поскольку $\varepsilon(x) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, то полное продольное относительное удлинение стержня находим в результате интегрирования:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\xi(l_0)}{l_0} = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \varepsilon(x) dx = \frac{mg}{2SE}.$$

$$8.8. \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{pR}{Ed} (1 - \mu).$$

Решение. Выберем произвольную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с элементом оболочки шара. На рис. 1 изображены тангенциальная и нормальная оси, заданные ортами τ и n , направленные вдоль поверхности шара, а также ось Z , направленная перпендикулярно поверхности шара.

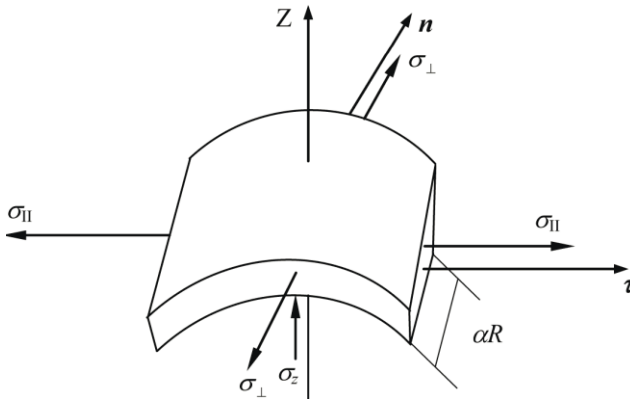


Рис. 1 к решению задачи 8.8.

Механическое напряжение, действующее вдоль оси Z , равно давлению воздуха на оболочку шара $p = \sigma_z$, а механические напряжения, вызванными силами натяжения, направленными вдоль поверхности шара, одинаковы $\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \sigma$.

Используя принцип суперпозиции малых деформаций, для относительного удлинения ε элемента оболочки шара вдоль оси τ можно записать:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\parallel}}{E} - \mu \frac{\sigma_{\perp}}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Если под действием давления воздуха радиус оболочки увеличился на ΔR , то относительное удлинение ε можно рассчитать также следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R}.$$

Увеличение радиуса шара приводит к увеличению его объема, относительное изменение которого равно:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi R^2 \Delta R}{(4/3)\pi R^3} = 3 \frac{\Delta R}{R}.$$

На рис. 2 изображено сечение элемента оболочки шара толщиной d , длина и ширина которого равны αR . Силы натяжения F , действующие на элемент оболочки шара равны

$$F = \sigma d(\alpha R).$$

Поскольку оболочка шара находится в равновесии, то сила давления со стороны воздуха компенсируется упругими силами натяжения:

$$4F \cdot \frac{\alpha}{2} = p((R - d)\alpha)^2.$$

Преобразуя записанные уравнения, получаем:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon = 3\left(\frac{\sigma}{E}(1 - \mu) - \mu \frac{\sigma_z}{E}\right) = 3\left(\frac{p(R - d)^2}{2dRE}(1 - \mu) - \mu \frac{p}{E}\right).$$

Поскольку толщина сферической оболочки мала ($d \ll R$), последнее соотношение принимает вид:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{pR}{Ed}(1 - \mu).$$

8.9.
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}, \quad W = \frac{2p^2 \pi R^3}{3K}.$$

Решение. Рассмотрим сначала однородное изотропное твердое тело в виде прямоугольного параллелепипеда. Будем считать, что перпендикулярно граням этого параллелепипеда приложены силы F_x , F_y и F_z , которым соответствуют напряжения σ_x , σ_y и σ_z . Выберем систему отсчета, жестко связанную с параллелепипедом, и декартову систему координат (см. рис.). Пусть длины ребер этого параллелепипеда равны l_x , l_y , l_z , а модули их изменения под действием сжатия соответственно равны Δl_x , Δl_y , Δl_z .

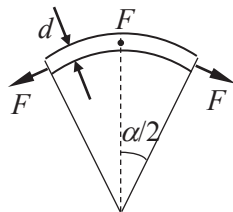


Рис. 2 к решению задачи 8.8.

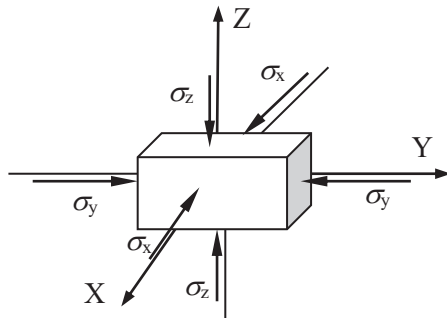


Рис. к решению задачи 8.9.

Считая деформации малыми, воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\Delta l_x}{l_x} = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\Delta l_y}{l_y} = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_z \equiv \frac{\Delta l_z}{l_z} = -\frac{\sigma_z}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E},$$

где E – модуль Юнга, а μ – коэффициент Пуассона.

