

**Т.А. Бушина, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков,  
А.И. Слепков, Н.И. Чистякова**

# **МЕХАНИКА. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению 010700.62 «Физика»  
и по специальности 010701.65 «Физика»*



Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
2017

**УДК 53.02**  
**ББК 22.3**

Т.А. Бушина, Е.А. Никанорова, В.С. Русаков, А.И. Слепков, Н.И. Чистякова. **Механика. Методика решения задач** / Учебное пособие. Изд. 2-е, переработанное, дополненное. М.: Физический факультет МГУ, 2017. 720 с.

ISBN 978-5-8279-0145-7

Предлагаемое учебное пособие «Механика. Методика решения задач» является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова «Университетский курс общей физики». Пособие составлено в соответствии с новым учебным планом изучения курса общей физики на физическом факультете МГУ и соответствует тематическому плану семинарских занятий по курсу «Механика».

Содержанием пособия является набор задач с решениями, причем по каждой теме рассматриваются наиболее характерные и типичные задачи и методы их решения. С этой целью наряду с оригинальными задачами использованы формулировки условий задач из существующих учебников, задачников и учебных пособий, которые подверглись существенному исправлению и доработке.

Пособие разбито по главам, каждая из которых включает в себя теоретический материал, основные типы задач и методы их решения, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по курсу «Механика».

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Г.С. Плотников*,  
д.ф.-м. н., профессор *А.С. Илюшин*

ISBN 978-5-8279-0145-7

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010, 2017 г.

© Коллектив авторов, 2017 г.

## **УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ** **(Предисловие редактора инновационного учебно-методического комплекса)**

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Цель авторов данного курса – представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описанных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического

факультета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент», увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий», предназначенное для преподавателя. В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики. Для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, для каждой работы сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией В.И. Ивероновой, вышедшего в свет в 1967 г. В последние годы разработаны и введены в действие новые современные лабораторные работы с

использованием современных экспериментальных методов исследования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекции» и «Практикум». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но может быть полезен для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

*А.М. Салецкий*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	10
Раздел 1	
<b>Кинематика и динамика материальной точки и простейших систем. Законы изменения импульса и механической энергии</b>	
Глава 1. <b>Кинематика материальной точки, принцип суперпозиции</b> .....	12
1.1. Теоретический материал .....	12
1.2. Основные типы задач и методы их решения .....	18
1.3. Примеры решения задач .....	19
1.4. Задачи для самостоятельного решения .....	36
Глава 2. <b>Кинематика простейших систем, уравнение кинематической связи</b> .....	40
2.1. Теоретический материал .....	40
2.2. Основные типы задач и методы их решения .....	40
2.3. Примеры решения задач .....	42
2.4. Задачи для самостоятельного решения .....	54
Глава 3. <b>Динамика материальной точки и простейших систем</b> ..	57
3.1. Теоретический материал .....	57
3.2. Основные типы задач и методы их решения .....	58
3.3. Примеры решения задач .....	59
3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	75
Глава 4. <b>Индивидуальные свойства сил</b> .....	79
4.1. Теоретический материал .....	79
4.2. Основные типы задач и методы их решения .....	83
4.3. Примеры решения задач .....	85
4.4. Задачи для самостоятельного решения .....	101
Глава 5. <b>Закон изменения импульса механической системы</b> ....	104
5.1. Теоретический материал .....	104
5.2. Основные типы задач и методы их решения .....	106
5.3. Примеры решения задач .....	107
5.4. Задачи для самостоятельного решения .....	123
Глава 6. <b>Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского</b> .....	126
6.1. Теоретический материал .....	126
6.2. Основные типы задач и методы их решения .....	127
6.3. Примеры решения задач .....	128
6.4. Задачи для самостоятельного решения .....	145
Глава 7. <b>Работа силы. Кинетическая и потенциальная энергия материальной точки. Закон изменения механической энергии</b> .....	148
7.1. Теоретический материал .....	148
7.2. Основные типы задач и методы их решения .....	153

7.3. Примеры решения задач .....	154
7.4. Задачи для самостоятельного решения .....	172
<b>Глава 8. Упругие и неупругие столкновения тел .....</b>	<b>175</b>
8.1. Теоретический материал .....	175
8.2. Основные типы задач и методы их решения .....	177
8.3. Примеры решения задач .....	178
8.4. Задачи для самостоятельного решения .....	200
<b>Раздел 2</b>	
<b>Неинерциальные системы отсчета. Основы релятивистской механики</b>	
<b>Глава 9. Движение материальной точки в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции. Поступательно дви- жущиеся НИСО .....</b>	<b>204</b>
9.1. Теоретический материал .....	204
9.2. Основные типы задач и методы их решения .....	208
9.3. Примеры решения задач .....	209
9.4. Задачи для самостоятельного решения .....	225
<b>Глава 10. Движение материальной точки в неинерциальных си- стемах отсчета. Силы инерции. Вращающиеся НИСО .....</b>	<b>229</b>
10.1. Теоретический материал .....	229
10.2. Основные типы задач и методы их решения .....	232
10.3. Примеры решения задач .....	234
10.4. Задачи для самостоятельного решения .....	250
<b>Глава 11. Релятивистская кинематика. Преобразования Лоренца и их следствия. Инвариантность простран- ственно-временных интервалов .....</b>	<b>257</b>
11.1. Теоретический материал .....	257
11.2. Основные типы задач и методы их решения .....	265
11.3. Примеры решения задач .....	266
11.4. Задачи для самостоятельного решения .....	284
<b>Глава 12. Релятивистское сложение скоростей .....</b>	<b>289</b>
12.1. Теоретический материал .....	289
12.2. Основные типы задач и методы их решения .....	290
12.3. Примеры решения задач .....	290
12.4. Задачи для самостоятельного решения .....	307
<b>Глава 13. Динамика материальной точки в релятивистской механике. Энергия покоя .....</b>	<b>310</b>
13.1. Теоретический материал .....	310
13.2. Основные типы задач и методы их решения .....	311
13.3. Примеры решения задач .....	312
13.4. Задачи для самостоятельного решения .....	327

## Раздел 3

**Кинематика и динамика твердого тела.****Закон сохранения момента импульса**

Глава 14. <b>Кинематика абсолютно твердого тела</b> .....	330
14.1. Теоретический материал .....	330
14.2. Основные типы задач и методы их решения .....	336
14.3. Примеры решения задач .....	337
14.4. Задачи для самостоятельного решения .....	356
Глава 15. <b>Динамика поступательного и вращательного движения абсолютно твердого тела. Часть 1.</b> .....	362
15.1. Теоретический материал .....	362
15.2. Основные типы задач и методы их решения .....	370
15.3. Примеры решения задач .....	371
15.4. Задачи для самостоятельного решения .....	392
Глава 16. <b>Динамика поступательного и вращательного движения абсолютно твердого тела. Часть 2.</b> .....	397
16.1. Теоретический материал .....	397
16.2. Основные типы задач и методы их решения .....	398
16.3. Примеры решения задач .....	400
16.4. Задачи для самостоятельного решения .....	418
Глава 17. <b>Законы сохранения момента импульса и механической энергии. Гироскопы. Гироскопические силы</b> .....	425
17.1. Теоретический материал .....	425
17.2. Основные типы задач и методы их решения .....	431
17.3. Примеры решения задач .....	432
17.4. Задачи для самостоятельного решения .....	460

## Раздел 4

**Механические колебания и волны.****Основы механики сплошных сред**

Глава 18. <b>Свободные незатухающие колебания систем с одной степенью свободы</b> .....	468
18.1. Теоретический материал .....	468
18.2. Основные типы задач и методы их решения .....	475
18.3. Примеры решения задач .....	476
18.4. Задачи для самостоятельного решения .....	500
Глава 19. <b>Свободные затухающие колебания систем с одной степенью свободы</b> .....	503
19.1. Теоретический материал .....	503
19.2. Основные типы задач и методы их решения .....	506
19.3. Примеры решения задач .....	507
19.4. Задачи для самостоятельного решения .....	529
Глава 20. <b>Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы. Резонанс</b> .....	532



20.1. Теоретический материал .....	532
20.2. Основные типы задач и методы их решения .....	535
20.3. Примеры решения задач .....	536
20.4. Задачи для самостоятельного решения .....	553
<b>Глава 21. Колебания систем с несколькими степенями свободы. Моды колебаний .....</b>	<b>556</b>
21.1. Теоретический материал .....	556
21.2. Основные типы задач и методы их решения .....	556
21.3. Примеры решения задач .....	557
21.4. Задачи для самостоятельного решения .....	579
<b>Глава 22. Бегущие волны смещений, скоростей, деформаций и напряжений. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова .....</b>	<b>582</b>
22.1. Теоретический материал .....	582
22.2. Основные типы задач и методы их решения .....	594
22.3. Примеры решения задач .....	595
22.4. Задачи для самостоятельного решения .....	608
<b>Глава 23. Элементы акустики. Суперпозиция звуковых волн. Интенсивность звуковых волн. Давление в звуковых волнах. Эффект Доплера .....</b>	<b>611</b>
23.1. Теоретический материал .....	611
23.2. Основные типы задач и методы их решения .....	612
23.3. Примеры решения задач .....	613
23.3. Задачи для самостоятельного решения .....	628
<b>Глава 24. Граничные условия. Отражение и прохождение волн на границе раздела двух сред. Стоячие волны. Моды и нормальные частоты .....</b>	<b>632</b>
24.1. Теоретический материал .....	632
24.2. Основные типы задач и методы их решения .....	637
24.3. Примеры решения задач .....	638
24.3. Задачи для самостоятельного решения .....	658
<b>Глава 25. Механика сплошных сред. Деформации .....</b>	<b>660</b>
25.1. Теоретический материал .....	660
25.2. Основные типы задач и методы их решения .....	664
25.3. Примеры решения задач .....	665
25.4. Задачи для самостоятельного решения .....	686
<b>Глава 26. Статика и динамика жидкостей и газов .....</b>	<b>692</b>
26.1. Теоретический материал .....	692
26.2. Основные типы задач и методы их решения .....	694
26.3. Примеры решения задач .....	695
26.4. Задачи для самостоятельного решения .....	715
<b>Литература .....</b>	<b>718</b>

## Предисловие

Предлагаемое учебное пособие «Механика. Методика решения задач» предназначено для самостоятельной работы студентов с целью выработки умений, навыков и методов решения задач по разделу «Механика». Пособие разработано в соответствии с новым планом изучения данного курса на физическом факультете МГУ.

В пособии использован материал предыдущего издания книги «Механика. Методика решения задач» (авторы В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова [1]), который был значительно расширен, дополнен и структурирован в соответствии с тематическим планом проведения занятий по данному разделу курса общей физики.

Пособие состоит из 26 глав, соответствующих основным темам раздела. Содержание каждой главы разбито на четыре основные части.

1. Теоретический материал. Эта часть носит справочный характер и содержит определения основных физических понятий и величин, формулировки законов физики, ряд наиболее часто употребляемых формул, используемых по данной теме.

2. Основные типы задач и методы их решения. В этой части перечисляются основные типы задач, относящихся к теме данной главы, и предлагаются схемы решения, как правило, разбитые на три основных этапа.

3. Примеры решения задач. Эта часть содержит не менее 8 задач с решениями, где на конкретных примерах рассмотрены методы решения (в том числе и альтернативные) различных типов задач. При подборе задач использовались как оригинальные задачи, так и задачи, формулировки которых заимствовались из классических учебников и задачников, рекомендованных в программе курса.

4. Задачи для самостоятельного решения. В данной части содержатся условия задач с ответами для самостоятельного решения.

В конце пособия приводится список литературы, которая рекомендуется студентам для изучения теоретического материала, а также перечислены задачки, из которых взяты некоторые задачи для самостоятельного решения.

В книге векторы обозначены жирным наклонным шрифтом ( $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{p}$ ), а их модули – не жирным шрифтом ( $F$ ,  $p$ ). Во всей книге соотношения между величинами и выражения для законов даны в системе СИ. Решения задач и ответы к задачам для самостоятельного решения также приведены в СИ.

**КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА  
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ.  
ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА  
И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

**1**

- КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ
- ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИЛ
- ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
- ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ. УРАВНЕНИЕ МЕЩЕРСКОГО. ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО
- ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
- УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ТЕЛ

## ГЛАВА 1

## КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

## 1.1. Теоретический материал

**Физическая величина** – это количественная характеристика свойства материальных объектов или явлений (процессов). Каждая физическая величина устанавливается однозначным способом ее измерения – экспериментального определения или расчета. Определение физической величины указывает принципиальный способ ее измерения.

**Физическое понятие** – это абстракция (филос.), которая отражает только основные, наиболее существенные, свойства материальных объектов или явлений (процессов).

**Тело отсчета** – тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

**Часы** – неподвижный относительно тела отсчета прибор для измерения времени, принцип действия которого основан на сравнении длительности исследуемого временного интервала с длительностью выбранного за эталон периодического процесса.

**Система отсчета** – совокупность тела отсчета, системы координат<sup>1</sup>, жестко связанной с телом отсчета, и набора синхронизированных часов, размещенных в разных точках системы координат.

**Условие синхронизации часов А и В**, расположенных в разных точках системы отсчета (в предположении об изотропности пространства):

$$t^B = \frac{t_1^A + t_2^A}{2}. \quad (1.1)$$

Здесь  $t_1^A$  – момент времени излучения из точки А светового сигнала (кванта света) по часам в точке А,  $t^B$  – момент времени регистрации этого сигнала в точке В по часам в точке В,  $t_2^A$  – момент времени регистрации в точке А отраженного в точке В сигнала по часам в точке А. (Подробно об этом см. Главу 11.)

---

<sup>1</sup> Далее в тексте, если это не оговаривается особо, используется декартова система координат.

**Лабораторная система отсчета** – инерциальная система отсчета, относительно которой наблюдатель неподвижен. Чаще всего связывается с Землей (лабораторией), силами инерции при этом пренебрегается.

**Материальная точка** – физическое понятие обозначающее тело, размерами (и формой) которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Положение материальной точки относительно данной системы отсчета (в данной системе отсчета)  $S$  задается ее координатами или радиус-вектором  $r$ .

**Механическая система** – совокупность материальных тел.

**Система материальных точек** – совокупность тел, каждое из которых можно считать материальной точкой. Будем считать, что любую механическую систему можно представить в виде системы материальных точек.

**Радиус-вектор материальной точки  $r$**  относительно данной системы отсчета – вектор, начало которого находится в начале координат этой системы, а конец – в месте расположения материальной точки (см. рис. 1.1а):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  – орты декартовой системы координат:  $|\mathbf{i}|=1$ ,  $|\mathbf{j}|=1$ ,  $|\mathbf{k}|=1$ ;  $x, y, z$  – координаты материальной точки.

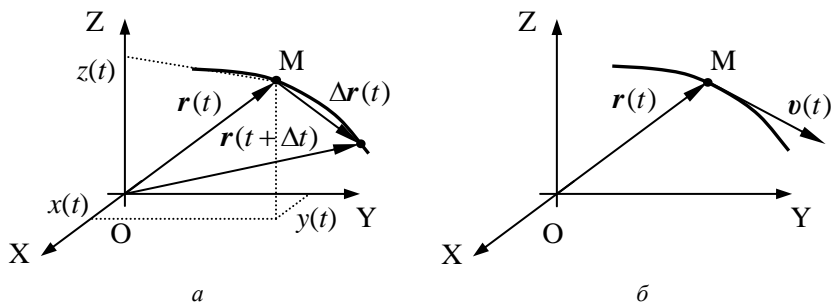


Рис. 1.1. Радиус-вектор  $r(t)$ , перемещение  $\Delta r$  (а) и скорость  $v(t)$  (б) материальной точки.

**Закон движения материальной точки** относительно данной системы отсчета – зависимость радиус-вектора или координат материальной точки от времени:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t); \\ \left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \end{cases} \quad (1.3)$$

**Траектория движения материальной точки** – воображаемая линия в пространстве, по которой движется материальная точка (линия, описываемая в пространстве концом радиус-вектора материальной точки)

**Уравнение траектории** задается совокупностью двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

которые можно получить, исключая время из закона движения в координатной форме (1.3). Заметим, что сам закон движения в координатной форме представляет собой уравнение траектории, заданное в параметрическом виде.

**Перемещение материальной точки**  $\Delta \mathbf{r}(t)$  – изменение радиус-вектора материальной точки за время  $\Delta t$  с момента времени  $t$  (рис. 1а):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ &= \{x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Скорость материальной точки**  $\mathbf{v}$  относительно данной системы отсчета – физическая величина, равная производной радиус-вектора материальной точки по времени (производная берется при постоянных ортах системы координат, жестко связанных с телом отсчета):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  – проекции скорости  $\mathbf{v}$  на соответствующие оси системы координат.

При этом модуль скорости  $v$  равен

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.7)$$

В соответствии с определением скорость всегда направлена по касательной к траектории (см. рис. 1.1б).

Зная закон изменения скорости материальной точки  $\mathbf{v}(t)$ , и радиус-вектор  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$ , можно найти закон движения:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt . \quad (1.8)$$

**Начальные условия** для материальной точки – значения радиус-вектора и скорости в начальный момент времени  $t_0$  относительно заданной системы отсчета:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Путь**  $s(t)$ , пройденный материальной точкой вдоль траектории (длина траектории) за время  $t$ , равен

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt , \quad (1.10)$$

при этом модуль скорости  $v(t)$  в любой момент времени равен

$$v(t) \equiv |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) . \quad (1.11)$$

**Ускорение материальной точки**  $\mathbf{a}$  относительно данной системы отсчета – физическая величина, равная производной скорости материальной точки по времени (при постоянных ортах системы координат):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\} \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \{\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)\} = \\ &= \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j} + \dot{v}_z(t)\mathbf{k} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} , \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $a_x, a_y, a_z$  – проекции ускорения  $\mathbf{a}$  на соответствующие оси системы координат.

При этом модуль ускорения  $\mathbf{a}$  равен

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (1.13)$$

Зная закон изменения ускорения материальной точки  $\mathbf{a}(t)$ , а также скорость  $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{v}(t_0)$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(t_0)$  в начальный

момент времени  $t_0$ , можно найти закон изменения скорости и закон движения:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{t'} \mathbf{a}(t') dt' \right) dt. \quad (1.15)$$

**Тангенциальное ускорение**  $a_\tau$  – составляющая ускорения  $\mathbf{a}$  вдоль направления скорости  $\boldsymbol{\tau}$  (см. рис. 1.2):

$$\mathbf{a}_\tau(t) = a_\tau(t) \boldsymbol{\tau}(t), \quad (1.16)$$

где  $\boldsymbol{\tau}(t) \equiv \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ,  $|\boldsymbol{\tau}(t)| = 1$  – единичный вектор, касательный к траектории,

$$a_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) - \quad (1.17)$$

– проекция ускорения  $\mathbf{a}$  на направление скорости  $\boldsymbol{\tau}$ ,

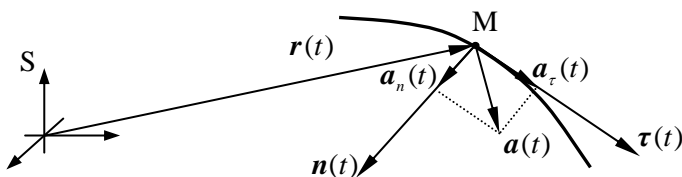


Рис. 1.2. Ускорение материальной точки  $\mathbf{a}$ , ее тангенциальная  $\mathbf{a}_\tau$  и нормальная  $\mathbf{a}_n$  составляющие.

Движение материальной точки при  $a_\tau(t) > 0$  – **ускоренное**, при  $a_\tau(t) < 0$  – **замедленное**, при  $a_\tau(t) = 0$  – **равномерное**, а при  $a_\tau(t) = \text{const} \neq 0$  – **равнопеременное**.

**Нормальное ускорение**  $a_n$  – составляющая ускорения  $\mathbf{a}$ , перпендикулярная направлению скорости (рис. 1.2):

$$\mathbf{a}_n(t) = a_n(t) \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(t) \perp \boldsymbol{\tau}(t), \quad |\mathbf{n}(t)| = 1, \quad (1.18)$$

где  $a_n(t)$  – проекция ускорения  $\mathbf{a}$  на направление  $\mathbf{n}$ , перпендикулярное скорости и направленное к центру кривизны траектории.



Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории – центру окружности максимального радиуса (радиуса кривизны траектории), касательной к траектории в данной точке, при этом

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \geq 0, \quad (1.19)$$

где  $\rho(t) \equiv \frac{ds}{d\alpha}$  – радиус кривизны траектории в данной точке, а  $d\alpha$  – угол между скоростями в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ .

Ускорение  $\mathbf{a}$  можно представить в виде суммы нормального  $\mathbf{a}_n$  и тангенциального  $\mathbf{a}_\tau$  ускорений:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_n(t) + \mathbf{a}_\tau(t). \quad (1.20)$$

При этом модуль ускорения  $\mathbf{a}$  равен

$$a(t) = \sqrt{a_n^2(t) + a_\tau^2(t)}. \quad (1.21)$$

В соответствии с (1.19) и (1.20) ускорение всегда отклонено от направления скорости в сторону центра кривизны траектории в данной точке, то есть внутрь траектории (см. рис. 1.2).

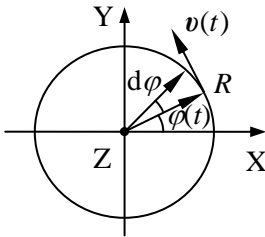


Рис. 1.3. Кинематические характеристики материальной точки при ее движении по окружности.

В частном случае движения материальной точки по окружности, т.е. движения в плоскости по траектории с постоянным радиусом кривизны –  $\rho(t) = R$  (рис. 1.3), можно ввести **угловую скорость**  $\omega(t)$  и **угловое ускорение**  $\beta(t)$ :

$$\omega(t) \equiv \frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv \dot{\varphi}(t) = \frac{v(t)}{R}, \quad (1.22)$$

$$\beta(t) \equiv \dot{\omega}(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{a_\tau(t)}{R}.$$

При этом:

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \omega^2(t)R, \quad (1.23)$$

$$a_\tau(t) = \dot{\omega}(t)R.$$

**Принцип суперпозиции движений** – в случае поступательно-го движения системы отсчета  $S'$  относительно системы  $S$  (рис. 1.4) радиус-вектор (скорость, ускорение) произвольной материальной точки относительно системы  $S$  равен сумме радиус-векторов (скоростей, ускорений) начала отсчета  $O'$  системы  $S'$  и той же материальной точки относительно системы  $S'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_{O'}(t) + \mathbf{r}'(t), \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_{O'}(t) + \mathbf{v}'(t), \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}_{O'}(t) + \mathbf{a}'(t). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{O'}$  и  $\mathbf{a}_{O'}$  – **переносные скорость и ускорение** соответственно.

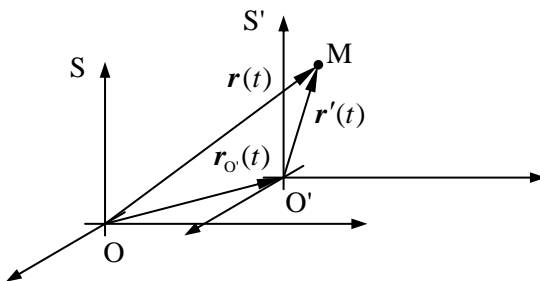


Рис. 1.4. Положение материальной точки  $M$  относительно двух поступательно движущихся систем отсчета  $S$  и  $S'$ .

## 1.2. Основные типы задач и методы их решения

В данной главе рассматриваются два типа задач: на кинематику материальной точки и на принцип суперпозиции движений. Для решения подобных задач необходимо придерживаться следующей схемы.

### I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел.

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать в проекциях на оси координат:
  - а) законы движения,
  - б) законы изменения скорости,
  - в) законы изменения ускорения.
2. Записать начальные условия.
3. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

**Примечания.**

В случае решения задач на кинематику материальной точки в пп. I.3 – II.2 речь идет о кинематических характеристиках материальной точки.

Пункты II.1 – II.3 (в том числе II.1.a – II.1.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

**1.3. Примеры решения задач**

**Задача 1.1.** (*Кинематика материальной точки*). Скорость материальной точки зависит от ее положения в декартовой системе координат следующим образом:  $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + b\mathbf{xj}$ , где  $c$  и  $b$  – положительные постоянные величины. В начальный момент времени радиус-вектор материальной точки равен нулю:  $\mathbf{r}(0) = 0$ . Определить:

- а) законы движения  $\mathbf{r}(t)$ , изменения скорости  $\mathbf{v}(t)$  и ускорения  $\mathbf{a}(t)$ , тангенциальную  $a_\tau(t)$  и нормальную  $a_n(t)$  проекции ускорения;
- б) уравнение траектории  $y(x)$  материальной точки;
- в) радиус кривизны траектории  $\rho(t)$ ;
- г) угол  $\varphi(t)$  между скоростью  $\mathbf{v}(t)$  и ускорением  $\mathbf{a}(t)$ .

### Решение

Следуем общей схеме решения задач кинематики материальной точки и простейших систем.

I. По условию задачи движение происходит в плоскости ХУ, образованной координатными осями, направления которых заданы ортами  $i$  и  $j$ .

II. Запишем начальные условия и закон изменения скорости тела в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, \\ v_x(0) = c, v_y(0) = b \cdot 0 = 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = c, \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = bx(t). \end{cases} \quad (1.26)$$

III. Записанные дифференциальные уравнения относительно координат материальной точки (1.25) с учетом начальных условий (1.25) позволяют найти закон движения материальной точки в проекциях на оси координат и зависимость от времени радиус-вектора  $r(t)$ :

$$\begin{cases} x(t) = ct, \\ y(t) = \frac{cbt^2}{2}, \end{cases} \quad (1.27)$$

$$r(t) = cti + \frac{cbt^2}{2}j. \quad (1.28)$$

Используя найденную зависимость  $x(t)$  (1.27), определим закон изменения скорости  $v(t) = ci + bx(t)j$  и закон изменения ускорения  $a(t)$ :

$$v(t) = ci + cbtj, \quad (1.29)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = cbj. \quad (1.30)$$

Уравнение траектории находится из закона движения материальной точки путем исключения из (1.27) времени  $t$ :

$$y(x) = \frac{cb}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2} = \frac{b}{2c} x^2. \quad (1.31)$$

Остальные искомые величины определяются в соответствии с формулами, приведенными в п. 1 данной Главы.

Модуль скорости (1.7) равен:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + c^2 b^2 t^2}. \quad (1.32)$$

Проекции ускорения  $a_x(t)$  и  $a_y(t)$  (1.17, 1.19) получим в виде:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{c^2 b^2 t}{\sqrt{c^2 + c^2 b^2 t^2}} = \frac{cb^2 t}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}, \\ a_y(t) = \sqrt{a^2 - a_x^2} = \sqrt{c^2 b^2 - \frac{c^2 b^4 t^2}{1 + b^2 t^2}} = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}. \end{cases} \quad (1.33)$$

Радиус кривизны траектории определим, используя (1.19):

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(c^2 + c^2 b^2 t^2) \sqrt{1 + b^2 t^2}}{cb} = \frac{c}{b} (1 + b^2 t^2)^{3/2}. \quad (1.34)$$

Угол  $\varphi(t)$  между скоростью  $v(t)$  и ускорением  $a(t)$  определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{a_n}{a_x} = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + b^2 t^2}}{cb^2 t} = \frac{cb}{cb^2 t} = \frac{1}{bt}. \quad (1.35)$$

Заметим, что материальная точка движется по параболической траектории (1.31) с постоянным ускорением, направленным вдоль оси Y (1.30). На рис. 1.5 схематично изображена траектория движения материальной точки и изображены векторы ускорения и начальной скорости.

Нетрудно видеть, что при  $t=0$  решения соответствуют начальным условиям задачи. При этом тангенциальное ускорение в указанный момент времени равно нулю, радиус кривизны траектории в данный момент времени  $\rho = \frac{c}{b}$ , а угол между скоростью и ускорением  $\varphi = \pi/2$ .

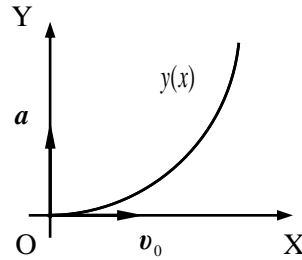


Рис. 1.5 Траектория движения материальной точки, векторы ускорения и начальной скорости.

При  $t \rightarrow \infty$  значения координат точки и модуль скорости, как и следовало ожидать, неограниченно возрастают, нормальное ускорение и угол между скоростью и ускорением стремятся к нулю, а радиус кривизны траектории – к бесконечности.

**Ответ:** а)  $\mathbf{r}(t) = c\mathbf{i} + \frac{cbt^2}{2}\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{v}(t) = c\mathbf{i} + cbt\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{a}(t) = cb\mathbf{j}$ ;

$$a_\tau(t) = \frac{cb^2t}{\sqrt{1+b^2t^2}}, \quad a_n(t) = \frac{cb}{\sqrt{1+b^2t^2}};$$

$$\text{б) } y(x) = \frac{cb}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2} = \frac{b}{2c}x^2$$

$$\text{в) } \rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(c^2 + c^2b^2t^2)\sqrt{1+b^2t^2}}{cb} = \frac{c}{b}(1+b^2t^2)^{3/2}$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{cb}{\sqrt{1+b^2t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+b^2t^2}}{cb^2t} = \frac{cb}{cb^2t} = \frac{1}{bt}$$

**Задача 1.2** (*Кинематика материальной точки*). Находящееся на высоте  $H$  над Землей тело бросили горизонтально с начальной скоростью  $v_0$ . Найти закон движения тела, уравнение траектории, законы изменения скорости и ускорения, а также нормальную и тангенциальную проекции ускорения и радиус кривизны траектории в произвольный момент времени.

### Решение

I. Нарисуем чертеж и изобразим на нем заданную в условии задачи скорость тела  $v_0$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) и предполагаемую траекторию движения тела (рис. 1.6).

Выберем систему отсчета, связанную с Землей. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально вдоль

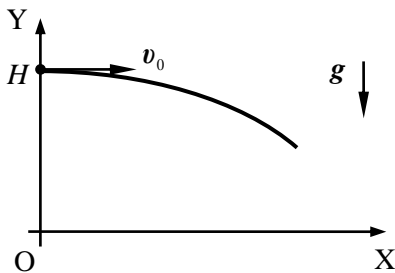


Рис. 1.6. Траектория движения материальной точки.

поверхности Земли по направлению начальной скорости  $v_0$ , а ось  $Y$  – вертикально вверх на положение тела в начальный момент времени. Будем считать, что тело является материальной точкой, а движение тела у поверхности Земли происходит с постоянным ускорением свободного падения  $g$ .

II. В соответствии с выбранной системой отсчета и выбранными моделями тела и его движения запишем начальные условия и закон изменения ускорения тела в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = H, \\ v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0; \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g. \end{cases} \quad (1.37)$$

III. Записанные дифференциальные уравнения относительно проекций скорости материальной точки с учетом начальных значений позволяют найти закон изменения скорости тела  $v(t)$  и закон его движения  $r(t)$  в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -gt; \end{cases} \quad (1.38)$$

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1.39)$$

Уравнение траектории находится из закона движения тела в координатной форме (1.39) путем исключения времени  $t$ :

$$y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (1.40)$$

Остальные искомые величины определяются в соответствии с формулами, приведенными в п. 1 данной Главы.

Модуль скорости (1.7) равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}. \quad (1.41)$$

Модуль ускорения (1.13) имеет вид:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g. \quad (1.42)$$

Проекции ускорения на направление скорости и перпендикулярное ему направление (1.17, 1.21) равны:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}. \quad (1.43)$$

Радиус кривизны определяется соотношением (1.23):

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}. \quad (1.44)$$

Заметим, что в данной задаче все формулы для нахождения искомых величин справедливы с начального момента времени  $t_0 = 0$  до момента падения тела на Землю  $t_0 \leq t \leq t_{\text{пад}}$ . Этот момент времени легко найти из закона движения (1.38), приняв координату  $y$  равной нулю:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1.45)$$

**Ответ:** закон движения тела: 
$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

уравнение траектории: 
$$y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2};$$

законы изменения скорости и ускорения: 
$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}, \quad a = g;$$

нормальная и тангенциальная проекции ускорения:

$$a_n = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}};$$

радиус кривизны траектории 
$$\rho = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}.$$

**Задача 1.3**(Кинематика материальной точки и принцип суперпозиции движений). Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью  $v_d$ , перпендикулярной направлению течения реки. Модуль скорости течения реки, ширина которой  $d$ ,



нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, изменяясь от 0 до  $u_m$ . Найти уравнение траектории лодки, время ее движения  $\tau$ , а также снос лодки  $l$  вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат, жестко связанную с берегом реки, и с началом в месте отплытия лодки. Оси системы координат и скорость течения реки  $u(y)$  изображены на рис. 1.7.

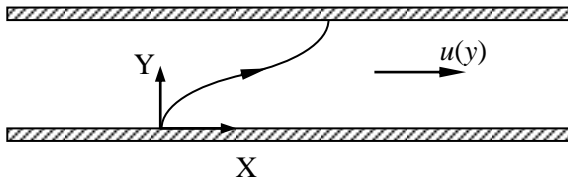


Рис. 1.7. Геометрия системы.

При решении задачи лодку будем считать материальной точкой, а берега реки параллельными.

II. Запишем начальные условия для лодки в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{cases} x(0) = 0, & y(0) = 0, \\ v_x(0) = 0, & v_y(0) = v_d, \end{cases} \quad (1.46)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$  – проекции скорости лодки на оси выбранной системы координат.

В соответствии с принципом суперпозиции движений (1.26) в любой момент времени  $v(t) = u(y(t)) + v_d(t)$  или в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = u(y), \\ v_y = v_d. \end{cases} \quad (1.47)$$

По условию задачи модуль скорости течения реки, ширина которой  $d$ , нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, поэтому можно записать:

$$u(y) = a(y - d/2)^2 + b, \quad (1.48)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные величины. Для определения величины  $b$  используем условие задачи:

$$b = u(y = d/2) = u_m. \quad (1.49)$$

Используя начальные условия  $v_x(0) = a \frac{d^2}{4} + b = 0$  и соотношение (1.49), получим величину  $a$ :

$$a = -\frac{4}{d^2}b = -\frac{4}{d^2}u_m. \quad (1.50)$$

III. Система уравнений (1.51) с учетом (1.52) – (1.54) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{4u_m}{d^2}y^2 + \frac{4u_m}{d}y, \\ \frac{dy}{dt} = v_y = v_{\pi}. \end{cases} \quad (1.51)$$

Интегрируя уравнения (1.51) с учетом начальных условий для координат лодки (1.46), находим закон движения:

$$x(t) = -\frac{4u_m}{d^2}v_{\pi}^2 \frac{t^3}{3} + \frac{2u_m}{d}v_{\pi}t^2, \quad (1.52)$$

$$y(t) = v_{\pi}t. \quad (1.53)$$

Уравнение траектории получаем, исключая время  $t$  из закона движения в координатной форме (1.52) и (1.53):

$$x(y) = \frac{4u_m}{3v_{\pi}d^2} \left( -y^3 + \frac{3}{2}y^2d \right). \quad (1.54)$$

Поскольку в момент причаливания  $y(\tau) = d$ , время движения  $\tau$  лодки равно:

$$\tau = \frac{d}{v_{\pi}}. \quad (1.55)$$

Следовательно, для искомого сноса лодки  $l$  получим (см. 1.54):

$$l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v_{\pi}}d. \quad (1.56)$$

**Ответ:**  $x(y) = \frac{4u_m}{3v_{\pi}d^2} \left( -y^3 + \frac{3}{2}y^2d \right)$ ,  $\tau = \frac{d}{v_{\pi}}$ ,  $l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v_{\pi}}d$ .

**Задача 1.4.** (*Принцип суперпозиции движений*). Определить форму траектории каплей дождя на боковом стекле трамвая, движущегося горизонтально со скоростью  $V_1$ , во время его торможения

ния с ускорением  $a$ . Капли дождя падают на землю вертикально вниз, и скорость их относительно Земли постоянна и равна  $V_2$ .

### Решение

I. Нарисуем чертёж и изобразим на нем заданные в условии задачи кинематические характеристики капли дождя и трамвая в момент начала торможения трамвая (рис.1.8).

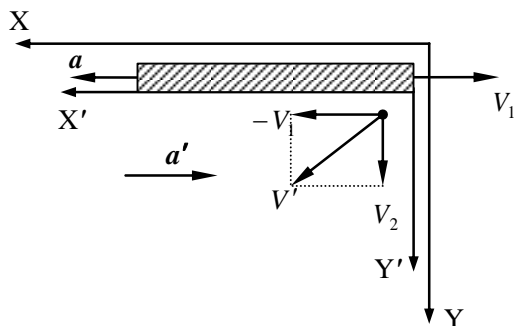


Рис. 1.8. Кинематические характеристики капли дождя и трамвая в момент начала торможения.

Выберем систему координат  $X\dot{Y}$ , связанную с Землей, так, чтобы ось  $X$  была направлена горизонтально вдоль ускорения трамвая, а ось  $Y$  – вертикально вниз. Выберем также вторую систему координат  $X'\dot{Y}'$ , связанную со стеклом трамвая, так, чтобы ее оси  $X'$  и  $Y'$  были сонаправлены с осями  $X$  и  $Y$ . Время в обеих системах отсчитываем от момента начала торможения трамвая.

Будем считать, что капля дождя является материальной точкой, положение которой в момент начала торможения трамвая совпадает с началом координат системы  $X'\dot{Y}'$ .

II, III. Используя принцип суперпозиции движений, запишем скорость  $V'$  и ускорение  $a'$  капли дождя относительно трамвая (системы координат  $X'\dot{Y}'$ ):

$$V' = V_2 - V_1, \quad (1.57)$$

$$a' = -a. \quad (1.58)$$

В соответствии с выбранной системой отсчета запишем начальные условия для капли дождя:

$$\begin{cases} x'(0) = 0, y'(0) = 0, \\ V'_x(0) = V_1, V'_y(0) = V_2. \end{cases} \quad (1.59)$$

Записанные уравнения (1.57) и (1.58) с учетом начальных условий (1.58) позволяют найти закон движения капли в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x'(t) = V_1 t - \frac{at^2}{2}, \\ y'(t) = V_2 t. \end{cases} \quad (1.60)$$

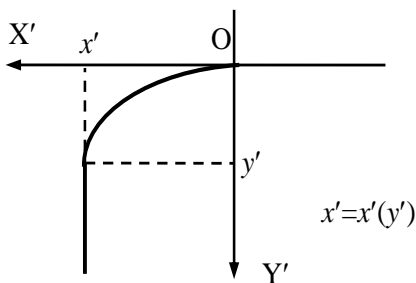


Рис. 1.9. Траектория движения каплей дождя при торможении трамвая.

Уравнение траектории находится из закона движения капли путем исключения из (1.60) времени  $t$ :

$$x' = V_1 \frac{y'}{V_2} - a \frac{y'^2}{2V_2^2}. \quad (1.61)$$

Из соотношения (1.61) видно, что траектория движения капли в системе координат  $X'Y'$ , связанной со стеклом трамвая, является параболой с вершиной в точке с координатами:

$$x' = \frac{V_1^2}{2a}, \quad y' = \frac{V_1 V_2}{a}. \quad (1.62)$$

Подставив соотношение (1.62) в (1.61), можно убедиться, что в тот момент, когда трамвай останавливается, капля достигает вершины параболы. Далее капля продолжает двигаться по стеклу вертикально вниз.

$$\text{Ответ: } x' = \begin{cases} V_1 \frac{y'}{V_2} - a \frac{y'^2}{2V_2^2}, & \frac{V_1 V_2}{2} \geq y' \geq 0 \\ \frac{V_1^2}{2a}, & y' > \frac{V_1 V_2}{a} \end{cases}, \text{ см. рис. 1.5.}$$

**Задача 1.5.** (Кинематика материальной точки). Закон движения движущейся в плоскости материальной точки, заданный в полярной системе координат, имеет следующий вид:  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Определить законы изменения проекций скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые осями декартовой и полярной систем координат, жестко связанных с телом отсчета. Начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной системы, а ось  $X$  декартовой системы направлена вдоль полярной оси (см. рис. 1.10).

### Решение

I. Выберем ось  $Y$  декартовой системы координат так, чтобы плоскость  $XY$  совпадала с плоскостью, в которой движется материальная точка  $M$  (рис. 1.10). Для решения задачи используем две системы координат – декартову систему координат  $XOY$  с осями  $i$  и  $j$ , и полярную, орты которой  $e_r$  и  $e_\varphi$  изображены на рис. 1.10. Заметим, что при движении материальной точки происходит изменение ориентации ортов полярной системы  $e_r$  и  $e_\varphi$ , в то время как орты декартовой системы координат  $i$  и  $j$  не изменяют своего направления.