При квазистатическом растяжении (сжатии) параллелепипеда плотность упругой энергии равна

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z).$$

В случае, когда твердое тело подвергается всестороннему сжатию, все механические напряжения можно считать равными всестороннему давлению p :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p.$$

При малых деформациях относительное изменение объема параллелепипеда равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta l_z}{l_z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3p}{E}(1-2\mu) = -\frac{p}{K},$$

$$w = \frac{3(1-2\mu)}{2E}p^2 = \frac{p^2}{2K},$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – модуль всестороннего сжатия.

Искомая упругая энергия, запасенная в шаре, равна

$$W = w \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2p^2\pi R^3}{3K}.$$

8.10. $p = 2,4 \cdot 10^4$ Н/см².

8.11. $D = 27$ мм.

8.12. $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E}lF$; $\Delta V < 0$ при сжатии, $\Delta V > 0$ при растяжении.

8.13. $F = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2p \approx 11,7 \cdot 10^4$ Н.

8.14. $W = P^2h/(6ES)$. Упругая энергия увеличится в 7 раз.

8.15. $w = \frac{Er^2\phi^2}{4l^2(1+\mu)}$.

8.16. $P_x = \mu P$, $w = \frac{P^2}{2E}(1-\mu^2)$,

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E}(1+\mu), \frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E}(1-\mu^2).$$

8.17. $W = ma^2/(6ES)$.

8.18. $T = \frac{M\omega^3}{2L}(L^2 - x^2)$, $\Delta L = \frac{M\omega^2}{3ES}L^2$, где x – расстояние

рассматриваемого сечения от оси вращения.

8.19. а) $\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1-2\mu)p}{E}$; б) $\beta = \frac{3(1-2\mu)p}{E}$.

8.20. $W = mE\varepsilon^2/2\rho = 40$ Дж.

8.21. $\phi = \frac{4PRI}{\pi Gr^4} = \frac{1}{5\pi} \approx 3,6^\circ$.

$$8.22. 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

$$8.23. \text{ а) } \varphi = \frac{IM}{2\pi r^3 \Delta r G}, \text{ б) } \varphi = \frac{2IM}{\pi r^4 G}.$$

$$8.24. M = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)G\varphi}{32l} = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$8.25. M = \frac{\beta m(r_2^4 - r_1^4)}{2(r_2^2 - r_1^2)}.$$

$$8.26. \lambda = \frac{4FL^3}{Eab^3}.$$

$$8.27. \lambda = \frac{Pl^3}{2ab^3E} \approx 0,03 \text{ мм.}$$

$$8.28. \lambda = \frac{Pl^3}{4a^4E} \approx 1,25 \text{ мм.}$$

$$8.29. \lambda = \frac{4Pl^3}{3\pi(D^4 - d^4)E} \approx 1,6 \text{ мм.}$$

$$8.30. E = \frac{4Pl^3}{3\pi R^4 \lambda} \approx 10^5 \text{ Н/мм}^2.$$

$$8.31. \lambda = \frac{6L^3}{Ea_0 b^3} \left(F + \frac{mg}{6} \right), \quad R = \frac{Ea_0 b^3}{12FL}.$$

Решение. На рис. 1 изображены силы, действующие на правую часть нагруженной балки. При изгибе балки возникают нормальные напряжения, вызванные сжатием слоев, находящихся ниже нейтрального слоя, и растяжением слоев, расположенных выше нейтрального, изображенного пунктиром. На рис. 1 изображена также касательная сила $F_{\text{сдвиг}}$, которая уравнивает силу F , приложенную к концу балки, и силу тяжести $m_0 g$, действующую на выделенную правую часть балки.

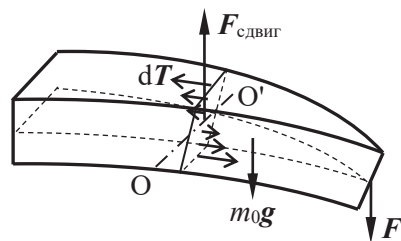


Рис.1 к решению задачи 8.31.

Оси X и Y декартовой системы координат лабораторной системы отсчета изображены на рис. 2. В случае прямоугольного поперечного сечения балки нейтральный слой расположен посередине балки. Введем еще и криволинейную систему координат, направив ось l вдоль нейтральной линии. В соответствии с гипотезой Бернулли при изгибе все поперечные сечения балки остаются плоскими.

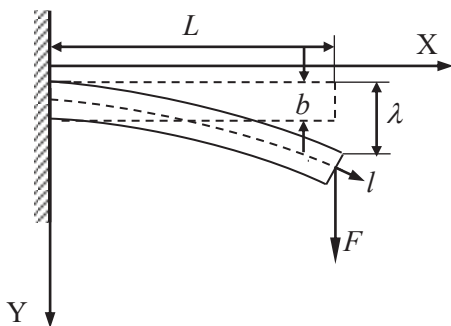


Рис. 2 к решению задачи 8.31.