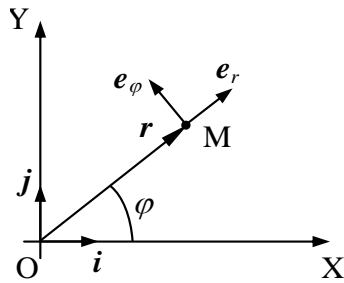


Рис. 1.10. Орты декартовой и полярной систем координат.

II, III. Закон движения материальной точки, заданный в полярной системе, запишем в декартовой системе координат  $XOY$ :

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad (1.63)$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Дифференцируя закон движения (1.90) по времени, получаем искомые законы изменения проекций скорости материальной точки и ее ускорения в декартовой системе координат:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (1.64)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$a_x = \dot{v}_x = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \varphi, \quad (1.65)$$

$$a_y = \dot{v}_y = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \cos \varphi.$$

В формулах (1.64), (1.65) и далее для краткости опустим запись зависимости кинематических величин от времени.

Проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат находим двумя способами.

*1 способ.* Скорость и ускорение материальной точки в полярной системе координат записываются в виде:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.67)$$

Следовательно, проекции скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые ортами рассматриваемых систем координат, связаны соотношениями:

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad (1.68)$$

$$v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = v_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi;$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{i} = a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \quad (1.69)$$

$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{j} = a_r \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi.$$

Сравнивая соотношения (1.63) и (1.68), а также (1.64) и (1.69), получим искомые проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат:

$$v_r = \dot{r}, \quad (1.70)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad (1.71)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

*2 способ.* Запишем радиус-вектор материальной точки в полярной системе координат:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (1.72)$$

Поскольку при движении материальной точки происходит изменение ориентации ортов полярной системы  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$ , найдем скорость их изменения (см. рис. 1.11):

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.73)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

Теперь для нахождения скорости и ускорения точки в той же системе координат необходимо продифференцировать радиус-вектор (1.99) по времени с учетом (1.100):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.75)$$

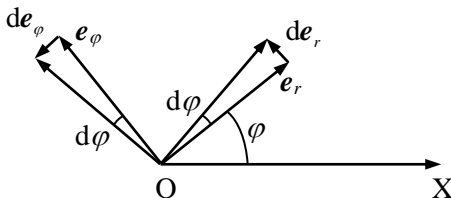


Рис. 1.11. Изменение ориентации ортов полярной системы координат за время  $dt$ .

В соответствии с (1.101) и (1.102) искомые проекции скорости и ускорения материальной точки в полярной системе координат равны:

$$v_r = \dot{r}, \quad (1.76)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad (1.77)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

Как видим, оба способа решения дают одинаковый результат.

**Ответ:**  $v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}; a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$ .

**Задача 1.6.** (Кинематика материальной точки). Движение материальной точки в полярной системе координат задается взаимосвязью полярных координат  $r(\varphi) = 2a(1 + \cos \varphi)$ , при этом полярный угол возрастает линейно во времени  $\varphi(t) = bt$ . Определить зависимость модуля скорости и модуля ускорения материальной точки от времени.

### Решение

Решаем задачу в заданной полярной системе координат. Заметим, что материальная точка  $M$  движется по замкнутой траектории, периодически, с периодом  $2\pi/b$ , возвращаясь в ту же точку пространства (см. рис. 1.12).

В задаче 1.5 было показано:

$$v_r = \dot{r}, \quad (1.78)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad (1.79)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

Тогда, согласно условию задачи, проекции скорости и ускорения материальной точки М в полярной системе координат составляют:

$$v_r = \dot{r} = -2a \sin \varphi \dot{\varphi} = -2abs \sin \varphi, \quad (1.80)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = 2a(1 + \cos \varphi)b;$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -2ab^2(2 \cos \varphi + 1), \quad (1.81)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -4ab^2 \sin \varphi.$$

Искомые модули скорости и ускорения материальной точки равны:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 2ab\sqrt{2 + 2 \cos(bt)}, \quad (1.82)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 2ab^2\sqrt{5 + 4 \cos(bt)}. \quad (1.83)$$

Заметим, что материальная точка в моменты времени  $t_k = (2k+1)\frac{\pi}{b}$  (где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) находится в начале (полюсе) полярной системы координат, имеет нулевую скорость, а ускорение, по модулю равное  $a(t_k) = 2ab^2$ , направлено противоположно  $e_r$ .

**Ответ:**  $v = 2ab\sqrt{2 + 2 \cos(bt)}$ ,  $a = 2ab^2\sqrt{5 + 4 \cos(bt)}$ .

**Задача 1.7.** (Кинематика материальной точки). Планета движется вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера по эллиптической траектории  $r(1 - e \cos \varphi) = p$ . Параметр эллипса  $p$ , эксцентриситет  $e$  и секторную скорость  $\sigma$  считать заданными. Определить проекции ускорения планеты в зависимости от координат  $r$  и  $\varphi$  полярной системы.

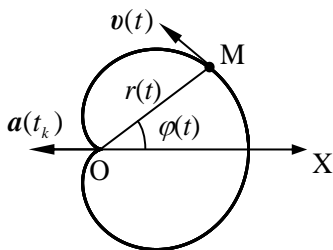


Рис. 1.12. Траектория движения материальной точки.



### Решение

I. При решении задачи будем считать планету и Солнце материальными точками. Согласно первому закону Кеплера все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса  $O$  (см. рис. 1.12).

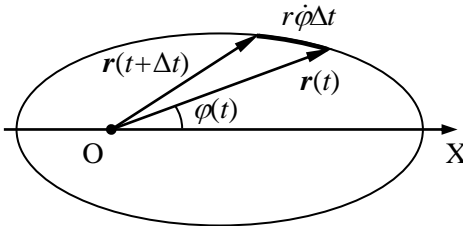


Рис. 1.12. Траектория движения планеты в полярной системе координат.

В соответствии с условием задачи введем полярную систему координат в плоскости движения планеты, полюс которой совпадает с Солнцем, а полярная ось совпадает с одной из осей эллипса.

Согласно второму закону Кеплера секторная скорость  $\sigma$  планеты, равная скорости изменения площади, описываемой радиус-вектором материальной точки, представляющим планету, постоянна при движении планеты вокруг Солнца.

II. Для нахождения проекций ускорения планеты в полярной системе координат воспользуемся формулами (1.76):

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Поскольку в уравнения (1.84) входят производные полярных координат по времени, дополним эту систему уравнением траектории планеты и выражением для ее секторной скорости  $\sigma$ :

$$r(1 - e \cos \varphi) = p, \quad (1.85)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.86)$$

III. В соответствии с условием задачи секторная скорость  $\sigma$  постоянна при движении планеты по эллиптической траектории, поэтому ее производная по времени равна нулю:

$$\dot{\sigma} = r\dot{\varphi} + \frac{1}{2} r^2 \ddot{\varphi} = 0. \quad (1.87)$$

Сравнивая (1.87) с выражением (1.84) для проекции ускорения  $a_\varphi$ , видим, что  $a_\varphi = 0$ . Следовательно, ускорение в любой момент

времени имеет только проекцию  $a_r$ , которая в соответствии с (1.84) является функцией производных полярных координат по времени.

Продифференцируем обе части уравнения траектории (1.85) по времени:

$$\dot{r}(1 - e \cos \varphi) + r e \sin \varphi \dot{\varphi} = 0. \quad (1.88)$$

Используя уравнение траектории (1.85) и выражение для секторной скорости (1.86), преобразуем (1.88) к виду:

$$\dot{r}p + 2\sigma e \sin \varphi = 0. \quad (1.89)$$

Продифференцируем теперь обе части уравнения (1.89) по времени

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \cos \varphi \dot{\varphi} = 0. \quad (1.90)$$

Опять воспользуемся уравнением траектории (1.85) и выражением для секторной скорости (1.86) для исключения  $\cos \varphi$  и  $\dot{\varphi}$  из (1.90):

$$\ddot{r}p + 2\sigma e \frac{r-p}{er} \cdot \frac{2\sigma}{r^2} = \ddot{r}p + 4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3} = 0. \quad (1.91)$$

В результате находим:

$$\ddot{r} = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p}. \quad (1.92)$$

Для нахождения искомой проекции ускорения планеты  $a_r$ , как функции только координат полярной системы, подставим  $\ddot{r}$  (1.92) и  $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$  (см. (1.86)) в выражение (1.84):

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p} - r \frac{4\sigma^2}{r^4} = -\frac{4\sigma^2}{r^2 p}. \quad (1.93)$$

Таким образом, ускорение планеты, движущейся по эллиптической траектории, направлено к Солнцу, не зависит от полярного угла  $\varphi$  и обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца:

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2 p}, \quad (1.94)$$

$$a_\varphi = 0.$$

$$\text{Ответ: } a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2\rho}, a_\varphi = 0.$$

**Задача 1.8.** (Кинематика материальной точки). Небольшое тело движется по гладкой внутренней поверхности полого вертикального цилиндра радиуса  $R$ . В начальный момент времени скорость тела направлена перпендикулярно оси цилиндра и равна  $v_0$  (рис. 1.13). Определить законы изменения скорости и ускорения материальной точки в цилиндрической системе координат, а также угол  $\alpha(t)$  между скоростью и ускорением.

### Решение

I. Будем считать тело материальной точкой, которая движется по цилиндрической поверхности с постоянной вертикальной составляющей ускорения, равной ускорению свободного падения  $g$ . Для решения задачи выберем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью цилиндра, как показано на рис. 1.13. На том же рисунке изображены орты  $e_r$ ,  $e_\varphi$  и  $e_z$  цилиндрической системы координат. Ось, от которой отсчитывается угол  $\varphi$  системы координат, направим на положение тела в начальный момент времени.

II, III. В соответствии с условиями задачи и выбранной системой координат запишем начальные значения проекций скорости для рассматриваемого тела:

$$v_r(0) = 0, v_\varphi(0) = v_0,$$

$$v_z(0) = 0.$$

$$(1.95)$$

Воспользуемся формулами (1.78) и (1.79) задачи 1.5 для проекций скорости и ускорения тела на направления, задаваемые ортами цилиндрической системы, кроме того учтем, что направление оси  $Z$  не меняется в пространстве:

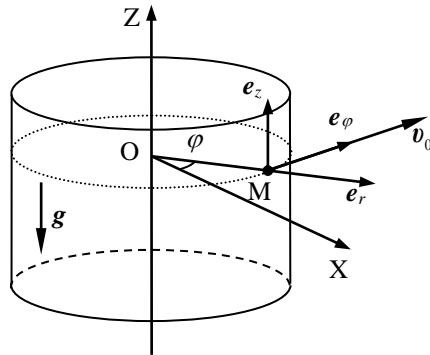


Рис. 1.13. Положение тела в цилиндрической системе координат.

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (1.96)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (1.97)$$

Кроме того, в соответствии с условиями задачи, запишем:

$$r(t) = R, \quad a_\varphi(t) = 0, \quad a_z(t) = -g. \quad (1.98)$$

Используя (1.96) – (1.97), получим законы изменения проекций скорости и ускорения:

$$v_r(t) = 0, \quad v_\varphi(t) = v_0, \quad v_z(t) = -gt; \quad (1.99)$$

$$a_r(t) = -\frac{v_0^2}{R}, \quad a_\varphi(t) = 0, \quad a_z(t) = -g. \quad (1.100)$$

Таким образом, искомый закон изменения скорости и ускорения в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_\varphi - gte_z, \quad (1.101)$$

$$\mathbf{a} = -\frac{v_0^2}{R} \mathbf{e}_r - g\mathbf{e}_z. \quad (1.102)$$

Определим также искомый угол  $\alpha$  между скоростью и ускорением тела:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{va} = \frac{g^2 t}{\sqrt{(v_0^2 + (gt)^2) \left( (v_0^2/R)^2 + g^2 \right)}}. \quad (1.103)$$

$$\text{Ответ: } \mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_\varphi - gte_z, \quad \mathbf{a} = -\frac{v_0^2}{R} \mathbf{e}_r - g\mathbf{e}_z,$$

$$\cos \alpha = \frac{g^2 t}{\sqrt{(v_0^2 + (gt)^2) \left( (v_0^2/R)^2 + g^2 \right)}}.$$

#### 1.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.4.1.** Из пушки, находящейся на самолете, летящем горизонтально со скоростью  $v_{\text{сам}}$ , выпущен снаряд в направлении движения самолета. Скорость снаряда относительно самолета равна  $v_{\text{сн}}$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

1) уравнение траектории снаряда относительно Земли  $y(x)$ ;

2) уравнение траектории снаряда относительно самолета  $y'(x')$ ;

3) уравнение траектории самолета относительно снаряда  $y''(x'')$ .

$$\text{Ответ: } 1) y = -\frac{g}{2(v_{\text{сам}} + v_{\text{сн}})^2} x^2, \quad 2) y' = -\frac{g}{2v_{\text{сн}}^2} (x')^2,$$

$$3) y'' = \frac{g}{2v_{\text{сн}}^2} (x'')^2, \quad x'' < 0.$$

Оси  $X$ ,  $X'$  и  $X''$  декартовой системы координат направлены горизонтально вдоль скорости самолета, а оси  $Y$ ,  $Y'$  и  $Y''$  – вертикально вверх, при этом начало координат системы  $XY$  совпадает с положением самолета в момент выстрела пушки.

**Задача 1.4.2.** Лодка пересекает реку шириной  $d$  с постоянной относительно воды скоростью  $v$ , перпендикулярной скорости течения реки, модуль которой нарастает от берегов к середине реки по линейному закону, меняясь от 0 до  $u$ . Найти траекторию лодки, а также снос лодки  $l$  вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{\frac{vd}{u}} x \text{ при } y < d/2;$$

$$y = d - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{vd}{u}} x \text{ при } y > d/2;$$

$$l = \frac{ud}{2v}.$$

Ось  $X$  декартовой системы координат  $XY$  направлена вдоль берега реки, а ось  $Y$  – поперек реки. Начало системы координат, жестко связанной с берегом реки, совпадает с местом отплытия лодки.

**Задача 1.4.3.** По движущемуся вниз эскалатору спускается пассажир со скоростью  $v$  относительно эскалатора. Скорость эскалатора равна  $u$ . Спускаясь по неподвижному эскалатору, пассажир проходит  $N$  ступеней. Сколько ступеней  $N'$  пройдет пассажир, спускаясь по движущемуся эскалатору?

$$\text{Ответ: } N' = \frac{v}{v+u} N.$$

**Задача 1.4.4** ([3], 1.6). Корабль движется по экватору на восток со скоростью  $v_0 = 30$  км/ч. С юго-востока под углом  $\varphi = 60^\circ$  к экватору дует ветер со скоростью  $v = 15$  км/ч. Найти скорость  $v'$  ветра относительно корабля и угол  $\varphi'$  между экватором и направлением ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

$$\text{Ответ: } v' = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0v\cos\varphi} \approx 40 \text{ км/ч,}$$

$$\varphi' = \arctg \frac{v \sin \varphi}{v_0 + v \cos \varphi} = 19^\circ.$$

**Задача 1.4.5** ([3], 1.7). Два пловца должны попасть из точки  $A$  на одном берегу реки в прямо противоположную точку  $B$  на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой  $AB$ , другой же – все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью  $u$ . При каком значении  $u$  оба пловца достигнут точки  $B$  за одинаковое время, если скорость течения  $v_0 = 2,0$  км/ч и скорость каждого пловца относительно воды  $v' = 2,5$  км/ч?

$$\text{Ответ: } u = \frac{v_0}{1/\sqrt{1-(v_0/v')^2} - 1} = 3,0 \text{ км/ч.}$$

**Задача 1.4.6** ([3], 1.8). От бакена, который находится на середине широкой реки, отошли две лодки,  $A$  и  $B$ . Обе лодки стали двигаться по взаимно перпендикулярным прямым: лодка  $A$  – вдоль реки, а лодка  $B$  – поперек. Удалившись на одинаковое расстояние от бакена, лодки вернулись затем обратно. Найти отношение времен движения лодок  $\tau_A/\tau_B$ , если скорость каждой лодки относительно воды в  $\eta = 1,2$  раза больше скорости течения.

$$\text{Ответ: } \tau_A/\tau_B = \eta/\sqrt{\eta^2 - 1} = 1,8.$$

**Задача 1.4.7** ([3], 1.9). Лодка движется относительно воды со скоростью, в  $n = 2$  раза меньшей скорости течения реки. Под каким

углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

$$\text{Ответ: } \vartheta = \arcsin(1/n) + \pi/2 = 120^\circ.$$

**Задача 1.4.8** ([3], 1.10). Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом  $\vartheta = 60^\circ$  к горизонту. Начальная скорость каждого тела  $v_0 = 25$  м/с. Найти расстояние между телами через  $t = 1,70$  с.

$$\text{Ответ: } l = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \vartheta)} = 22 \text{ м.}$$

**Задача 1.4.9** ([3], 1.11). Два шарика бросили одновременно из одной точки в горизонтальном направлении в противоположные стороны со скоростями  $v_1 = 3,0$  м/с и  $v_2 = 4,0$  м/с. Найти расстояние между шариками в момент, когда их скорости окажутся взаимно перпендикулярными.

$$\text{Ответ: } l = (v_1 + v_2) \sqrt{v_1 v_2 / g} = 2,5 \text{ м.}$$

**Задача 1.4.10** ([3], 1.12). Три материальных точки находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью  $v$ , причем первая точка все время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на первую. Через сколько времени точки встретятся?

$$\text{Ответ: } t = 2a/3v.$$

**Задача 1.4.11** Определить закон изменения модуля скорости материальной точки, движущейся в плоскости, если ее движение описывается в полярной системе координат следующим законом:

$$r(t) = a(1 - bt), \quad \varphi(t) = \frac{bt}{1 - bt}, \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ – положительные постоянные величины.}$$

$$\text{Ответ: } v = ab \sqrt{1 + \frac{1}{(1 - bt)^2}}, \quad \text{при } t < \frac{1}{b}.$$

## ГЛАВА 2

### КИНЕМАТИКА ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ, УРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

#### 2.1. Теоретический материал

Основные определения физических величин, необходимые для решения задач этой главы, см. в главе 1.

**Уравнения кинематической связи** – уравнения, связывающие кинематические характеристики различных тел системы:

$$\begin{aligned} f_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) &= 0, \\ f_v(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) &= 0, \\ f_a(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Существуют два способа нахождения уравнений кинематической связи.

#### **Способ 1. Принцип независимых перемещений.**

Перемещение какого-либо тела в системе связанных тел складывается из так называемых «независимых» перемещений, каждое из которых обусловлено (вызвано) перемещением соответствующего другого тела системы при покоящихся остальных телах:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \sum_{k \neq i} \Delta \mathbf{r}_i^{(k)}. \quad (2.2)$$

**Способ 2.** Записать величины постоянных кинематических характеристик элементов связей (нитей, штанг, блоков, поверхностей и т.д.) через координаты тел системы, используя свойства этих элементов (нерастяжимость, неподвижность, недеформированность), и продифференцировать эти величины по времени.

#### 2.2. Основные типы задач и методы их решения

**Основной задачей кинематики** является определение кинематических характеристик тел, движущихся относительно данной системы отсчета.

Задачи данной главы условно можно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:



- 1) уравнения кинематической связи,
- 2) кинематика простейших механических систем.

Как правило, один из типов задач имеет основное, другой – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать в проекциях на оси координат:
  - а) законы движения,
  - б) законы изменения скорости,
  - в) законы изменения ускорения.
2. Записать начальные условия.
3. Записать уравнения кинематических связей.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

**Примечания.**

Пункты II.1 – II.3 (в том числе II.2.a – II.2.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

### 2.3. Примеры решения задач

**Задача 2.3.1.** (Уравнения кинематической связи). Концы твердого стержня MN могут свободно скользить по сторонам прямого угла MON (см. рис. 2.1). Найти уравнение траектории точки P стержня, которая делит его на части длиной  $a$  и  $b$ .

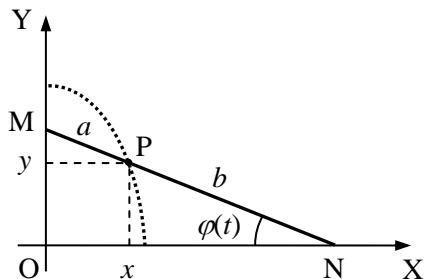


Рис. 2.1. Геометрия системы

#### Решение

I. Выберем и изобразим декартову систему координат, оси которой совпадают со сторонами угла MON (см. рис. 2.1).

В соответствии с условием задачи будем считать стержень абсолютно твердым. Следовательно, его положение в любой момент времени  $t$  однозначно задается углом  $\varphi(t)$  между осью OX и стержнем MN.

II. Запишем закон движения точки P стержня в координатной форме (см. рис. 2.1):

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \varphi(t), \\ y(t) = b \sin \varphi(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Искомое уравнение траектории точки P можно получить, исключив время из закона движения (2.3).

III. Преобразуя уравнения (2.3), получаем:

$$\cos^2 \varphi(t) + \sin^2 \varphi(t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (2.4)$$

Следовательно, искомое уравнение траектории принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является уравнением эллипса с полуосями, совпадающими по направлению с осями выбранной системы координат и равными  $a$  и  $b$ . В случае, когда  $a = b$ , эллипс вырождается в окружность.

**Ответ:** 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Задача 2.3.2** (Уравнения кинематической связи). На клине с углом при основании  $\alpha$ , расположенном на горизонтальной поверхности, находится система двух тел 1 и 2 (см. рис. 2.2), связанных нерастяжимой нитью, перевешенной через маленький блок, ось которого закреплена в верхней точке клина. Записать уравнение кинематической связи для ускорений клина и двух тел, если тело 2 не отрывается от вертикальной поверхности клина в процессе движения.

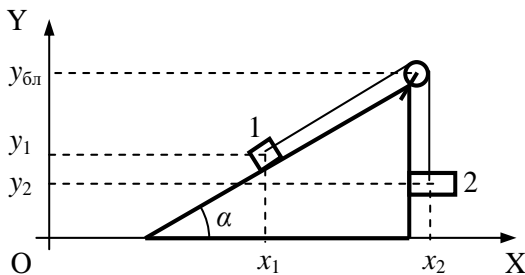


Рис. 2.2. Система двух тел, помещенная на клин.

### Решение

I. Выберем систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально, а ось  $Y$  вертикально вверх (см. рис. 2.2).

Будем считать тела 1 и 2 материальными точками, связанными нерастяжимой нитью, а клин – абсолютно твердым телом, которое может двигаться поступательно вдоль оси  $X$ . Обозначим координаты первого и второго тел в системе координат  $XY$  –  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , соответственно. Линейные размеры блока по условию задачи малы по сравнению с длиной нити, поэтому не будем учитывать их при записи уравнений кинематической связи для координат тел системы.

II. Выразим длину нити  $l$  через вертикальные координаты различных точек рассматриваемой системы тел:

$$l = \frac{y_{\text{бл}} - y_1}{\sin \alpha} + y_{\text{бл}} - y_2, \quad (2.4)$$

где  $y_{\text{бл}}$  – координата блока, не изменяющаяся в процессе движения.

Если длину наклонного участка нити выразить через горизонтальные координаты тел системы, то выражение для длины нити принимает вид:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} + y_{\text{бл}} - y_2. \quad (2.5)$$

III. Дифференцируя (2.4) и (2.5) дважды по времени и учитывая, что  $l = \text{const}$  и  $y_{\text{бл}} = \text{const}$ , получаем искомые уравнения кинематической связи для ускорений тел рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} a_{y1} - a_{y2} \sin \alpha = 0, \\ a_{x2} - a_{x1} - a_{y2} \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{Ответ} \begin{cases} a_{y1} - a_{y2} \sin \alpha = 0, \\ a_{x2} - a_{x1} - a_{y2} \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

**Задача 2.3.3.** (Уравнения кинематической связи). Система тел состоит из трех блоков и трех подвешенных к ним грузов (см. рис. 2.3). Найти уравнение кинематической связи для ускорений грузов.

### Решение

Выберем систему отсчета, жестко связанную с потолком. Направление оси  $X$  декартовой системы координат, связанной с телом отсчета, показано на рис. 2.3. Считаем грузы 1, 2 и 3 материальными точками, нити – нерастяжимыми. Проскальзывания нитей относительно блоков нет.

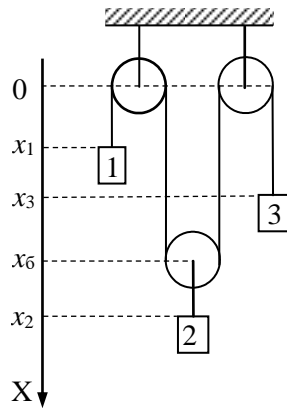


Рис. 2.3. Координаты грузов и подвижного блока.

Рассмотрим два способа нахождения уравнений кинематической связи.

*Способ 1. Принцип независимых перемещений.* Перемещение какого-либо тела в системе связанных тел складывается из так называемых «независимых» перемещений, каждое из которых обусловлено перемещением одного из тел системы при покоящихся других телах:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \sum_{k \neq i} \Delta \mathbf{r}_i^{(k)}. \quad (2.7)$$

Перемещение груза 1, согласно (2.7), можно представить как сумму перемещений груза 1 при перемещении груза 2,  $\Delta x_1^{(2)}$ , считая, что груз 3 покоится, и при перемещении груза 3,  $\Delta x_1^{(3)}$ , считая, что груз 2 покоится:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(3)}. \quad (2.8)$$

Предположим для определенности, что груз 2 поднимается. Координата груза 1 при перемещении груза 2 изменяется на  $\Delta x_1^{(2)}$ :

$$\Delta x_1^{(2)} = -2\Delta x_2. \quad (2.9)$$

Аналогично найдем перемещение груза 1 при перемещении груза 3,  $\Delta x_1^{(3)}$ , при условии, что груз 2 покоится:

$$\Delta x_1^{(3)} = -\Delta x_3. \quad (2.10)$$

Сложив соотношения (2.9) и (2.10), получим уравнение кинематической связи для изменений координат тел системы:

$$\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + \Delta x_3 = 0. \quad (2.11)$$

Дважды продифференцировав (2.11) по времени, получаем искомое уравнение кинематической связи для ускорений:

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0. \quad (2.12)$$

*Способ 2.* В соответствии с п. 2.1. следует выразить величины постоянных кинематических характеристик элементов связей (в данном случае нити и блоков) через координаты тел системы, используя свойства этих элементов, и продифференцировать эти величины по времени.

Выразим величины длин нитей, которые являются постоянными кинематическими характеристиками данной системы, через координаты тел системы – грузов ( $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ) и подвижного блока ( $x_6$ ), используя свойство длин нитей:

$$x_1 + 2x_6 + x_3 + 3\pi r = \text{const}, \quad (2.13)$$

где  $r$  – радиус блоков (блоки считаем одинаковыми).

$$x_2 - x_6 = \text{const}. \quad (2.14)$$

Дважды дифференцируя (2.13) и (2.14) по времени, получим уравнение кинематической связи для ускорений грузов:

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0. \quad (2.15)$$

Таким образом, оба способа приводят к одному и тому же уравнению кинематической связи для ускорений.

**Ответ:**  $a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$ .

**Задача 2.3.4.** (Уравнения кинематической связи). Система тел состоит из двух блоков и двух подвешенных к ним тел (см. рис. 2.4). Один из блоков составлен из двух коаксиальных цилиндров с неподвижной относительно потолка осью, имеющих различные радиусы  $r$  и  $R$ . Первое тело подвешено на нити, намотанной на цилиндр радиуса  $r$ , второй – на нити, прикрепленной к оси другого блока. Найти ускорение второго тела, если известно, что ускорение первого тела равно  $a_1$ . Нити считать нерастяжимыми.

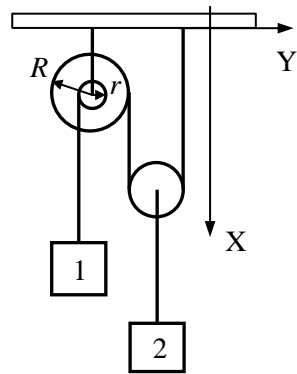


Рис. 2.4. Система блоков и подвешенных к ним тел.

### Решение

I. Выберем систему отсчета, жестко связанную с потолком. Направление осей декартовой системы координат, связанной с телом отсчета, показано на рис. 2.4.

Считаем тела 1 и 2 материальными точками, нити – нерастяжимыми. Проскальзывания нитей относительно блоков нет.

II. Пусть за малый интервал времени  $\Delta t$  изменение координаты первого тела равно  $\Delta x_1$  (для определенности будем считать, что оно опускается). Поскольку нить нерастяжима, то угол поворота  $\Delta\varphi$  цилиндра радиусом  $r$  связан с величиной  $\Delta x_1$  следующим соотношением:

$$\Delta x_1 = r\Delta\varphi. \quad (2.16)$$

При этом второй цилиндр радиусом  $R$  повернется на тот же угол  $\Delta\varphi$ , а длина нити, на которой лежит блок с подвешенным к нему телом 2, изменится на величину:

$$\Delta l = -R\Delta\varphi. \quad (2.17)$$

Изменение координаты центра второго блока, а значит и второго тела, равно:

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta l}{2}. \quad (2.18)$$

III. Решая систему уравнений (2.16)–(2.18), получим уравнение, связывающее изменения координат двух тел:

$$\Delta x_2 = -\frac{R}{r} \cdot \frac{\Delta x_1}{2}. \quad (2.19)$$

Поделив левую и правую части (2.19) на малый интервал времени, получим уравнение кинематической связи для скоростей тел:

$$v_2 = -v_1 \frac{R}{2r}. \quad (2.20)$$

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получаем искомую связь между ускорениями тел:

$$a_2 = -a_1 \frac{R}{2r}. \quad (2.21)$$

**Ответ:**  $a_2 = -a_1 \frac{R}{2r}$

**Задача 2.3.5.** (Кинематика простейших механических систем). На вал радиуса  $R$ , закрепленный на оси, намотана веревка, на конце которой висит груз, опускающийся вниз (см. рис. 2.5). Закон движения груза:  $x = x_0 + bt^2$ , где  $x_0$  и  $b$  – постоянные положительные величины. Определить угловую скорость  $\omega$  и ускорение  $\beta$  произвольной точки обода вала, модуль ускорения  $a$  этой точки, его нормальную  $a_n$  и тангенциальную  $a_t$

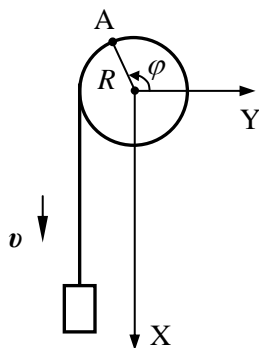


Рис. 2.5. Геометрия системы и выбор осей X и Y.

составляющие. Записать закон движения этой точки.

### Решение

I. Нарисуем чертеж и изобразим на нем направление скорости  $v$  движения груза. В соответствии с условием задачи направим ось  $X$  декартовой системы координат вертикально вниз (рис. 2.5). Для определения ускорения и закона движения произвольной точки  $A$  на ободе вала выберем полярную систему координат с полярной осью, совпадающей с осью  $Y$ . В этой системе координат угол  $\varphi$  однозначно определяет положение рассматриваемой точки  $A$ . Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, считаем веревку нерастяжимой и что проскальзывания веревки относительно вала нет.

II. Запишем заданный в задаче закон движения груза в декартовой системе координат:

$$x = x_0 + bt^2. \quad (2.22)$$

Поскольку веревка нерастяжима, уравнение кинематической связи имеет вид:

$$v_x = R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.23)$$

III. Найдем законы изменения скорости груза и его ускорения в проекции на ось  $X$  декартовой системы координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2bt, \quad (2.24)$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = 2b, \quad (2.25)$$

Точки обода вала совершают неравномерное движение по окружности, причем модуль их скорости (поскольку нить нерастяжима и не проскальзывает по поверхности обода) в каждый момент времени равен модулю скорости груза, поэтому, используя (2.22) для угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\beta$ , получаем:

$$\omega = \frac{v_x}{R} = \frac{2bt}{R}, \quad (2.26)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2b}{R}. \quad (2.27)$$

Поскольку проекция ускорения груза на ось  $X$  равна тангенциальной проекции ускорения точек обода, то:



$$a_\tau = 2b. \quad (2.28)$$

Нормальную проекцию ускорения определим через скорость точки и радиус окружности:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4b^2 t^2}{R}. \quad (2.29)$$

Модуль полного ускорения произвольной точки А на ободе колеса равен:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 2b \sqrt{\frac{4b^2 t^4}{R^2} + 1}. \quad (2.30)$$

Закон движения произвольной точки А на ободе вала запишем в полярной системе координат:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\beta t^2}{2} = \varphi_0 + \frac{bt^2}{R}, \quad (2.31)$$

где  $\varphi_0$  – начальное значение угловой координаты точки А в выбранной полярной системе координат.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{2bt}{R}, \quad \beta = \frac{2b}{R}, \quad a = 2b \sqrt{\frac{4b^2 t^4}{R^2} + 1},$$

$$a_n = \frac{4b^2 t^2}{R}, \quad a_\tau = 2b, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\beta t^2}{2} = \varphi_0 + \frac{bt^2}{R}.$$

### Задача 2.3.6. (Кинематика простейших систем).

Вращающаяся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  видеочамера, находящаяся в начале координат, фиксирует положение гоночного автомобиля, который движется по участку траектории, уравнение которой задается в полярных координатах функцией:  $r = 2a + 4a \cos \varphi$  (см. рис. 2.6). Автомобиль все время находится в поле зрения видеочамеры. Определить скорость автомобиля в момент времени, когда  $\varphi = \pi/3$ .

### Решение

I. Будем считать автомобиль материальной точкой. В соответствии с заданным законом движения изобразим траекторию движения. Изобразим на этом же рисунке орты декартовой и полярной систем координат.

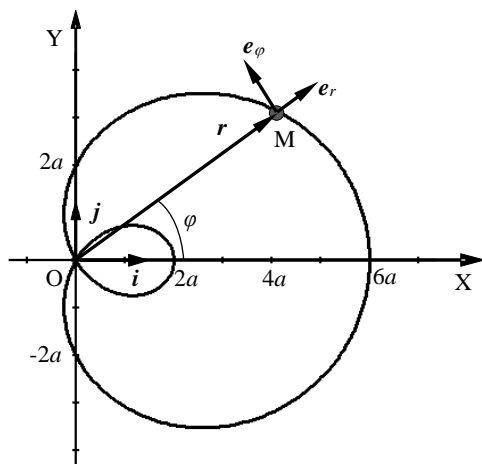


Рис.2.6.Траектория движения автомобиля и орты декартовой и полярной системы координат.

II,III. Закон движения автомобиля, заданный в полярной системе координат, запишем в декартовой системе координат ХОУ (см. рис.2.6.):

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad (2.32)$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t). \quad (2.33)$$

Дифференцируя закон движения по времени, получаем законы изменения проекций скорости автомобиля в декартовой системе координат:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (2.34)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (2.35)$$

Скорость автомобиля:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.36)$$

Преобразуем выражение, стоящее под квадратным корнем:

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \\ &= (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \cos^2 \varphi + (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \sin^2 \varphi = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

По условию задачи:

$$r = 2a + 4a \cos \varphi, \quad (2.38)$$

$$\varphi = \omega t. \quad (2.39)$$

Следовательно:

$$\dot{r} = -4a\omega \sin \varphi, \quad (2.40)$$

$$\dot{\varphi} = \omega. \quad (2.41)$$

Подставляя последние два выражения в формулу для скорости (2.36), получаем:

$$v = 2\omega a \sqrt{5 + 4 \cos(\omega t)}. \quad (2.42)$$

В тот момент, когда угол  $\varphi = \pi/3$ ,  $\cos(\omega t) = 1/2$ , тогда искомая скорость равна:

$$v = 2\sqrt{7}a\omega.$$

**Ответ:**  $v = 2\sqrt{7}a\omega$ .

**Задача 2.3.7.** (Кинематика простейших систем). Груз поднимают с помощью дифференциального ворота (рис.2.7). Радиусы валов ворота А и В равны  $R$  и  $r$  соответственно. Определить угловую скорость вращения подвижного блока С, если груз поднимается со скоростью  $v$

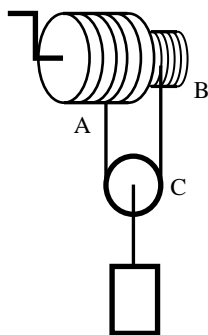


Рис.2.7. Дифференциальный ворот с подвешенным к нему подвижным блоком и грузом.

### Решение

I. Выберем лабораторную систему отсчета, в которой ось  $Z$  направлена вдоль оси дифференциального ворота. Изобразим положение ворота, подвижного блока С и груза в плоскости  $XY$  (см. рис.2.8). Считаем веревку нерастяжимой. Проскальзывания веревки относительно подвижного блока нет.

II, III. Пусть за малый интервал времени  $\Delta t$  ворот повернулся на угол  $\Delta\varphi$ . Длина не намотанной на ворот части веревки уменьшится на

$$\Delta l = \Delta\varphi \cdot R - \Delta\varphi \cdot r. \quad (2.43)$$

Следовательно координата подвижного блока изменится на

$$\Delta x = -\frac{\Delta l}{2}. \quad (2.44)$$

Знак минус в последнем выражении определяется выбором оси X (см. рис. 2.8). Учитывая (2.43) и (2.44) получаем связь между скоростью подъема груза  $v$  и угловой скоростью вращения ворота  $\omega$ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} (R - r), \\ &= \frac{\omega}{2} (R - r) \end{aligned} \quad (2.45)$$

То есть угловая скорость вращения ворота равна

$$\omega = \frac{2v}{R - r}. \quad (2.46)$$

Для определения угловой скорости вращения блока С определим изменение длины одной из веревок, на которых подвешен блок С, например, правой. При повороте блока А на угол  $\Delta\varphi$  на блок наворачивается кусок веревки, равный  $\Delta\varphi \cdot R$ . В силу нерастяжимости нити, он равен:

$$\Delta\varphi \cdot R = \Delta\varphi_1 R_1 - \Delta x. \quad (2.47)$$

Учитывая (2.43) и (2.44) из (2.47) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 R_1 &= \Delta\varphi \cdot R - \frac{\Delta l}{2} = \\ &= \Delta\varphi \cdot \left( R - \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} r \right) = \Delta\varphi \cdot \frac{R + r}{2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Подставляя в (2.48) значение радиуса подвижного блока

$$R_1 = \frac{R + r}{2}, \quad (2.49)$$

получаем связь между углом поворота ворота и подвижного блока за один и тот же интервал времени

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1. \quad (2.50)$$

То есть угловая скорость вращения блока С равна

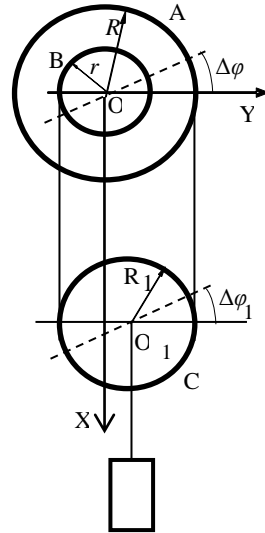


Рис. 2.8. Оси координат и кинематические характеристики системы.

$$\omega_c = \omega = \frac{2v}{R-r}. \quad (2.51)$$

**Ответ:**  $\omega_c = \frac{2v}{R-r}.$

**Задача 2.3.8** (Кинематика простейших механических систем). Бобина магнитофонной ленты, имеющей толщину  $d$  проигрывается в течение времени  $t$ . Начальный радиус бобины с пленкой  $R$ , а конечный (без пленки) –  $r$ . Определить скорость протяжки ленты, считая ее постоянной.

### Решение

I. Будем считать ленту нерастяжимой, скорость протяжки ленты, в соответствии с условием задачи, постоянной, а толщину ленты  $d \ll r$ .

II, III. Для определения скорости протяжки ленты необходимо найти ее длину. Для этого найдем число слоев, длину каждого слоя определим через его радиус и суммируя найдем длину всей пленки.

Число слоев  $N$  равно

$$N = \frac{R-r}{d}. \quad (2.52)$$

Длина  $n$ -го слоя равна

$$l_n = 2\pi(r+nd). \quad (2.53)$$

Общая длина:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{n=1}^N 2\pi(r+nd) = N \cdot 2\pi r + 2\pi d \sum_{n=1}^N n = \\ &= N \cdot 2\pi r + 2\pi d \frac{N(N+1)}{2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Записанное в (2.54) выражение для последней суммы несложно доказать с помощью математической индукции.

Подставляя (2.52) в (2.54) получаем

$$l = \pi \frac{R^2 - r^2}{d} + 2\pi(R-r) \approx \pi \frac{R^2 - r^2}{d}. \quad (2.55)$$

Здесь учтено, что  $d \ll r$ . Поскольку скорость движения ленты считается постоянной, то она равна

$$v = \frac{l}{t} = \pi \frac{(R^2 - r^2)}{d \cdot t}. \quad (2.56)$$

**Ответ:**  $v = \pi \frac{(R^2 - r^2)}{d \cdot t}$

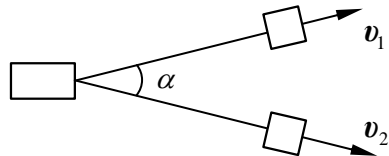
#### 2.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.4.1** Стержень опирается своими концами на стороны прямого угла. Верхний конец движется вверх с постоянной скоростью  $v$ . Найти, как зависит от времени скорость его центра  $v_C$ . За начало отсчета времени принять момент, когда верхний конец находится в вершине угла. Длина стержня  $L$ .

**Ответ:**  $v_C = \frac{v}{2\sqrt{1 - \left(\frac{vt}{L}\right)^2}}$

**Задача 2.4.2.** Два трактора, движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , буксируют с помощью тросов автомобиль (см. рис.).

Определить модуль и направление скорости  $v$  автомобиля в тот момент, когда тросы параллельны векторам  $v_1$  и  $v_2$ , а угол между ними равен  $\alpha$ .

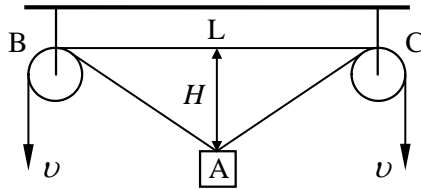


**Ответ:**  $v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}{\sin \alpha},$

$$\beta_1 = \arccos \left( \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}} \right),$$

где  $\beta_1$  – угол между векторами  $v$  и  $v_1$ .

**Задача 2.4.3.** Тело А подвешено на нитях, перекинутых через блоки В и С малого диаметра так, что  $AB = BC$  (см. рис.). Концы нитей тянут с одинаковыми скоростями  $v$ . Расстояние между блоками В и С равно  $L$ . Найти модуль скорости  $v_A$  тела А в тот момент, когда оно находится на расстоянии  $H$  от прямой ВС.

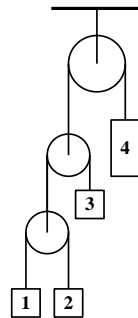


Ответ:  $v_A = v \sqrt{1 + \left(\frac{L}{2H}\right)^2}$ .

**Задача 2.4.4.** Лодку подтягивают к пристани высотой  $H$  с помощью веревки, наматываемой на вал лебедки. Радиус вала равен  $R \ll H$ . Вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить зависимость модулей скорости и ускорения лодки от длины веревки  $L > H$ . Движение лодки считается поступательным.

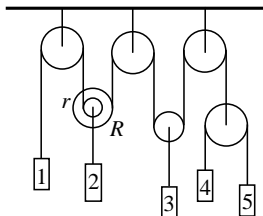
Ответ:  $v = \frac{\omega RL}{\sqrt{L^2 - H^2}}$ ,  $a = \frac{(\omega R H)^2}{(L^2 - H^2)^{3/2}}$ .

**Задача 2.4.5.** Четыре тела подвешены на нерастяжимых нитях (см. рис.). Найти ускорение тела 4, если известны ускорения остальных трех тел.



Ответ:  $a_4 = -(a_1 + a_2 + 2a_3)/4$ , где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

**Задача 2.4.6.** Найти уравнение кинематической связи для ускорений тел, подвешенных на нерастяжимых нитях так, как показано на рисунке.

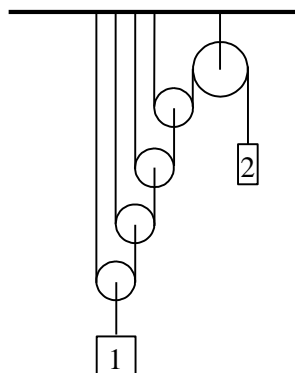


*Ответ:*  $a_1 + \frac{R+r}{R}a_2 + \frac{r}{R}\left(2a_3 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5\right) = 0,$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $a_5$  – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.

**Задача 2.4.7.** Два тела подвешены на нерастяжимых нитях, как показано на рисунке. Определить ускорение тела 2, если известно ускорение тела 1.

*Ответ:*  $a_2 = -16a_1,$  где  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений тел на вертикальную ось декартовой системы координат.





## ГЛАВА 3

### ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

#### 3.1. Теоретический материал

**Первый закон Ньютона.** Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка (на которую не действуют другие тела) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называются **инерциальными**.

**Второй закон Ньютона.** Произведение массы материальной точки на ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех сил, действующих на эту материальную точку:

$$ma = \sum_i F_i. \quad (3.1)$$

**Третий закон Ньютона.** Силы взаимодействия двух материальных точек:

- 1) парные и приложены к разным материальным точкам,
- 2) одной природы,
- 3) равны по модулю,
- 4) противоположны по направлению,
- 5) направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

**Уравнение движения** – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$ma = \sum_i F_i \quad \text{или} \quad \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix}, \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что уравнение движения можно записать в проекциях на любую, в том числе и произвольно движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, ось. Для этого достаточно умножить скалярно левую и правую части векторного уравнения движения (3.2) на единичный вектор (орт), задающий направление

этой оси. Например, на направление скорости  $\boldsymbol{\tau}$  и на направление, перпендикулярное скорости  $\boldsymbol{n}$  :

$$\begin{aligned} ma_n &= \sum_i F_{in}, \\ ma_\tau &= \sum_i F_{i\tau}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\boldsymbol{a}_n(t) = a_n(t)\boldsymbol{n}(t)$  и  $\boldsymbol{a}_\tau(t) = a_\tau(t)\boldsymbol{\tau}(t)$  – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения материальной точки.

**Законы динамики** – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

### 3.2. Основные типы задач и методы их решения

В данной главе рассматриваются два типа задач: прямая задача динамики и обратная задача динамики.

**Прямая задача динамики** – найти закон движения тела или системы тел, если известны силы, действующие на эти тела.

**Обратная задача динамики** – найти действующие на тело или систему тел силы или другие характеристики этой системы, если известны законы движения тел, входящих в систему.

Большинство задач содержат в себе элементы как прямой, так и обратной задач динамики. Как правило, одна из этих задач имеет основное, другая – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

Для решения подобных задач необходимо придерживаться следующей схемы.

#### **I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

#### **II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат для всех тел системы.
2. Использовать третий закон Ньютона, если это не было сделано ранее в п. I.3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил (см. п. 4.1 Теоретический материал в Главе 4):
  - а) закон всемирного тяготения,
  - б) закон Гука,
  - в) закон Амонта – Кулона и т.д.
4. Записать уравнения кинематических связей.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

### **III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

#### **Примечания.**

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – II.1 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах, действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 (в том числе II.3.a – II.3.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

### **3.3. Примеры решения задач**

**Задача 3.3.1.** (*Машина Атвуда, прямая задача механики*). Через блок, подвешенный к потолку перекинута нить. К концам нити прикреплены два груза массами  $m_1$  и  $m_2$ . Определить ускорения тел.

### Решение

Решение данной задачи (и всех последующих) будем проводить в соответствии с предложенной схемой решения задач динамики.

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.1, и изобразим на нем действующие на тела системы силы: силы тяжести и силы, действующие со стороны нитей.

Выберем модели тел и их движений. Грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивления воздуха и трения в оси блока нет.

II. Запишем уравнения движения двух грузов в проекции на ось  $X$  (см. рис. 3.1) и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T_2, \\ a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений грузов на ось  $X$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – модули сил, действующих на грузы со стороны нити.

Докажем постоянство модуля силы натяжения нити вдоль всей ее длины в условиях данной задачи. Для этого выделим мысленно прямолинейный участок нити произвольной длины (см. рис. 3.1) и запишем уравнение его движения в проекции на ось  $X$ :

$$m_n a_n = T_n - T_B + m_n g + F_{\text{сопр}}, \quad (3.5)$$

где  $m_n$  – масса выделенного участка нити,  $a_n$  – проекция его ускорения на ось  $X$ ,  $T_n$  и  $T_B$  – модули сил натяжения, действующих на выделенный участок нити со стороны нижнего и верхнего примы-

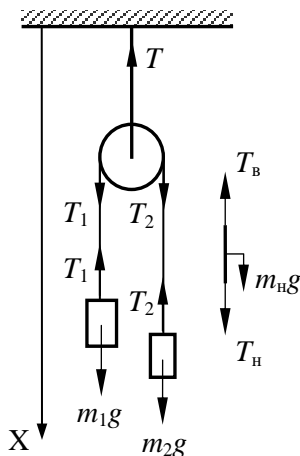


Рис. 3.1. Машина Атвуда.

кающих к нему участков нити,  $F_{\text{сопр}}$  – проекция силы сопротивления воздуха.

Поскольку нить по условию задачи невесома и нет силы сопротивления воздуха, то из (3.2) следует, что модуль силы натяжения нити постоянен вдоль прямолинейного участка нити, а, следовательно, сила, приложенная к грузу со стороны нити и сила натяжения нити в верхней части прямолинейного участка равны по модулю.

Для доказательства равенства модулей сил натяжения нити слева и справа от блока запишем уравнение вращательного движения (см. Глава 6) блока вместе с примыкающим к нему участком нити (см. рис. 3.1):

$$J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R + T_2 R + M_{\text{тр}} + M_{\text{сопр}}, \quad (3.6)$$

где  $J$  – момент инерции блока вместе с примыкающим к нему участком нити относительно оси, проходящей через центр блока и направленной за плоскость чертежа,  $\omega$  – угловая скорость вращения блока,  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения, действующих в оси блока,  $M_{\text{сопр}}$  – момент сил сопротивления воздуха, действующих на блок.

Поскольку блок и нить невесома, нет трения в оси блока и силы сопротивления воздуха, то в соответствии с (3.6) модули сил натяжения нити слева и справа от блока равны. Следовательно, равны и силы натяжения нити, приложенные к грузам:

$$T_1 = T_2. \quad (3.7)$$

III. Решим полученную систему уравнений (3.4) и (3.7) относительно искомых физических величин:

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.8)$$

Для оценки правильности полученного результата проанализируем частные и предельные случаи. Если к нити подвешены грузы одинаковой массы, то полученные формулы для проекций ускорений дают значение, равное нулю, что очевидно и из общих соображений. Если  $m_1 \gg m_2$ , то  $a_1 = g$ ,  $a_2 = -g$ . При выполнении обратного неравенства  $m_1 \ll m_2$ , ускорения грузов равны  $a_1 = -g$  и  $a_2 = g$ . Эти предельные значения легко получить из физических соображений. Если один из грузов имеет существенно бóльшую массу, чем

второй, то он падает с ускорением свободного падения. Ускорение второго груза в силу нерастяжимости нити равно по величине ускорению первого груза и противоположно по направлению.

$$\text{Ответ: } a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 3.3.2** (Прямая задача динамики). Найти ускорения тел и силы натяжения нитей для системы тел, изображенной на рисунке.

### Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.2, и изобразим силы, действующие на тела системы.

Выберем модель, аналогичную той, которая была использована в предыдущей задаче: грузы считаем материальными точками, подвешенными на невесомых и нерастяжимых нитях, перекинутых через невесомые абсолютно твердые цилиндрические блоки. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блоков, сопротивления воздуха и трения в оси блоков нет.

II. Запишем уравнения движения грузов в проекции на ось X выбранной системы координат:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (3.9)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \quad (3.10)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений грузов на ось X,  $T_1$  и  $T_2$  – модули сил, действующих на грузы со стороны нитей.

Обозначим координаты тел и подвижного блока  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_{\text{бл}}$  соответственно. Запишем условия нерастяжимости нитей (см. рис. 3.2) в виде:

$$x_1 + 2x_{\text{бл}} = \text{const}, \quad (3.11)$$

$$x_2 - x_{\text{бл}} = \text{const}. \quad (3.12)$$

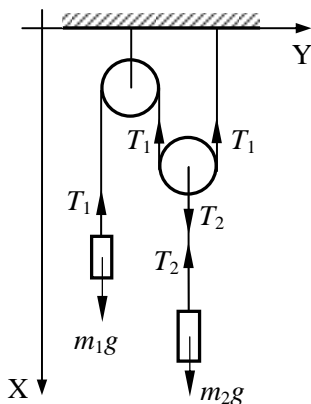


Рис. 3.2. Система тел.

Дважды дифференцируя (3.11) и (3.12) по времени, получим уравнение кинематической связи для ускорен ий грузов:

$$a_1 + 2a_2 = 0. \quad (3.13)$$

В рамках принятой модели силы натяжения нити с обеих сторон любого из блоков равны (см. решение задачи 3.3.1). Связь между силами натяжения разных нитей найдем из уравнения движения подвижного блока:

$$m_{\text{бл}} a_{\text{бл}} = T_2 - 2T_1, \quad (3.14)$$

где масса подвижного блока  $m_{\text{бл}} = 0$ .

III. Решая полученную систему уравнений (3.9), (3.10), (3.13) и (3.14), получаем выражения для искоемых величин:

$$a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad (3.15)$$

$$a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}, \quad (3.16)$$

$$T_1 = m_1(g - a_1) = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}, \quad (3.17)$$

$$T_2 = 2m_1(g - a_1) = \frac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим частные и предельные случаи решения задачи (3.15) – (3.18).

1. Если  $2m_1 = m_2$ , то грузы покоятся или движутся равномерно и прямолинейно:

$$a_1 = a_2 = 0.$$

При этом силы натяжения нитей равны:

$$T_2 = 2T_1 = 2m_1 g.$$

2. Если  $m_2 \gg m_1$ , то тело массой  $m_2$  будет падать с ускорением свободного падения:

$$a_2 = g,$$

а тело массой  $m_1$  подниматься вверх с удвоенным по модулю ускорением:

$$a_1 = -2g.$$

При этом:

$$T_2 = 2T_1 = 6m_1 g.$$

3. Если  $m_1 \gg m_2$ , то тело массой  $m_1$  будет падать с ускорением свободного падения:

$$a_1 = g,$$

а тело массой  $m_2$  подниматься вверх с ускорением

$$a_2 = -0,5g.$$

При этом:

$$T_2 = 2T_1 = \frac{3}{2}m_1g.$$

**Ответ:**  $a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}, \quad T_1 = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2},$

$$T_2 = \frac{6m_1m_2g}{4m_1 + m_2}.$$

**Задача 3.3.3.** (Прямая задача динамики). В системе тел, изображенных на рис. 3.3, известны массы бруска  $m$  и клина  $M$ , а также угол  $\alpha$  при основании клина. Массы блока и нити пренебрежимо малы, нить нерастяжима, трения нет. Найти ускорение клина  $A$ .

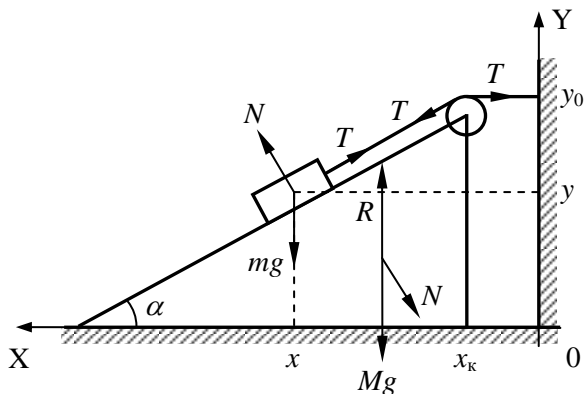


Рис. 3.3. Система координат и силы, действующие на клин и брусок.

### Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.3. Изобразим силы, действующие на тела системы:  $mg$  и  $Mg$  – силы тяжести, действующие на брусок и клин, соответственно;  $R$  – сила



реакции опоры, действующая на клин;  $N$  – сила взаимодействия бруска и клина. При этом учтем, что сила натяжения нити  $T$  постоянна вдоль всей ее длины в рамках принятых в условии задачи моделей тел системы, а силы взаимодействия бруска и клина равны по величине в соответствии с третьим законом Ньютона и направлены перпендикулярно поверхности их соприкосновения из-за отсутствия сил трения.

II. Запишем уравнения движения бруска и клина в проекциях на оси выбранной системы координат и учтем при этом, что клин может двигаться только вдоль оси  $X$  ( $A_y = 0$ ):

$$ma_x = N \sin \alpha - T \cos \alpha, \quad (3.19)$$

$$ma_y = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \quad (3.20)$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T, \quad (3.21)$$

$$0 = R - N \cos \alpha - Mg - T \sin \alpha. \quad (3.22)$$

Дополним систему уравнений (3.19) – (3.22) уравнением кинематической связи, которое следует из условия нерастяжимости нити:

$$x_k + \frac{x - x_k}{\cos \alpha} = const, \quad (3.23)$$

$$x_k + \frac{y_0 - y}{\sin \alpha} = const. \quad (3.24)$$

Дифференцируя (3.23) – (3.24) дважды по времени, получим:

$$A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \alpha} = 0, \quad (3.25)$$

$$A_x - \frac{a_y}{\sin \alpha} = 0. \quad (3.26)$$

III. Преобразуем систему уравнений (3.19) – (3.21), (3.25), (3.26), исключив из них проекции ускорения бруска  $a_x$  и  $a_y$ . Уравнение (3.22) не требуется для решения поставленной задачи (не требуется нахождения силы реакции опоры, действующей на клин  $R$ ). В результате получим следующую систему уравнений:

$$mA_x(1 - \cos \alpha) = N \sin \alpha - T \cos \alpha, \quad (3.27)$$

$$mA_x \sin \alpha = N \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \quad (3.28)$$

$$MA_x = -N \sin \alpha + T \cos \alpha - T. \quad (3.29)$$

Решив эту систему уравнений, определим проекцию ускорения клина на ось  $X$ :

$$A_x = -g \frac{\sin \alpha}{M/m + 2(1 - \cos \alpha)}. \quad (3.30)$$

Проанализируем полученное выражение для проекции ускорения клина  $A_x$ . Если масса клина значительно больше массы бруска ( $M \gg m$ ), то ускорение клина обращается в ноль. Неподвижным при этом остается и брусок. Если угол при основании клина равен нулю, то нет сил, которые могли бы вызвать движение клина – ускорение клина также равно нулю.

**Ответ:** 
$$A_x = -g \frac{\sin \alpha}{M/m + 2(1 - \cos \alpha)}.$$

**Задача 3.3.4.** (*Прямая задача динамики*). На доске массой  $M$  лежит брусок массой  $m$ . Коэффициент трения между доской и бруском равен  $\mu$ . Доска может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. К бруску прикладывается горизонтальная сила  $F$ , модуль которой зависит от времени по закону  $F = \alpha t$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Определить скорости бруска  $u(t)$  и доски  $V(t)$  спустя время  $t$  после начала действия силы.

### Решение

I. Проанализируем характер движения бруска и доски. При малой величине приложенной к бруску горизонтальной силы  $F$  доска и брусок будут двигаться с одинаковым ускорением, поскольку сила трения покоя не достигнет еще максимального значения. В некоторый момент времени  $t_0$  сила трения покоя достигнет максимального значения, равного силе трения скольжения, и в дальнейшем будет происходить скольжение бруска по доске, а, следовательно, ускорения тел системы будут изменяться по различным законам. Таким образом, решение задачи разбивается на два этапа: нахождение искомых скоростей бруска и доски при  $0 \leq t \leq t_0$  и при  $t > t_0$ . Необходимо также определить момент времени  $t_0$ , в который начнется скольжение бруска по доске.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.4, и изобразим силы, действующие на тела системы.

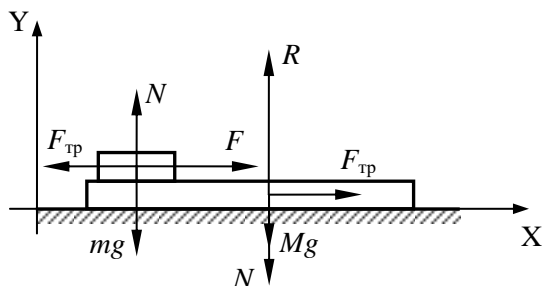


Рис. 3.4. Система координат и силы, действующие на доску и клин.

II. Запишем уравнения движения бруска и доски в проекциях на оси системы координат, одинаковые на первом и втором этапах движения, уравнение кинематической связи (при  $t \leq t_0$ ) и закон Амонтона – Кулона (при  $t > t_0$ ). Введем обозначения:  $a$  и  $A$  – проекции ускорений бруска и доски на ось  $X$ .

Брусок не скользит по доске	Брусок скользит по доске
$ma = F - F_{\text{тр}}$ ,	(3.31)
$0 = N - mg$ ,	(3.32)
$MA = F_{\text{тр}}$ ,	(3.33)
$0 = R - N - Mg$ .	(3.34)
Используем заданный в условии задачи закон изменения модуля силы $F$ со временем:	
$F = \alpha t$ .	(3.35)
До тех пор, пока сила трения покоя не достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения, брусок и доска двигаются с одинаковым ускорением:	В этом случае нет кинематической связи между ускорениями бруска и доски. Поскольку брусок скользит по доске для силы трения скольжения можно записать:
$a = A$ .	(3.36)
	$F_{\text{тр}} = \mu N$ .
	(3.37)

III. Решим полученные системы уравнений для каждого из рассматриваемых этапов движения тел рассматриваемой системы. Уравнение (2.45) не используется при решении поставленной зада-

чи, поскольку не требуется нахождения силы реакции опоры  $R$ , действующей на доску.

$a = A = \frac{\alpha t}{M + m}, \quad (3.38)$	$a = \frac{\alpha t - \mu mg}{m}, \quad (3.40)$
$F_{\text{тр}} = \frac{M\alpha t}{M + m}. \quad (3.39)$	$A = \frac{\mu mg}{M}, \quad (3.41)$
	$F_{\text{тр}} = \mu mg. \quad (3.42)$

В соответствии с законом Амонтона – Кулона (см. гл. 4) максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения:

$$\frac{M\alpha t_0}{M + m} = \mu mg. \quad (3.43)$$

Выражение (3.43) позволяет определить момент времени  $t_0$ , в который брусок начинает скользить по доске:

$$t_0 = \frac{\mu mg(M + m)}{M\alpha}. \quad (3.44)$$

Итак:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{при } t \leq t_0: \quad a = A = \frac{\alpha t}{M + m}, \\ \text{при } t > t_0: \quad a = \frac{\alpha t - \mu mg}{m} \text{ и } A = \frac{\mu mg}{M}. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Используя полученные выражения для ускорений тел системы, определим теперь законы изменения скоростей этих тел.

При  $t \leq t_0$  скорости бруска и доски меняются одинаковым образом и к моменту времени  $t$  будут равны:

$$v = V = \int_0^t a \, dt = \int_0^t \frac{\alpha t}{M + m} \, dt = \frac{\alpha t^2}{2(M + m)}. \quad (3.46)$$

При  $t > t_0$  скорость бруска будет равна

$$v = \frac{\alpha t_0^2}{2(M + m)} + \int_{t_0}^t \frac{\alpha t - \mu mg}{m} \, dt = ,$$

$$= \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\alpha(t^2 - t_0^2)}{2m} - \mu g(t - t_0), \quad (3.47)$$

а скорость доски –

$$V = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \int_{t_0}^t \frac{\mu mg}{M} dt = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\mu mg}{M}(t - t_0). \quad (3.48)$$

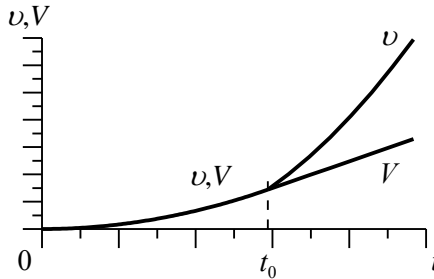


Рис. 3.5. Зависимости скоростей бруска и доски от времени.

На рис. 3.5 изображены полученные зависимости скоростей бруска и доски от времени.

**Ответ:** 
$$v = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\alpha(t^2 - t_0^2)}{2m} - \mu g(t - t_0),$$

$$V = \frac{\alpha t_0^2}{2(M+m)} + \frac{\mu mg}{M}(t - t_0)$$

**Задача 3.3.5.** (Прямая задача динамики). Найти закон движения и уравнение траектории материальной точки, движущейся в однородном и постоянном силовом поле с начальной скоростью  $v_0$ , направленной под произвольным углом  $\alpha$  к силе  $F$ .

### Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.6, при этом начало системы координат совпадает с положением материальной точки в начальный момент времени.

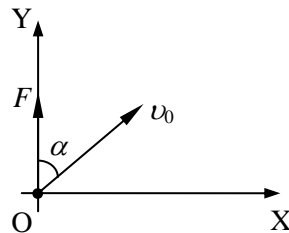


Рис. 3.6. Взаимное расположение вектора силы и начальной скорости материальной точки.

II. Запишем уравнения движения материальной точки в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (3.49)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F. \quad (3.50)$$

III. Проинтегрируем уравнения (3.49) и (3.50), используя начальные значения скорости  $v_x(0) = v_0 \sin \alpha$  и  $v_y(0) = v_0 \cos \alpha$ :

$$v_x(t) = v_0 \sin \alpha, \quad (3.51)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos \alpha + \frac{F}{m} t. \quad (3.52)$$

Интегрируя уравнения (3.51) и (3.52) с учетом начальных значений координат  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ , получаем закон движения материальной точки в координатной форме:

$$x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \quad (3.53)$$

$$y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{Ft^2}{2m}. \quad (3.54)$$

Исключив время из уравнений (3.53) и (3.54), получим уравнение траектории материальной точки – уравнение параболы:

$$y = \frac{F}{2m(v_0 \sin \alpha)^2} x^2 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot x \quad (3.55)$$

Таким образом, в однородном силовом поле материальная точка движется по параболе.

**Ответ:**  $x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{Ft^2}{2m},$

$$y = \frac{F}{2m(v_0 \sin \alpha)^2} x^2 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot x.$$

**Задача 3.3.6.** (Обратная задача динамики). На столе лежит доска массой  $M = 1$  кг, а на доске – груз массой  $m = 2$  кг. Какую силу  $F$  нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской равен  $\mu_1 = 0,25$ , а между доской и столом –  $\mu_2 = 0,5$ .

### Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 3.7 и изобразим силы, действующие на тела системы.

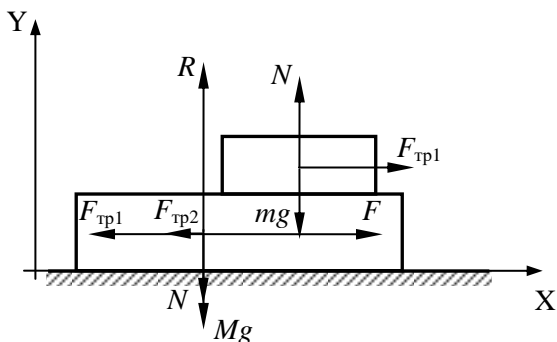


Рис. 3.7. Система координат и силы, действующие на доску с грузом.

На груз в процессе движения действуют сила тяжести  $mg$ , сила трения  $F_{\text{тр1}}$  и сила нормальной реакции доски  $N$ . К доске приложены горизонтальная сила  $F$ , сила тяжести  $Mg$ , сила нормальной реакции стола  $R$ , сила нормального давления груза  $N$  и силы трения со стороны груза и стола  $F_{\text{тр1}}$  и  $F_{\text{тр2}}$ . Силами сопротивления воздуха пренебрегаем.

Проанализируем характер движения тел системы. Если приложенная к доске сила  $F$  мала, то груз и доска движутся с одинаковым ускорением (или покоятся), а сила трения  $F_{\text{тр1}}$  между грузом и доской является силой трения покоя. С увеличением внешней силы  $F$  сила трения  $F_{\text{тр1}}$  возрастает и при некотором значении внешней силы  $F_0$  достигает своего максимального значения, равного силе трения скольжения. Это значение силы  $F_0$  и требуется определить для решения задачи.

II. Запишем уравнения движения груза и доски в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$ma = F_{\text{тр1}}, \quad (3.56)$$

$$0 = N - mg, \quad (3.57)$$

$$MA = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}}, \quad (3.58)$$

$$0 = R - N - Mg. \quad (3.59)$$

Здесь  $a$  и  $A$  – проекции ускорений груза и доски на ось  $X$ .

Используем закон Амонтона – Кулона, описывающий свойство силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр2}} = \mu_2 R. \quad (3.60)$$

Значение силы  $F_0$ , действующей на груз, при котором начнется его скольжение по доске, можно определить из условий:

$$a = A, \quad (3.61)$$

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 N. \quad (3.62)$$

III. Решим полученную систему уравнений (3.56) – (3.62) относительно  $F_0$ :

$$F_0 = (M + m)a + F_{\text{тр2}} = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2). \quad (3.63)$$

Таким образом, для того, чтобы доска выскользнула из-под груза, необходимо приложить к доске силу  $F$ , удовлетворяющую условию:

$$F \geq F_0 = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2). \quad (3.64)$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем:

$$F \geq F_0 = 22,05 \text{ Н}. \quad (3.65)$$

**Ответ:**  $F \geq F_0 = (M + m)g(\mu_1 + \mu_2) = 22,05 \text{ Н}$

**Задача 3.3.7.** (Обратная задача динамики). Найти модуль и направление силы  $F$ , действующей на частицу массой  $m$  при ее движении в плоскости  $XY$  по эллиптической траектории. Закон движения частицы в координатной форме имеет вид  $x(t) = A \sin(\omega t)$ ,  $y(t) = B \cos(\omega t)$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  – постоянные величины.

### Решение

I. Используем декартову систему координат, как предложено в условии задачи.

II. Запишем уравнение движения частицы в проекциях на оси заданной системы координат:



$$ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad (3.66)$$

$$ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y. \quad (3.67)$$

Используем заданный в условии задачи закон движения:

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (3.68)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t). \quad (3.69)$$

III. Дифференцируя (3.68) и (3.69) дважды по времени, получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t), \quad (3.70)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -B\omega^2 \cos(\omega t). \quad (3.71)$$

Подставляя (3.70) и (3.71) в (3.66) и (3.67), получаем закон изменения проекций силы  $\mathbf{F}$ , действующей на частицу при ее движении в плоскости XY по эллиптической траектории:

$$F_x(t) = -mA\omega^2 \sin(\omega t), \quad (3.72)$$

$$F_y(t) = -mB\omega^2 \cos(\omega t). \quad (3.73)$$

Используя (3.72) и (3.73), получаем выражение для модуля силы  $\mathbf{F}$ :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)}. \quad (3.74)$$

Запишем закон изменения силы в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= F_x(t)\mathbf{i} + F_y(t)\mathbf{j} = -mA\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{i} - mB\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{j} = \\ &= -m\omega^2 \mathbf{r}(t), \end{aligned} \quad (3.75)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор частицы относительно начала координат. Следовательно, сила  $\mathbf{F}$ , действующая на частицу, направлена противоположно радиус-вектору частицы в любой момент времени.

**Ответ:**  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)}$ , сила  $\mathbf{F}$ , действующая на частицу, направлена противоположно радиус-вектору частицы в любой момент времени.

**Задача 3.3.8.** (Обратная задача динамики). Один из концов тонкого гибкого каната массой  $m$  приподнят над горизонтальной шероховатой поверхностью на высоту  $H$ . Длина соприкасающейся с горизонтальной поверхностью части каната, равна  $l$  (см. рис. 3.8). Коэффициент трения скольжения каната о горизонтальную поверхность равен  $\mu$ . Канат тянут с постоянной горизонтальной скоростью (верхний конец каната все время остается на высоте  $H$ ). Найдите длину той части каната  $\Delta l$ , которая не касается поверхности.

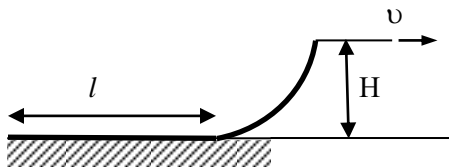


Рис.3.8. Гибкий канат, движущийся со скоростью  $v$

### Решение

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений. На рис. 3.9 выделим характерные части каната: горизонтальную, соприкасающуюся с землей и не касающуюся земли. Расставим силы, действующие на эти части. Поскольку движение происходит с постоянной скоростью, сумма сил, действующих на каждую часть равна нулю.

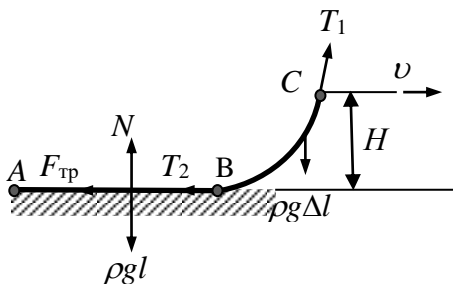


Рис. 3.9. Составные части каната и силы, действующие на них.

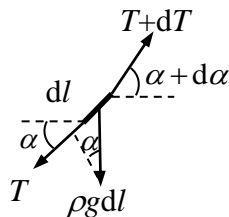


Рис. 3.10. Элемент каната и действующие на него силы.

II, III. Введем линейную плотность каната  $\rho = \frac{m}{L}$ . Воспользуемся условием равенства нулю суммы сил, действующих и на канат, и на его составные части. В частности, для части BC, не касающейся земли можно записать:

Сила  $T_1$ , удерживающая верхний конец каната (точка С) на высоте  $H$ , равна

$$T_1 = \sqrt{(\rho g \Delta l)^2 + T_2^2}, \quad (3.76)$$

где  $T_2$  – сила, действующая на «висящую» часть каната  $BC$  со стороны части каната  $AB$ , лежащей на поверхности.

Выделим малый элемент длиной  $dl$  висящей части каната (рис. 3.10). Запишем для него условие равновесия. На выделенный элемент действуют сила  $T$ , направленная «вниз» под углом  $\alpha$  к горизонтали, сила  $T + dT$ , направленная «вверх» под углом  $\alpha + d\alpha$  к горизонтали, и сила тяжести  $\rho g dl$ . Записывая условие равенства нулю суммы этих сил в проекции на направление элемента  $dl$ , получаем:

$$(T + dT) \cos(d\alpha) = T + \rho g dl \sin \alpha. \quad (3.77)$$

Так как угол  $d\alpha$  бесконечно мал, то  $\cos(d\alpha) \approx 1$ , и

$$T + dT = T + \rho g dl \sin \alpha. \quad (3.78)$$

Отсюда

$$dT = \rho g dl \sin \alpha = \rho g dh, \quad (3.79)$$

где  $dh$  – проекция элемента  $dl$  на вертикаль. Тогда

$$T_2 = T_1 - \rho g H. \quad (3.80)$$

Условие равновесия горизонтальной части каната:

$$N = \rho g l, \quad (3.81)$$

$$T_2 = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \rho g l. \quad (3.82)$$

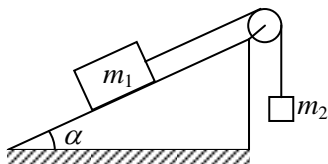
Решая систему уравнений (3.76), (3.80) и (3.82), получим:

$$\Delta l = \sqrt{H(H + 2\mu l)}. \quad (3.83)$$

**Ответ:**  $\Delta l = \sqrt{H(H + 2\mu l)}$ .

### 3.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.4.1.** На неподвижном клине с углом при основании  $\alpha = 30^\circ$  находится тело массой  $m_1$ , к которому прикреплена легкая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, жестко связанный с клином. К другому концу нити прикреплено тело массой  $m_2$ , не касающееся клина (см. рис.). Отношение

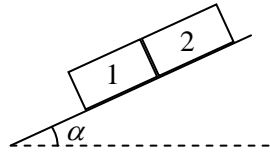


масс тел  $\eta = m_2/m_1 = 2/3$ . Коэффициент трения между первым телом и плоскостью равен  $\mu = 0.1$ . Найти величину и направление ускорения второго тела.

*Ответ:* ускорение второго тела направлено вниз и равно:

$$a_2 = g(\eta - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)/(\eta + 1) = 0.05g.$$

**Задача 3.4.2.** На наклонную поверхность, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом, положили два бруска 1 и 2 (см. рис.). Массы брусков равны  $m_1$  и  $m_2$ , коэффициенты трения между поверхностью и этими брусками –  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , причем  $\mu_1 > \mu_2$ . Найти силу давления одного бруска на другой, возникающую в процессе их скольжения, и углы  $\alpha$ , при которых будет скольжение брусков.



*Ответ:*  $F = \frac{(\mu_1 - \mu_2)m_1m_2g \cos \alpha}{m_1 + m_2}$ ;  $\alpha > \arctg \frac{\mu_1m_1 + \mu_2m_2}{m_1 + m_2}$ .

**Задача 3.4.3.** Материальная точка массой  $m$  движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом  $R$ . Найти модуль силы давления материальной точки на стенку цилиндра в тот момент, когда ее скорость составляет угол  $\alpha$  с горизонтом и по модулю равна  $v_0$ .

*Ответ:*  $F = (mv_0^2/R)\cos^2 \alpha$ .

**Задача 3.4.4.** Частица движется вдоль оси  $X$  по закону  $x = \alpha t^2 - \beta t^3$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные постоянные. В момент времени  $t = 0$  сила, действующая на частицу, равна  $F_0$ . Найти модули силы в точке поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке  $x = 0$ .

*Ответ:*  $-F_0, -2F_0$ .

**Задача 3.4.5.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массой  $M$  с углом при основании  $\alpha$ . Тело массой  $m$  скользит по наклонной поверхности клина. Коэффициент трения между клином и телом равен  $\mu$ . Найти горизонтальные проекции ускоре-

ний тела и клина, а также силы  $N$  и  $R$ , с которыми тело давит на клин и клин на горизонтальную поверхность.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } a_m &= \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}, \\ a_M &= -\frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}, \\ N &= \frac{mg}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}, \\ R &= \left( \frac{m(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{m}{M} \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu)} + M \right) g. \end{aligned}$$

**Задача 3.4.6.** Нить перекинута через легкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплен груз массой  $M$ , а по другой свисающей части нити скользит муфточка массой  $m$  с постоянным ускорением  $a'$  относительно нити. Найти силу трения, с которой нить действует на муфточку.

$$\text{Ответ: } F_{\text{тр}} = (2g - a')mM / (m + M).$$

**Задача 3.4.7.** Пуля, пробивая доску толщиной  $h$ , изменяет свою скорость от  $v_0$  до  $v$ . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

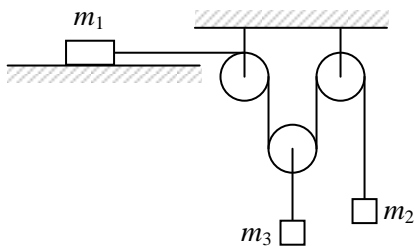
$$\text{Ответ: } t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 \cdot v \ln \left( \frac{v_0}{v} \right)}.$$

**Задача 3.4.8.** Через блок, ось которого горизонтальна, перекинута нерастяжимая веревка длиной  $l$ . За концы веревки держатся две обезьяны одинаковой массой, находящиеся на одинаковом расстоянии  $l$  от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью  $v$ , а другая со скоростью  $2v$ . Через какие интервалы

времени каждая из обезьян достигнет блока? Массами блока и веревки пренебречь.

$$\text{Ответ: } t_1 = t_2 = \frac{2l}{3v}.$$

**Задача 3.4.9.** Система трех тел, связанных между собой с помощью двух нитей и трех блоков, изображена на рисунке. Два тела подвешены на нитях, а третье находится на горизонтальной поверхности. Оси крайних блоков, в отличие от оси среднего блока, закреплены (см. рис.). Считая заданными массы  $m_1$  и  $m_2$ , определить массу  $m_3$ , при которой ось среднего блока будет оставаться неподвижной. Трением и массами блоков и нитей пренебречь.



$$\text{Ответ: } m_3 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 3.4.10.** Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения  $\mu$  между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом  $R = 200$  м на скорости  $v = 100$  км/ч?

$$\text{Ответ: } \mu = \frac{v^2}{Rg} \approx 0.4.$$

## ГЛАВА 4

### ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИЛ

#### 4.1. Теоретический материал

##### А. Гравитационные силы

**Закон всемирного тяготения.** Материальные точки притягиваются друг к другу с силами  $F_{21}$  и  $F_{12}$  (см. рис. 4.1), модули которых пропорциональны произведению их масс и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$F_{21} = -F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12}. \quad (4.1)$$

Здесь  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – гравитационная постоянная,  $r_{12} = r_2 - r_1$ .