Линейный поперечный размер равнопрочной балки изменяться по закону:

$a = a_0(1 - x/L)$. Смещение оси балки в результате действия силы F будем описывать функцией $u(x)$. Деформации считаем малыми, то есть стрела прогиба $\lambda = u(L) \ll L$. Для определения стрелы прогиба выделим малый фрагмент балки длиной dl (рис. 3).

При малых деформациях нормальное напряжение $\sigma(l, \xi)$ линейно меняется при удалении от нейтрального слоя:

$$\sigma(l, \xi) = \sigma_0(l) \frac{\xi}{b/2}.$$

Здесь ξ – координата слоя, l – координата элемента балки длиной dl , $\sigma_0(l)$ – напряжение в самом удаленном слое, находящемся на

расстоянии $\frac{b}{2}$ от нейтрального.

На каждый элемент слоя, имеющий границы с координатами $(\xi, \xi + d\xi)$ действует со стороны соприкасающейся части балки сила, равная

$$dT(\xi) = \sigma dS = \sigma ad\xi,$$

где $dS = ad\xi = a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi$ –

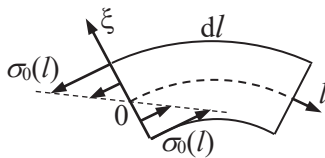


Рис. 3 к решению задачи 8.31.

площадь поперечного сечения выделенного малого фрагмента балки.

Определим линию прогиба $u(x)$ балки, прикрепленной одним концом к вертикальной стене, под действием силы F . При малой деформации балки угол между направлением касательной к нейтральному слою в точке x равен

$$\varphi = \frac{du}{dx} \quad (\text{см. рис. 4}),$$

а изменение направления касательной при переходе от точки x к точке $x+dx$ равно:

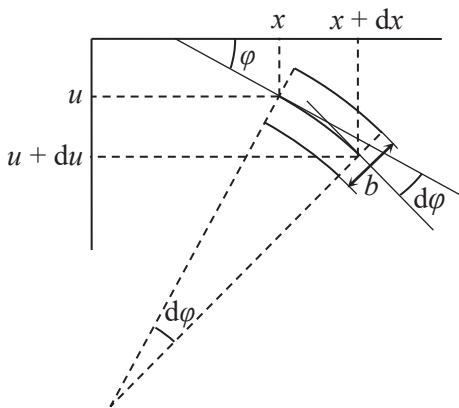


Рис. 4 к решению задачи 8.31.

$$d\varphi = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \frac{d^2u}{dx^2} dx.$$

Поскольку при деформации элемент длиной dl удлиняется на величину $\frac{b}{2}d\varphi$, то относительное удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального, (как видно на рис. 4) равно $\varepsilon(l) = \frac{d\varphi}{dl} \frac{b}{2}$.

Поскольку угол φ – мал, то $dx = dl \cos \varphi \approx dl$ и

$$\varepsilon(x) = \frac{d\varphi}{dx} \frac{b}{2}.$$

Рассмотрим условие равновесия правой части нагруженной балки, изображенной на рис. 1. Выберем горизонтальную ось OO' в точке с координатой l , принадлежащей нейтральному слою. Координата этой точки вдоль оси X равна x . Ось OO' перпендикулярна плоскости центрального вертикального сечения балки (см. рис. 1 и рис. 2).

Определим момент упругих сил растяжения – сжатия, действующих на элемент балки со стороны другой его части относительно указанной оси:

$$M_T = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi dT(\xi) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\xi^2 \sigma_0(l)}{b/2} a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi = \frac{\sigma_0(l) a_0 b^2}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Момент силы F относительно оси OO' равен:

$$M_F = F(L - x).$$

Масса выделенного фрагмента балки равна:

$$m_0 = \rho \frac{1}{2} (L - x) a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) b = m \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2,$$

где ρ – плотность материала балки.

Координату центра масс $z_{\text{цм}}$ выделенной части балки, отсчитанную от точки с координатой x , найдем в соответствии с определением центра масс:

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{m_0} \int_0^{L-x} \rho a(x) \left(1 - \frac{z}{L-x}\right) b z dz = \frac{L-x}{3}.$$

С учетом записанных соотношений момент силы тяжести, действующей на правую часть балки, относительно оси OO' равен:

$$M_{m_0 g} = \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}.$$

Запишем условие равновесия элемента балки, левая граница которого имеет координату x , а правая совпадает с незакрепленным концом и имеет координату $x = L$:

$$M_F + M_{m_0 g} = M_T.$$

Подставляя записанные выше выражения для моментов сил в последнее соотношение, получаем:

$$\frac{\sigma_0(l) a_0 b^2}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = F(L-x) + \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}.$$

Следовательно, нормальные напряжения в слое, наиболее удаленном от нейтрального, в точке с координатой x равны:

$$\sigma_0(x) = \frac{6L}{a_0 b^2} \left(F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right).$$

В случае легкой балки ($m \ll F/g$) напряжение σ_0 не зависит от координаты x , следовательно, оно постоянно во всех сечениях балки, что и отражено в названии «равнопрочная балка».