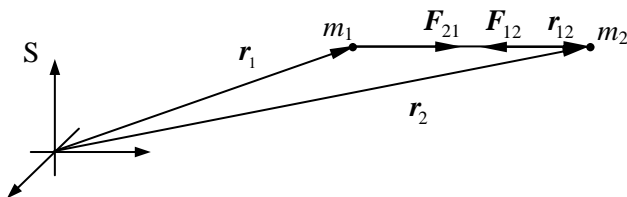


Рис. 4.1. Ориентация сил гравитационного взаимодействия двух материальных точек.

Силы гравитационного взаимодействия сферически симметричных тел, как нетрудно показать, определяются выражением (4.1), в котором  $r_{12}$  – радиус-вектор центра второго тела относительно центра первого тела.

**Сила тяжести, действующая на материальную точку,** – сумма силы гравитационного притяжения Земли (или любого другого космического объекта) и центробежной силы инерции (см. Главу 9), действующей на материальную точку в системе отсчета, связанной с Землей.

**Сила тяжести, действующая на тело,** – сумма сил тяжести, действующих на материальные точки этого тела.

В однородном поле силы тяжести вблизи поверхности Земли сила тяжести  $F_T$  равна произведению массы тела  $m$  на ускорение

центра масс тела при свободном падении (**ускорение свободного падения**)  $g$  относительно Земли:  $F_T = mg$ .

**Вес тела** – сила, с которой тело, находящееся в поле сил тяжести, действует на неподвижную относительно него опору или подвес, препятствующие свободному падению тела.

### Б. Упругие силы

Если после прекращения внешнего воздействия деформированное тело восстанавливает свою форму и размеры, то деформация называется упругой.

**Закон Гука.** При малых упругих деформациях величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее силы.

В частности, при деформации растяжения (сжатия) упругого стержня (пружины, резинового шнура) деформация стержня пропорциональна величине вызывающей ее силы, действующей вдоль стержня:

$$\Delta l = \frac{1}{k} F. \quad (4.2)$$

Здесь  $k$  – **коэффициент жесткости (упругости)** стержня,  $\Delta l = l - l_0$  – удлинение стержня,  $l$  и  $l_0$  – длина стержня в деформированном и недеформированном состояниях (см. рис. 4.2).

Если сила, действующая на стержень, направлена противоположно указанному на рис. 4.2 направлению, то упругий стержень испытывает сжатие. При этом  $\Delta l < 0$  и  $F$  в формуле (4.2) следует считать проекцией силы  $F$  на ось  $X$  системы координат, изображенной на рис. 4.2.

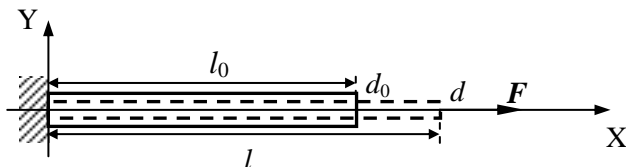


Рис. 4.2. Удлинение стержня под действием продольной силы.

При деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением относительное



удлинение стержня  $\varepsilon$  пропорционально нормальному напряжению  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (4.3)$$

Здесь  $E$  – **модуль Юнга** материала, из которого сделан стержень,

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  – относительное удлинение стержня,  $\sigma = \frac{F}{S}$  – **нормальное**

**напряжение**,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

Заметим, что для однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением коэффициент жесткости (упругости) этого стержня связан с модулем Юнга соотношением:

$$k = \frac{S}{L} E. \quad (4.4)$$

В случае растяжения (сжатия) стержня уменьшаются (увеличиваются) его поперечные размеры. При этом отношение относительного поперечного сжатия стержня к его относительному удлинению зависит только от материала стержня и называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Здесь  $\mu$  – **коэффициент Пуассона**,  $\varepsilon_{\perp} = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$  – относительное изменение поперечных размеров стержня,  $d$  и  $d_0$  – поперечный линейный размер стержня в деформированном и недеформированном состояниях (см. рис. 4.2).

При деформации стержня возникают внутренние упругие силы  $F_{\text{уп}}$ , действующие между его частями, которые стремятся вернуть стержень в недеформированное состояние. Напряжение упругих сил равно

$$\sigma_{\text{уп}} = \frac{F_{\text{уп}}}{S}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим слой стержня с координатами границ  $x$  и  $x + dx$  вдоль стержня (см. рис. 4.3).

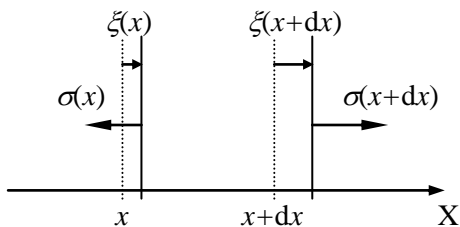


Рис. 4.3. Смещение границ выделенного слоя стержня.

В результате действия внутренних упругих сил возникает смещение левой  $\xi(x)$  и правой  $\xi(x+dx)$  границ выделенного слоя. Тогда **относительная продольная деформация**  $\varepsilon$  этого слоя равна

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi'_x. \quad (4.7)$$

Закон Гука в этом случае принимает вид

$$\sigma_{\text{уп}}(x) = E\varepsilon = E\xi'_x. \quad (4.8)$$

В случае деформации слоя изменяются его поперечные размеры. При этом отношение поперечной деформации к продольной определяется коэффициентом Пуассона в соответствии с (4.5).

При ускоренном движении стержня под действием внешней силы, вызывающей его деформацию, возникают неоднородные вдоль стержня напряжения упругих сил. В этом случае возникающие неоднородные деформации по-прежнему определяются выражениями (4.8) и (4.5).

### В. Силы трения

**Сила трения** – составляющая силы непосредственного взаимодействия тел при соприкосновении вдоль плоскости соприкосновения.

**Сила нормального давления (реакции опоры)** – составляющая силы взаимодействия тел при непосредственном соприкосновении вдоль направления нормали к плоскости соприкосновения.

**Силы вязкого трения**  $F_{\text{в}}$  – силы трения, возникающие при движении тела в вязкой (жидкой или газообразной) среде.

При малой величине скорости  $v$  движения тела относительно среды

$$F_{\text{в}} = -k_{\text{в}} v, \quad (4.9)$$

где  $k_{\text{в}}$  – коэффициент вязкого трения.

Сила вязкого трения покоя равна нулю:  $F_{\text{вп}} = 0$ .

**Силы сухого трения**  $F_{\text{с}}$  – силы трения, возникающие при непосредственном соприкосновении твердых тел.

**Силы трения покоя**  $F_{\text{п}}$  – силы сухого трения, возникающие в отсутствие относительного движения взаимодействующих тел.

**Сила трения скольжения**  $F_{\text{ск}}$  – сила сухого трения, возникающая при относительном движении взаимодействующих тел.

**Закон Амонтона-Кулона** – эмпирический закон, описывающий свойства сил сухого трения:

1) модуль силы сухого трения покоя может принимать значения от нуля до некоторого своего максимального значения:  $0 \leq F_{\text{п}} \leq F_{\text{макс}}$ ;

2) модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя:  $F_{\text{ск}} = F_{\text{макс}}$ ;

3) модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N, \quad (4.10)$$

где  $\mu$  – коэффициент (силы сухого) трения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей тел;

4) сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости относительного движения тел  $v_{\text{отн}}$ :

$$F_{\text{ск}} \uparrow \downarrow v_{\text{отн}}. \quad (4.11)$$

**Силовое поле** – область пространства, где действуют силы данной природы, в общем случае зависящие как от времени, так и от координаты и скорости движения материальной точки –  $F(t, r, v)$ .

## 4.2. Основные типы задач и методы их решения

В данной главе рассматриваются два типа задач: прямая и обратная задачи динамики.

**Прямая задача динамики** – найти закон движения тела или системы тел, если известны силы, действующие на эти тела.

**Обратная задача динамики** – найти действующие на тело или систему тел силы, если известны законы движения этих тел.

Большинство задач содержат в себе элементы как прямой, так и обратной задач динамики. Как правило, одна из этих задач имеет основное, другая – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

Для решения рассматриваемых типов задач необходимо придерживаться схемы решения задач динамики с помощью законов Ньютона.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат для всех тел системы.
2. Использовать третий закон Ньютона, если это не было сделано ранее в п. 3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил:
  - а) закон всемирного тяготения,
  - б) закон Гука,
  - в) закон Амонтона-Кулона и т.д.
4. Записать уравнения кинематических связей.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).

3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – II.1 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах, действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 (в том числе II.3.a – II.3.в) можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

### 4.3. Примеры решения задач

**Задача 4.3.1.** (*Силы трения*). Тело небольших размеров движется по поверхности неподвижного клина с углом при основании  $\alpha$ . В начальный момент времени скорость тела равнялась  $v_0$  и составляла угол  $\varphi_0$  с ребром клина (см. рис. 4.4).

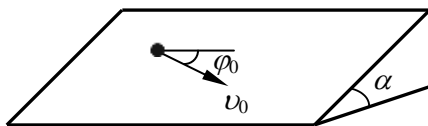


Рис. 4.4. Тело, движущееся по наклонной плоскости.

Коэффициент трения тела о поверхность клина  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ . Найти установившуюся скорость скольжения тела.

#### Решение

I. Выберем систему координат так, как показано на рис. 4.5a (вид сбоку) и рис. 4.5б (вид сверху на поверхность клина). Ось X направим вдоль наклонной плоскости параллельно ребру клина (рис. 4.5б). При этом ось Y направим по наклонной плоскости перпендикулярно ребру клина, а ось Z перпендикулярно наклонной поверхности клина (рис. 4.5a).

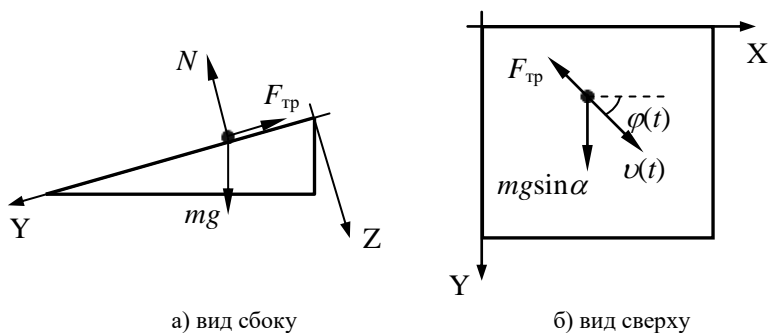


Рис. 4.5. Выбранная система отсчета и силы, действующие на материальную точку.

На рис. 4.5а и 4.5б изображены также силы, действующие на тело (в соответствии с условием задачи его можно считать материальной точкой) в процессе движения: сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и сила трения скольжения  $F_{\text{тр}}$ .

Скорость тела  $v(t)$  составляет с осью  $X$  угол  $\varphi(t)$  (см. рис. 4.5б), который является функцией времени.

II. Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранные оси системы координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_{\text{тр}} \cos \varphi, \quad (4.12)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \sin \varphi, \quad (4.13)$$

$$0 = -N + mg \cos \alpha. \quad (4.14)$$

Используем закон Амонтона-Кулона (см. п. 4.1.В) для силы трения скольжения и учтем заданную в условии задачи связь коэффициента трения  $\mu$  с углом  $\alpha$  при основании наклонной плоскости:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \operatorname{tg} \alpha \cdot N. \quad (4.15)$$

Запишем тригонометрические функции угла  $\varphi$ , выразив их через проекции скорости тела:

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \varphi = \frac{v_y}{v}. \quad (4.16)$$

III. Получена полная система уравнений (4.12) – (4.16) для определения проекций скорости тела на оси выбранной системы координат, решить которую в общем виде достаточно сложно из-за наличия в ней двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Однако нет необходимости находить закон изменения скорости тела. По условию задачи требуется определить установившуюся скорость тела, т.е. значение скорости в то время, когда сумма сил, действующих на тело, станет равной нулю.

Рассмотрим изменение характера движения тела со временем. В плоскости движения на тело действуют две силы: сила трения скольжения и проекция силы тяжести. Из (4.14) и (4.15) получим выражение для силы трения:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha . \quad (4.17)$$

Как видим, модуль силы трения равен величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Действующие на тело силы будут поворачивать вектор скорости тела до тех пор, пока он не совпадет по направлению с осью  $Y$ . Следовательно, ускорение обратится в ноль, когда сила трения будет направлена противоположно составляющей силы тяжести в плоскости движения тела. Дальнейшее движение будет происходить с постоянной скоростью  $v_{\text{уст}}$ , направленной вдоль оси  $Y$ .

Таким образом, достаточно найти уравнение, связывающее проекцию скорости тела на ось  $Y$  с модулем его скорости. Для этого преобразуем полученную систему уравнений (4.12) – (4.16) к виду:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{v} g \sin \alpha , \quad (4.18)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left(1 - \frac{v_y}{v}\right) g \sin \alpha . \quad (4.19)$$

Производную от модуля скорости по времени представим в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) = \frac{v_x}{v} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_y}{v} \cdot \frac{dv_y}{dt} . \quad (4.20)$$

Подстановка (4.18) и (4.19) в (4.20) приводит к уравнению:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dv_y}{dt} . \quad (4.21)$$

Интегрируя (4.21) с учетом начальных условий ( $v(0) = v_0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ ), получаем:

$$v = -v_y + v_0(1 + \sin \varphi_0). \quad (4.22)$$

Подставляя  $v = v_y = v_{\text{уст}}$  в (4.22), находим искомый модуль скорости установившегося движения:

$$v_{\text{уст}} = \frac{v_0}{2}(1 + \sin \varphi_0). \quad (4.23)$$

Проанализируем полученное выражение для установившейся скорости в двух частных случаях.

Если  $\varphi_0 = \pi/2$  (начальная скорость тела направлена вниз по наклонной плоскости), то  $v_{\text{уст}} = v_0$ . Следовательно, движение тела сразу происходит с постоянной скоростью, поскольку действующие на него силы скомпенсированы.

При  $\varphi_0 = -\pi/2$  скорость установившегося движения равна  $v_{\text{уст}} = 0$ . Начальная скорость, направленная вверх по наклонной плоскости, приводит к равнозамедленному движению. При этом и проекция силы тяжести, и сила трения скольжения направлены противоположно скорости. Через некоторое время скорость тела обращается в ноль. Сила трения становится силой трения покоя и меняет направление на противоположное. Движения вниз по наклонной плоскости не происходит, т.к. максимальное значение силы трения покоя в условиях данной задачи совпадает по модулю со значением проекции силы тяжести на наклонную плоскость.

**Ответ:**  $v_{\text{уст}} = \frac{v_0}{2}(1 + \sin \varphi_0)$ .

**Задача 4.3.2.** (Силы трения). Стальной шарик радиуса  $r$  начинает двигаться в сосуде, заполненном глицерином, под действием силы тяжести. Найти зависимость скорости шарика от времени  $\nu(t)$ , а также определить скорость установившегося движения шарика  $v_{\text{уст}}$ . Коэффициент вязкого трения в глицерине равен  $\eta$ , плотность глицерина –  $\rho_1$ , плотность стали –  $\rho_2$ . Считать, что сила вязкого трения определяется формулой Стокса:  $F_B = 6\pi r \nu \eta$ .



### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с сосудом, так, как показано на рис. 4.6. Начало координат совместим с положением шарика в момент начала его движения. В соответствии с условием задачи начальная скорость шарика равна нулю:  $v(0) = 0$ .

II. Запишем уравнение движения шарика в проекциях на ось X системы координат:

$$ma = mg - F_B - F_A, \quad (4.24)$$

где  $F_B$  – сила вязкого трения, а  $F_A$  – сила Архимеда.

Используем закон Архимеда и формулу Стокса, описывающие свойства этих сил:

$$F_A = \rho_1 g V, \quad (4.25)$$

$$F_B = 6\pi r \nu \eta. \quad (4.26)$$

Здесь  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  – объем шарика.

Выразим также массу шарика через его плотность:

$$m = \rho_2 V. \quad (4.27)$$

III. Подставляя (4.25) – (4.27) в уравнение движения (4.24), получаем:

$$\rho_2 V \frac{dv}{dt} = (\rho_2 - \rho_1) V g - 6\pi r \nu \eta. \quad (4.28)$$

Для решения уравнения (4.28) приведем его к виду

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g - \frac{6\pi r \eta}{\rho_2 V} v = A - Bv \quad (4.29)$$

и сделаем замену переменных:

$$A - Bv = z. \quad (4.30)$$

Дифференцируя (4.30) по времени, получаем:

$$-B \frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt}. \quad (4.31)$$

С учетом (4.31) выражение (4.29) принимает следующий вид:

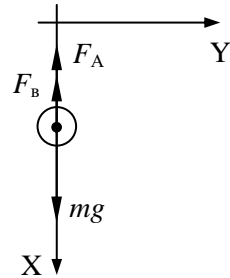


Рис. 4.6. Направления осей выбранной системы координат.

$$\frac{dz}{dt} = -Bz. \quad (4.32)$$

Решим полученное уравнение методом разделения переменных с учетом начального значения скорости  $v(0) = 0$ :

$$z = Ae^{-Bt}. \quad (4.33)$$

Используя формулу (4.30), вернемся к старой переменной  $v$ :

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}). \quad (4.34)$$

Подставив значения констант  $A$  и  $B$  из (4.29), а также значение  $V$ , получим выражение для скорости шарика:

$$v = (\rho_2 - \rho_1)g \frac{2r^2}{9\eta} \left( 1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2\rho_2}t\right) \right). \quad (4.35)$$

При  $t \gg \frac{2r^2\rho_2}{9\eta}$  скорость движения шарика практически не изменяется и равна

$$v_{\text{уст}} = (\rho_2 - \rho_1)g \frac{2r^2}{9\eta}. \quad (4.36)$$

**Ответ:**  $v_{\text{уст}} = (\rho_2 - \rho_1)g \frac{2r^2}{9\eta}.$

**Задача 4.3.3. (Силы трения).** Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (рис. 4.7). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус кривизны забора  $R$ , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора  $\mu$ . Размеры бруска много меньше  $R$ .

### Решение

I. Выберем произвольную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с забором. Изобразим на рисунке тангенци-

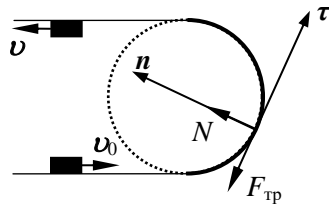


Рис. 4.7. Траектория движения бруска.

альную ось, заданную ортом  $\tau$ , направленную вдоль скорости движения бруска, и нормальную ось, заданную ортом  $n$ , направленную к центру кривизны траектории перпендикулярно скорости (см. теоретический материал в Главе 3).

II. Запишем уравнения движения бруска относительно инерциальной системы отсчета, жестко связанной с забором, в проекциях на тангенциальную и нормальную оси:

$$ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тр}}, \quad (4.37)$$

$$ma_n = m \frac{v^2}{R} = N. \quad (4.38)$$

Воспользуемся законом Амонтона-Кулона для силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (4.39)$$

III Из (4.37) – (4.39) получим уравнение для определения модуля скорости бруска:

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}. \quad (4.40)$$

Решая уравнение (4.40) методом разделения переменных, получим:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R} dt, \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\mu}{R} t + C. \quad (4.42)$$

Константу  $C$  в (4.42) определим из начальных условий ( $v(0) = v_0$ ):  $C = \frac{1}{v_0}$ .

Таким образом, модуль скорости бруска в момент времени  $t$ , когда брусок еще движется вдоль забора, определяется следующим образом:

$$v = v_0 \frac{1}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t}. \quad (4.43)$$

Заметим, что для любого момента времени  $t$  и при любой, не равной нулю, начальной скорости  $v_0$ , скорость бруска  $v > 0$ . Это

означает, что брусок не остановится, а обязательно пройдет всю область, ограниченную забором, поскольку с уменьшением скорости движения бруска уменьшается и сила трения скольжения между бруском и забором.

Путь, пройденный телом за время  $dt$  с момента времени  $t$ , при движении вдоль забора, равен:

$$ds = v dt = v_0 \frac{1}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t} dt. \quad (4.44)$$

Путь, пройденный телом за время  $t$  движения вдоль забора, получим интегрированием (4.45) по времени:

$$s = \frac{R}{\mu} \ln \left( 1 + \frac{\mu v_0}{R} t \right). \quad (4.45)$$

Для определения времени, через которое брусок покинет область, ограниченную забором преобразуем (4.45) к виду:

$$t = \frac{R}{\mu v_0} \left( e^{\frac{\mu}{R} s} - 1 \right). \quad (4.46)$$

Поскольку длина забора  $s = \pi R$  искомое время движения бруска вдоль забора  $t_0$  равно:

$$t_0 = \frac{R}{\mu v_0} (e^{\pi \mu} - 1). \quad (4.47)$$

При малых значениях коэффициента трения ( $\pi \mu \ll 1$ ) время движения бруска  $t_0$  будет равно

$$t_0 = \frac{R}{\mu v_0} (e^{\pi \mu} - 1) = \frac{R}{\mu v_0} ((1 + \pi \mu + \dots) - 1) \cong \frac{\pi R}{v_0}. \quad (4.48)$$

Ответ:  $t_0 \cong \frac{\pi R}{v_0}$

**Задача 4.3.4.** (Силы, возникающие при деформациях). Кольцо радиуса  $R = 25$  см, сделанное из тонкой свинцовой проволоки, лежит на горизонтальном гладком столе. Кольцо привели во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Оценить частоту вращения, при которой кольцо разорвется.

### Решение

I. Выберем лабораторную систему отсчета, начало которой совпадает с центром кольца, см. рис. 4.8.а. При вращении в кольце будут возникать напряжения, а каждый его элемент будет двигаться с центростремительным ускорением.

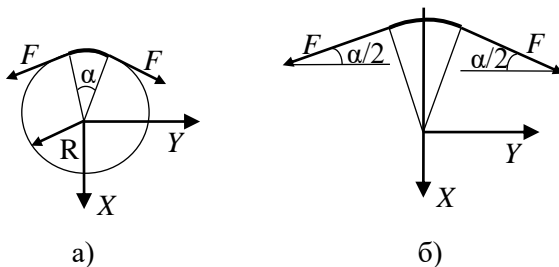


Рис. 4.8 Силы упругости, действующие на элемент кольца.

Кольцо разорвется, если напряжение в произвольном сечении будет превышать предел прочности. Для свинца он лежит в диапазоне  $\sigma_{np} = 12 \div 13$  МПа. Для определенности будем считать  $\sigma_{np} = 12.0$  МПа.

II, III. Выделим малый элемент кольца массой  $\delta m$  (дуга, опирающаяся на малый угол  $\alpha$ ) так как показано на рис. 4.8а. На выделенный элемент действуют две силы натяжения  $F$  (см. рис. 4.8б), результирующая которых является причиной движения элемента кольца по окружности с ускорением  $a_{цс} = \omega^2 R$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения кольца.

Уравнение движения выделенного элемента кольца имеет вид (см. рис. 4.8.б):

$$\delta m \cdot \omega^2 R = 2F \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4.49)$$

Пусть площадь сечения проволоки, из которой сделано кольцо, равна  $S$ , тогда напряжение  $\sigma$ , возникающее в проволоке, определяется силой натяжения  $F$  и равно

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (4.50)$$

Масса  $\delta m$  выделенного элемента равна

$$\delta n = \rho S R \alpha, \quad (4.51)$$

где  $\rho$  - плотность свинца.

Решая систему уравнений (4.49) - (4.51) получаем

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\sigma_{np}}{\rho}} \quad (4.52)$$

Искомая частота вращения равна

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\sigma_{np}}{\rho}} = \frac{1}{6.28 \cdot 0.25} \sqrt{\frac{12 \cdot 10^6}{11.3 \cdot 10^3}} \approx 20.8 \frac{\text{об}}{\text{с}} \quad (4.53)$$

$$\text{Ответ: } n = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\sigma_{np}}{\rho}} \approx 20.8 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

**Задача 4.5.** (Закон Гука). Стальная проволока диаметром  $d = 1.0$  мм натянута в горизонтальном положении между двумя зажимами  $A$  и  $B$ , находящимися на расстоянии  $l = 2.0$  м. Натяжение проволоки равно  $F = 10$  Н. К середине проволоки подвесили груз. Определить массу груза  $m$ , если точка  $C$  (см. рис.4.9) опустилась на  $h = 1$  см.

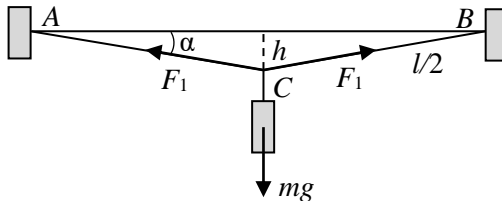


Рис. 4.9 Геометрия системы.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи  $h \ll l$ , а значит относительное удлинение проволоки также будет малым, поэтому для дальнейшего анализа можно воспользоваться законом Гука.

II. В положении равновесия сумма сил, действующих на груз, равна нулю. В частности, вдоль вертикальной оси (см. рис.4.9)

$$mg = 2F_1 \sin \alpha, \quad (4.54)$$

где  $F_1$  - сила натяжения струны после того, как к ней подвесили груз.

Используя закон Гука, запишем связь между силой натяжения  $F_1$  и относительным удлинением

$$F_1 = ES \frac{\Delta l}{l} = ES \frac{(\Delta l)_0 + (\Delta l)_1}{l} = ES \frac{(\Delta l)_1}{l} + F, \quad (4.55)$$

здесь  $(\Delta l)_0$  - начальное растяжение проволоки под действием силы  $F$ ,  $(\Delta l)_1$  - дополнительное растяжение проволоки после подвешивания груза.

Для определения  $(\Delta l)_1$  воспользуемся теоремой Пифагора и условием малости деформаций

$$\frac{(\Delta l)_1}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{l}{2} \approx \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \right) - \frac{l}{2} = \frac{h^2}{l} \quad (4.56)$$

III. Система уравнений (4.54)-(4.56) является полной. Поскольку по условию задачи  $\frac{h}{l} \ll 1$ , то  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Используя (4.54) запишем выражение для силы натяжения проволоки после того, как к ней подвесили груз

$$F_1 = \frac{mg}{2} \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{mg}{2} \frac{l}{2h} = \frac{mgl}{4h}. \quad (4.57)$$

Для определения неизвестной массы груза подставим (4.56) и (4.57) в (4.55)

$$\frac{mgl}{4h} = ES \frac{2h^2}{l^2} + F. \quad (4.58)$$

Отсюда получаем окончательное выражение для массы груза:

$$\begin{aligned} m &= \frac{4h}{gl} \cdot \left( 2E\pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{h^2}{l^2} + F \right) = \\ &= \frac{4 \cdot (1 \cdot 10^{-2})}{10 \cdot 2.0} \cdot \left( (200 \cdot 10^9) \cdot 3.14 \frac{(10^{-3})^2}{2} \frac{(1 \cdot 10^{-2})^2}{2.0^2} + 10 \right) \approx \\ &\approx 3.6 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 36 \text{ г} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Оценим, насколько справедливым было использование закона Гука в условиях данной задачи. Для этого из (4.57) и (4.59) определим силу натяжения проволоки:

$$F_1 = \frac{mgl}{4h} = \frac{36 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 2.0}{4 \cdot 10^{-2}} = 18 \text{ Н} \quad (4.60)$$

Напряжение, возникающее в проволоке равно

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{\pi \frac{d^2}{4}} \approx 23 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (4.61)$$

Закон Гука для любого материала выполняется при условии, что напряжения в образце не превышают предел пропорциональности. Для стали предел пропорциональности может быть принят равным  $\sigma_{\text{пр}} \approx 200 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Поскольку  $\sigma_1 \ll \sigma_{\text{пр}}$ , то использование закона Гука было обоснованным.

$$\text{Ответ: } m = \frac{4h}{gl} \cdot \left( 2E\pi \frac{d^2}{4} \frac{h^2}{l^2} + F \right) \approx 36 \text{ г} .$$

**Задача 4.6.** (Закон Гука). Однородный упругий стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы  $F_0$ , равномерно распределенной по его торцу. Длина стержня и площадь его торца в недеформированном состоянии равны  $l_0$  и  $S_0$ , модуль Юнга материала стержня –  $E$ , коэффициент Пуассона –  $\mu$ . Определить зависимости напряжения упругих сил  $\sigma(x)$  и относительной деформации  $\varepsilon(x)$  от координаты  $x$  вдоль стержня, а также относительное удлинение стержня.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью  $X$  (см. рис. 4.10), направленной вдоль стержня. При ускоренном движении стержня под действием горизонтальной силы  $F_0$  в нем возникают внутренние упругие силы и продольные деформации, различные в разных сечениях, а также изменения поперечных размеров. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил  $\sigma(x)$  – подчиняющимися закону Гука (4.3).



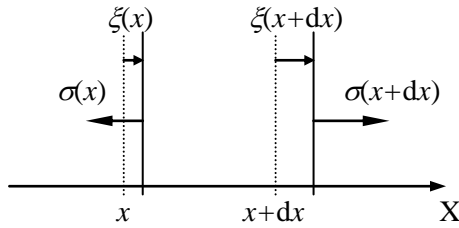


Рис. 4.10 Деформации и напряжения произвольного элемента стержня.

II. Рассмотрим слой  $dx$  недеформированного стержня с координатой  $x$  вдоль него (см. рис. 4.10). Масса  $dm$  выделенного элемента стержня не изменяется при деформации и остается равной

$$dm = \frac{m}{l_0} dx, \quad (4.62)$$

где  $m$  – масса всего стержня.

Уравнение движения рассматриваемого элемента стержня в проекции на ось  $X$  под действием напряжений упругих сил запишем в виде:

$$\begin{aligned} dma = S(x+dx+\xi(x+dx))\sigma(x+dx+\xi(x+dx)) - \\ - S(x+\xi(x))\sigma(x+\xi(x)) \approx S(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь  $a$  – проекция ускорения стержня на ось  $X$ ,  $\xi(x)$  и  $\xi(x+dx)$  – смещения левой и правой границ выделенного фрагмента при деформации (см. рис.4.10);  $S(x+\xi(x))$  и  $S(x+dx+\xi(x+dx))$  – площади поперечных сечений стержня на границах выделенной области. Поскольку деформации можно считать малыми, то в выражении (4.63) отброшены члены второго порядка малости не только по  $dx$ , но и по относительной продольной деформации  $\varepsilon(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ .

Дифференциальное уравнение (4.63) дополним граничным условием для напряжения упругих сил:

$$\sigma(x=0) = 0. \quad (4.64)$$

Ускорение  $a$ , одинаковое в установившемся режиме для всех точек стержня, в соответствии со вторым законом Ньютона определяется выражением:

$$a = \frac{F_0}{m}. \quad (4.65)$$

При движении стержня с ускорением возникающие неоднородные продольные деформации приводят к различным в разных сечениях поперечным деформациям и, следовательно, изменению площади поперечных сечений стержня  $S(x)$ :

$$S(x) = S_0(1 - \mu\varepsilon(x))^2 \approx S_0(1 - 2\mu\varepsilon(x)). \quad (4.66)$$

Напряжения упругих сил связаны с продольными деформациями законом Гука:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x). \quad (4.67)$$

III. Преобразуя записанную систему уравнений (4.62), (4.63) и (4.65) – (4.67), получаем дифференциальное уравнение для напряжений упругих сил:

$$\frac{F_0}{l_0} = S_0 \left( 1 - 2\mu \frac{\sigma(x)}{E} \right) \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}. \quad (4.68)$$

Интегрируя (4.68) методом разделения переменных с учетом граничных условий (4.64), получаем:

$$\frac{F_0 x}{l_0} = S_0 \sigma(x) - \frac{S_0 \mu}{E} \sigma(x)^2. \quad (4.69)$$

Решение уравнения (4.69) относительно  $\sigma(x)$  имеет вид:

$$\sigma(x) = \frac{E}{2\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F_0 \mu x}{S_0 l_0 E}} \right). \quad (4.70)$$

Запишем искомое выражение для распределения напряжений упругих сил вдоль стержня с учетом малости второго слагаемого в подкоренном выражении (4.70):

$$\sigma(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0}. \quad (4.71)$$

Следовательно, распределение деформаций вдоль стержня в соответствии с законом Гука имеет вид:

$$\varepsilon(x) = \frac{F_0 x}{S_0 l_0 E}. \quad (4.72)$$

Относительное удлинение всего стержня находим, интегрируя (4.72):

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\xi(l_0)}{l_0} = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \varepsilon(x) dx = \frac{F_0}{2S_0 E}. \quad (4.73)$$

**Ответ:**  $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F_0}{2S_0 E}.$

**Задача 4.7.** (Закон всемирного тяготения). Вокруг Земли по круговой орбите вращается спутник. После кратковременного торможения скорость спутника уменьшилась, после чего он начинает двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли (см. рис. 4.11) и приземляется через время  $t$ . Определите радиус  $R$  круговой орбиты, по которой первоначально вращался спутник. Радиус Земли  $R_0$ . Трением в атмосфере пренебrecь.

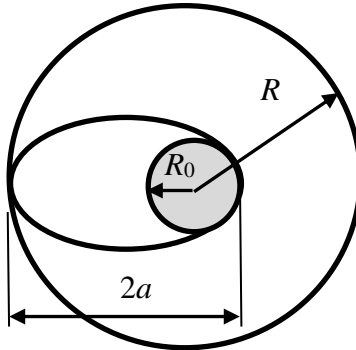


Рис.4.11. Параметры круговой и эллиптической орбит спутника.

### Решение

I. После кратковременного торможения спутник будет двигаться по замкнутой траектории, а значит его движение будет происходить в соответствии с законами Кеплера.

II, III. Большая полуось эллиптической орбиты, по которой после торможения движется спутник, равна

$$a = \frac{R + R_0}{2}. \quad (4.74)$$

По третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3, \quad (4.75)$$

где  $T_1$  — период обращения спутника на эллиптической орбите, а  $T_2$  — на круговой. Период обращения спутника на круговой орбите равен

$$T_2 = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}}. \quad (4.76)$$

Тогда период обращения его на эллиптической орбите

$$T_1 = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2}. \quad (4.77)$$

Поскольку с момента торможения до посадки спутник пройдет половину орбиты (см. рис. 4.11), то

$$t = \frac{T_1}{2} = \pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2}\right)^{3/2}. \quad (4.78)$$

Отсюда

$$R = 2 \left( \frac{t \sqrt{\gamma M}}{\pi} \right)^{2/3} - R_0. \quad (4.79)$$

$$\text{Ответ: } R = 2 \left( \frac{t \sqrt{\gamma M}}{\pi} \right)^{2/3} - R_0.$$

**Задача 4.8.** (Закон всемирного тяготения). Спутник, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника  $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$  рад/с<sup>2</sup>. Найдите изменение радиуса орбиты спутника через  $\Delta t = 30$  дней. Радиус Земли можно считать равным  $R = 6400$  км, ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

### Решение

I. Величина углового ускорения ничтожна, поэтому можно считать каждый виток спутника окружностью. Тогда на каждой конкретной круговой орбите мы можем пренебречь трением и опи-

считать движение спутника массой  $m$  как движение по окружности. Обозначим радиус и угловую скорость обращения для первоначальной орбиты через  $R_1$  и  $\omega_1$ , а для орбиты, на которой спутник окажется через 30 дней,  $R_2$  и  $\omega_2$ .

II, III. Используя закон Всемирного тяготения запишем второй закон Ньютона для спутника, движущегося по орбите радиуса  $R_1$ :

$$m\omega_1^2 R_1 = \frac{GmM}{R_1^2}. \quad (4.80)$$

Через 30 дней движение также будет происходить по круговой орбите в соответствии с уравнением движения

$$m\omega_2^2 R_2 = \frac{GmM}{R_2^2}. \quad (4.81)$$

Из (4.80) и (4.81) следует

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \omega^2 R^3 = GM = \text{const}, \quad (4.82)$$

где  $M$  – масса Земли. Тогда с использованием (4.82) можно записать:

$$\Delta(\omega^2 R^3) = 2\omega R^3 \Delta\omega + 3\omega^2 R^2 \Delta R = 0, \quad (4.83)$$

откуда

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega}. \quad (4.84)$$

Поскольку  $\Delta\omega = \beta \Delta t$ , то

$$\Delta R = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} R = -\frac{2}{3} \beta \Delta t \frac{R^{5/2}}{\sqrt{GM}} = -\frac{2}{3} \beta \Delta t R \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (4.85)$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$|\Delta R| \approx 2,5 \text{ км.}$$

$$\text{Ответ: } |\Delta R| = \frac{2}{3} \beta \Delta t R \sqrt{\frac{R}{g}} = 2.5 \text{ км.}$$

#### 4.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.4.1.** ([1], 11, с.79). Однородный упругий стержень массой  $m$  подвесили за один конец к потолку. Длина и площадь поперечного сечения стержня в недеформированном состоянии –  $l_0$  и  $S_0$ , модуль Юнга материала стержня равен  $E$ , а коэффициент Пуассона –  $\mu$ . Определить относительное удлинение стержня под

действием силы тяжести, а также относительное изменение его объема.

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2ES_0}; \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1-2\mu)mg}{2ES_0}.$$

**Задача 4.4.2.** ([1], 6, с.77). Нить перекинута через легкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплен груз массой  $M$ , а по другой свисающей части нити скользит муфточка массой  $m$  с постоянным ускорением  $a'$  относительно нити. Найти силу трения, с которой нить действует на муфточку.

$$\text{Ответ: } F_{\text{тр}} = (2g - a')mM / (m + M).$$

**Задача 4.4.3.** ([1], 10, с.78). Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения  $\mu$  между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом  $R = 200$  м на скорости  $v = 100$  км/ч?

$$\text{Ответ: } \mu = \frac{v^2}{Rg} \approx 0,4.$$

**Задача 4.4.4.** ([2], 88). На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом  $\mu = 0,1$ . Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

$$\text{Ответ: } a > 0,98 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 4.4.5.** ([2], 110). Два шарика одинаковой массы падают в воздухе. Диаметр одного из шариков вдвое больше чем у второго. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости.

*Ответ:* скорость большего шарика в  $\sqrt{2}$  раз меньше скорости меньшего.

**Задача 4.4.6.** ([2], 120). По наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, ускоренно скользит доска массой  $M$ . Ко-

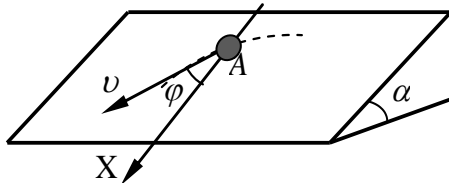
коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен  $\mu$ . На доску кладут тело массой  $m$ , которое скользит по доске без трения. Какова должна быть минимальная масса тела, чтобы движение доски по наклонной плоскости стало равномерным?

$$\text{Ответ: } m_{\min} = M \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k} - 1 \right).$$

**Задача 4.4.7.** ([2], 121). Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. К одному ее концу привязан груз массой  $m_1$ . По другому концу нити с постоянным относительно нее ускорением  $a_2$  скользит кольцо массой  $m_2$ . Найти ускорение  $a_1$  груза массой  $m_1$  и силу трения кольца о нить. Нить считать невесомой.

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{m_1 g - m_2 (g - a_2)}{m_1 + m_2}; F_{\text{тр}} = \frac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 4.4.8.** ([3], 1.105). Небольшую шайбу  $A$  положили на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом (см. рисунок), и сообщили ей начальную скорость  $v_0$ . Найти зависимость скорости шайбы от угла  $\varphi$  между вектором скорости и осью  $X$ , если коэффициент трения  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , и в начальный момент времени угол равен  $\varphi_0 = \pi/2$ .



$$\text{Ответ: } v = \frac{v_0}{1 + \cos \varphi}.$$

**Задача 4.4.10** ([3], 1.106). Цепочку длиной  $l$  поместили на гладкую сферическую поверхность радиуса  $R$  так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. С каким ускорением  $a$  начнет двигаться каждый элемент цепочки, если ее верхний конец освободить? Длина цепочки  $l < \pi R/2$ .

$$\text{Ответ: } a = \frac{\left( 1 - \cos \frac{l}{R} \right) Rg}{l}.$$

## ГЛАВА 5

## ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

## 5.1. Теоретический материал

**Центр масс механической системы (системы материальных точек)** – точка пространства, радиус-вектор которой  $\mathbf{r}_{\text{цм}}$  равен:

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (5.1)$$

где  $m = \sum_i m_i$  – масса механической системы,  $\mathbf{r}_i$  и  $m_i$  – радиус-вектор и масса  $i$ -ой материальной точки системы.

**Скорость центра масс  $\mathbf{v}_{\text{цм}}$**  – физическая величина, равная

$$\mathbf{v}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{m}. \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{v}_i$  – скорость  $i$ -ой материальной точки системы.

**Ускорение центра масс  $\mathbf{a}_{\text{цм}}$**  – физическая величина, равная

$$\mathbf{a}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m}, \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{a}_i$  – ускорение  $i$ -ой материальной точки системы.

**Импульс (количество движения) материальной точки  $\mathbf{p}$**  – физическая величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (5.4)$$

**Импульс механической системы  $\mathbf{P}$**  – физическая величина, равная сумме импульсов материальных точек, из которых состоит система:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{\text{цм}} \equiv \mathbf{p}_{\text{цм}}. \quad (5.5)$$

**Внешние силы механической системы** – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в систему.



**Внутренние силы механической системы** – силы, действующие между телами системы.

**Теорема о движении центра масс механической системы** (уравнение движения центра масс): произведение массы  $m$  системы тел на ускорение ее центра масс  $\mathbf{a}_{\text{цм}}$  относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех внешних сил  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ , действующих на механическую систему со стороны тел, не входящих в систему:

$$m\mathbf{a}_{\text{цм}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}. \quad (5.6)$$

**Импульс силы  $\mathbf{F}$**  за физически бесконечно малый интервал времени  $dt$ , в течение которого она действует, – физическая величина, равная произведению силы на этот интервал времени:  $\mathbf{F} dt$ .

**Закон изменения импульса механической системы.** Изменение импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета за физически бесконечно малый интервал времени  $dt$  равно импульсу суммы внешних сил  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ , действующих на систему в этот интервал времени:

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}^{\text{ex}} dt. \quad (5.7)$$

Для конечного интервала времени

$$\Delta\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{\text{ex}} dt, \quad (5.8)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени.

**Закон изменения проекции импульса механической системы.** Изменение проекции импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета на неподвижное относительно этой системы направление (задаваемое единичным вектором  $\mathbf{n}$ ) равно проекции на то же направление импульса суммы внешних сил, действующих на систему:

$$dP_n = F_n^{\text{ex}} dt, \quad (5.9)$$

$$\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_n^{\text{ex}} dt. \quad (5.10)$$

**Изолированная механическая система** – это механическая система, на которую не действуют внешние силы:  $\mathbf{F}_j^{\text{ex}} = 0$ .

**Замкнутая механическая система** – это механическая система, для которой сумма всех внешних сил равна нулю:

$$\sum_j \mathbf{F}_j^{\text{ex}} = \mathbf{F}^{\text{ex}} = 0. \quad (5.11)$$

**Закон сохранения импульса механической системы.** Если механическая система замкнута, то ее импульс относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = 0. \quad (5.12)$$

**Замкнутая в данном направлении механическая система** – это механическая система, для которой проекция суммы всех внешних сил на неподвижное относительно инерциальной системы отсчета направление  $\mathbf{n}$  равна нулю:  $F_n^{\text{ex}} = 0$ .

**Закон сохранения проекции импульса механической системы.** Если система замкнута в данном направлении, то проекция ее импульса относительно инерциальной системы отсчета на это направление сохраняется:  $\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = 0$ .

## 5.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач на законы изменения (или сохранения) для механической системы можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- 1) закон изменения (или сохранения) импульса,
- 2) определение центра масс для различных систем тел,
- 3) теорема о движении центра масс

Для решения подобных задач необходимо придерживаться следующей схемы.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).
5. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать закон сохранения (или изменения) импульса в выбранной системе отсчета для выбранной механической системы и выбранного интервала времени в рамках выбранной модели.
2. Записать определение центра масс
3. Записать теорему о движении центра масс.
4. Записать уравнения кинематических связей.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

**Примечание.**

Пункты I.5 – II.3 в случае необходимости выполняются неоднократно.

**3.3. Примеры решения задач**

**Задача 5.3.1.** (*Закон сохранения импульса*). Ствол игрушечной пушки направлен под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если она не закреплена и может скользить по абсолютно гладкой поверхности. Модуль скорости снаряда относительно пушки сразу после выстрела равен  $u_0 = 2,2$  м/с, а его масса в  $k = 10$  раз меньше массы пушки.

**Решение**

Для решения задачи воспользуемся общей схемой решения задач механики с помощью законов сохранения.

I. Выберем систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально, а ось  $Y$  – вертикально вверх. Определимся с моделями материальных объектов и явлений. Система тел «пушка + снаряд»

является замкнутой вдоль оси  $X$  в течение интервала времени от момента, предшествующего выстрелу пушки, до момента времени сразу после выстрела, поскольку в соответствии с условиями задачи сил трения, действующих на тела системы, нет.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса (5.12) на ось  $X$  для выбранной системы тел и рассматриваемого интервала времени:

$$m_{\text{п}}v_{\text{п}} + m_{\text{с}}v_{\text{сх}} = 0. \quad (5.13)$$

Здесь  $v_{\text{п}}$  и  $v_{\text{сх}}$  – проекции скоростей пушки и снаряда после выстрела на ось  $X$ .

Проекция на ось  $X$  неизвестной скорости снаряда относительно лабораторной системы отсчета  $v_{\text{сх}}$  связана с проекциями скорости пушки  $v_{\text{п}}$  и относительной скорости снаряда  $v_0$  следующим образом:

$$v_{\text{сх}} = v_{\text{п}} + v_0 \cos \alpha. \quad (5.14)$$

Используем также заданное в условии задачи соотношение между массами снаряда и пушки:

$$\frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{с}}} = k. \quad (5.15)$$

III. Решая систему уравнений (5.13) – (5.15), находим искомое выражение для проекции скорости пушки на ось  $X$  после выстрела:

$$v_{\text{п}} = -v_0 \cos \alpha \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{с}} + m_{\text{п}}} = -v_0 \cos \alpha \frac{1}{1+k}. \quad (5.16)$$

Подставляя в (5.16) значения физических величин, заданных в условии задачи, получаем

$$v_{\text{п}} \cong -0,14 \text{ м/сек}. \quad (5.17)$$

**Ответ:**  $v_{\text{п}} = -v_0 \cos \alpha \frac{1}{1+k} = -0,14 \text{ м/сек}.$

**Задача 5.3.2(Закон сохранения импульса).** Две одинаковые тележки, на каждой из которых находится по человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек в направлении, перпендикулярном к движению тележек. В результате первая тележка остановилась, а скорость второй стала равна  $V$ . Найти модули первоначальных скоростей тележек

$V_1$  и  $V_2$ , если масса каждой тележки равна  $M$ , а масса каждого человека –  $m$ .

### Решение

I. В соответствии с общей схемой решения задач на законы сохранения определимся с моделями материальных объектов и явлений. Пренебрегая сопротивлением воздуха, будем считать, что скорость каждого человека сразу после прыжка равна его скорости непосредственно перед приземлением на другую тележку.

На рис. 5.1 показано состояние системы тел для трех моментов времени:  $t_1$  – непосредственно перед прыжком,  $t_2$  – момент, когда оба человека находятся в полете,  $t_3$  – сразу после приземления.

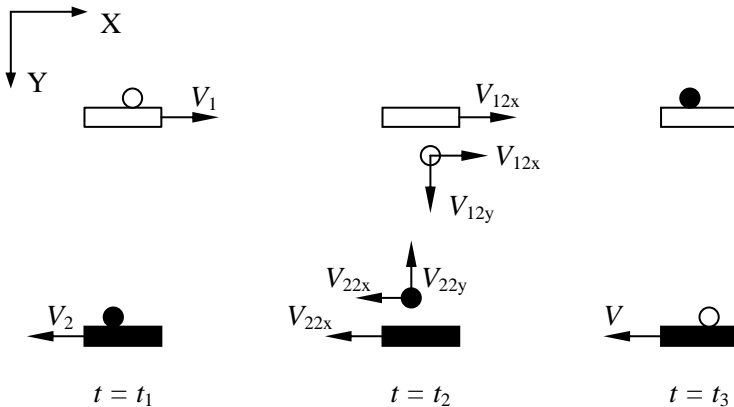


Рис. 5.1. Положения тел в различные моменты времени.

На рис. 5.1 также изображена выбранная система координат  $XU$ , жестко связанная с рельсами, и обозначены скорости всех тел в указанные моменты времени.

На временном интервале  $(t_1, t_2)$  будем рассматривать две системы тел: «первый человек + первая тележка» и «второй человек + вторая тележка». Поскольку человек прыгнул в направлении, перпендикулярном движению тележки, то после отрыва от тележки проекция его скорости на ось  $X$  (совпадающую с направлением движения первой тележки, см. рис. 5.1) равна скорости тележки после его прыжка.

На временном интервале  $(t_2, t_3)$  также рассмотрим две системы тел: «первый человек + вторая тележка», «второй человек + первая тележка».

Поскольку все внешние по отношению к рассматриваемым системам тел силы (силы тяжести и силы реакции рельсов) направлены перпендикулярно направлению оси  $X$ , то эти системы тел замкнуты в направлении данной оси, и для них выполняется закон сохранения проекции импульса на соответствующих им временных интервалах.

II. Запишем законы сохранения проекции импульса для выбранных систем тел и выбранных временных интервалов.

Система тел «первый человек + первая тележка», временной интервал  $(t_1, t_2)$ :

$$(M + m)V_1 = MV_{12x} + mV_{12x}. \quad (5.18)$$

Из уравнения (5.18) следует, что скорость тележки после прыжка человека не изменится:

$$V_{12x} = V_1. \quad (5.19)$$

Аналогичный вывод можно сделать и для второй тележки, рассматривая тот же временной интервал и систему тел «второй человек + вторая тележка»:

$$V_{22x} = V_2. \quad (5.20)$$

Система тел «второй человек + первая тележка», временной интервал  $(t_2, t_3)$ :

$$MV_1 - mV_2 = 0. \quad (5.21)$$

В (5.21) учтено, что первая тележка остановилась после приземления второго человека.

Для системы тел «первый человек + вторая тележка» и того же временного интервала имеем:

$$mV_1 - MV_2 = -(m + M)V. \quad (5.22)$$

III. Решая систему уравнений (5.21) – (5.22), находим искомые модули скоростей тележек в начальный момент времени:

$$V_1 = V \frac{m}{M - m}, \quad V_2 = V \frac{M}{M - m}. \quad (5.23)$$

Проанализируем полученное решение. Если массы тележек разные, то (5.23) дает однозначный ответ на вопрос задачи. В случае, когда  $M = m$  обе тележки останавливаются ( $V = 0$ ). При этом

начальные скорости тележек могут быть любыми по величине, но равными друг другу:  $V_1 = V_2$ .

$$\text{Ответ: } V_1 = V \frac{m}{M - m} \quad V_2 = V \frac{M}{M - m}.$$

**Задача 5.3.3** (Закон сохранения импульса). На краю покоящейся тележки стоят два человека, масса каждого из которых равна  $m$ . Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с тележки с одной и той же горизонтальной скоростью  $u$  относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом.

### Решение

I. Определимся с системой тел, о которой будет идти речь. Очевидно, что это система «тележка + два человека». Силы взаимодействия между ними – внутренние, а так как трением пренебрегаем, то внешние силы в горизонтальном направлении отсутствуют, следовательно, в горизонтальном направлении выполняется закон сохранения импульса.

II, III Закон сохранения импульса можем записать в векторной форме. Для первого случая, когда спрыгивают два человека одновременно, он имеет вид:

$$0 = MV_1 + 2m(\mathbf{u} + \mathbf{V}_1), \quad (5.24)$$

где  $\mathbf{V}_1$  – скорость тележки после одновременного спрыгивания двух человек. Здесь учтено, что скорость человека относительно Земли сразу же, в момент прыжка, будет не  $\mathbf{u}$ , а  $\mathbf{u} + \mathbf{V}_1$ , потому что тележка в тот же момент приобретет скорость.

Из (5.24) получаем ответ

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{2m\mathbf{u}}{M + 2m}. \quad (5.25)$$

Для получения ответа на второй вопрос задачи выделим характерные моменты времени. Момент  $\tau_1$ - непосредственно перед прыжком первого человека,  $\tau_2$ - сразу после прыжка первого человека,  $\tau_3$ - непосредственно перед прыжком второго человека,  $\tau_4$ - сразу после прыжка второго человека. Запишем закон сохранения импульса для двух временных интервалов

$$0 = (M + m)\mathbf{V} + m(\mathbf{u} + \mathbf{V}), \quad (5.26)$$

$$(M + m)\mathbf{V} = M\mathbf{V}_2 + m(\mathbf{u} + \mathbf{V}_2). \quad (5.27)$$

Здесь  $V$  - скорость тележки со вторым человеком после того, как прыгнул первый.

Из (5.26) получаем скорость  $V$ :

$$V = -\frac{mu}{(M+m)+m}. \quad (5.28)$$

В интервале  $(\tau_3, \tau_4)$  используем (5.27) - закон сохранения импульса для системы тел «тележка + второй человек». С учетом (5.28) получаем:

$$V_2 = \frac{(M+m)\left(-\frac{2mu}{M+2m}\right) - mu}{M+m} = -\frac{(2M+3m)mu}{(M+m)(M+2m)} \quad (5.29)$$

Здесь  $V'$  - искомая скорость тележки после прыжка второго человека.

Найдем отношение скоростей  $V_2$  и  $V_1$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{(2M+3m)mu}{(M+m)(M+2m)} \frac{(M+2m)}{2mu} = \frac{(2M+3m)}{(M+m)2} \\ &= 1 + \frac{m}{(M+m)2} > 1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Отсюда видно, что в случае, когда люди прыгают друг за другом, скорость тележки оказывается больше, чем в случае, если они прыгают одновременно.

**Ответ:** а) если люди прыгивают одновременно,

$$V_1 = -\frac{2mu}{M+2m}; \quad \text{б) если люди прыгивают друг за другом,}$$

$$V_2 = -\frac{(2M+3m)mu}{(M+m)(M+2m)}.$$

**Задача 5.3.4.** (Закон изменения импульса). Снаряд, выпущенный со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, через время  $\tau = \frac{3V_0 \sin \alpha}{2g}$  взорвался и разлетелся на два одинаковых осколка.

Один осколок полетел вперед и вверх под углом  $\beta = 45^\circ$  к горизонту со скоростью  $V_1 = 2V_0$ . С какой скоростью  $V_2$  и под каким углом  $\gamma$  к горизонту полетел второй осколок?



### Решение

I. Для определенности выберем декартову систему координат так, как показано на рис.5.2. В промежуток времени  $0 < t < \tau$  на систему действовала внешняя сила тяжести. В этом промежутке нельзя пренебрегать импульсом внешних сил, следует воспользоваться законом изменения импульса. Анализируя временной интервал, в котором происходит взрыв, воспользуемся законом сохранения импульса. Действительно, поскольку взрыв происходит достаточно быстро, в этот временной промежуток импульсом внешних сил (силы тяжести, действующие на снаряд и его осколки) можно пренебречь по сравнению с импульсом внутренних сил, возникающих при взрыве.

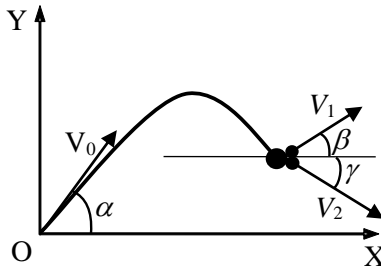


Рис. 5.2. Направления начальной скорости снаряда и скоростей разлетающихся осколков.

II. Запишем закон изменения импульса в проекциях на оси координат на интервале  $(0, \tau)$  сохранения импульса в проекциях на оси X и Y

$$MV_x - MV_0 \cos \alpha = 0, \quad (5.31)$$

$$MV_y - MV_0 \sin \alpha = -Mg\tau. \quad (5.32)$$

Здесь обозначено  $V_x$  и  $V_y$  – проекции скорости снаряда на оси системы координат непосредственно перед взрывом.

Дополним уравнения (5.31) и (5.32) законом сохранения импульса в промежутке, когда происходит взрыв

$$MV_x = mV_1 \cos \beta + mV_2 \cos \gamma, \quad (5.33)$$

$$MV_y = mV_1 \sin \beta + mV_2 \sin \gamma. \quad (5.34)$$

Уравнения (5.31)-(5.34) дополним выражением для массы осколка  $m$  следующим из условия задачи

$$m = \frac{M}{2} \quad (5.35)$$

III. Система уравнений (5.31) – (5.35). Является полной. Незвестную скорость  $V_2$  и угол  $\gamma$  удобно определить, если в левой части обоих уравнений оставить только величины, зависящие от угла  $\gamma$ :

$$mV_2 \sin \gamma = -MV_y + mV_1 \sin \beta, \quad (5.36)$$

$$mV_2 \cos \gamma = -MV_x + mV_1 \cos \beta. \quad (5.37)$$

Из (5.36) и (5.37) получаем для угла

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{MV_y - mV_1 \sin \beta}{MV_x - mV_1 \cos \beta} = \frac{MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta}{MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta} \quad (5.38)$$

и для скорости

$$V_2 = \frac{1}{m} \sqrt{(MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta)^2 + (MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta)^2}. \quad (5.39)$$

Подставляя в (5.38) и (5.39) данные и условия задачи получаем для угла

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta}{MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta} \\ &= \frac{MV_0 \sin \alpha - Mg \frac{3}{2} \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - \frac{M}{2} (2V_0) \sin \beta}{MV_0 \cos \alpha - \frac{M}{2} (2V_0) \cos \beta} = -\frac{\frac{3}{2} \sin \alpha}{0} \end{aligned} \quad (5.40)$$

То есть

$$\gamma = \operatorname{arctg}(-\infty) = -90^\circ \quad (5.41)$$

Таким образом, для данных условий задачи второй осколок полетит вертикально вниз.

Скорость  $V_2$  найдем из (5.39)

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{m} \sqrt{(MV_0 \sin \alpha - Mg\tau - mV_1 \sin \beta)^2 + (MV_0 \cos \alpha - mV_1 \cos \beta)^2} = \\ &= \frac{1}{m} \frac{3}{2} MV_0 \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} V_0 \end{aligned}$$

(5.42)

**Ответ**  $\gamma = -90^\circ$ ,  $V_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}V_0$

**Задача 5.3.5.** (Закон изменения импульса.) Ящик с песком массой  $M$  лежит на горизонтальной поверхности. Под углом  $\alpha$  к горизонтали в ящик попадает пуля, имеющая массу  $m$  и скорость  $V$ , и застревает в песке (см. рис.5.3). Определить скорость пули, если ящик остановился через время  $\tau$  после попадания в него пули. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью равен. Считать, что выполняется соотношение  $mV \gg Mg\Delta t$ , где  $\Delta t$  - время за которое скорость пули относительно ящика становится равной нулю.

### Решение

I. Рассмотрим систему тел «ящик с песком + пуля». Оси системы координат выберем так, как показано на рис. 5.3. Выбранная система тел не является замкнутой. Поскольку пуля застревает в ящике, то проекция импульса выбранной системы тел на ось после взаимодействия становится равной нулю, вдоль оси  $X$  импульс системы тел также не сохраняется, поскольку нельзя пренебречь импульсом силы трения за время взаимодействия.

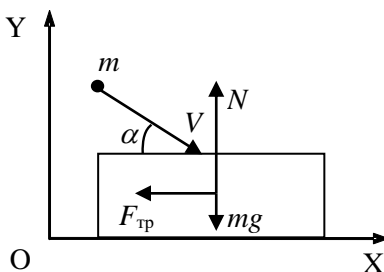


Рис. 5.3. Силы, действующие на ящик с песком, в момент попадания в него пули.

II. Запишем закон изменения импульса выбранной системы тел в проекциях на оси выбранной системы координат

$$0 - mV \cos \alpha = N \Delta t, \quad (5.43)$$

$$(m + M)V_1 - mV \sin \alpha = -F_{\text{тр}} \Delta t, \quad (5.44)$$

здесь  $V$  – начальная скорость пули,  $\Delta t$  – интервал времени, в течение которого скорость пули относительно ящика с песком стала равной нулю  $N$  – сила реакции опоры, действующая в течение короткого интервала времени  $\Delta t$ ,  $V_1$  – скорость ящика с пулей сразу после соударения. В (5.43) учтено, что  $mV \gg Mg\Delta t$ .

Уравнения (5.43) и (5.44) дополним связью между силой трения и силой реакции опоры

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (5.45)$$

а также уравнениями, описывающими движение ящика с пулей после соударения

$$(m + M)a = -F_{\text{тр}1}, \quad (5.46)$$

$$0 = V_1 - a\tau. \quad (5.47)$$

После того, как пуля перестанет двигаться относительно ящика, сила трения  $F_{\text{тр}1}$  уменьшится и будет равна

$$F_{\text{тр}1} = \mu(M + m)g. \quad (5.48)$$

III. Из (5.43)–(5.48) получаем выражение для скорости ящика с пулей после соударения

$$V_1 = \frac{mV(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(m + M)} = \mu g \tau, \quad (5.49)$$

откуда окончательно:

$$V = \frac{\mu g \tau (m + M)}{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (5.50)$$

Очевидно, что при выполнении условия

$$\mu > tg\alpha \quad (5.51)$$

ящик при попадании в него пуле вообще не сдвинется с места.

$$\text{Ответ: } V = \frac{\mu g \tau (m + M)}{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \quad (\mu > tg\alpha).$$

**Задача 5.3.6.** (Теорема о движении центра масс). Система состоит из двух шариков массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанных нерастяжимой нитью длины  $l$  и движущихся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость одной шайбы равна нулю, а другой  $V$ , причем ее направление перпендикулярно нити (см. рис. 5.4). Найти силу натяжения нити  $T$  в этот момент времени.

### Решение

I. Рассматриваемая система двух связанных нитью шариков является замкнутой. Центр масс такой системы должен либо покоиться, либо двигаться с постоянной скоростью. В движущейся системе координат, связанной с центром масс системы, шарики будут двигаться, очевидно, по окружностям с постоянными скоростями. Для определения силы натяжения следует найти скорость центра масс и скорости шариков относительно этого центра.

II. Выберем лабораторную систему координат, связанную в начальный момент времени с центром масс системы (рис. 5.4). Пусть координаты шариков в этой системе координат равны соответственно  $x_1$  и  $x_2$ . По определению центра масс имеем

$$x_{\text{цм}} = 0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)}. \quad (5.52)$$

Поскольку длина нити задана, то

$$l = x_2 - x_1. \quad (5.53)$$

Для определения скорости центра масс воспользуемся соотношением (5.2). В соответствии с условием задачи скорость центра масс будет направлена вдоль оси  $Y$ :

$$V_{\text{цм}} = \frac{m_1 0 + m_2 V}{(m_1 + m_2)}. \quad (5.54)$$

В движущейся системе координат, связанной с центром масс системы, шарики будут двигаться по окружностям с радиусами

$$r_1 = 0 - x_1, \quad (5.55)$$

$$r_2 = x_2 - 0. \quad (5.56)$$

Их скорости в движущейся системе координат найдем из условия равенства их угловых скоростей вращения относительно центра масс:

$$V_2 = V - V_{\text{цм}}, \quad (5.57)$$

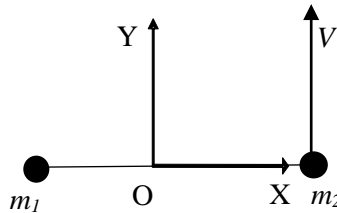


Рис. 5.4. Геометрия системы тел и выбор системы координат.

$$V_1 = \frac{r_1}{r_2} V_2. \quad (5.58)$$

Силу натяжения нити найдем из уравнения движения материальной точки по окружности, например, для второго шарика:

$$m_2 \frac{V_2^2}{r_2} = T. \quad (5.59)$$

III. Система уравнений (5.52)-(5.59) является полной.

Из (5.52), (5.53) и (5.55), (5.56) получаем выражение для  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad (5.60)$$

$$r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}. \quad (5.61)$$

Относительные скорости шаров равны соответственно

$$V_1 = \frac{m_2 V}{m_1 + m_2}, \quad (5.62)$$

$$V_2 = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2}. \quad (5.63)$$

Выражение для силы натяжения получаем используя (5.59):

$$T = \frac{m_1 m_2 V^2}{(m_1 + m_2) l}. \quad (5.64)$$

**Ответ:**  $T = \frac{m_1 m_2 V^2}{(m_1 + m_2) l}.$

**Задача 5.3.7.** (Теорема о движении центра масс). На левом конце неподвижной платформы длиной  $L$  и массой  $M$  стоят два человека. Масса каждого человека равна  $m$ . В некоторый момент времени они начали двигаться по направлению к правому концу платформы. Один человек дошёл до середины платформы и остановился, а второй дошёл до правого конца платформы. Трение между колесами платформы и поверхностью земли пренебрежимо мало. На какое расстояние  $S$  переместилась в итоге вся платформа?

### Решение

I. При решении задачи будем использовать теорему о движении центра масс. Поскольку система тел замкнута, центр масс не меняет своего положения при любых изменениях положения тел. Направим координатную ось  $X$  в сторону правого конца платформы, так как показано на рис. 5.5. Начало лабораторной системы координат выберем в центре платформы.

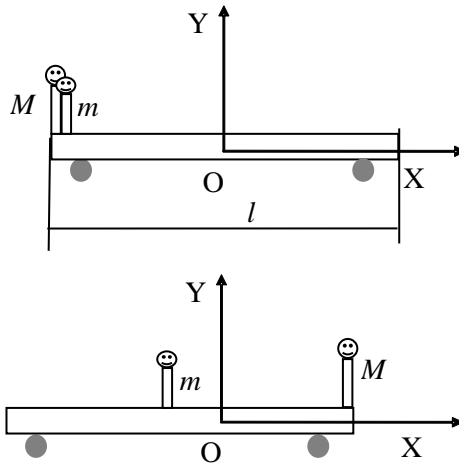


Рис. 5.5. Расположение тел в начальный и конечный моменты движения.

II, III. Определим положение центра масс системы в начальный момент времени.

$$x_{\text{цм1}} = \frac{0M - 2m \frac{l}{2}}{(M + 2m)}. \quad (5.65)$$

Определим координаты людей  $x_1'$  и  $x_2'$  относительно платформы в конце их движения. Поскольку первый человек остановился в центре платформы, то

$$x_1' = 0. \quad (5.66)$$

Положение второго человека после окончания движения определяется координатой

$$\dot{x}_1 = 0 - \frac{l}{2} = -\frac{l}{2}. \quad (5.67)$$

Учитывая, что координата центра масс всей системы после окончания всех перемещений не меняется и остается равной  $x_{цм1}$ , получаем:

$$\frac{-2m \frac{l}{2} x \cdot M + (x + m \cdot 0) + (x + m \frac{l}{2})}{M + 2m} = \frac{(M + 2m)}{(M + 2m)}, \quad (5.68)$$

здесь обозначено  $x$  – координата центра платформы после окончания всех движений. Из (5.68) получаем окончательно:

$$x = -\frac{3mL}{2(M + 2m)}. \quad (5.69)$$

Знак «минус» показывает, что платформа сместилась в направлении, противоположном движению людей. Таким образом, платформа сместилась на расстояние

$$S = |x| = \frac{3mL}{2(M + 2m)}. \quad (5.70)$$

**Ответ:**  $S = \frac{3mL}{2(M + 2m)}$ .

**Задача 5.3.8.** (Определение положения центра масс). На краю квадратного плота с квадратным отверстием, размещенным так, как показано на рис. 5.6, стоит человек. На какое расстояние  $S$  переместился плот, если человек дошел до точки  $O$  и остановился. Масса плота  $M$ , масса человека  $m$ , сторона плота  $l$ , сторона квадратного отверстия  $l/4$ .

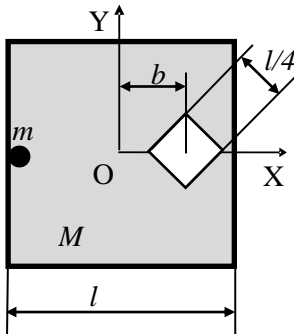


Рис. 5.6. Геометрия системы в начальный момент времени.



### Решение

I. Так же, как и в предыдущей задаче, будем опираться на теорему о движении центра масс. Поскольку система тел «человек + плот» замкнута, то центр масс этой системы не меняет своего положения при любых движениях тел. Особенностью задачи является то, что плот имеет отверстие, поэтому положение его центра масс необходимо будет найти отдельно. Выберем систему координат с началом в т. О (центр плота) так как показано на рис.5.6.

II, III. Так же, как в задаче 5.3.7. определим положение центра масс в начальный момент времени, непосредственно перед тем, как человек начал свое движение

$$x_{\text{цм1}} = \frac{-\frac{l}{2}m + Mx_{\text{п}}}{(M + m)}, \quad (5.71)$$

где  $x_{\text{п}}$  – центр масс плота.

После того, как человек окажется в точке О, положение центра масс определится из соотношения

$$x_{\text{цм2}} = \frac{(0 + x)m + M(x_{\text{п}} + x)}{(M + m)}, \quad (5.72)$$

где  $x$  – координата центра плота после окончания движения человека.

Кроме того

$$x_{\text{цм1}} = x_{\text{цм2}}. \quad (5.73)$$

Определим  $x_{\text{п}}$  - положение центра масс плота с отверстием. Для этого воспользуемся определением центра масс, а также введем поверхностную плотность вещества, из которого сделан плот

$$\rho = \frac{M}{l^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{16}{15} \cdot \frac{M}{l^2}. \quad (5.74)$$

Мысленно разобьем весь плот на отдельные элементы с площадями  $s_i$  и координатами  $x_i$ . В выражении для центра масс плота в числителе прибавим и вычтем одно и то же слагаемое  $\left(\frac{l^2}{16}\right)\rho \cdot b$ .

$$x_{\text{п}} = \frac{\sum \rho s_i x_i + \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho \cdot b - \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho \cdot b}{M}. \quad (5.75)$$

Для дальнейшего анализа удобно объединить два первых слагаемых в числителе. Их сумма соответствует определению центра масс плоты без отверстия. Он, очевидно, находится в точке О. Таким образом, (5.75) перепишем в виде:

$$x_{\text{п}} = \frac{\rho l^2 \cdot 0 - \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho \cdot b - \left(\frac{l^2}{16}\right) \rho \cdot b}{M} = -\frac{\left(\frac{l^2}{16}\right) \rho \cdot b}{M}. \quad (5.76)$$

Используя (5.71)-(5.73) и (5.76) получаем

$$-\frac{m \frac{l}{2} + \frac{\rho l^2}{16} b}{M + m} = \frac{(0 + x)m + M \left( \frac{\rho l^2}{16} b \frac{1}{M} + x \right)}{(M + m)}. \quad (5.77)$$

Отсюда находим координату центра плоты после остановки человека:

$$x = \frac{-m \frac{l}{2} - \frac{\rho l^2}{16} b - \frac{\rho l^2}{16} b}{M + m} = -\frac{m \frac{l}{2} + \frac{l^2}{8} \frac{M \cdot 16}{15 l^2} b}{M + m} = -\frac{m \frac{l}{2} + \frac{2}{15} Mb}{M + m}. \quad (5.78)$$

Знак «минус» означает, что центр плоты сместился в направлении, противоположном движению человека. Таким образом, плот сместился на расстояние

$$S = |x| = \frac{m \frac{l}{2} + \frac{2}{15} Mb}{M + m}. \quad (5.79)$$

**Ответ:**  $S = |x| = \frac{m \frac{l}{2} + \frac{2}{15} Mb}{M + m}$

#### 5.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.4.1** ([1], 1, с. 112). Три лодки одинаковой массой  $m$  идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью  $v$ . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью  $u$  относительно лодки грузы массой  $m_1$ . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

$$\text{Ответ: } v_1 = v + \frac{m_1}{m + m_1}u, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v - \frac{m_1}{m + m_1}u.$$

**Задача 5.4.2** ([1], 2, с. 113). На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых шарика массами  $m_0$ , соединенные невесомой пружинкой жесткостью  $k$  и длиной  $l_0$  в недеформированном состоянии. В один из шариков попадает летящая горизонтально вдоль оси пружины со скоростью  $v$  пуля массой  $m$  и застревает в нем. Найти максимальное и минимальное расстояние между шариками в процессе их движения.

$$\text{Ответ: } l_{\max} = l_0 + \Delta l, \quad l_{\min} = l_0 - \Delta l,$$

$$\text{где } \Delta l = v m \sqrt{\frac{m_0}{(m_0 + m)(2m_0 + m)k}}.$$

**Задача 5.4.3** ([1], 3, с. 113). С концов платформы массой  $M$  и длиной  $l$ , которая может перемещаться без трения, навстречу друг другу бегут два зайца массами  $m$  и  $2m$  с постоянными относительно платформы скоростями. Второй заяц (массой  $2m$ ) бежит в два раза быстрее первого. На сколько сместится платформа, когда второй заяц добежит до ее конца?

$$\text{Ответ: } x = \frac{3m}{2(3m + M)}l.$$

**Задача 5.4.4** ([1], 4, с. 113). На нити, прикрепленной к воздушному шару массой  $M$ , свободно висающему в воздухе, сидит жук массой  $m$ , который начинает двигаться с постоянной относительно нити скоростью  $U$  вверх. Определить скорости шара и жука относительно Земли.

$$\text{Ответ: } \mathbf{v}_{\text{ш}} = -\frac{m}{m+M}\mathbf{U}, \mathbf{v}_{\text{ж}} = \frac{M}{m+M}\mathbf{U}.$$

**Задача 5.4.5** ([3], 1.121). Система состоит из двух шариков массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных между собой пружинкой. В момент  $t = 0$  шарикам сообщили скорости  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , после чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Найти зависимости от времени импульса этой системы в процессе движения и радиус-вектора ее центра масс относительно его начального положения.

$$\text{Ответ: } \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t, \text{ где } \mathbf{p}_0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, m = m_1 + m_2;$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2, \text{ где } \mathbf{v}_0 = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2).$$

**Задача 5.4.6** ([3], 1.122). Две небольшие шайбы массами  $m_1$  и  $m_2$  связаны нитью длины  $l$  и движутся по гладкой плоскости. В некоторый момент скорость одной шайбы равна нулю, а другой –  $\mathbf{v}$ , причем ее направление перпендикулярно нити. Найти модуль силы натяжения нити в этот момент.

$$\text{Ответ: } F = \mu v^2/l, \text{ где } \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2).$$

**Задача 5.4.7** ([3], 1.123). Плот массы  $M$  с человеком массы  $m$  покоится на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение  $l'$  со скоростью  $\mathbf{v}'(t)$  и останавливается. Пре-небрегая сопротивлением воды, найти:

- а) перемещение  $l$  плота относительно берега;
- б) горизонтальную составляющую силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

$$\text{Ответ: а) } l = -l' \frac{m}{M+m}; \text{ б) } F = -\frac{mM}{M+m} \frac{dv'}{dt}.$$

**Задача 5.4.8** ([3], 1.129). В момент, когда скорость падающего тела по модулю стала равной  $v_0 = 4,0$  м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью  $v = 5,0$  м/с каждый. Найти модуль скорости третьего осколка сразу после разрыва.

Ответ:  $v' = \sqrt{9v_0^2 + 2v^2} = 14 \text{ м/с}$ .

**Задача 5.4.9** ([3], 1.134). Две одинаковые тележки массой  $M$  движутся по прямой друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью  $v_0$ . На задней тележке находится человек массы  $m$ . В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью  $u$  относительно своей тележки. Найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

Ответ:  $v_{\text{задн}} = v_0 - \frac{m}{m+M}u$ ;  $v_{\text{пер}} = v_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}u$ .

## ГЛАВА 6

### ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ. УРАВНЕНИЕ МЕЦЕРСКОГО. ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

#### 6.1. Теоретический материал

**Движение тела с переменной массой.** Рассмотрим движение тела с переменной массой. Пусть  $M(t)$  – масса тела в момент времени  $t$  и  $dm = -dM$  – масса отделившихся частиц за время  $dt$  (см. рис. 6.1).

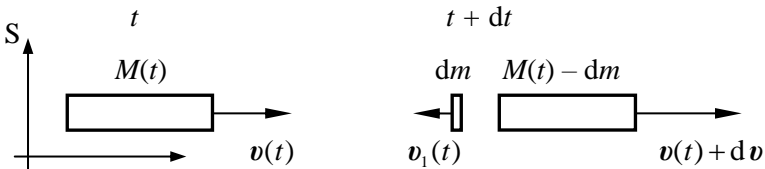


Рис. 6.1. Характеристики тела и отделяющихся от него частиц в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ .

Запишем импульс тела в момент времени  $t$  и импульс тела с отделившимися от него частицами в момент времени  $t + dt$ :

$$\mathbf{P}(t) = M(t)\mathbf{v}(t), \quad (6.1)$$

$$\mathbf{P}(t + dt) = (M(t) - dm)(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v}) + dm\mathbf{v}_1(t). \quad (6.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}(t)$  – скорость тела в момент времени  $t$ ,  $d\mathbf{v}$  – изменение скорости тела за время  $dt$ ,  $\mathbf{v}_1$  – скорость отделившихся частиц.

С точностью до бесконечно малых величин второго порядка изменение импульса механической системы, состоящей из тела и отделившихся от него за время  $dt$  частицами, равно

$$\mathbf{P}(t + dt) - \mathbf{P}(t) = M(t)d\mathbf{v} + dm\mathbf{u}(t), \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}(t)$  – скорость отделяющихся частиц относительно тела.

Записав закон изменения импульса для рассматриваемой механической системы, получим уравнение движения для тела с переменной массой  $M(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = M(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}}. \quad (6.4)$$

**Уравнение Мещерского** – уравнение движения для тела с переменной массой  $M(t)$ , записанное в виде:

$$M(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} - \mu\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{\text{ex}} + \mathbf{F}_p(t). \quad (6.5)$$

Здесь  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$  – внешняя сила, действующая на тело,  $\mu = -\frac{dM}{dt}$  – скорость изменения массы тела, взятая с обратным знаком, так называемый расход топлива,  $\mathbf{u}(t)$  – скорость отделяющихся частиц относительно тела,  $\mathbf{F}_p(t) \equiv -\mu\mathbf{u}(t)$  – реактивная сила.

**Реактивная сила** – сила, действующая на тело со стороны отделяющихся от него частиц:

$$\mathbf{F}_p(t) \equiv -\mu\mathbf{u}(t). \quad (6.6)$$

**Формула Циолковского** – зависимость скорости тела  $v$ , движущегося под действием постоянной реактивной силы, от его массы  $M$ :

$$v = v_0 - u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right), \quad (6.7)$$

где  $u$  – скорость отделяющихся частиц относительно тела,  $M_0$  и  $v_0$  – начальные (в момент времени  $t = t_0$ ) масса и скорость тела.

## 6.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач на движение тел с переменной массой можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- 1) движение тел с переменной массой (с использованием закона изменения импульса),
- 2) уравнение Мещерского
- 3) Формула Циолковского
- 4) Влияние реактивной силы на характеристики движения тела

При решении задач необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.

2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Провести анализ действующих на тела системы сил, используя законы, описывающие их индивидуальные свойства.
5. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).
6. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Закон изменения импульса или следствия из него (уравнение Мещерского, формула Циолковского).
2. Записать уравнения, описывающие индивидуальные свойства сил.
3. Записать уравнения кинематических связей.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечание.

Пункты I.6 – II.2 в случае необходимости выполняются неоднократно.

### 6.3. Примеры решения задач

**Задача 6.3.1.** (*Движение тел с переменной массой*). По двум горизонтальным рельсам движутся с постоянной скоростью  $v_0 = 1$  м/с без трения (по инерции) две одинаковые тележки массой  $M_0 = 100$  кг каждая. В некоторый момент времени  $t_0 = 0$  на обе тележки сверху непрерывной струйкой начинает сыпаться песок так,



что масса сыплющегося песка растет линейно по закону  $m = kt$ , где  $k = 10$  кг/с. В первой тележке есть устройство для непрерывного выброса всего ссыпанного на нее песка в направлении, перпендикулярном скорости тележки. Из второй тележки песок не выбрасывается. Как будут зависеть от времени скорость и перемещение каждой тележки? За какое время каждая тележка пройдет расстояние  $L = 9$  м?

### Решение

I. В соответствии с общей схемой решения задач на законы сохранения рассмотрим особенности процессов для обеих тележек. В обоих случаях система тел «тележка + ссыпавшийся на нее за время  $dt$  песок» является замкнутой в направлении движения тележки, следовательно, можно использовать закон сохранения проекции импульса. Выберем системы координат так, как показано на рис. 6.2.