В результате несложных преобразований получаем дифференциальное уравнение второго порядка для стрелы прогиба

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right),$$

которое интегрируем в пределах от $x=0$ до $x=x'$ с учетом граничного условия $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0$:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x'} = \int_0^{x'} \frac{d^2u}{dx^2} dx = \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(x' \left(F + \frac{mg}{3} \right) - \frac{mgx'^2}{3L} + \frac{mgx'^3}{9L^2} \right).$$

Стрелу прогиба для балки в точке с координатой x получим, интегрируя последнее выражение по x' от 0 до x с учетом граничного условия $u(x=0) = 0$:

$$u(x) = \frac{6L}{Ea_0b^3} \left(\left(F + \frac{mg}{3} \right) x^2 - \frac{2mgx^3}{9L} + \frac{mgx^4}{18L^2} \right).$$

В случае легкой балки

$$u(x)|_{m=0} = \frac{6LFx^2}{Ea_0b^3}.$$

Стрелу прогиба в правом конце балки находим подстановкой $x=L$:

$$\lambda = u(L) = \frac{6L^3}{Ea_0b^3} \left(F + \frac{mg}{6} \right).$$

Радиус кривизны изгиба балки R определяется соотношением:

$$R = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}} = \frac{Ea_0b^3L}{4(3FL^2 + mg(L-x)^2)}.$$

В случае легкой балки радиус кривизны R является постоянной величиной, не зависящей от выбранной точки балки. Следовательно, балка изгибается в форме дуги окружности с радиусом

$$R|_{m=0} = \frac{Ea_0b^3}{12FL}.$$

8.32. $\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{3}{32}.$

Решение. Будем считать, что деформация материала, из которого изготовлены пружины, однородная. Кроме того, считаем, что проволоки имеют цилиндрическую форму. В качестве оси вращения выберем ось цилиндра. Деформация пружины при ее растяжении приводит к деформации сдвига в каждом элементарном объеме материала пружины.

Для того, чтобы найти модуль упругости для деформации кручения, рассмотрим деформацию кручения в однородном стержне длиной L , радиусом r (см. рис.).

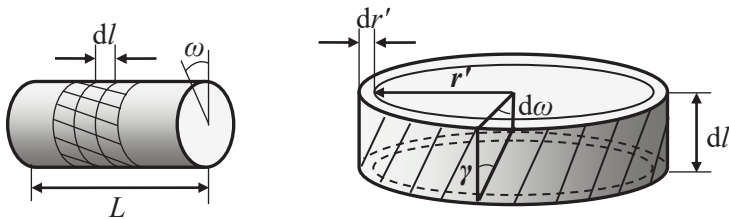


Рис. к решению задачи 8.32.

Рассмотрим отдельный цилиндрический слой радиусом r' , толщиной dr' и длиной dl . Так как деформация однородная, то

$$d\omega = \frac{\omega}{L} dl.$$

На рисунке видно, что $r'd\omega = \gamma dl$.

Используя закон Гука для деформации сдвига $\tau = G\gamma$ (τ – касательное напряжение, G – модуль сдвига), получим выражение для силы, касательной к торцевой поверхности выбранного слоя:

$$dF_k = \tau ds = \tau 2\pi r' dr' = G \frac{\omega}{L} 2\pi (r')^2 dr'.$$

Момент силы относительно оси цилиндра, действующей на все поперечное сечение, получаем в результате интегрирования:

$$M = \int_0^r dF_k r' = G \frac{\pi r^4 \omega}{2L}.$$

Следовательно, модуль кручения равен:

$$B = \frac{M}{\omega} = G \frac{\pi r^4}{2L}.$$

Если груз подвешен на оси пружины, то $M = F \frac{D}{2}$.

Определим теперь коэффициент жесткости пружины k . В соответствии с законом Гука:

$$F = k\Delta l,$$

где Δl – растяжение пружины.

Потенциальную энергию растянутой пружины можно определить двумя способами: как работу момента силы, результатом которой становится закручивание материала пружины на угол ω , так и через известное соотношение для потенциальной энергии растянутой пружины:

$$\frac{M\omega}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Преобразуя последние соотношения, получаем выражение для коэффициента жесткости пружины

$$k = \frac{B}{R^2} = G \frac{\pi r^4}{2LR^2}.$$

Выразим коэффициенты жесткости пружин через диаметры проволок и витков:

$$k_1 = G \frac{\pi d_1^4}{8LD_1^2}, \quad k_2 = G \frac{\pi(nd_1)^4}{8L(mD_1)^2} = \left(\frac{n}{m}\right)^4 k_1, \quad (n = 2, m = 3).$$

Относительное удлинение первой пружины равно

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{F}{k_1 l_1}.$$

Длина первой нерастянутой пружины равна $\frac{Ld_1}{\pi D_1}$, а второй не-

растянутой пружины $\frac{Ld_2}{\pi D_2} = \frac{Lnd_1}{\pi mD_1}$, то есть вторая пружина будет в m/n раз короче. Поэтому

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{Fm^2}{n^4 k_1} \frac{(m/n)}{l_1} = \frac{m^3}{n^5} \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{3}{32}.$$

8.33. Глубина погружения кубика не изменится.

$$\mathbf{8.34.} \quad F = \frac{1}{8} \rho g l^3 \left(1 + \frac{a}{g}\right)^2, \quad y_0 = \frac{l}{6} \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

8.35. а) понизится; б) не изменится.

8.36. Цилиндр вращаться не будет.

8.37. Свободная поверхность жидкости является параболоидом

вращения $z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$; $p = p_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$.

$$\mathbf{8.38.} \quad v = \omega \sqrt{2lh - h^2}.$$

$$\mathbf{8.39.} \quad N = mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}\right)\right).$$

$$\mathbf{8.40.} \quad A = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (3 - \sin \alpha).$$

Решение. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через верхний конец палочки:

$$F_A \left(L - \frac{L_{\text{погр}}}{2}\right) \cos \alpha - mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 0.$$

Здесь $L_{\text{погр}}$ — длина погруженной части палочки.

Сила Архимеда определяется выражением:

$$F_A = \rho_0 S L_{\text{погр}} g.$$

Следовательно:

$$m \frac{L}{2} \cos \alpha - \rho_0 L_{\text{погр}} S g \left(L - \frac{L_{\text{погр}}}{2}\right) \cos \alpha = 0.$$

В случае, если $\cos \alpha \neq 0$, в результате несложных преобразований получаем квадратное уравнение для длины погруженной части палочки:

$$L_{\text{погр}}^2 - 2LL_{\text{погр}} + \frac{m}{\rho_0 S} L = 0.$$

Из полученного уравнения следует, что длина погруженной части палочки $L_{\text{погр}}$ не зависит от угла α и не изменяется до тех пор, пока он не станет равным $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, сила Архимеда постоянна, пока палочка не примет вертикальное положение. Значение силы Архимеда на первом этапе определяется условием задачи $L_{\text{погр}} = \frac{L}{2}$:

$$F_A = \rho_0 g S \frac{L}{2}.$$

Преобразуя записанные соотношения, получаем значение массы палочки:

$$m = \frac{3}{4} \rho_0 S L.$$

Поскольку подъем осуществляется медленно, можно считать, что сумма сил, приложенных к палочке, равна нулю:

$$T + F_A - mg = 0.$$

Следовательно, сила натяжения нити на первом этапе подъема палочки равна

$$T_1 = \frac{1}{4} \rho_0 g S L.$$

Работа силы натяжения нити на этапе от начала подъема до момента, когда палочка примет вертикальное положение равна:

$$A_1 = T \frac{L}{2} (1 - \sin \alpha) = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (1 - \sin \alpha).$$

При записи последнего соотношения учтено, что точка приложения силы натяжения нити переместилась на первом этапе подъема на высоту $\frac{L}{2} (1 - \sin \alpha)$.

При дальнейшем подъеме сила Архимеда будет уменьшаться, а сила натяжения нити – возрастать:

$$T_2(x) = \frac{3}{4} \rho_0 g S L - \rho_0 g S (L - x).$$

Здесь x – длина выступающей над поверхностью жидкости части палочки, изменяющаяся от $\frac{L}{2}$ до L .