II. Закон сохранения проекции импульса на ось  $X$  для системы тел «тележка + ссыпавшийся на нее за время  $dt$  песок» и интервала времени  $[t, t + dt]$  в обоих случаях имеет вид:

$$M(t)v(t) + dm \cdot 0 = (M(t) + dm)(v(t) + dv). \quad (6.8)$$

Здесь  $M(t)$  и  $v(t)$  – мгновенные значения массы и скорости тележки в момент времени  $t$ ;  $dm$  – приращение массы тележки за малый промежуток времени  $dt$ ,  $dv$  – приращение скорости тележки.

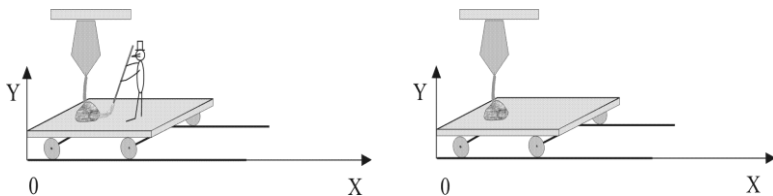


Рис. 6.2. Выбор систем координат для двух случаев.

Из условия задачи следует, что

$$dm = kdt. \quad (6.9)$$

Аналогично тому, как это было сделано в теоретическом введении при рассмотрении движения тел с переменной массой, пренебрежем в (6.8) членами второго порядка малости:

$$0 = M(t)dv(t) + v(t)dm. \quad (6.10)$$

Следовательно:

$$\frac{dv}{v(t)} = -\frac{k dt}{M(t)}. \quad (6.11)$$

Далее рассмотрим движение каждой тележки в отдельности.

Тележка №1. В соответствии с условием задачи масса первой тележки не меняется со временем ( $M(t) = M_0$ ), поэтому, интегрируя (6.11), получим:

$$\ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{k}{M_0}t. \quad (6.12)$$

Таким образом, зависимость скорости первой тележки от времени имеет вид:

$$v_1(t) = v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t}. \quad (6.13)$$

Закон движения первой тележки получаем, интегрируя (6.13):

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t} dt = \frac{M_0 v_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{M_0}t} \right). \quad (6.14)$$

Воспользовавшись законом движения (6.14), находим время, за которое первая тележка пройдет расстояние  $L = 9$  м:

$$t_1 = \frac{M_0}{k} \ln \frac{1}{1 - \frac{Lk}{M_0 v_0}} \cong 23,0 \text{ с}. \quad (6.15)$$

Тележка 2. В соответствии с условием задачи для массы второй тележки можно записать:

$$M(t) = M_0 + kt, \quad (6.16)$$

и уравнение (6.11) принимает вид:

$$\frac{dv_2}{v_2(t)} = -\frac{k dt}{M_0 + kt}. \quad (6.17)$$

После интегрирования (6.17) получаем:

$$\ln \frac{v_2}{v_0} = \ln \frac{M_0}{M_0 + kt}. \quad (6.18)$$

Зависимость скорости второй тележки от времени имеет вид:

$$v_2 = v_0 \frac{M_0}{M_0 + kt}. \quad (6.19)$$

Используя (6.19) находим закон движения второй тележки:

$$x_2 = \int_0^t v_2(t) dt = \int_0^t \frac{M_0 v_0}{M_0 + kt} dt = \frac{M_0 v_0}{k} \ln \left( 1 + \frac{kt}{M_0} \right). \quad (6.20)$$

Воспользовавшись законом движения (6.20), находим время, за которое вторая тележка пройдет расстояние  $L = 9$  м:

$$t_2 = \frac{M_0}{k} \left( e^{\frac{Lk}{M_0 v_0}} - 1 \right) \cong 14,6 \text{ с}. \quad (6.21)$$

III. Проанализируем полученное решение. Масса второй тележки увеличивается со временем, поэтому при падении на нее очередной порции песка ее скорость уменьшается медленнее, чем скорость первой тележки. Графики зависимостей координат тележек от времени показаны на рис. 6.3.

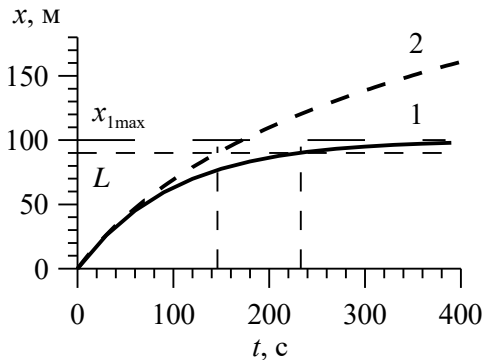


Рис. 6.3. Зависимости координат тележек от времени.

В соответствии с (6.14) координата первой тележки асимптотически стремится к значению  $x_{1\max} = \frac{M_0 v_0}{k} = 10$  м. Скорость второй тележки также уменьшается со временем, однако ее координата будет все время увеличиваться.

**Ответ:** для первой тележки  $v_1(t) = v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t}$ ,

$$x_1(t) = \frac{M_0 v_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{M_0}t} \right), \quad t_1 = \frac{M_0}{k} \ln \frac{1}{1 - \frac{Lk}{M_0 v_0}} \cong 23,0 \text{ с};$$

для второй тележки  $v_2 = v_0 \frac{M_0}{M_0 + kt}$ ,  $x_2 = \frac{M_0 v_0}{k} \ln \left( 1 + \frac{kt}{M_0} \right)$ ,

$$t_2 = \frac{M_0}{k} \left( e^{\frac{Lk}{M_0 v_0}} - 1 \right) \cong 14,6 \text{ с}.$$

**Задача 6.3.2.** (*Движение тела с переменной массой*). Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью жидкостного ракетного двигателя. Начальная масса ракеты (с топливом) равна  $M_0 = 10^5$  кг, а скорость выбрасываемых вертикально вниз газов равна  $u = 2600$  м/с. Найти расход топлива  $\mu(t)$  и массу выброшенных ракетой газов в первую секунду полета.

### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью Земли, ось  $X$  которой направим вертикально вверх. Для анализа условия равновесия будем использовать закон изменения импульса для системы тел «ракета + вылетевшие из нее газы». На эту систему тел действует внешняя сила – сила тяжести.

II. Закон изменения проекции импульса (см. (6.3)) ракеты запишем в виде

$$M(t) \cdot 0 - dm \cdot u = -M(t) g dt. \quad (6.22)$$

Здесь  $M(t)$  – масса ракеты в момент времени  $t$ ;

$$dm = \mu(t) dt \quad (6.23)$$

Масса вылетевших газов за малый промежуток времени  $dt$ .

Дополним это уравнение условием сохранения суммарной массы ракеты и вылетающего газа:

$$dM + dm = 0. \quad (6.24)$$

III. Решим полученную систему уравнений (6.22) – (6.24) относительно расхода топлива  $\mu(t)$ .

Исключая из системы уравнений массу ракеты  $M$  и массу вылетевших из нее газов  $m$ , получаем дифференциальное уравнение относительно  $\mu(t)$ :

$$d\mu(t) \frac{u}{g} = -\mu(t) dt. \quad (6.25)$$

Решаем (6.25) методом разделения переменных:

$$\ln \mu(t) = -\frac{g}{u} t + \text{const}, \quad (6.26)$$

$$\mu(t) = A e^{-\frac{g}{u} t}. \quad (6.27)$$

Константу интегрирования  $A$  в (6.27) определяем из уравнения (6.22), записанного для начального момента времени:

$$A = \mu(0) = \frac{M_0 g}{u}. \quad (6.28)$$

В результате получаем искомое выражение для расхода топлива:

$$\mu(t) = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{g}{u} t}. \quad (6.29)$$

Массу газов, выброшенных ракетой за время  $t$ , находим в результате интегрирования  $\mu(t)$  по времени:

$$m(t) = \int_0^t \mu(t) dt = M_0 \left( 1 - e^{-\frac{g}{u} t} \right). \quad (6.30)$$

При  $t \ll \frac{u}{g}$  масса выбрасываемых газов оказывается пропорциональна времени их истечения:

$$m(t) \cong M_0 \frac{g}{u} t. \quad (6.31)$$

Поскольку по условию задачи  $\frac{u}{g} \cong \frac{2600}{9,8} \text{ с} \cong 260 \text{ с}$ , воспользуемся выражением (6.31) для нахождения искомой массы выброшенных ракетой газов в первую секунду полета:

$$m(t) \Big|_{t=1 \text{ с}} \cong M_0 \frac{g}{u} t \Big|_{t=1 \text{ с}} \cong 384.6 \text{ кг}. \quad (6.32)$$

$$\text{Ответ: } \mu(t) = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{g}{u}t}, \quad m(t)|_{t=1\text{с}} \cong M_0 \frac{g}{u} t \Big|_{t=1\text{с}} \cong 384.6 \text{ кг.}$$

**Задача 6.3.3.** (Реактивная сила). На судне массой  $M = 200$  т установлен водометный двигатель, выбрасывающий каждую секунду  $\mu = 200$  кг/с воды с относительной скоростью  $u = 5$  м/с. Определить скорость судна через 5 минут после старта без начальной скорости. Сопротивление воды движению судна не учитывать.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально, положительное направление оси  $X$  совпадает с направлением движения судна. Система тел «судно – выбрасываемая с кормы вода» является замкнутой вдоль оси  $X$ , поскольку силами сопротивления можно пренебречь по условию задачи.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса на ось  $X$  для выбранной системы тел для моментов времени  $t$  и  $t+dt$ . Учтем при этом, что масса судна  $M$  в процессе движения не меняется, так как насос водометного двигателя закачивает воду из водоема и тут же выбрасывает ее обратно с кормы судна, учтем также, что импульс закачиваемой воды равен нулю:

$$MV + dm \cdot 0 = M(V + dV) + dmV_1, \quad (6.33)$$

где  $V$  и  $V_1$  – скорости судна и выбрасываемой воды относительно берега соответственно, а

$$dm = \mu \cdot dt - \quad (6.34)$$

масса выброшенной воды за малый промежуток времени  $dt$ .

Проекция на ось  $X$  скорости воды  $V_1$  связана с проекциями скорости судна  $V$  и относительной скорости выбрасываемой воды  $u$  следующим образом:

$$V_1 = V - u. \quad (6.35)$$

III. В результате преобразования системы уравнений (6.33) – (6.35) получаем:

$$M \frac{dV}{dt} = \mu(u - V). \quad (6.36)$$

Уравнение (6.36) решаем методом разделения переменных относительно  $V$ :

$$\int_0^V \frac{dV}{u-V} = \int_0^t \frac{\mu}{M} dt, \quad (6.37)$$

$$\ln \frac{u-V}{u} = -\frac{\mu}{M} t; \quad (6.38)$$

$$u-V = ue^{-\frac{\mu}{M}t}. \quad (6.39)$$

Полученный закон изменения скорости позволяет определить искомую скорость судна через 5 минут после старта:

$$V = u(1 - e^{-\frac{\mu}{M}t}) \cong 1,3 \text{ м/с}. \quad (6.40)$$

**Ответ:**  $V = u(1 - e^{-\frac{\mu}{M}t}) \cong 1,3 \text{ м/с}$ .

**Задача 6.3.4.** (*Уравнение Мещерского*). Ракета, масса которой вместе с твердым топливом равна  $M_0=400$  грамм, взлетает вертикально вверх. Время работы двигателя ракеты  $\tau=3$  с, скорость истечения газов  $u=800$  м/с. Определить высоту  $H$ , на которую поднимется ракета. Масса твердого топлива  $m=50$  грамм

### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью Земли, ось  $X$  которой направим вертикально вверх. Для определения высоты подъема определим предварительно зависимость скорости ракеты от времени, затем по известным соотношениям определим высоту, на которую поднялась ракета. Для определения скорости ракеты воспользуемся уравнением Мещерского, в котором учтено, что на ракету действует внешняя сила – сила тяжести.

II. Запишем уравнение Мещерского в выбранной системе координат

$$M(t) \frac{dV}{dt} = \mu \cdot u - M(t)g. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) позволяет определить скорость ракеты в зависимости от времени. Высоту подъема ракеты в момент окончания сгорания топлива определим, используя выражение (1.10) из гл.1.

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} V(t) dt. \quad (6.42)$$

Поскольку в момент времени  $\tau$  скорость ракеты не равна нулю, то после окончания работы двигателей ракета поднимется до высоты

$$H = h(\tau) + \frac{V^2(\tau)}{2g}. \quad (6.43)$$

Систему уравнений (6.41)-(6.43) дополним определением величины расхода топлива

$$\mu = \frac{m}{\tau} \quad (6.44)$$

и зависимостью массы ракеты от скорости

$$M(t) = M_0 - \mu t. \quad (6.45)$$

III. Используя метод разделения переменных определим из (6.41) зависимость скорости от времени

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \frac{\mu u}{M_0 - \mu t'} dt' - gt = - \int_{M_0}^{M(t)} \frac{\mu u}{\xi} \frac{1}{\mu} d\xi - gt = \\ &= -u \ln \frac{M(t)}{M_0} - gt. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Здесь обозначено  $\xi = M(t') = M_0 - \mu t'$ . В отличие от формулы Циолковского (6.7) в (6.46) учтено действие силы тяжести.

Подставляя (6.46) в (6.42) получаем  $h(\tau)$ - высоту, на которой окажется ракета после полного сгорания топлива:

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} V(t) dt = -u \int_0^{\tau} \ln \frac{M(t)}{M_0} dt - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (6.47)$$

Для удобства интегрирования перейдем к новой переменной

$$\zeta = \frac{M(t)}{M_0} = \frac{M_0 - \mu t}{M_0}. \quad (6.48)$$

Поскольку  $d\zeta = -\frac{\mu}{M_0} dt$ , то (6.47) переписывается в виде



$$h(\tau) = u \int_1^{\frac{M(\tau)}{M_0}} \ln \zeta \frac{M_0}{\mu} d\zeta - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (6.49)$$

Интеграл в правой части (6.49) легко берется, если сделать еще одну замену переменных:

$$\zeta = e^{-\theta}, \quad (6.50)$$

где  $\theta > 0$ . Тогда

$$\ln \zeta \cdot d\zeta = -\theta \cdot d(e^{-\theta}). \quad (6.51)$$

Дальнейшее интегрирование удобно проводить по частям. Для этого введем функцию

$$\psi = -\theta \cdot e^{-\theta}. \quad (6.52)$$

Для этой функции

$$d\psi = -d\theta \cdot e^{-\theta} + \theta \cdot d(e^{-\theta}). \quad (6.53)$$

Отсюда и из (6.51) следует, что

$$\ln \zeta d\zeta = \theta \cdot d(e^{-\theta}) = d(\theta \cdot e^{-\theta}) + d\theta \cdot e^{-\theta}. \quad (6.54)$$

Используя (6.50), (6.51), (6.54) получаем

$$\int \ln \zeta d\zeta = \zeta \ln \zeta - \zeta. \quad (6.55)$$

Таким образом, окончательное выражение для  $h(\tau)$  имеет вид

$$\begin{aligned} h(\tau) &= -u \frac{M_0}{\mu} (\zeta \ln \zeta - \zeta) \Big|_1^{\frac{M(\tau)}{M_0}} - \frac{g\tau^2}{2} = \\ &= u \frac{M_0}{\mu} \left( \frac{M(\tau)}{M_0} \ln \frac{M(\tau)}{M_0} - \frac{M(\tau)}{M_0} - 0 + 1 \right) - \frac{g\tau^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

После подстановки в (6.56) данных задачи и формулы (6.44) выражение для  $h(\tau)$  принимает вид

$$h(\tau) = u\tau \frac{M_0}{m} \left( \frac{M_0 - m}{M_0} \ln \frac{M_0 - m}{M_0} + \frac{m}{M_0} \right) - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (6.57)$$

Для высоты подъема ракеты  $H$  в соответствии с (6.43) и (6.46) получаем

$$H = u\tau \frac{M_0}{m} \left( \frac{M_0 - m}{M_0} \ln \frac{M_0 - m}{M_0} + \frac{m}{M_0} \right) - \frac{g\tau^2}{2} + \frac{\left( u \ln \frac{M_0}{M_0 - m} - g\tau \right)^2}{2g}. \quad (6.58)$$

После подстановки данных задачи получаем

$$H = 800 \cdot 3 \cdot \frac{400}{50} \left( \frac{350}{400} \ln \frac{350}{400} + \frac{50}{400} \right) - \frac{9.8 \cdot 3^2}{2} + \frac{\left( 800 \ln \frac{400}{350} - 9.8 \cdot 3 \right)^2}{2 \cdot 9.8} \approx 407 \text{ м.} \quad (6.59)$$

**Ответ:** 
$$H = u\tau \frac{M_0}{m} \left( \frac{M_0 - m}{M_0} \ln \frac{M_0}{M_0 - m} + \frac{m}{M_0} \right) - \frac{g\tau^2}{2} + \frac{\left( u \ln \frac{M_0}{M_0 - m} - g\tau \right)^2}{2g} \approx 407 \text{ м.}$$

**Задача 6.3.5.** (Уравнение Мещерского). Ракета, поднимается с поверхности с Земли вертикально вверх, имея в начальный момент времени ускорение  $2g$ . Скорость вылетающих газов равна  $u=2600$  м/с. Считая расход топлива  $\mu$  постоянным определить, каким станет ускорение ракеты через  $\tau=20$  с после запуска. Начальная масса ракеты  $M_0=10^3$  кг

### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью Земли, ось  $X$  которой направим вертикально вверх. Для определения ускорения ракеты удобно воспользоваться уравнением Мещерского. Учтем также, что на ракету действует внешняя сила – сила тяжести.

II, III. Запишем уравнение Мещерского для начального момента времени

$$M_0 a = \mu u - M_0 g \quad (6.60)$$

Поскольку ускорение  $a$  в начальный момент времени известно из условия задачи, то из уравнения (6.60) определим расход топлива

$$\mu = \frac{M_0 a + M_0 g}{u} = \frac{3M_0 g}{u} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 9.8}{2600} \approx 11.3 \text{ кг/с} \quad (6.61)$$

Ускорение ракеты через время  $\tau$  после начала полета определим с помощью уравнения Мещерского, записанного в этот момент времени

$$M(\tau)a(\tau) = \mu u - M(\tau)g. \quad (6.62)$$

Учитывая, что  $M(\tau) = M_0 - \mu\tau$ , получаем

$$a(\tau) = \frac{\mu u - M(\tau)g}{M(\tau)} = \frac{\mu u - (M_0 - \mu\tau)g}{M_0 - \mu\tau}. \quad (6.63)$$

Подставляя в (6.63) найденное выражение для расхода топлива (6.61) получаем окончательно

$$a(\tau) = \frac{\frac{3M_0 g}{u}u - (M_0 - \frac{3M_0 g}{u}\tau)g}{M_0 - \frac{3M_0 g}{u}\tau} = \frac{2 + \frac{3g}{u}\tau}{1 - \frac{3g}{u}\tau} g. \quad (6.64)$$

Численное значение ускорения определим после подстановки данных задачи:

$$a(\tau) = \frac{2 + \frac{3g}{u}\tau}{1 - \frac{3g}{u}\tau} g = \frac{2 + \frac{3 \cdot 9.8}{2600}20}{1 - \frac{3 \cdot 9.8}{2600}20} g \approx 2.9 g. \quad (6.65)$$

$$\text{Ответ: } a(\tau) = \frac{2 + \frac{3g}{u}\tau}{1 - \frac{3g}{u}\tau} g \approx 2.9 g.$$

**Задача 6.3.6. (Реактивная сила).** Автономная водяная платформа (платформа с реактивной тягой, способная поддерживать человека над поверхностью воды на высоте нескольких метров) состоит из тела платформы, шланга по которому с помощью внутреннего насоса вода закачивается на платформу, и реактивных двигателей, выбрасывающих воду с большой скоростью (см. рис.6.4). Определить, с какой скоростью должна выбрасываться вода из

платформы, чтобы платформа с человеком находилась в равновесии на высоте  $H=3$  м. Масса платформы с человеком  $M=100$  кг. Диаметр втягивающего шланга  $D=20$  см. Масса подаваемой ежесекундно воды  $\mu=100$  кг/с.

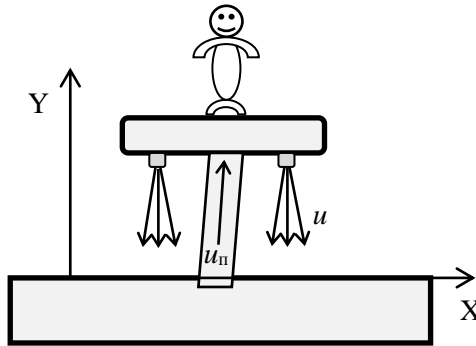


Рис. 6.4. Схема работы водяной платформы

### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью воды, ось  $X$  которой направим вертикально вверх. Для анализа условия равновесия будем использовать закон изменения импульса для системы тел «водяная платформа + попадающая в нее вода + выбрасываемая вода с большой скоростью». Учтем, что на эту систему действует постоянная внешняя сила – сила тяжести.

II, III. В соответствии с (6.1)-(6.4) запишем закон изменения импульса в виде

$$(M \cdot 0 - \mu \cdot dt \cdot u + \mu \cdot dt \cdot u_{\text{п}}) - M \cdot 0 = -(M + \rho SH) g dt. \quad (6.66)$$

Здесь учтено, что масса подаваемой на платформу и выбрасываемой воды одинаковы. Кроме того, введены обозначения:  $u$  – скорость выбрасываемой воды,  $u_{\text{п}}$  – скорость поступающей на платформу воды,  $\rho SH$  – масса воды, постоянно находящейся в вертикальном подающем шланге,  $\rho$  – плотность воды,

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14(0.2)^2}{4} \approx 3.1 \cdot 10^{-2}. \quad (6.67)$$

- площадь сечения подающего шланга.

Для массы ежесекундно подаваемой воды можно записать

$$\mu = \rho \cdot S \cdot u_{\text{п}} \quad (6.68)$$

Подставляя (6.68), (6.67) в (6.66) получаем

$$u = \frac{\mu u_{\text{п}} + (M + \rho SH)g}{\mu} = \frac{\mu \frac{\mu}{\rho S} + (M + \rho SH)g}{\mu}. \quad (6.69)$$

Подставляя численные значения получаем

$$u = \frac{\mu \frac{\mu}{\rho S} + (M + \rho SH)g}{\mu} = \quad (6.70)$$

$$\frac{100^2}{10^3 \cdot 3.1 \cdot 10^{-2}} + \frac{(100 + 10^3 \cdot 3.1 \cdot 10^{-2} \cdot 3) \cdot 9.8}{100} \approx 22.5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Из полученных данных ясно, что предлагаемая установка является энергозатратной, поэтому автономно может работать лишь короткое время. Реальные конструкции водяных платформ (flyboard) не являются автономными – они работают совместно с плавающей частью (обычно скутер), являющейся неотъемлемой частью конструкции

$$\text{Ответ: } u = \frac{\mu \frac{\mu}{\rho S} + (M + \rho SH)g}{\mu} \approx 22.5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Задача 6.3.7.** (Уравнение Мещерского). С поверхности Земли стартует двухступенчатая ракета. Определить скорость ракеты после того, как отработают обе ступени. Массы ступеней  $m_1$  и  $m_2$  соответственно, масса полезного груза -  $m$ . Скорость истечения газов  $u$  в двигателе обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношение массы топлива к массе ступеней ракеты равны соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , время работы первой и второй ступеней  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

### Решение

I. Выберем систему координат, связанную с поверхностью Земли, ось  $X$  которой направим вертикально вверх. Для определения скорости ракеты воспользуемся уравнением Мещерского, в

котором учтем, что на ракету действует внешняя сила – сила тяжести.

II, III. Запишем уравнение Мещерского для первого этапа движения ракеты, когда работает первая ступень

$$M(t) \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} u - M(t)g, \quad (6.71)$$

где  $M(t)$  - масса ракеты.

Приведем уравнение (6.71) к более удобному для интегрирования виду

$$dv = - \frac{dM}{M} u - g dt \quad (6.72)$$

В таком виде левая и правая части уравнения интегрируются отдельно

$$\int_0^{v_1} dv = - \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM}{M} u - \int_0^{\tau_1} g dt. \quad (6.73)$$

Здесь обозначено:

$M_0 = m_1 + m_2 + m$  - стартовая масса ракеты,

$M_1 = (1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m$  - масса ракеты после окончания работы первой ступени (до ее отделения).

После интегрирования (6.73) получаем выражение для скорости после окончания работы первой ступени:

$$v_1 = -u \ln \frac{M_1}{M_0} = -u \ln \frac{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} - g \tau_1. \quad (6.74)$$

Скорость ракеты после окончания работы второй ступени найдем аналогично. Для этого будем интегрировать следующее уравнение

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{M} u - \int_0^{\tau_2} g dt. \quad (6.75)$$

Здесь обозначено  $M_1 = m_2 + m$  - масса ракеты после отделения первой ступени,  $M_2 = (1 - \alpha_2)m_2 + m$  - масса ракеты после окончания работы второй ступени.

После интегрирования (6.75) получаем

$$v_2 = v_1 - u \ln \frac{M_2}{M_1} - g \tau_2 = v_1 - u \ln \frac{(1 - \alpha_2)m_2 + m}{m_2 + m} - g \tau_2. \quad (6.76)$$

Подставляя в (6.76) выражение (6.74) для скорости  $v_1$ , получаем окончательно

$$\begin{aligned}
 v_2 &= -u \ln \frac{(1-\alpha_1)m_1 + m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} - \\
 &- g\tau_1 - u \ln \frac{(1-\alpha_2)m_2 + m}{m_2 + m} - g\tau_2 = \\
 &u \ln \left( \frac{m_1 + m_2 + m}{(1-\alpha_1)m_1 + m_2 + m} \cdot \frac{m_2 + m}{(1-\alpha_2)m_2 + m} \right) - g(\tau_1 + \tau_2).
 \end{aligned}
 \tag{6.77}$$

**Ответ:**

$$v_2 = u \ln \left( \frac{m_1 + m_2 + m}{(1-\alpha_1)m_1 + m_2 + m} \cdot \frac{m_2 + m}{(1-\alpha_2)m_2 + m} \right) - g(\tau_1 + \tau_2).$$

**Задача 6.3.8. (Реактивная сила).** Тело скользит по горизонтальным рельсам. Истечение газа происходит вертикально вниз с постоянной скоростью  $u$ . Начальная скорость тела равна  $V_0$ , начальная масса –  $m_0$ . Расход газа равен  $\mu$ . Найти закон изменения скорости тела и закон его движения предполагая, что тело не отрывается от рельсов. Коэффициент трения скольжения равен  $k$ .

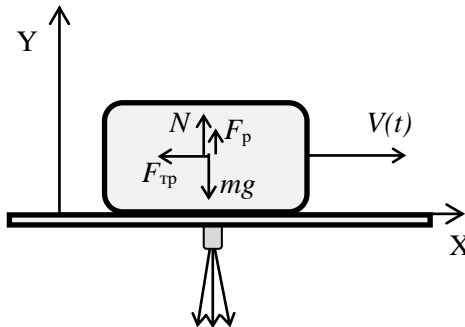


Рис. 6.5. Силы, действующие на движущееся тело.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально, положительное направление

ние оси  $X$  совпадает с направлением движения тела. Ось  $Y$  направим вертикально вверх. На тело действует реактивная сила, направленная вверх. Ее действие приводит к уменьшению силы реакции опоры, что в свою очередь приводит к уменьшению силы трения.

II. Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси системы координат.

На ось  $X$

$$ma = F_{\text{тр}} \quad (6.78)$$

На ось  $Y$

$$0 = N - mg + F_p \quad (6.79)$$

Дополним эти уравнения определением реактивной силы и силы трения скольжения

$$F_p = \mu \cdot u, \quad (6.80)$$

$$F_{\text{тр}} = -kN, \quad (6.81)$$

а также связью скорости тела с его ускорением и зависимостью координаты от времени с зависимостью скорости от времени

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt' \quad (6.82)$$

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' \quad (6.83)$$

Для заданных условий задачи масса тела зависит от времени:

$$m(t) = m_0 - \mu t. \quad (6.84)$$

III. Найдем зависимость ускорения от времени, подставив (6.84) и (6.79)-(6.81) в (6.78)

$$a = \frac{kN}{m} = -\frac{k(mg - \mu u)}{m} = -kg + k \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}. \quad (6.85)$$

Очевидно этим соотношением можно пользоваться для случая  $N \geq 0$  или

$$\mu u \leq m(t)g \quad (6.86)$$

Зависимость скорости от времени получаем, подставляя (6.85) в (6.82):



$$\begin{aligned}
 v &= v_0 - \int_0^t \left( kg - k \frac{\mu u}{m_0 - \mu t'} \right) dt' = \\
 &= v_0 - kgt - u \ln(m_0 - \mu t') \Big|_0^t = v_0 - kgt - u \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0}.
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

Подставляя (6.87) в (6.83) находим исходное соотношение для определения зависимости координаты от времени:

$$\begin{aligned}
 x &= \int_0^t \left( v_0 - kgt - u \ln \frac{(m_0 - \mu t')}{m_0} \right) dt' = \\
 &= v_0 t - \frac{kgt^2}{2} - \int_0^t \left( u \ln \frac{(m_0 - \mu t')}{m_0} \right) dt'.
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

Интеграл в последнем выражении удобно взять по частям, так как это было реализовано в задаче 6.3.4. Получаем окончательно

$$x = v_0 t - \frac{kgt^2}{2} - u \frac{m_0}{\mu} \left( \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} - \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} + 1 \right). \tag{6.89}$$

**Ответ:**  $v = v_0 - kgt - u \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0}$  (при  $\mu u \leq m(t)g$ ),

$$x = v_0 t - \frac{kgt^2}{2} - u \frac{m_0}{\mu} \left( \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} \ln \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} - \frac{(m_0 - \mu t)}{m_0} + 1 \right)$$

(при  $\mu u \leq m(t)g$ ).

#### 6.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.4.1** ([3], 1.137). Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью  $u$ , постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты  $v$  в тот момент, когда ее масса равна  $m$ , если в начальный момент она имела массу  $m_0$  и ее скорость была равна нулю.

*Ответ:*  $v = -u \ln \frac{m_0}{m}$ .

**Задача 6.4.2** ([3], 1.139). Ракета начала подниматься вертикально вверх в однородном поле силы тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна  $m_0$ . Скорость газовой струи относитель-

но ракеты равна  $u$ . Найти скорость ракеты в зависимости от ее массы  $m$  и времени подъема  $t$ .

$$\text{Ответ: } v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

**Задача 6.4.3** ([3], 1.140а). Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью  $u = 900$  м/с. Найти время, которое ракета может находиться в состоянии покоя, если начальная масса топлива составляет  $\eta = 25\%$  ее массы (без топлива).

$$\text{Ответ: } t = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta) = 20 \text{ с.}$$

**Задача 6.4.4** ([3], 1.142). Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы  $F$ , направленной с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью  $\mu$  кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент  $t$ , если в момент  $t = 0$  тележка с песком имела массу  $m_0$  и ее скорость была равна нулю.

$$\text{Ответ: } a = \frac{F}{m_0 - \mu t}, \quad v = \frac{F}{\mu} \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right)$$

**Задача 6.4.5** ([3], 1.143). Платформа массы  $m_0$  начинает двигаться вправо под действием постоянной силы  $F$ . Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна  $\mu$  кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы при погрузке.

$$\text{Ответ: } a = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}, \quad v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}.$$

**Задача 6.4.6** ([3], 1.144). Цепочка длины  $l$  находится в гладкой горизонтальной трубке так, что часть ее длины  $h$  свободно свешивается, касаясь одним своим концом поверхности стола. В некоторый момент другой конец цепочки отпустили. С какой скоростью он выскочит из трубки?

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{2gh \ln \frac{l}{h}}.$$

**Задача 6.4.7** ([2], 201). В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углем, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги, если на нее погружают 10 т угля за 2 с, и за это время она проходит равномерно 10 м? Трением при движении платформы можно пренебречь.

*Ответ:*  $F = \frac{\Delta m_1 v}{\Delta t}$ , где  $\Delta m_1$  – масса угля,  $\Delta t$  – время, за которое эта масса погружена на платформу.

**Задача 6.4.8** ([2], 250). С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой ( $m_1$ ) и второй ( $m_2$ ) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массы  $m$ ) получается максимальной? Скорость истечения газов  $u$  в двигателе обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношение массы топлива к массе ступеней ракеты равны соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для первой и второй ступеней. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

$$\text{Ответ: } \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}} - \sqrt{\frac{m}{m_1 + m_2 + m}}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \frac{m}{m_1 + m_2 + m}}} \sqrt{\frac{m}{m_1 + m_2 + m}}$$

## ГЛАВА 7

### РАБОТА СИЛЫ. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

#### 7.1. Теоретический материал

##### А. Работа сил

**Работа силы  $F$**  при бесконечно малом перемещении  $d\mathbf{r}$  материальной точки, на которую действует сила (**точки приложения силы**), равна скалярному произведению силы на это перемещение:

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.1)$$

**Работа силы  $F$**  при конечном перемещении материальной точки, на которую действует сила, равна:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.2)$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  – радиус-векторы точки в начальный и конечный моменты времени.

Заметим, что в общем случае работа силы зависит от выбора системы отсчета, а также от траектории движения материальной точки, на которую действует сила (не только от начального и конечного положения материальной точки).

**Мощность силы** – физическая величина, численно равная работе, совершаемой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.3)$$

**Потенциальная сила  $F^p$**  – сила, работа которой не зависит от вида траектории, а только от начального и конечного положений точки приложения силы. Работа потенциальной силы по замкнутой траектории равна нулю<sup>1</sup>.

**Потенциальные силы**, действующие на тела системы, могут быть **внутренними  $F^{p,in}$**  и **внешними  $F^{p,ex}$** .

---

<sup>1</sup>Здесь и далее рассматриваются только **стационарные** потенциальные силы, которые явно не зависят от времени, а только от координат тел системы, которые сами могут зависеть от времени.

**Центральные силы** – силы, направленные вдоль прямой, соединяющей точку их приложения с единым силовым центром, модуль которых зависит только от расстояния до этого центра:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы относительно силового центра, а  $r = |\mathbf{r}|$  – расстояние от этой точки до силового центра.

**Центральные силы потенциальны.** Рассмотрим два случая.

1. Одиночная центральная сила.

Если выбрать начало системы отсчета  $S$  в силовом центре  $O$  (см. рис. 7.1), то работа силы (7.1) при физически бесконечно малом перемещении точки ее приложения относительно выбранной системы отсчета равна:

$$dA = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = F(r) dr. \quad (7.5)$$

Здесь учтено, что

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r}. \quad (7.6)$$

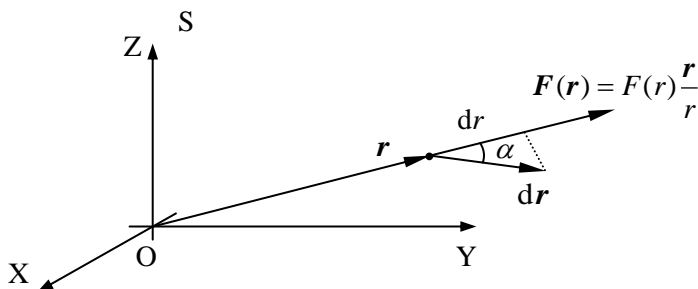


Рис. 7.1. Центральная сила с неподвижным относительно системы отсчета  $S$  силовым центром  $O$ .

Работа центральной силы при конечном перемещении ее точки приложения равна

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = f(r_2) - f(r_1), \quad (7.7)$$

где  $f(r)$  – первообразная функции  $F(r)$ .

Как видим, работа центральной силы относительно системы отсчета жестко связанной с силовым центром зависит лишь от расстояний до силового центра.

## 2. Парные центральные силы.

**Парные центральные силы** – это две силы,  $F_1$  и  $F_2$ , которые одинаковы по модулю, противоположно направлены вдоль прямой, соединяющей точки приложения этих сил (см. рис. 7.2) –  $F_1 = -F_2$ , и модули которых зависят только от расстояния между точками их приложения. Для парных центральных сил

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = F(r_{12}) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (7.8)$$

и работа этих сил зависит лишь от расстояния между точками их приложения:

$$\begin{aligned} dA &= \delta A_{12} + \delta A_{21} = \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \\ &= \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = F(r_{12}) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot d\mathbf{r}_{12} = F(r_{12}) d r_{12}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

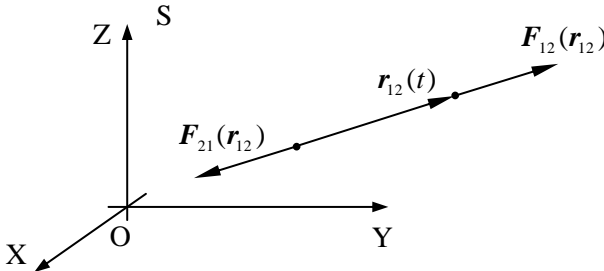


Рис. 7.2. Взаимная ориентация парных центральных сил.

**Постоянные силы** – силы, которые не зависят от точки их приложения. Эти силы образуют однородное силовое поле.

**Постоянные силы** потенциальны (однородное силовое поле потенциально):

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (7.10)$$

**Силы упругости потенциальны.** При упругом взаимодействии двух произвольно движущихся материальных точек упругая сила, действующая на одну из материальных точек, в общем случае

не является потенциальной, а обе – потенциальны, поскольку они являются парными и центральными.

**Непотенциальные силы**  $F^{np}$  – силы, работа которых зависит не только от начального и конечного положений точки приложения силы, но и от вида ее траектории.

Силы трения (см. п. 4.1.В в Главе 4) являются непотенциальными силами.

Работа силы трения может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от взаимной ориентации силы и перемещения материальной точки, на которую она действует.

Работа пары сил трения покоя, возникающих при взаимодействии двух тел, равна нулю<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} dA &= F_{n1} \cdot dr_1 + F_{n2} \cdot dr_2 = \\ &= (F_{n1} + F_{n2}) \cdot dr_1 = (F_{n1} - F_{n1}) \cdot dr_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь использован третий закон Ньютона ( $F_{n2} = -F_{n1}$ ) и условие неподвижности одного тела относительно другого  $dr_2 = dr_1$ .

Работа пары сил трения скольжения всегда отрицательна:

$$\begin{aligned} dA &= F_{ck1} \cdot dr_1 + F_{ck2} \cdot dr_2 = F_{ck1} \cdot dr_1 - F_{ck1} \cdot dr_2 = \\ &= F_{ck1} \cdot (dr_1 - dr_2) = F_{ck1} \cdot v_{отн} dt < 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где  $v_{отн}$  – скорость движения первого тела относительно второго. При записи (7.12) использован третий закон Ньютона ( $F_{ck2} = -F_{ck1}$ ) и закон Амонтона–Кулона для определения направления силы трения скольжения (см. (4.11) в Главе 4).

## Б. Энергия механической системы

**Потенциальная энергия механической системы**  $E^p$  – физическая величина, равная сумме работ потенциальных сил, действующих на тела системы, при изменении положения тел системы в пространстве из данного (состояние 1) в любое наперед заданное (состояние 0), называемое нулем отсчета потенциальной энергии:

$$dE^p = -\sum_i F_i^p \cdot dr_i = -dA^p, \quad (7.13)$$

---

<sup>2</sup>Это утверждение справедливо для любой пары сил, возникающих при взаимодействии двух неподвижных относительно друг друга тел.

$$E^p = E_1^p - E_0^p = \int_0^1 dE^p = -\int_0^1 dA^p = A_{1 \rightarrow 0}^p. \quad (7.14)$$

Поскольку потенциальные силы могут быть внутренними и внешними, то в общем случае потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий взаимодействия тел системы друг с другом (конфигурации системы)  $E^{p, \text{in}}$  и с внешними по отношению к системе телами (во внешних полях, которые должны быть стационарны)  $E^{p, \text{ex}}$ :

$$\begin{aligned} dE^p &= -\left( \sum_i \mathbf{F}_i^{p, \text{in}} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{p, \text{ex}} \cdot d\mathbf{r}_i \right) = -\left( dA^{p, \text{in}} + dA^{p, \text{ex}} \right) = \\ &= dE^{p, \text{in}} + dE^{p, \text{ex}}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$E_1^p = E_1^{p, \text{in}} + E_1^{p, \text{ex}} = A_{1 \rightarrow 0}^{p, \text{in}} + A_{1 \rightarrow 0}^{p, \text{ex}}. \quad (7.16)$$

**Кинетическая энергия материальной точки** – физическая величина, равная:

$$E^k = \frac{m\nu^2}{2}. \quad (7.17)$$

**Кинетическая энергия механической системы** – сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит механическая система:

$$E^k = \sum_i E_i^k = \sum_i \frac{m_i \nu_i^2}{2}. \quad (7.18)$$

**Механическая энергия системы** – сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы:

$$E = E^k + E^p. \quad (7.19)$$

**Закон изменения механической энергии системы** – изменение механической энергии системы равно работе внутренних  $\mathbf{F}_i^{\text{np, in}}$  и внешних  $\mathbf{F}_i^{\text{np, ex}}$  непотенциальных<sup>3</sup> сил:

$$dE = -\left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{np, in}} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{np, ex}} \cdot d\mathbf{r}_i \right) =$$

---

<sup>3</sup>Если при записи потенциальной энергии механической системы была учтена работа не всех потенциальных сил, то при использовании закона изменения механической энергии системы эту работу необходимо добавить к работе непотенциальных сил в (7.20) и (7.21).



$$= -(\delta A^{\text{np.in}} + \delta A^{\text{np.ex}}) = \delta A^{\text{np}}, \quad (7.20)$$

или для конечного интервала времени

$$\Delta E = \Delta A^{\text{np}}. \quad (7.21)$$

Этот закон является в механике Ньютона "теоремой" и может быть получен из второго и третьего законов Ньютона.