Работа силы натяжения нити на втором этапе подъема палочки равна:

$$A_2 = \int_{L/2}^L T_2(x) dx = \int_{L/2}^L \left(\frac{3}{4} \rho_0 g S L - \rho_0 g S (L - x) \right) dx = \frac{1}{4} \rho_0 g S L^2.$$

Полную работу по подъему палочки находим, суммируя A_1 и A_2 :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (3 - \sin \alpha).$$

8.41. $h = \left(1 + \frac{l}{r} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{R^2 d}{r^2} - \frac{p_0}{\rho_0 g}.$

Решение. В момент отрыва диска трубка перестает соприкасаться с диском вдоль всей своей нижней поверхности. Сила реакции трубки N будет приложена в точке А, наиболее удаленной от центра тяжести диска (см. рис.). Запишем выражение для сил давления жидкости в момент времени, когда верхняя поверхность диска находилась на глубине h :

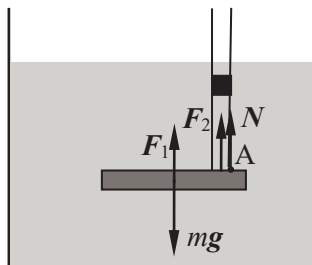


Рис. к решению задачи 8.41.

$$F = (p_0 + \rho_0 g(h + d))\pi R^2 - (p_0 + \rho_0 gh)(\pi R^2 - \pi r^2) = \rho_0 g d \pi R^2 + (p_0 + \rho_0 gh)\pi r^2.$$

Силу F можно представить, как сумму двух слагаемых:

$$F_1 = \rho_0 g d \pi R^2, \quad F_2 = (p_0 + \rho_0 gh)\pi r^2.$$

Сила F_1 представляет собой обычную силу Архимеда с точкой приложения в центре диска. Сила F_2 обусловлена отсутствием сил давления жидкости на участок верхней поверхности диска, ограниченный трубкой. В силу симметрии линия действия этой силы совпадает с осью трубки. Запишем уравнение моментов в момент отрыва диска от трубки относительно оси, проходящей через точку А (см. рис.) перпендикулярно плоскости чертежа:

$$-mg(l + r) + F_1(l + r) + F_2 r = 0.$$

Преобразуя полученную систему уравнений и учитывая, что $m = \rho d \pi R^2$, получаем:

$$h = \left(1 + \frac{l}{r}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \frac{R^2 d}{r^2} - \frac{p_0}{\rho_0 g}.$$

$$8.42. F = \rho g b (2h - l) l.$$

$$8.43. v(R_1) \approx \sqrt{2gh}, \quad p(r) = p_0 + \rho g h \left(1 - \frac{R_1^4}{4r^2 b^2}\right).$$

Решение. Запишем уравнение Бернулли для сечения трубки тока, совпадающего со свободной поверхностью жидкости, находящейся на высоте h от дна сосуда, и сечения в плоскости отверстия:

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + p_0 + \rho g h = \rho \frac{v^2(R_1)}{2} + p_0.$$

Здесь p_0 – атмосферное давление; v_0 – скорость жидкости на уровне верхней свободной поверхности.

Условие постоянства потока несжимаемой жидкости для указанных сечений трубки тока имеет вид:

$$S_0 v_0 = S(R_1) v(R_1).$$

Здесь S_0 – сечение трубки тока на уровне верхней свободной поверхности жидкости, $S(R_1)$ – сечение трубки тока в плоскости отверстия в дне сосуда.

Преобразуя записанные соотношения, получаем выражение для скорости жидкости, вытекающей через отверстие в дне:

$$v^2(R_1) = \frac{2gh}{1 - \left(\frac{S(R_1)}{S_0}\right)^2} \approx 2gh.$$

Для нахождения давления жидкости в зазоре как функции расстояния r от оси отверстия запишем уравнение Бернулли для нижнего сечения трубки тока (на уровне отверстия в дне сосуда) и произвольного сечения в зазоре:

$$\rho \frac{v^2(R_1)}{2} + p_0 = \rho \frac{v^2(r)}{2} + p(r).$$

Объединяя все трубки тока в одну, получаем трубку тока, сечение которой при $R_1 < r < R_2$ является боковой поверхностью цилиндра с площадью

$$S(r) = 2\pi r b,$$

где b – вертикальный размер зазора.

Условие постоянства потока жидкости для указанных сечений:
 $S(r)v(r) = S(R_1)v(R_1)$.

Решая совместно записанную систему уравнений, получаем искомую зависимость давления жидкости в зазоре как функцию расстояния r от оси отверстия и цилиндра:

$$p(r) = p_0 + \rho g h \left(1 - \frac{R_1^4}{4r^2 b^2} \right).$$

Полученное выражение справедливо при стационарном ламинарном течении жидкости. В данной задаче это допущение справедливо при $R_1 \ll r \ll R_2$. Вблизи границ с резким изменением формы сосуда задача не имеет простого аналитического решения.

8.44. $\omega(r) = \frac{\omega_2 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right), M_0 = \frac{4\pi l \eta \omega_2 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

8.45. $Q = \frac{1}{2} v_0 S, p_1 - p_2 = \frac{4l \eta v_0}{R^2}$.

8.46. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\text{ctg}\alpha(3R - 2l \sin\alpha)}}$ при $l < \frac{3R}{2 \sin\alpha}$.