**Закон сохранения механической энергии системы** – если работа всех непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:<sup>4</sup>

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = 0 \quad \text{или} \quad E(t_1) = E(t_2). \quad (7.22)$$

Закон сохранения механической энергии системы является прямым следствием закона ее изменения (7.21).

**Консервативная система** – механическая система, для которой сохраняется ее механическая энергия.

## 7.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач на законы сохранения (или изменения) для механической системы можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- 1) закон сохранения (или изменения) импульса (см.гл.5,6),
- 2) определение работы силы,
- 3) закон изменения механической энергии,
- 4) закон сохранения механической энергии,
- 5) одновременное использование законов сохранения (изменения) импульса и механической энергии,
- 6) соударения тел (гл.8).

При решении задач данной главы необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.

---

<sup>4</sup>В случае, когда под потенциальной энергией системы понимается потенциальная энергия ее конфигурации, закон сохранения механической энергии формулируется так – если работа внешних сил и внутренних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы сохраняется.

2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Провести анализ действующих на тела системы сил (потенциальные и непотенциальные силы), используя законы, описывающие их индивидуальные свойства.
5. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).
6. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Выбрать законы сохранения (изменения) и записать их в выбранной системе отсчета для выбранной механической системы и выбранного интервала времени в рамках выбранной модели.
2. Записать уравнения движения отдельных тел в проекциях на оси выбранной системы координат.
3. Записать уравнения кинематических связей.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечание.

Пункты I.6 – II.3 в случае необходимости выполняются неоднократно.

### 7.3. Примеры решения задач

**Задача 7.3.1. (Работа силы).** Небольшое тело массой  $m$  медленно затаскивают на горку, действуя силой, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (см. рис.7.3). Опреде-

лить работу этой силы, если высота горки  $h$ , а длина ее основания  $l$ . Коэффициент трения между поверхностью горки и телом равен  $\mu$

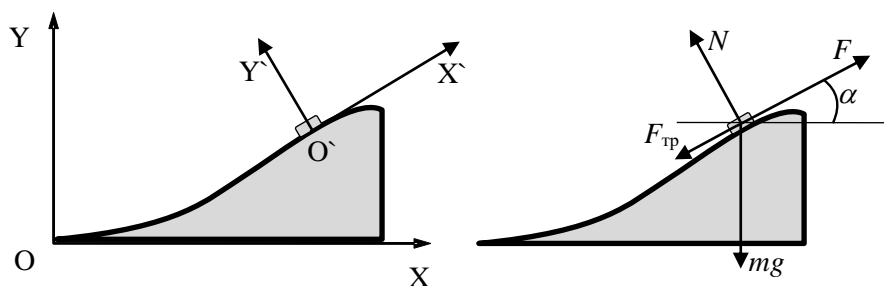


Рис. 7.3. Выбор основной и вспомогательной систем координат и силы, действующие на тело в процессе движения.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 7.3. Ось  $OX$  направим горизонтально слева направо, ось  $OY$  направим вертикально вверх. Начало системы координат совпадает с точкой, из которой тело начинает свое движение. Для удобства выберем также вспомогательную систему координат, начало которой совпадает с той точкой, где в данный момент находится материальная точка. Ось  $O'X'$  этой системы координат направим по касательной вдоль траектории движения материальной точки, ось  $O'Y'$  – перпендикулярно траектории движения так, как показано на рис. 7.3. В соответствии с условием задачи тело будем считать материальной точкой. В процессе движения на тело действуют четыре силы (см. рис. 7.3): сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $N$ , сила трения  $F_{\text{тр}}$  и сила  $F$ . Причем сила  $F$  зависит от координаты тела, так как профиль горки произвольный.

II, III. Элементарная работа  $\delta A$  силы  $F$  на элементарном участке перемещения материальной точки  $ds$  равна:

$$\delta A = F dr. \quad (7.23)$$

Здесь учтено, что сила направлена по касательной к поверхности горки.

Поскольку движение происходит бесконечно медленно, то величину силы  $F$  определим из уравнения движения материальной точки. В проекции на ось  $O'X'$  оно имеет вид.

$$0 = F - F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha . \quad (7.24)$$

В проекции на ось ОУ':

$$0 = N - mg \cos \alpha . \quad (7.25)$$

Для силы трения в соответствии с законом Амонтона-Кулона запишем

$$F_{\text{тр}} = \mu N . \quad (7.26)$$

Подставляя (7.24) – (7.26) в (7.23) получаем

$$\delta A = F ds = (mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) ds = mg dy + \mu mg dx . \quad (7.27)$$

Здесь учтено, что  $ds \sin \alpha = dy$  и  $ds \cos \alpha = dx$ . Полную работу находим, интегрируя по всей траектории движения

$$A = \int_1^2 F ds = \int_0^h mg dy + \int_0^l \mu mg dx = mgh + \mu mgl \quad (7.28)$$

Таким образом, при медленном подъеме полная работа не зависит от профиля горки. Очевидно, что при подъеме с конечной скоростью в уравнениях (7.23) и (7.24) левые части будут ненулевыми. В этом случае полная работа будет определяться профилем горки.

**Ответ:**  $A = mgh + \mu mgl$ .

**Задача 7.3.2.** (Закон изменения механической энергии). Два шарика с одинаковой массой  $m$ , соединенные нерастянутой пружинкой длиной  $l_0$ , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила  $F$ , направленная вдоль оси пружинки. Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной  $l_{\text{max}}$ . Определить коэффициент упругости пружинки  $k$ .

### Решение

Приложим силу  $F$  к переднему по направлению действия силы шарiku (см. рис. 7.4), поскольку в соответствии с условием задачи в результате действия силы происходит растяжение пружинки.

Выберем систему координат, связанную с горизонтальной поверхностью, направив ось  $X$  вдоль направления действия силы, и обозначим координаты шариков  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  в начальный момент времени и  $x_{11}$ ,  $x_{21}$  в момент максимального сжатия пружины (как показано на рис. 7.4). В этом случае длина нерастянутой пружинки в ис-

ходном состоянии  $l_0 = x_{20} - x_{10}$ , а ее длина в момент максимального растяжения  $l_{\max} = x_{21} - x_{11}$ .

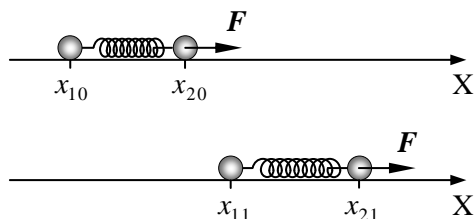


Рис. 7.4. Положение системы тел в начальный и конечный моменты времени.

Движение тел системы, состоящей из двух связанных пружинкой шариков, под действием внешней силы  $F$  из-за изменяющихся во времени внутренних упругих сил будет достаточно сложным. Однако в момент времени, когда расстояние между шариками максимально и равно  $l_{\max}$ , скорости их будут равны, что существенно упрощает решение задачи. В соответствии с условием задачи пренебрежем силами трения и сопротивления воздуха, массой пружинки и размерами шариков. Воспользуемся законом изменения механической энергии и теоремой о движении центра масс для выбранной системы тел.

II. Закон изменения механической энергии (7.21) для системы «два шарика + пружинка» на интервале времени от начала действия силы до момента максимального растяжения пружинки имеет вид:

$$\Delta(E^k + E^p) = 2 \frac{mv^2}{2} + \frac{k(l_{\max} - l_0)^2}{2} = A, \quad (7.29)$$

где  $v$  – скорость шариков в момент максимального растяжения пружины, а работа внешней силы равна

$$A = F(x_{21} - x_{20}). \quad (7.30)$$

Запишем уравнение движения центра масс для рассматриваемой системы «два шарика + пружинка»:

$$2ma_{\text{цм}} = F. \quad (7.31)$$

Поскольку центр масс системы движется равноускоренно с ускорением  $a_{\text{цм}}$ , изменение координаты центра масс будет равно

$$\frac{x_{11} + x_{21}}{2} - \frac{x_{10} + x_{20}}{2} = \frac{v_{\text{цм}}^2}{2a_{\text{цм}}}, \quad (7.32)$$

где  $v_{\text{цм}} = v$  – скорость центра масс в момент максимального растяжения пружины.

III. Подставляя (7.31) в (7.32), выражаем квадрат скорости центра масс через координаты шариков:

$$v_{\text{цм}}^2 = \frac{F}{m} \left( \frac{x_{11} + x_{21}}{2} - \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \right). \quad (7.33)$$

Решая систему уравнений (7.29), (7.30) и (7.33), получаем искомый коэффициент упругости пружинки:

$$k = \frac{F}{(x_{21} - x_{11}) - (x_{20} - x_{10})} = \frac{F}{l_{\text{max}} - l_0}. \quad (7.34)$$

Заметим, что, если приложить силу  $F$  к заднему по отношению к ее направлению шарiku, то в процессе движения тел системы длина пружинки в некоторый момент времени станет минимальной  $l_{\text{min}}$ , при этом коэффициент упругости пружинки определяется со-

отношением  $k = \frac{F}{l_0 - l_{\text{min}}}$ .

Эту задачу можно решить и в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы «два шарика + пружинка» (см. решение задачи 9.1 в главе 9).

**Ответ:**  $k = \frac{F}{l_{\text{max}} - l_0}$ .

**Задача 7.3.3.** (Закон изменения механической энергии). По гладкой внутренней поверхности полусферической чаши радиусом  $R$  из верхней ее точки начинает соскальзывать небольшая шайба. Чаша движется с постоянной скоростью  $v_0$  так, как показано на рис. 7.5. Определить скорость шайбы в тот момент, когда она будет в нижней точке своей траектории.

### Решение

I. Задачу можно решать либо в лабораторной системе отсчета, либо в системе отсчета, движущейся вместе с чашей.

Особенностью решения задачи в лабораторной системе является то, что работа силы нормальной реакции опоры  $N$ , действующей на шайбу, не равна нулю. Поэтому представляется интересным решить задачу в лабораторной системе отсчета.

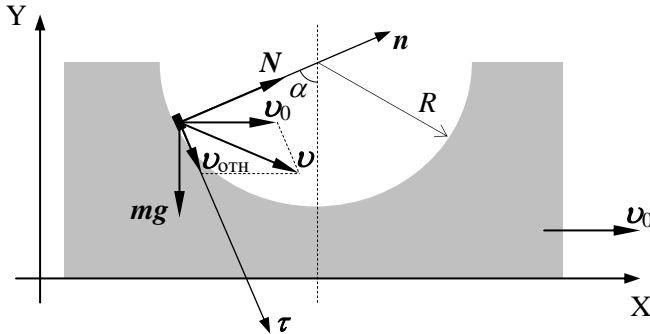


Рис. 7.5. Геометрия системы.

Выберем оси системы координат так, как показано на рис. 7.5. Будем использовать закон изменения механической энергии шайбы за время от начала движения до момента времени, когда она будет в нижней точке своей траектории.

II. Запишем закон изменения механической энергии шайбы (см. (7.21)) в следующем виде:

$$(E_2^p + E_2^k) - (E_1^p + E_1^k) = A, \quad (7.35)$$

где  $E_2^p - E_1^p = -mgR$  и  $E_2^k - E_1^k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}$  – изменение потенциальной и кинетической энергии шайбы за рассматриваемый интервал времени в лабораторной системе отсчета,  $A$  – работа внешних сил. В данном случае внешней является сила нормальной реакции  $N$ , действующая со стороны чаши на шайбу. Для работы этой силы за малый промежуток времени  $dt$  можно записать:

$$\delta A = N \cdot v dt. \quad (7.36)$$

Поскольку сила не меняется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, то для определения силы  $N$  воспользуемся теперь системой отсчета, связанной с чашей. Для этого запишем уравнение движения шайбы относительно этой системы в проекциях на нормальную  $n$  и тангенциальную  $\tau$  оси (рис. 7.5):

$$m \frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = N - mg \cos \alpha, \quad (7.37)$$

$$m \frac{dv_{\text{отн}}}{dt} = mg \sin \alpha, \quad (7.38)$$

где  $m$  – масса шайбы,  $v_{\text{отн}}$  – модуль скорости шайбы относительно чаши,  $\alpha$  – угол между осью  $n$  и вертикалью.

В системе отсчета, связанной с чашей, шайба движется по окружности радиуса  $R$ , следовательно, можно записать (рис. 7.5):

$$v_{\text{отн}} = -R \frac{d\alpha}{dt}. \quad (7.39)$$

В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. теорию к главе 1,) скорость шайбы относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$v = v_0 + v_{\text{отн}}. \quad (7.40)$$

III. Система уравнений (7.35) – (7.40) позволяет определить все кинематические характеристики движения шайбы. Сначала с помощью уравнений (7.37) – (7.40) преобразуем (7.36):

$$\delta A = -3mv_0 \sqrt{\frac{gR \cos \alpha}{2}} \sin \alpha d\alpha. \quad (7.41)$$

Находим работу  $A$  силы нормальной реакции опоры в лабораторной системе отсчета на интервале времени от начала движения до момента нахождения шайбы в нижней точке своей траектории, интегрируя (7.41) по  $\alpha$  в пределах от  $\frac{\pi}{2}$  до 0:

$$A = m\sqrt{2gR}v_0. \quad (7.42)$$

С использованием полученного выражения (7.42) для работы  $A$ , закон изменения механической энергии (7.35) принимает вид:

$$-mgR + \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m\sqrt{2gR}v_0. \quad (7.43)$$

В результате решения (7.43) относительно модуля скорости шайбы в нижней точке траектории получим:

$$v = v_0 + \sqrt{2gR}. \quad (7.44)$$

Существенно проще можно решить задачу, используя закон сохранения механической энергии (7.22) шайбы в инерциальной



системе, связанной с движущейся чашей, поскольку в этой системе отсчета работа силы нормальной реакции  $N$  равна нулю:

$$\frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} - mgR = 0. \quad (7.45)$$

Следовательно, модуль скорости относительного движения шайбы в момент прохождения нижней точки траектории равен

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{2gR}. \quad (7.46)$$

Используя принцип суперпозиции движений (7.40), сразу получаем искомое значение скорости движения шайбы:

$$v = v_0 + v_{\text{отн}} = v_0 + \sqrt{2gR}, \quad (7.47)$$

которое естественно совпадает с полученным ранее решением (7.44).

Как видим, сопоставление двух приведенных вариантов решения задачи еще раз показывает, насколько важным является разумный выбор системы отсчета.

**Ответ:**  $v = v_0 + \sqrt{2gR}$ .

**Задача 7.3.4.** (*Закон изменения механической энергии*). Прямая цепочка массой  $m$  и длины  $l$  лежит на гладкой горизонтальной полуплоскости непосредственно у ее границы с другой полуплоскостью, где коэффициент трения равен  $\mu$ . Цепочка расположена перпендикулярно границе раздела полуплоскостей. С помощью горизонтальной силы  $F$  цепочку перетаскивают на шероховатую полуплоскость. Определить скорость цепочки после того, как она вся окажется на шероховатой полуплоскости.

### Решение

I. Ось  $OX$  декартовой системы координат направим горизонтально перпендикулярно границе раздела полуплоскостей, ось  $OY$  - вертикально вверх, так как показано на рис. 7.6. Будем считать, что все звенья цепочки в каждый момент времени имеют одинаковые скорости. введем в рассмотрение длину отдельного звена цепочки  $d$  и общее число звеньев цепочки  $N$ . Будем считать  $d \ll l$  и  $N \gg 1$ .

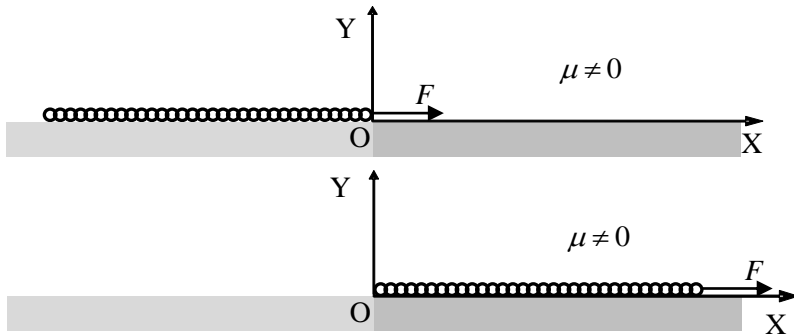


Рис. 7.6. Геометрия системы в начальный и конечный моменты времени.

II, III. В соответствии с теоремой о кинетической энергии, представим кинетическую энергию цепочки как сумму работ внешней силы  $F$  и сил трения при перемещении каждого звена цепочки:

$$\frac{mv^2}{2} = A_F + A_{\text{тр}}. \quad (7.48)$$

Работа силы  $F$  по определению равна

$$A_F = F \cdot l \quad (7.49)$$

Работу силы трения представим как сумму работ сил трения, действующих на каждое звено цепочки

$$A_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N \mu m_i g \Delta x_i. \quad (7.50)$$

Здесь обозначено  $i$  – номер звена ячейки,  $m_i$  и  $\Delta x_i$  ее масса и перемещение по шероховатой поверхности соответственно.

Учитывая, что

$$\Delta x_i = d \cdot i \quad (7.51)$$

Получаем окончательно для работы силы трения

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= \sum_{i=1}^N \mu m_i g d \cdot i = \mu m_i g d \sum_{i=1}^N i = \\ &= \mu m_i g d \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{\mu(m_i N) \cdot g(dN)}{2} = \frac{\mu m g l}{2}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Подставляя (7.49) и (7.52) в (7.48) находим искомую скорость цепочки

$$v = \sqrt{2Fl - \mu mgl} \quad (7.53)$$

**Ответ:**  $v = \sqrt{2Fl - \mu mgl}$

**Задача 7.3.5.** (Законы сохранения импульса и механической энергии). В некоторый момент времени два шарика массами  $m_1$  и  $m_2$ , удаленные от всех остальных тел, находятся на расстоянии  $l_0$  друг от друга и имеют скорости  $v_1$  и  $v_2$ , направленные вдоль линии, соединяющей центры шаров так, как показано на рис. 7.5.

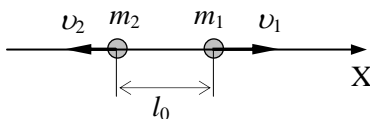


Рис. 7.7. Расположение тел в начальный момент времени.

Найти наибольшее расстояние  $l_{\max}$  между шариками в процессе их движения.

### Решение

I. Поскольку рассматриваемая система тел изолирована, удобно решать задачу в системе отсчета, связанной с центром масс, которая является инерциальной. В этой системе отсчета тела под действием сил гравитационного взаимодействия  $F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$  двигаются по прямой, при этом на максимальном расстоянии друг от друга  $l = l_{\max}$  скорости тел одновременно обращаются в ноль. Положительное направление оси X системы координат выберем совпадающим с направлением движения первого тела в начальный момент времени.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса (см гл.5) системы двух тел для начального (соответствующего рис. 7.7) и конечного (соответствующего максимальному удалению шариков) моментов времени в системе центра масс, используя принцип суперпозиции движений (см. гл.1, п. 1.1):

$$0 - (m_1(v_1 - v_{\text{цм}}) + m_2(-v_2 - v_{\text{цм}})) = 0, \quad (7.54)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_{\text{цм}}$  – модули скоростей шариков и их центра масс на ось X.

Закон сохранения механической энергии (7.22) для рассматриваемой системы и выбранного интервала времени имеет вид:

$$\Delta E^k + \Delta E^p = 0, \quad (7.55)$$

где

$$\Delta E^k = 0 - \left( \frac{m_1(v_1 - v_{\text{цм}})^2}{2} + \frac{m_2(-v_2 - v_{\text{цм}})^2}{2} \right), \quad (7.56)$$

а изменение потенциальной энергии запишем с учетом выражения для работы парных центральных сил (см. п. 7.1.1) гравитационного взаимодействия:

$$\Delta E^p = \int_{l_0}^{l_{\text{max}}} G \frac{m_1 m_2}{l^2} dl = G m_1 m_2 \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{\text{max}}} \right). \quad (7.57)$$

III. Решая записанную систему уравнений (7.54) – (7.57), находим искомое расстояние между телами  $l_{\text{max}}$  в момент их максимального удаления:

$$l_{\text{max}} = \frac{l_0}{1 - \frac{l_0}{G} \cdot \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}. \quad (7.58)$$

Поскольку наибольшее расстояние между шариками в процессе их движения  $l_{\text{max}} > 0$ , то полученное выражение (7.58) имеет смысл при

$$l_0 < G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2}. \quad (7.59)$$

Иначе шарики разлетятся на бесконечно большое расстояние.

$$\text{Ответ: } l_{\text{max}} = \frac{l_0}{1 - \frac{l_0}{G} \cdot \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}} \text{ при } l_0 < G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2},$$

$$l_{\text{max}} = \infty \text{ при } l_0 > G \frac{2(m_1 + m_2)}{(v_1 + v_2)^2}$$

**Задача 7.3.6.** (Закон сохранения механической энергии). Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины

гладкой горки высотой  $H$ , имеющей горизонтальный трамплин (рис. 7.8). При какой высоте  $h$  трамплина шайба пролетит максимальное расстояние? Чему равно это расстояние?

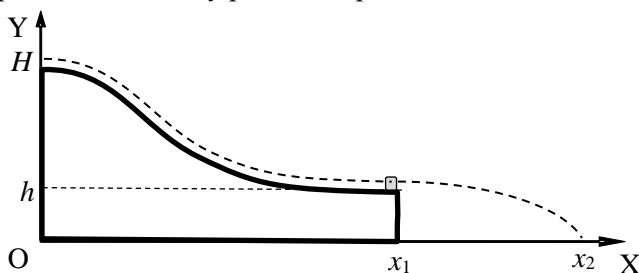


Рис. 7.8. Траектория движения шайбы.

### Решение

I. Выберем оси системы координат так, как показано на рис. 7.8. Будем использовать закон изменения механической энергии шайбы за время от начала движения до момента времени, когда она будет в нижней точке своей траектории. Дальность полета определим так как мы это делали в кинематике.

II. III. Закон сохранения механической энергии применительно к условиям данной задачи имеет вид:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH. \quad (7.60)$$

Поскольку скорость  $v$  направлена вдоль оси  $OX$ , расстояние  $l$ , которое пролетит тело в свободном полете равно

$$l = x_2 - x_1 = v \cdot t_{\text{п}}, \quad (7.61)$$

где  $t_{\text{п}}$  - время полета. Поскольку тело в момент начала полета не имеет вертикальной составляющей скорости, то

$$t_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (7.62)$$

Из (7.60) следует, что

$$v = \sqrt{2g(H-h)}. \quad (7.63)$$

Подставляя (7.62) и (7.63) в (7.61) получаем

$$l = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4(Hh-h^2)}. \quad (7.64)$$

Для определения максимального расстояния, которое пролетит шайба, найдем условия, при котором производная расстояния по высоте  $h$  обращается в ноль. В данном случае удобнее искать производную от квадрата расстояния:

$$\frac{dl^2}{dh} = 4H - 8h = 0. \quad (7.65)$$

Таким образом, расстояние будет максимальным при

$$h = \frac{H}{2}. \quad (7.66)$$

Подставляя ((7.66) в (7.64) находим максимальное расстояние  $l_{\max}$

$$l_{\max} = \sqrt{4(Hh-h^2)} = H. \quad (7.67)$$

**Ответ:**  $h = \frac{H}{2}, l_{\max} = H$

**Задача 7.3.7.** (*Закон сохранения механической энергии*). Небольшое тело начинает скользить с высоты  $H$  по наклонному желобу, плавно переходящему в полуокружность (см.рис.7.9) радиуса  $R = \frac{H}{2}$ . Определить, на какую высоту  $h_n$  поднимется тело после отрыва от желоба.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 7.9. Ось  $OX$  направим горизонтально слева направо, ось  $OY$  - вертикально вверх. Выберем также вспомогательную декартову систему координат. Ось  $OY'$  направлена по радиусу, ось  $OX'$  - вдоль касательной к траектории, начало этой системы координат совпадает с точкой отрыва тела.

II, III. Для определения скорости материальной точки в точке отрыва воспользуемся, как и ранее, законом сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH, \quad (7.68)$$

где  $h$  – высота, на которой происходит «отрыв» тела от направляющей поверхности,  $v$  – скорость тела в этой точке.

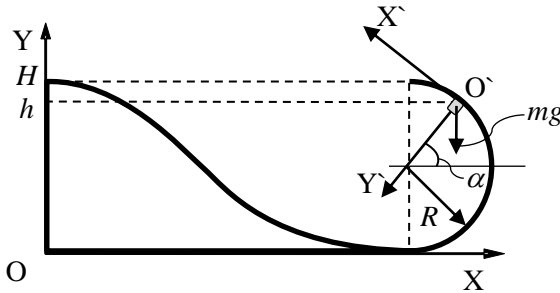


Рис. 7.9. Выбор основной и вспомогательной систем координат.

Для определения неизвестной высоты  $h$  запишем уравнение движения в проекции на ось  $OX'$ . Учтем при этом, что в точке отрыва сила реакции опоры  $N$  обращается в ноль

$$m \frac{v^2}{R} = mg \sin \alpha. \quad (7.69)$$

Дополним (7.68) и (7.69) очевидным геометрическим соотношением

$$\sin \alpha = \frac{h - R}{R} \quad (7.70)$$

Из закона сохранения механической энергии (7.68) следует

$$v = \sqrt{2g(H - h)}. \quad (7.71)$$

Подставляя (7.71) и (7.70) в (7.69) получаем,

$$\frac{2(H - h)}{R} = \sin \alpha = \frac{h - R}{R}. \quad (7.72)$$

Отсюда следует, что

$$h = \frac{2H + R}{3}. \quad (7.73)$$

Скорость в точке отрыва, очевидно равна

$$v = \sqrt{2g(H - h)} = \sqrt{2g\left(H - \frac{2H + R}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}g(H - R)}. \quad (7.74)$$

После отрыва тело поднимется на высоту  $\Delta h$ , определяемую  $v_y$  - вертикальной составляющей ее скорости в точке отрыва:

$$\Delta h = \frac{v_y^2}{2g}. \quad (7.75)$$

Для  $v_y$  можно записать:

$$v_y = v \cos \alpha = v \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = v \sqrt{1 - \frac{(2H - 2R)^2}{9R^2}}. \quad (7.76)$$

Подставляя (7.74) в (7.76) получаем окончательное выражение для  $v_y$ :

$$\begin{aligned} v_y &= \sqrt{\frac{2}{3}g(H-R)} \cdot \sqrt{1 - \frac{(2H-2R)^2}{9R^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{27}g(H-R) \frac{(5R^2 - 4H^2 + 8HR)}{R^2}}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Таким образом, после отрыва тело поднимется на высоту

$$\Delta h = (H - R) \frac{(5R^2 - 4H^2 + 8HR)}{27R^2}. \quad (7.78)$$

Учитывая, что по условию задачи  $R = \frac{H}{2}$ , полная высота подъема  $h_{\text{п}}$  будет равна

$$h_{\text{п}} = h + \Delta h = \frac{2H + R}{3} + (H - R) \frac{(5R^2 - 4H^2 + 8HR)}{27R^2} = \frac{50}{54}H. \quad (7.79)$$

**Ответ:**  $h_{\text{п}} = \frac{50}{54}H.$

**Задача 7.3.8.** (Закон сохранения механической энергии). Механическая система состоит из трех одинаковых тел, соединенных нитью, перекинутой через два блока. Положение тел в начальный момент времени показано на рис. 7.10. На какое максимальное расстояние опустится центральный груз в процессе движения системы, определить его максимальную скорость в процессе движения.

### Решение

I. Направим ось OX декартовой системы координат вниз, так, как показано на рис. 7.10. Поскольку система является консервативной, механическая энергия в ней будет сохраняться. Максимальное значение скорости центрального груза будет наблюдаться



при прохождении системой положения равновесия, так как в этот момент времени потенциальная энергия системы минимальна. Максимальное смещение груза найдем для того момента времени, когда кинетическая энергия системы тел равна нулю.

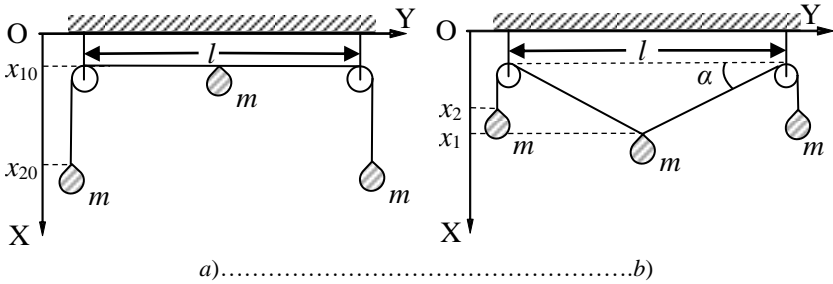


Рис. 7.10. Механическая система, состоящая из трех грузов, связанных нитью: а) – в начальный момент времени, б) – конфигурация системы в процессе движения.

II. Для заданной системы запишем закон сохранения механической энергии

$$E_0 = E(t). \quad (7.80)$$

В начальный момент времени механическая энергия системы равна потенциальной энергии:

$$E_0 = -mgx_{10} - 2mgx_{20}. \quad (7.81)$$

При движении системы потенциальная энергия будет превращаться в кинетическую. В произвольный момент времени энергия будет равна.

$$E = -mgx_1 - 2mgx_2 + \frac{mv_1^2}{2} + 2 \frac{mv_2^2}{2}. \quad (7.82)$$

Здесь  $v_1$  – скорость центрального тела,  $v_2$  – скорость тел, висящих на концах нити.

В нижней точке скорость движения тел равна нулю, поэтому в этой точке механическая энергия определяется только потенциальной энергией:

$$E = -mgx_{11} - 2mgx_{21}. \quad (7.83)$$

Здесь  $x_{11}$  и  $x_{21}$  координаты центрального и боковых тел для момента времени, когда отклонение центрального тела от положения равновесия максимально.

В процессе движения должны выполняться также уравнения кинематической связи. Для центрального и боковых грузов их можно записать, используя нерастяжимость нити. В произвольный момент времени для координаты бокового груза  $x_2$  выполняется следующее соотношение

$$2\frac{l}{2\cos\alpha} + 2(x_2 - x_{10}) = l + 2(x_{20} - x_{10}). \quad (7.84)$$

Кроме того, угол  $\alpha$  связан с положением центрального груза  $x_1$  в процессе движения (см. рис. 7.10)

$$(x_1 - x_{10}) = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.85)$$

Для определения максимальной скорости в процессе движения необходимо определить положение равновесия, поскольку в положении равновесия скорость грузов будет максимальной. Кроме того, необходимо найти связь между  $v_1$  и  $v_2$ .

В положении равновесия сумма сил, действующих на тела равна нулю.

Для центрального груза:

$$mg - 2T \sin \alpha = 0. \quad (7.86)$$

Для боковых грузов:

$$mg - T = 0. \quad (7.87)$$

Для определения связи между  $v_1$  и  $v_2$  воспользуемся (7.84) и (7.85). После дифференцирования по времени (7.84) получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{l}{\cos \alpha} + 2(x_2 - x_{20}) \right) = \frac{l \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \alpha' + 2v_2 = 0. \quad (7.88)$$

После дифференцирования (7.85):

$$v_1 = \frac{l}{2\cos^2 \alpha} \alpha' \quad (7.89)$$

Сопоставляя (7.88) и (7.89) находим уравнение кинематической связи для скоростей в произвольный момент времени:

$$2v_1 \sin \alpha + 2v_2 = 0 \quad (7.90)$$

Система уравнений (7.80) – (7.87), (7.90) является полной.

III. Для определения  $v_1$  – максимальной скорости центрального груза, воспользуемся (7.80) – (7.82):

$$mg(x_1 - x_{10}) + 2mg(x_2 - x_{20}) = \frac{mv_1^2}{2} + mv_2^2. \quad (7.91)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения. Для этого вначале используя (7.85) перепишем (7.84):

$$2 \frac{(x_1 - x_{10})}{\sin \alpha} + 2(x_2 - x_{20}) = l. \quad (7.92)$$

Используя (7.92) и (7.90) преобразуем (7.91) к виду:

$$mg(x_1 - x_{10}) + mg \left( l - 2 \frac{(x_1 - x_{10})}{\sin \alpha} \right) = \frac{m v_1^2}{2} + m v_1^2 \sin^2 \alpha. \quad (7.93)$$

Учтем, что для положения равновесия из (7.86) и (7.87) следует:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}. \quad (7.94)$$

После подстановки (7.85) и (7.94) в (7.93) получаем окончательно:

$$gl \frac{1}{2\sqrt{3}} + g \left( l - l \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3}{4} v_1^2. \quad (7.95)$$

Отсюда получаем выражение для максимальной скорости центрального груза в процессе движения

$$v_1 = \sqrt{2gl \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \right)}. \quad (7.96)$$

Для определения максимального смещения центрального груза ( $x_{11} - x_{10}$ ) от начального положения воспользуемся законом сохранения механической энергии и уравнениями кинематической связи (7.84) и (7.85).

Из (7.80), (7.81) и (7.83) получаем

$$(x_{11} - x_{10}) + 2(x_{21} - x_{20}) = 0. \quad (7.97)$$

Воспользуемся (7.85) и (7.92), записанными для произвольного момента времени:

$$-\frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha = l - 2 \frac{\frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}. \quad (7.98)$$

Это уравнение после преобразований приобретает следующий вид:

$$-\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \quad (7.99)$$

или

$$1 - \frac{1}{2} \sin \alpha = \cos \alpha. \quad (7.100)$$

После возведения левой и правой частей в квадрат получаем

$$\sin^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \sin \alpha. \quad (7.101)$$

Отсюда получаем окончательное выражение для  $\sin \alpha$  в нижней точке для центрального груза

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad (7.102)$$

Этому значению угла соответствует смещение центрального груза

$$(x_{11} - x_{10}) = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha = l \frac{2}{3}. \quad (7.103)$$

**Ответ:**  $(x_{11} - x_{10}) = l \frac{2}{3}, v_1 = \sqrt{2gl \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \right)}$ .

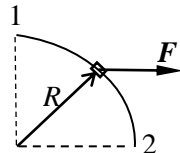
#### 7.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.4.1.** На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых шарика массами  $m_0$ , соединенные невесомой пружиной жесткостью  $k$  и длиной  $l_0$  в недеформированном состоянии. В один из шариков попадает летящая горизонтально вдоль оси пружины со скоростью  $v$  пуля массой  $m$  и застревает в нем. Найти максимальное и минимальное расстояние между шариками в процессе их движения.

**Ответ:**  $l_{\max} = l_0 + \Delta l, l_{\min} = l_0 - \Delta l,$

где  $\Delta l = \nu m \sqrt{\frac{m_0}{(m_0 + m)(2m_0 + m)k}}$ .

**Задача 7.4.2** ([3], 1.147). Небольшая муфточка массой  $m = 0,15$  кг движется по гладкому проводу, изогнутому в горизонтальной плоскости в виде дуги окружности радиусом  $R = 50$  см. В точке 1, где скорость муфточки равна  $v_0 = 7,5$  м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила  $F$ . Найти скорость муфточки в точке 2, если



$F = 30 \text{ Н}$ .

Ответ:  $v = \sqrt{v_0^2 + 2FR/m} = 16 \text{ м/с}$ .

**Задача 7.4.3** ([3], 1.148). Локомотив массой  $m$  начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону  $v = \alpha\sqrt{S}$ , где  $\alpha$  – постоянная,  $S$  – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые  $t$  секунд после начала движения.

Ответ:  $A = \frac{m\alpha^4 t^2}{8}$ .

**Задача 7.4.4** ([3], 1.152). Брусок массой  $m = 2,0 \text{ кг}$  медленно подняли по шероховатой наклонной плоскости на высоту  $h = 51 \text{ см}$  при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу  $A = 16,0 \text{ Дж}$ . На высоте  $h$  нить отпустили. Найти скорость бруска, достигшего первоначального положения.

Ответ:  $v = \sqrt{2(2gh - A/m)} = 2,0 \text{ м/с}$ .

**Задача 7.4.5** ([3], 1.153). Шайба массой  $m = 50 \text{ г}$  соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние  $l = 50 \text{ см}$ , останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения  $\mu = 0,15$ .

Ответ:  $A = -\frac{\mu mgl}{1 - \mu \text{ctg}\alpha} = -0,05 \text{ Дж}$ .

**Задача 7.4.6** ([3], 1.154). К небольшому бруску массой  $m = 50 \text{ г}$ , лежащему на горизонтальной плоскости, приложили постоянную горизонтальную силу  $F = 0,10 \text{ Н}$ . Найти работу сил трения за время движения бруска, если коэффициент трения зависит от пройденного пути  $x$  как  $\mu = \gamma x$ , где  $\gamma$  – постоянная.

Ответ:  $A_{\text{тр}} = -\frac{2F^2}{\gamma mg} = -0,12 \text{ Дж}$ .

**Задача 7.4.7** ([3], 1.155). Два бруска массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные недеформированной пружиной, лежат на горизонтальной

плоскости. Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен  $\mu$ . Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску массы  $m_1$ , чтобы другой брусок сдвинулся с места?

$$\text{Ответ: } F_{\min} = \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \mu g .$$

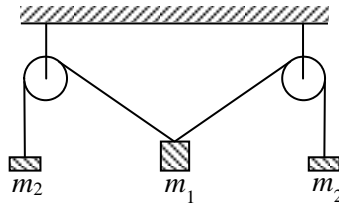
**Задача 7.4.8** ([3], 1.160). Брусок массой  $m = 1,00$  кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $\mu = 0,27$ . В некоторый момент ему сообщили начальную скорость  $v_0 = 1,5$  м/с. Найти среднюю мощность силы трения за все время движения бруска.

$$\text{Ответ: } \langle P \rangle = -\mu mg v_0 / 2 = -2,0 \text{ Вт}.$$

**Задача 7.4.9** ([3], 226). К нити длиной  $l$  прикреплен груз массой  $m$ . Определить, на какую минимальную высоту надо поднять груз  $m$ , чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный покоящийся груз  $M$ , разрывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1%. Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

$$\text{Ответ: } h = 0,005 \frac{M}{m} l - 0,01l .$$

**Задача 7.4.10** ([2], 228). Механическая система находится в положении равновесия в поле силы тяжести. Расстояние между осями блоков равно  $l$ , а отношение масс грузов равно  $m_1/m_2 = \sqrt{2}$ . Среднему грузу толчком сообщают скорость, направленную вниз, после чего он опускается, а затем начинает подниматься вверх. Какую скорость  $v_1$  следует сообщить среднему грузу, чтобы при последующем движении он мог подняться до высоты уровня осей блоков? На какое расстояние  $x$  в результате толчка должен опуститься средний груз? Размерами грузов, блоков, а также трением пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой.



$$\text{Ответ: } v_1 = 0,5\sqrt{gl} , \quad x = l\sqrt{2} .$$

## ГЛАВА 8

## УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ТЕЛ

## 8.1. Теоретический материал

**Удар (соударение)** – это кратковременное взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

**Абсолютно упругий удар (соударение)** – удар, в результате которого суммарная кинетическая энергия тел до соударения равна суммарной кинетической энергии тел после соударения.

**Абсолютно неупругий удар (соударение)** – удар, при котором соударяющиеся тела приобретают одинаковую скорость после соударения.

**Неупругий удар (соударение)** – удар, в результате которого часть суммарной кинетической энергии тел переходит в их внутреннюю энергию.