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся цилиндром. Запишем уравнение моментов для палочки относительно оси, проходящей через точку O шарнирного крепления перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.).

$$M_{цб} + M_{f_y} + M_{f_r} + M_{mg} = 0.$$

Здесь $M_{цб}$ – момент центробежной силы инерции относительно рассматриваемой оси, M_{f_y} – момент вертикальной составляющей силы давления жидкости, M_{f_r} – момент ее горизонтальной составляющей, M_{mg} – момент

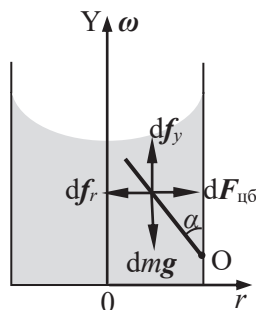


Рис. к решению задачи 8.46.

силы тяжести. Момент силы реакции шарнира относительно указанной оси равен нулю.

Точки приложения силы тяжести и вертикальной составляющей силы давления жидкости совпадают с центром палочки. Следовательно, моменты указанных сил равны:

$$M_{f_y} = -\rho g V \frac{l}{2} \sin \alpha ,$$

$$M_{mg} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \rho_0 V g \frac{l}{2} \sin \alpha .$$

Здесь ρ – плотность жидкости ρ_0 – плотность материала палочки, m – масса палочки, V – ее объем.

Для вычисления моментов центробежной силы инерции и горизонтальной составляющей силы давления жидкости рассмотрим физически бесконечно малый фрагмент палочки длиной dl , находящийся на расстоянии x от оси вращения. Центробежная сила инерции, действующая на этот фрагмент, равна:

$$dF_{цб} = dm \omega^2 r = \frac{m}{l} dl \omega^2 r = \frac{m}{l} \cdot \frac{dr}{\sin \alpha} \omega^2 r ,$$

а ее момент относительно оси, проходящей через точку O , определяется выражением:

$$dM_{цб} = -(R-r) \operatorname{ctg} \alpha dF_{цб} .$$

Полный момент центробежной силы инерции получаем в результате интегрирования:

$$M_{цб} = - \int_{R-l \sin \alpha}^R (R-r) \operatorname{ctg} \alpha \frac{m}{l} \cdot \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} dr .$$

Относительно инерциальной лабораторной системы отсчета любой элемент объема жидкости в установившемся режиме вращается с угловой скоростью ω вокруг оси цилиндра под действием горизонтальной составляющей сил давления жидкости. Эта сила сообщает этому элементу центростремительное ускорение. Следовательно, горизонтальная составляющая сил давления жидкости на расстоянии r от оси вращения равна:

$$df_r = \rho \omega^2 r S dl = \rho \omega^2 r S \frac{dr}{\sin \alpha} .$$

Здесь S – площадь поперечного сечения палочки.

Полный момент этой силы получаем, интегрируя записанное выражение:

$$M_{f_r} = \int_{R-l \sin \alpha}^R (R-r) \operatorname{ctg} \alpha S \rho \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} dr .$$

После несложных преобразований получаем искомое значение угловой скорости:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\operatorname{ctg}\alpha(3R - 2l \sin\alpha)}}.$$

Поставленная задача имеет решение только при $l < \frac{3R}{2 \sin\alpha}$.

$$8.47. v = -\frac{2n\sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \sin 2\alpha}{(1-n^2)} \cdot \frac{\left(\sqrt{H_0} - \frac{n}{2}\sqrt{\frac{2g}{1-n^2}}\tau\right)}{\left(1 - \frac{2n \sin\alpha}{1-n^2}\right)^2} \approx -0.159 \text{ м/с},$$

$$n = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Решение. Для определения начальной скорости капле v_1 запишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Здесь ρ – плотность жидкости, v_0 – скорость верхнего слоя жидкости в баке, h – высота уровня жидкости, v_1 – скорость истечения жидкости из бака.

Условие несжимаемости жидкости имеет вид:

$$v_0 s_0 dt = v_1 s_1 dt,$$

где s_0 – площадь дна сосуда, s_1 – площадь внутреннего сечения трубки.

Следовательно, скорость вытекающей воды равна:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1-n^2}}, \text{ где } n = \frac{s_1}{s_0} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Скорость верхнего слоя жидкости в баке связана с высотой уровня жидкости соотношением:

$$\frac{dh}{dt} = -v_0.$$

Преобразуя записанные соотношения, получим уравнение для изменения высоты уровня жидкости в баке за бесконечно малый промежуток времени:

$$dh = -n\sqrt{\frac{2gh}{1-n^2}} dt.$$

Решая дифференциальное уравнение методом разделения переменных с учетом начального условия $h(t=0) = H_0$, получаем:

$$\sqrt{h} = \sqrt{H_0} - \frac{n}{2}\sqrt{\frac{2g}{1-n^2}}t = \sqrt{H_0} - kt,$$

где $k = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{2g}{1-n^2}}$.

С учетом полученного соотношения зависимость скорости истечения воды из бака от времени имеет вид:

$$v_1 = \frac{2}{n}(k\sqrt{H_0} - k^2t).$$

Время полета капли (с учетом зависимости начальной скорости капли от времени) равно:

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_1 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \sin \alpha}{g} \cdot \frac{2}{n}(k\sqrt{H_0} - k^2t).$$

Скорость движения мокрого пятна равна скорости изменения дальности полета $L_{\text{пол}}$ каплей жидкости, обусловленной различной начальной скоростью при истечении воды из бака:

$$v = \frac{dL_{\text{пол}}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} \right) = \frac{2 \sin 2\alpha}{g} v_1 \frac{dv_1}{d\theta},$$

где θ – момент приземления капли, зависящий от начальной скорости капли (различной в разные моменты времени).

Момент приземления капли определяется выражением:

$$\theta = t + t_{\text{пол}} = t + \frac{4 \sin \alpha}{gn} (k\sqrt{H_0} - k^2t).$$

Следовательно

$$t = \frac{\theta - \frac{4 \sin \alpha}{gn} k \sqrt{H_0}}{1 - \frac{4 \sin \alpha}{gn} k^2}.$$

Выразим скорость вытекания жидкости v_1 как функцию времени θ :

$$v_1 = \frac{2}{n} \left(k \sqrt{H_0} - k^2 \frac{\theta - \frac{4 \sin \alpha}{gn} k \sqrt{H_0}}{1 - \frac{4 \sin \alpha}{gn} k^2} \right) = \frac{2k(\sqrt{H_0} - k\theta)}{n - \frac{4k^2 \sin \alpha}{g}}.$$

Определим производную $\frac{dv_1}{d\theta}$:

$$\frac{dv_1}{d\theta} = -\frac{2k^2}{n - \frac{4 \sin \alpha}{g} k^2}.$$

Тогда искомая скорость пятна в момент времени $\theta = \tau$ равна:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2 \sin 2\alpha}{g} v_1 \frac{dv_1}{d\theta} = \\ &= -\frac{2n \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \sin 2\alpha \left(\sqrt{H_0} - \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \tau \right)}{\left(1 - n^2\right) \left(1 - \frac{2n \sin \alpha}{1-n^2}\right)^2} \approx -0.159 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

8.48. $h = H/2$, $x_{\max} = H$.

8.49. Нужно приложить силу $F = 2s\rho g(h_2 - h_1) = 5 \text{ Н}$, действующую на тележку со стороны отверстия, расположенного выше.

8.50. $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$.

8.51. $a \leq \frac{2g(H-h)}{l}$.

8.52. $A = \frac{\rho V^2}{2s^2 t^2}$.

8.53. $M = \frac{\rho l Q^2}{\pi r^2}$.

$$8.54. F = \frac{\rho g h (S - s)^2}{S} = 6 \text{ Н.}$$

$$8.55. P = \frac{\pi \eta \omega^2 R^4}{h} = 9 \text{ Вт.}$$

$$8.56. v = v_0 \frac{\ln(r / R_2)}{\ln(R_1 / R_2)}.$$

$$8.57. v = \sqrt{2g((h_3 - h_2) - (h_2 - h_1))} = 1 \text{ м/с.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.А. Бушина, М.А. Комарова, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков, А.И. Слепков, Н.И. Чистякова. Механика. Разработка семинарских занятий. М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014. – 764 с.
2. В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. – 368 с.
3. Сборник задач по общему курсу физики. В пяти книгах. Кн. I. Механика / Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А.; Под ред. И.А. Яковлева. – М.: ФИЗМАТЛИТ; «Лань», 2006. – 240 с.
4. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. – СПб.: «Лань», 2006. – 416 с.
5. В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. Механика (Университетский курс общей физики). АCADEMIA. М. 2004. 480 с. (ФИЗМАТЛИТ. М. 2011. – 480 с.).
6. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «ОНИКС 21 век». 2003. – 432 с.
7. С.Э. Хайкин. Физические основы механики. СПб.: «Лань», 2008.
8. С.П. Стрелков. Механика. СПб.: «Лань», 2005. – 560 с.
9. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т.1. Механика. СПб.: «Лань», 2006. – 560 с.

Учебное издание

БУШИНА Татьяна Андреевна
НИКАНОРОВА Елена Александровна
РУСАКОВ Вячеслав Серафимович
СЛЕПКОВ Александр Иванович
ЧИСТЯКОВА Наталия Игоревна

МЕХАНИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

Подписано в печать 15.06.2019 г.
Формат 60х90/16. Объем 23,25 п. л. Тираж 200 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, ГСП1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