**Центральный удар (соударение)** – удар, при котором силы упругости, действующие между соударяющимися телами, направлены вдоль прямой, соединяющей центры масс тел.

**Лобовой удар (соударение)** – удар, при котором скорости соударяющихся тел лежат на прямой, соединяющей центры масс тел.

**Импульс (количество движения) материальной точки** – физическая величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (8.1)$$

**Импульс механической системы  $\mathbf{P}$**  – физическая величина, равная сумме импульсов материальных точек, из которых состоит система:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (8.2)$$

**Закон изменения импульса механической системы.** Изменение импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета за физически бесконечно малый интервал времени  $dt$  равно импульсу суммы внешних сил  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$ , действующих на систему в этот интервал времени:

$$d\mathbf{P} = \mathbf{F}^{\text{ex}} dt. \quad (8.3)$$

Для конечного интервала времени

$$\Delta P \equiv P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F^{\text{ex}} dt, \quad (8.4)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени.

**Закон изменения проекции импульса механической системы.** Изменение проекции импульса механической системы относительно инерциальной системы отсчета на неподвижное относительно этой системы направление (задаваемое единичным вектором  $n$ ) равно проекции на то же направление импульса суммы внешних сил, действующих на систему:

$$dP_n = F_n^{\text{ex}} dt, \quad (8.5)$$

$$\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_n^{\text{ex}} dt. \quad (8.6)$$

**Замкнутая механическая система** – это механическая система, для которой сумма всех внешних сил равна нулю:

$$\sum_j F_j^{\text{ex}} = F^{\text{ex}} = 0. \quad (8.7)$$

**Закон сохранения импульса механической системы.** Если механическая система замкнута, то ее импульс относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:

$$\Delta P \equiv P(t_2) - P(t_1) = 0. \quad (8.8)$$

**Замкнутая вдоль направления механическая система** – механическая система, для которой проекция суммы всех внешних сил на неподвижное относительно инерциальной системы отсчета направление  $n$  равна нулю:

$$F_n^{\text{ex}} = 0. \quad (8.9)$$

**Закон сохранения проекции импульса механической системы.** Если система замкнута в данном направлении, то проекция ее импульса относительно инерциальной системы отсчета на это направление сохраняется:

$$\Delta P_n \equiv P_n(t_2) - P_n(t_1) = 0. \quad (8.10)$$

**Кинетическая энергия материальной точки** – физическая величина, равная:



$$E^k = \frac{mv^2}{2}. \quad (8.11)$$

**Кинетическая энергия механической системы** – сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит механическая система:

$$E^k = \sum_i E_i^k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (8.12)$$

**Механическая энергия системы** – сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы:

$$E = E^k + E^p. \quad (8.13)$$

**Закон изменения механической энергии системы.** Изменение механической энергии системы равно работе внутренних и внешних непотенциальных<sup>1</sup> сил.

**Закон сохранения механической энергии системы.** Если работа всех непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы относительно инерциальной системы отсчета сохраняется<sup>2</sup>.

## 8.2. Основные типы задач и методы их решения

Задачи на соударение тел можно классифицировать следующим образом.

Задача об абсолютно упругом соударении тел – найти кинематические или динамические характеристики тел, испытавших абсолютно упругое соударение.

Задача об абсолютно неупругом соударении тел – найти кинематические или динамические характеристики тел, испытавших абсолютно неупругое соударение.

Задача о неупругом соударении тел – найти кинематические или динамические характеристики тел, испытавших неупругое соударение.

---

<sup>1</sup> Если при записи потенциальной энергии механической системы была учтена работа не всех потенциальных сил, то при использовании закона изменения механической энергии системы эту работу необходимо добавить к работе непотенциальных сил.

<sup>2</sup> В случае, когда под потенциальной энергией системы понимается потенциальная энергия ее конфигурации, закон сохранения механической энергии формулируется так – если работа внешних сил и внутренних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы сохраняется.

Для каждого из этих типов задач рассматриваются задачи о лобовом, нелобовом, центральном и нецентральном соударениях.

При решении задач на соударение тел необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все необходимые кинематические или динамические характеристики системы (как правило, это скорости соударяющихся тел или их импульсы).
4. Определиться с типом соударения тел (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать закон сохранения импульса в векторном виде или в проекциях на оси координат для всех тел системы.
2. Записать закон сохранения механической энергии, в случае, если соударение абсолютно упругое.
3. Записать закон сохранения энергии, учитывая то обстоятельство, что часть механической энергии переходит во внутреннюю, если соударение неупругое.
4. Использовать особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 8.3. Примеры решения задач

**Задача 8.3.1.** (*Абсолютно упругий нелобовой удар*). Частица массой  $m_1$  с импульсом  $p_1$ , движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на покоящуюся частицу массой  $m_2$ . В результате абсолютно упругого нелобового удара частица массой  $m_2$

отлетает под углом  $\theta$  к первоначальному направлению движения налетающей частицы. Найти модули импульсов  $p'_1$  и  $p'_2$  частиц после столкновения.

### Решение

I. Рассматриваемая система из двух частиц в любом горизонтальном направлении является замкнутой т.к. трение отсутствует.

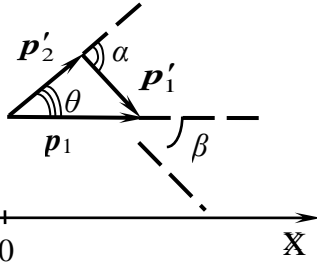


Рис. 8.1. Диаграмма рассеяния двух частиц.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль направления движения налетающей частицы.

II. Запишем законы сохранения импульса и механической энергии на интервале времени («до столкновения», «сразу после столкновения»), а также выражение для скалярного произведения векторов им-

пульсов частиц:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (8.1)$$

$$\frac{(p_1)^2}{2m_1} = \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2}, \quad (8.2)$$

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_1 p'_2 \cos \theta. \quad (8.3)$$

Введем обозначения:  $\alpha$  – угол разлета частиц,  $\beta$  – угол рассеяния (см. рис. 8.1).

III. В соответствии с (8.1), импульс налетающей частицы после соударения равен:

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2. \quad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в (8.2), получаем соотношение:

$$\frac{(p_1)^2}{2m_1} = \frac{(p_1 - p'_2)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2}, \quad (8.5)$$

после чего в результате алгебраических преобразований получаем выражение:

$$\frac{(p_1')^2}{m_1} = \frac{(p_1)^2}{m_1} - \frac{2p_1 p_2'}{m_1} + \frac{(p_2')^2}{m_1} + \frac{(p_2')^2}{m_2}. \quad (8.6)$$

Используя (8.3), находим искомый модуль импульса второй частицы после столкновения:

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \theta. \quad (8.7)$$

Для нахождения модуля импульса первой частицы после столкновения снова рассмотрим векторную диаграмму импульсов (рис. 8.1). По теореме косинусов получаем:

$$(p_1')^2 = (p_1)^2 + (p_2')^2 - 2p_1 p_2' \cos \theta. \quad (8.8)$$

Подставляя в (8.8) выражение (8.7), получаем:

$$(p_1')^2 = (p_1)^2 \left[ 1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \theta \right]. \quad (8.9)$$

Из формул (8.7) и (8.9) следует, что результат зависит от угла  $\theta$  и соотношения масс, что позволяет проанализировать все возможные случаи разлета частиц в результате столкновения. Однако сказать, какой из этих случаев реализуется, на основании только законов сохранения нельзя.

$$\text{Ответ: } p_1' = p_1 \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \theta},$$

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos \theta.$$

**Задача 8.3.2.** (Абсолютно упругий нелобовой удар). Определить максимальный угол рассеяния для двух случаев абсолютно упругого столкновения: тяжелая частица налетает на покоящуюся легкую; легкая частица налетает на покоящуюся тяжелую.

### Решение

I. Будем считать, что система частиц является замкнутой, следовательно, к ней применим закон сохранения импульса.

II, III. Вернемся к результатам решения предыдущей задачи, в частности, к выражению (8.7). Обозначим  $\gamma \equiv \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$ . Случай  $\gamma =$

1 соответствует ситуации, когда массы частиц одинаковы:  $m_1 = m_2$ ; в случае, когда  $\gamma > 1$ , масса налетающей частицы меньше массы покоящейся:  $m_1 < m_2$ ; в случае, когда  $\gamma < 1$ , масса налетающей частицы больше массы покоящейся:  $m_1 > m_2$ . Рассмотрим сначала

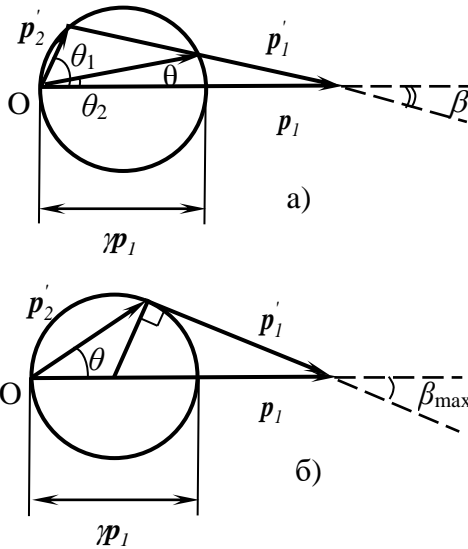


Рис. 8.2. Диаграмма рассеяния для случая  $\gamma < 1$ .

случай, когда тяжелая частица налетает на покоящуюся легкую:  $\gamma < 1$ . Для нахождения максимального угла рассеяния  $\beta_{\max}$  частиц рассмотрим векторную диаграмму (рис. 8.2). Воспользуемся тем, что  $p_2' = \gamma p_1 \cos \theta$ . Отложим по горизонтали вектор  $p_1$  и из начала этого вектора отложим вектор  $\gamma p_1$  (с учетом того, что  $\gamma < 1$ ). Проведем окружность диаметром  $\gamma p_1$  таким образом, чтобы центр ее лежал на прямой, совпадающей с  $p_1$  и чтобы эта окружность проходила

через начало векторов  $p_1$  и  $\gamma p_1$  (точка O). Вектор, начало которого совпадает с точкой O, а конец лежит на окружности, представляет собой вектор, длина которого  $p_2' = \gamma p_1 \cos \theta$ .

Из диаграммы видно, что каждому значению угла рассеяния  $\beta$  соответствует два возможных угла  $\theta$ , под которым может отлететь покоящаяся частица (рис. 8.2, а). Из геометрических соображений ясно, что угол  $\beta$  максимален в том случае, когда вектор  $p_1'$  касается окружности (рис. 8.2., б). Тогда

$$\sin \beta_{\max} = \frac{\left(\frac{1}{2} m_1\right)}{p_1 - \frac{1}{2} m_1} = \frac{\gamma}{2 - \gamma} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (8.10)$$

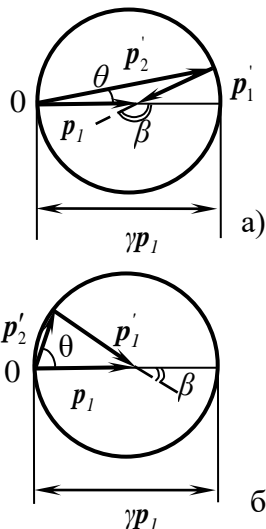


Рис. 8.3. Диаграмма рассеяния для случая  $\gamma > 1$ .

В случае, когда легкая частица налетает на покоящуюся тяжелую,  $\gamma > 1$ . Снова строим векторную диаграмму, учтя при этом, что,  $\gamma > 1$  (рис. 8.3). На диаграммы видно, что угол рассеяния  $\beta$  может меняться в пределах от  $\pi$  (рис. 8.3, а) до 0 (рис. 8.3, б); соответственно, угол  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ , а угол разлета  $\alpha$  — от  $\pi$  до  $\pi/2$ .

Таким образом,  $\beta_{\max} = \pi$ . Заметим, что при этом  $\theta = 0$ , а это соответствует случаю лобового столкновения.

**Ответ:** 1)  $\beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ ,

2)  $\beta_{\max} = \pi$ .

**Задача 8.3.3.** (Абсолютно упругий лобовой удар). Два идеально упругих шарика массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой по абсолютно гладкой поверхности со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Во время столкновения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации в момент, когда она максимальна.

### Решение

I. Система из двух шаров в направлении движения шаров является замкнутой, трение отсутствует. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль линии,

соединяющей центры шаров, в направлении движения одного из шаров.

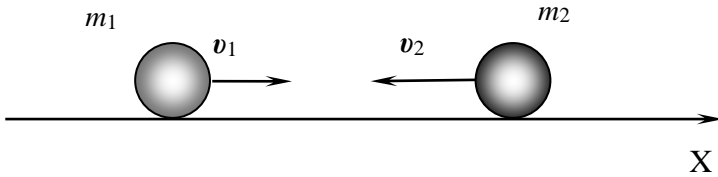


Рис. 8.4. Два шара перед абсолютно упругим лобовым соударением.

II. Запишем законы сохранения механической энергии и импульса для двух моментов времени: первый момент – перед соударением, второй момент – тот, в который энергия упругой деформации максимальна. Закон сохранения импульса для рассматриваемых моментов в проекциях на ось X имеет вид:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (8.11)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} + E_{\text{упр}}. \quad (8.12)$$

Здесь  $v'_1$  и  $v'_2$  – скорости первого и второго шаров в момент, когда энергия упругой деформации максимальна,  $E_{\text{упр}}$  – величина этой энергии.

Заметим также, что в момент, когда деформация максимальна, происходит остановка шаров друг относительно друга, поэтому в этот момент их скорости относительно выбранной лабораторной системы отсчета равны между собой:

$$v'_1 = v'_2 = u. \quad (8.13)$$

III. Решая систему уравнений (8.11) – (8.13), находим искомое значение максимальной энергии упругой деформации:

$$E_{\text{упр}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (8.14)$$

**Ответ:**  $E_{\text{упр}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$

**Задача 8.3.4.** (Абсолютно упругий лобовой удар). На гладкой горизонтальной поверхности находятся три идеально упругих шара

массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . Центры шаров лежат на одной прямой (см. рис. 8.5). Первому шару сообщают скорость  $v_1$ , в результате чего он ударяет второй шар, а второй шар – третий. Какова должна быть масса второго шара, чтобы скорость третий отлетел с максимальной скоростью?

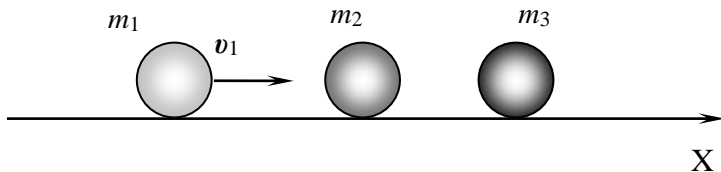


Рис. 8.5. Три шара перед абсолютно упругими лобовыми соударениями.

### Решение

I. Система из трех шаров в направлении движения шаров является замкнутой, трение отсутствует. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении движения первого шара.

II, III. Пусть  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  – скорости шаров после столкновений. Поскольку система замкнута и трение отсутствует, запишем законы сохранения механической энергии и импульса для первого и второго шара для моментов времени «до столкновения» и «сразу после столкновения»:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \quad (8.15)$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (8.16)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для второго и третьего шара.

Решая совместно уравнения (8.15) и (8.16), определим скорость второго шара после столкновения:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (8.17)$$

Очевидно, что соотношения, аналогичные (8.15) и (8.16) можно записать и для случая столкновения второго и третьего шаров. Применим результат предыдущих рассуждений к этому случаю,



тогда скорость третьего шара после столкновения со вторым будет определяться соотношением, аналогичным (8.17):

$$u_3 = \frac{2m_2 u_2}{m_2 + m_3}. \quad (8.18)$$

По условию задачи масса второго шара  $m_2$  должна быть такой, чтобы скорость  $u_3$  была максимальной. Для нахождения  $m_2$  дифференцируем (8.18) по  $m_2$  и приравниваем производную к нулю, в результате чего получаем выражение для искомой массы второго шара:

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}. \quad (8.19)$$

**Ответ:**  $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ .

**Задача 8.3.5.** (Абсолютно упругий нелобовой удар). Два одинаковых гладких шара радиуса  $R$  скользят по гладкой горизонтальной

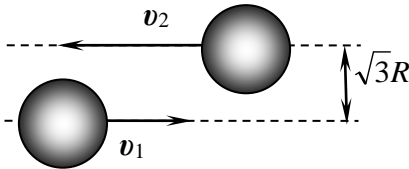


Рис. 8.6. Два одинаковых шара перед абсолютно упругим соударением.

поверхности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Прицельное расстояние между шарами равно  $\sqrt{3}R$  (рис. 8.6). Между шарами происходит абсолютно упругий удар. Определить скорости шаров после соударения.

### Решение

I. Система шаров в направлении движения шаров является замкнутой, трение отсутствует. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении движения первого шара, ось  $Y$  – перпендикулярно ей.

II. В момент удара между шарами возникают силы взаимодействия. Поскольку шары гладкие, то касательная составляющая этих сил отсутствует, а нормальная составляющая представляет собой силу упругости. По третьему закону Ньютона силы, действующие

на один и другой шар, равны друг другу. По условию задачи шары одинаковые, и для каждого шара можно записать второй закон Ньютона:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F . \quad (8.20)$$

Здесь  $m$  – масса каждого из шаров,  $\Delta v$  – вектор изменения его скорости,  $F$  – сила упругости, возникающая в момент удара. Из (8.20) следует, что в результате удара изменение скорости шаров  $\Delta v$  в результате удара будет одинаковым.

Положение шаров в момент удара показано на рис. 8.7. Обозначим угол, который составляет вектор  $\Delta v$  с осью  $Y$  за  $\alpha$ , тогда  $\Delta v_x$  и  $\Delta v_y$  – проекции на оси координат вектора изменения скорости шаров.

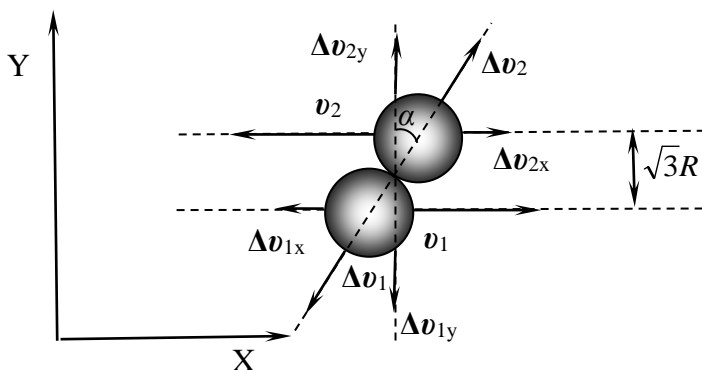


Рис. 8.7. Положение шаров и векторы их скоростей в момент удара.

На рис. 8.7 видно, что  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ .

Запишем выражения для проекций изменения скорости шаров на оси координат. Пусть  $\Delta v_{1x}$ ,  $\Delta v_{1y}$  – проекции для первого шара, а  $\Delta v_{2x}$ ,  $\Delta v_{2y}$  – для второго шара, тогда:

$$\Delta v_{1x} = -\Delta v \sin \alpha , \quad (8.21)$$

$$\Delta v_{1y} = -\Delta v \cos \alpha , \quad (8.22)$$

$$\Delta v_{2x} = \Delta v \sin \alpha , \quad (8.24)$$

$$\Delta v_{2y} = \Delta v \cos \alpha. \quad (8.25)$$

Обозначим за  $u_1$  и  $u_2$  искомые скорости шаров после удара. Тогда для проекций этих скоростей на координатные оси можно записать следующие выражения:

$$u_{1x} = v_1 - \Delta v \sin \alpha, \quad (8.26)$$

$$u_{1y} = -\Delta v \cos \alpha, \quad (8.27)$$

$$u_{2x} = -v_2 + \Delta v \sin \alpha, \quad (8.28)$$

$$u_{2y} = \Delta v \cos \alpha. \quad (8.29)$$

По условию задачи удар абсолютно упругий, поэтому суммарная кинетическая энергия шаров сохранится:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}. \quad (8.30)$$

Учтем также очевидный факт, что

$$u_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2, \quad (8.31)$$

$$u_2^2 = u_{2x}^2 + u_{2y}^2. \quad (8.32)$$

III. Подставляя в (8.31) и (8.32) выражения (8.26) – (8.29), а затем используя (8.30), получаем выражение для модуля изменения скорости шаров:

$$\Delta v = (v_1 + v_2) \sin \alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad (8.33)$$

Подставляя (8.33) в (8.26) – (8.29) и затем используя (8.31) и (8.32), находим искомые скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3v_1^2 + v_2^2}}{2}, \quad (8.34)$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{3v_2^2 + v_1^2}}{2}. \quad (8.35)$$

**Ответ:**  $u_1 = \frac{\sqrt{3v_1^2 + v_2^2}}{2}$ ,  $u_1 = \frac{\sqrt{3v_2^2 + v_1^2}}{2}$ .

**Задача 8.3.6.** (Абсолютно упругий лобовой удар). Гладкая трубка согнута в виде кольца и расположена горизонтально. Внутри нее находятся два шарика массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 8.8). Шарикам сообщают скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Каковы будут скорости шариков после

2018 столкновений? Все столкновения абсолютно упругие и лобовые.

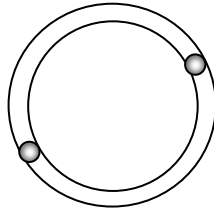


Рис. 8.8. Два шарика в трубе, согнутой в виде кольца.

### Решение

I. Система из двух шариков в направлении движения является замкнутой, трение отсутствует. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль линии, соединяющей центры шариков в момент соударения, в направлении движения одного из шариков.

II. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось  $X$  и закон сохранения механической энергии на интервале времени («до соударения», «сразу после соударения»):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (8.36)$$

$$\frac{m_1 (v_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2)^2}{2} = \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v'_2)^2}{2}, \quad (8.37)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – проекции скоростей шаров до соударения,  $v'_1$  и  $v'_2$  – проекции их скоростей после соударения.

III. По одну сторону равенств (8.36) и (8.37) группируем величины, относящиеся к первому шару, а по другую – ко второму, после чего делим второе уравнение на первое (заметим, что это можно сделать, поскольку при соударении всегда  $v'_1 \neq v_1$ ,  $v'_2 \neq v_2$ ).

В результате получаем:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (8.38)$$

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2. \quad (8.39)$$

В результате совместного решения (8.38) и (8.39) находим выражения для искомых скоростей шариков после первого столкновения:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (8.40)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (8.41)$$

Очевидно, что все вышеприведенные рассуждения применимы также ко второму и всем последующим соударениям. Для случая второго соударения можно записать аналогично (8.40) и (8.41):

$$v_1'' = \frac{(m_1 - m_2)v_1' + 2m_2v_2'}{m_1 + m_2}, \quad (8.42)$$

$$v_2'' = \frac{(m_2 - m_1)v_2' + 2m_1v_1'}{m_1 + m_2}. \quad (8.43)$$

Здесь  $v_1''$  и  $v_2''$  – скорости первого и второго шарика после второго соударения.

Подставим (8.40) и (8.41) в (8.42) и (8.43). В результате алгебраических преобразований получаем:

$$v_1'' = v_1, \quad (8.44)$$

$$v_2'' = v_2. \quad (8.45)$$

Полученный результат означает, что после второго удара (и после каждого четного, в чем можно убедиться аналогичным образом) скорости шариков принимают первоначальные значения. Таким образом, после 2018 столкновения скорости шариков будут равны  $v_1$  и  $v_2$ .

**Ответ:**  $v_1^{2018} = v_1$ ,  $v_2^{2018} = v_2$ .

**Задача 8.3.7.** (Абсолютно упругий лобовой удар.) Движущийся большой шар массой  $m_1$  абсолютно упруго сталкивается с неподвижным маленьким шаром массой  $m_2$ . Затем маленький шар абсолютно упруго отражается от стены, вновь сталкивается с большим шаром и т.д. (рис. 8.9). Как зависит количество соударений в системе от отношений масс шаров? Считать  $m_1 \gg m_2$ . Все соударения лобовые.

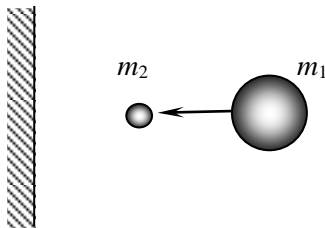


Рис. 8.9. Два шара перед абсолютно упругим соударением.

### Решение

I. Система из двух шаров в направлении движения является замкнутой, трение отсутствует. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью, ось  $X$  системы координат которой направим вдоль линии, соединяющей центры шаров, в направлении движения большого шара.

II. Рассмотрим в общем виде столкновение двух шаров массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся со скоростями  $v_{01}$  и  $v_{02}$ . Так как удар абсолютно упругий, то суммарная кинетическая энергия сохраняется:

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (8.46)$$

Суммарный импульс также сохранится, поэтому

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (8.47)$$

III. Преобразуем (8.46) следующим образом:

$$\left( \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_{01} \right)^2 + (v_{02})^2 = \left( \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_1 \right)^2 + v_2^2. \quad (8.48)$$

Очевидно, что это выражение будет справедливо при любом по счету столкновении. Введем обозначения:

$$u_1 = v_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad u_2 = v_2. \quad (8.49)$$

В этих обозначениях выражение (8.48) представится в виде:

$$u_{01}^2 + u_{02}^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (8.50)$$

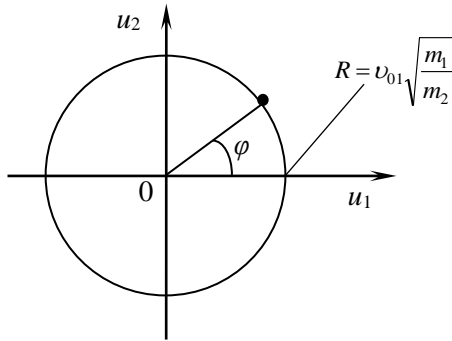


Рис. 8.10. Координатная плоскость, по осям которой отложены величины  $u_1$  и  $u_2$ . Точка, соответствующая скоростям шаров после очередного соударения, лежит на окружности радиуса  $R$ .

Если ввести прямоугольную систему координат, по горизонтальной оси которой откладываются величины  $u_1$ , а по вертикальной – величины  $u_2$ , то каждая точка этой плоскости будет соответствовать скоростям первого и второго шара. В результате столкновений скорости шаров будут изменяться, а значит будут изменяться координаты  $u_1$  и  $u_2$ . В соответствии с (8.50) при любом ударе скорости шаров будут такими, что соответствующие им точки с координатами  $u_1$  и  $u_2$  будут принадлежать окружности радиуса  $R$  такого, что

$$R^2 = u_{01}^2 + u_{02}^2. \quad (8.51)$$

В рассматриваемом случае второй шар первоначально покоился, поэтому  $u_{02} = v_{02} = 0$ , и

$$R = v_{01} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \quad (8.52)$$

Обсуждаемая координатная плоскость и окружность изображена на рис. 8.10.

Рассмотрим выражения (8.46) и (8.47). Из них получаем выражение для скоростей шаров после соударения:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02}, \quad (8.53)$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{02}. \quad (8.54)$$

Перепишем эти выражения, используя переменные  $u_1$  и  $u_2$ :

$$u_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left( (m_1 - m_2)u_{01} + 2\sqrt{m_1 m_2}u_{02} \right), \quad (8.55)$$

$$u_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left( 2\sqrt{m_1 m_2}u_{01} + (m_2 - m_1)u_{02} \right). \quad (8.56)$$

Симметричность получившихся выражений наводит на мысль, что их можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & 2\sqrt{m_1 m_2} \\ 2\sqrt{m_1 m_2} & m_2 - m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}. \quad (8.57)$$

Заметим, что все предыдущие рассуждения относились к случаю соударения шаров, и нигде ничего не говорилось о том, что второй шар абсолютно упруго отражается от стены. При отражении скорость его изменяет знак на противоположный. Если обозначить за  $U_1$  и  $U_2$  скорости шаров, которые они приобрели в результате соударения и отражения второго шара от стенки, то

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 - m_2 & 2\sqrt{m_1 m_2} \\ -2\sqrt{m_1 m_2} & m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}. \quad (8.58)$$

Дальнейшее рассмотрение выражения (8.58) показывает, что это выражение совпадает по форме с преобразованием координат точки при повороте на угол  $\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \mp \sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}. \quad (8.59)$$

Знаки в формулах (8.59) зависят от того, является ли система правосторонней и выполняется ли поворот по часовой или против часовой стрелки. Сравнивая (8.58) и (8.59), видим, что при каждом ударе и отражении от стенки происходит поворот точки на плоскости  $(u_1, u_2)$  по часовой стрелке на угол  $\varphi$  (рис. 8.10), который определяется следующим образом:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \sin \varphi = \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2}, \quad (8.60)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2}. \quad (8.61)$$



Соударения прекратятся, когда скорости шаров станут одинаковыми (сначала большой шар будет двигаться в сторону стенки, затем остановится, изменит направление движения и затем настанет момент, когда скорости большого и маленького шара сравняются). Очевидно, этому соответствует поворот точки на диаграмме на угол  $\pi$ .

По условию задачи  $m_1 \gg m_2$ . При этом (8.61) можно приближенно представить в виде:

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi = 2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (8.62)$$

Таким образом, общее число ударов  $N$  определяется выражением:

$$N = 2 \frac{\pi}{2\sqrt{m_2/m_1}} = \pi \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \quad (8.63)$$

**Ответ:**  $N = \pi \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$

**Задача 8.3.8.** (Абсолютно упругий лобовой удар). Две одинаковые гантели скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  так, как изображено на рис. 8.11. Расстояние между шариками гантели –  $l$ . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения? Размерами шариков пренебречь.

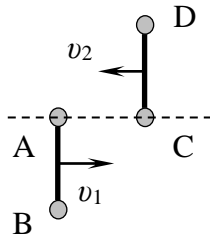


Рис. 8.11. Движение гантелей до соударения.

### Решение

I. Будем считать шарики А, В, С и D рассматриваемых гантелей (см. рис. 8.9) материальными точками, а стержни, соединяющие эти шарики, невесомыми и нерастяжимыми. Задачу решаем в

двух системах отсчета: лабораторной системе, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим так, как показано на рис. 8.12 (а), и системе, связанной с центром масс системы тел, со-

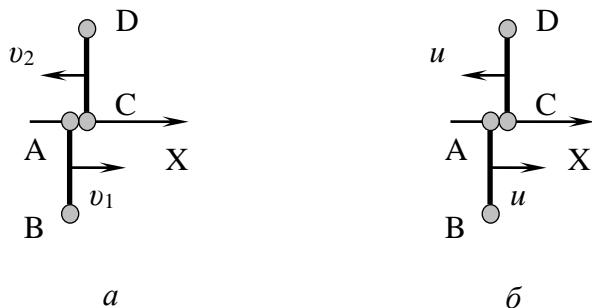


Рис. 8.12. Оси двух систем отсчета: лабораторной (а) и системы отсчета, связанной с центром масс системы тел, состоящей из двух гантелей.

стоящей из двух гантелей. Направление оси  $X'$  системы центра масс, изображенной на рис. 8.12 (б), совпадает с направлением оси  $X$ .

По условию задачи гантели движутся по гладкой горизонтальной поверхности, следовательно, центр масс системы тел, состоящей из двух гантелей, движется с постоянной скоростью, и система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной.

Поскольку рассматриваемая система тел замкнута, а соударение абсолютно упругое, то выполняются законы сохранения механической энергии и импульса для этой системы в любой из выбранных систем отсчета.

II. В лабораторной системе отсчета гантели движутся поступательно со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , следовательно, скорость центра масс равна

$$v_{\text{цм}} = \frac{v_1 - v_2}{2}, \quad (8.64)$$

а скорости шариков  $u_A$ ,  $u_B$ ,  $u_C$  и  $u_D$  в системе центра масс определяются выражениями:

$$u_{A,B} = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = u, \quad (8.65)$$

$$u_{C,D} = -v_2 - v_{цм} = -\frac{v_1 + v_2}{2} = -u. \quad (8.66)$$

Как видим, в системе центра масс гантели сближаются с равными по величине скоростями (см. рис. 8.12, б).

Силы, действующие на шарики А и С со стороны стержней в течение малого времени соударения, не *изменяют* импульса шариков и их кинетическую энергию на этом интервале времени. Запишем законы сохранения импульса и механической энергии для шариков А и С на интервале времени, включающем момент их соударения, в системе центра масс:

$$mu_A + mu_C = mu'_A + mu'_C, \quad (8.67)$$

$$\frac{mu_A^2}{2} + \frac{mu_C^2}{2} = \frac{mu'^2_A}{2} + \frac{mu'^2_C}{2}, \quad (8.68)$$

где  $u'_A$  и  $u'_C$  – скорости шариков А и С сразу после соударения,  $m$  – масса каждого из шариков.

На указанном интервале времени скорости шариков В и D не изменяются и равны скоростям первоначального поступательного движения гантелей:

$$u'_B = u, \quad u'_D = -u. \quad (8.69)$$

III. Решим систему уравнений (8.67) – (8.68) относительно скоростей шариков А и С после соударения:

$$u'_A = -u, \quad u'_C = u. \quad (8.70)$$

На рис. 8.13 изображены скорости шариков в системе центра масс до соударения и сразу после него в соответствии с (8.65), (8.66), (8.69) и (8.70).

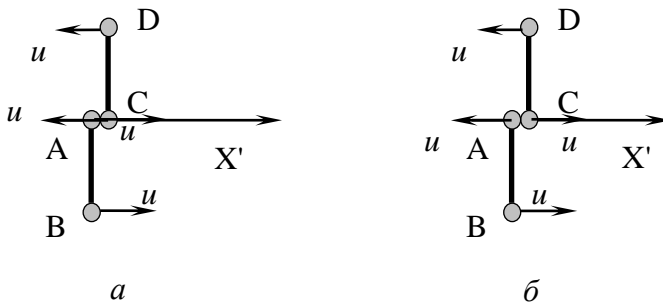


Рис. 8.13. Скорости шариков в системе центра масс перед соударением (а) и сразу после него (б).

Как видим, после соударения шарики А и С изменяют свои скорости на противоположные, в результате гантели начинают

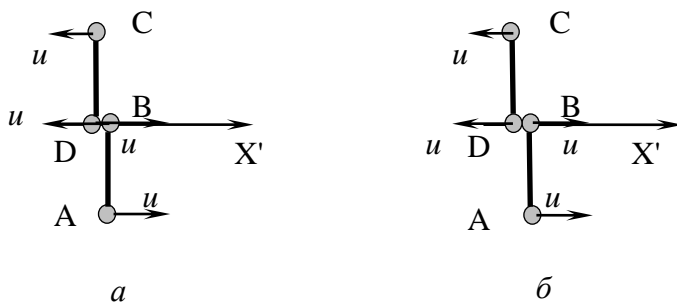


Рис. 8.14. Скорости шариков в системе центра масс перед вторым соударением (а) и сразу после него (б).

вращаться вокруг собственных центров масс, причем угловые скорости вращения гантелей совпадают. Через время половины оборота произойдет второе соударение гантелей (см. рис. 8.14).

Скорости  $u_D''$  и  $u_B''$ , приобретаемые шариками D и B после второго соударения гантелей, определяются уравнениями, аналогичными (8.62), (8.63), и становятся равными:

$$u_D'' = -u, \quad u_B'' = u. \quad (8.71)$$

Скорости шариков А и С не изменяются в результате второго соударения и равны скоростям первоначального поступательного движения гантелей (см. рис. 8.14, б):

$$u_A'' = u, \quad u_C'' = -u. \quad (8.72)$$

Как видим, скорости шариков каждой гантели становятся равными после второго соударения, следовательно, гантели начинают двигаться поступательно, сохраняя направление и величину скорости первоначального движения. Рис. 8.15 иллюстрирует последнее утверждение в системе отсчета, связанной с центром масс системы.

В лабораторной системе отсчета скорости гантелей  $v_1''$  и  $v_2''$  после второго соударения равны:

$$v_1'' = u + v_{\text{цм}} = v_1, \quad (8.73)$$

$$v_2'' = -u + v_{\text{цм}} = -v_2. \quad (8.74)$$

Итак, две одинаковые гантели, скользящие по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и

$v_2$ , испытывают абсолютно упругое соударение, в результате которого каждая начинает вращаться вокруг собственного центра масс, причем угловые скорости вращения гантелей одинаковы и по величине, и по направлению.

Через время, равное времени половины оборота гантелей, про-

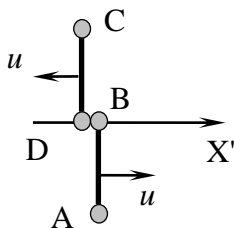


Рис. 8.15. Поступательное движение гантелей после второго соударения.

исходит второе соударение, после которого восстанавливается первоначальное поступательное движение гантелей со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 8.16).

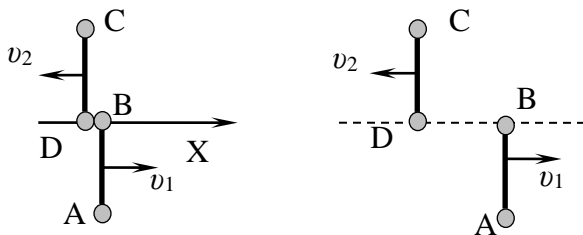


Рис. 8.16. Движение гантелей после второго соударения.

**Ответ:** после абсолютно упругого соударения гантели начнут вращаться, после чего произойдет второе абсолютно упругое соударение; после этого гантели будут двигаться поступательно, сохраняя величину и направление скорости первоначального движения.

**Задача 8.3.9.** (Абсолютно упругий лобовой удар). В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой  $M$  прыгают вертикально, абсолютно упруго ударяясь о дно цилиндра и поршень,  $N$  легких маленьких шариков массой  $m \ll M$  каждый. Общая масса

шариков равна массе поршня. Во сколько раз изменится расстояние между равновесным положением поршня и дном цилиндра, если массу поршня увеличить в два раза? Считать модули скоростей шариков у дна цилиндра одинаковыми.

### Решение

I. Направим ось  $X$  декартовой системы координат, жестко связанной с цилиндром, вертикально вниз (рис. 8.17). Будем считать в соответствии с условием, что маленьких шариков настолько много, что дрожанием поршня в результате соударений с шариками можно пренебречь. Поскольку шарики малы, не будем учитывать соударения между ними.

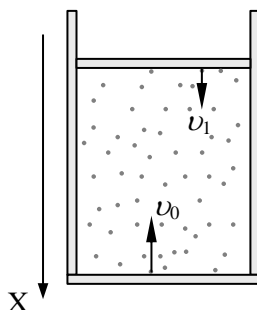


Рис. 8.17. Вертикальный цилиндр под поршнем с шариками внутри.

II. Запишем закон сохранения механической энергии произвольного шарика на интервале времени между последовательными его соударениями с дном цилиндра и поршнем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_1^2}{2}. \quad (8.75)$$

где  $v_0$  и  $v_1$  – модули скоростей шарика у дна цилиндра и поверхности поршня соответственно,  $H$  – расстояние между дном цилиндра и поршнем.

В результате соударения с поршнем проекция импульса шарика на ось  $X$  изменяется на величину

$$\Delta p = 2mv_1. \quad (8.76)$$

За время  $t_0$  между двумя последовательными ударами произвольного шарика о поршень произойдет  $N$  соударений всех шари-

ков с поршнем. Изменение импульса механической системы, состоящей из  $N$  шариков, за время  $t_0$  равно импульсу средней на данном интервале времени силы  $F$ , действующей на поршень со стороны шариков:

$$\Delta pN = Ft_0. \quad (8.77)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона запишем условие равновесия поршня:

$$Mg - F = 0. \quad (8.78)$$

Поскольку в поле сил тяжести Земли движение шариков происходит с постоянным ускорением  $g$ , модули скоростей произвольного шарика у дна цилиндра и поверхности поршня связаны соотношением:

$$v_0 = v_1 + g \frac{t_0}{2}. \quad (8.79)$$

III. Решим систему уравнений (8.75) – (8.79) относительно расстояния  $H$  между дном цилиндра и поршнем:

$$H = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 2M)mN}{g(mN + M)^2}. \quad (8.80)$$

При увеличении массы поршня в два раза расстояние  $H_2$  между дном цилиндра и поршнем, находящимся в новом равновесном состоянии, становится равным:

$$H_2 = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{(mN + 4M)mN}{g(mN + 2M)^2}. \quad (8.81)$$

Следовательно, при увеличении массы поршня расстояние между равновесным положением поршня и дном цилиндра изменится в  $k$  раз:

$$k = \frac{H_2}{H} = \frac{(mN + 4M)(mN + M)^2}{(mN + 2M)^3}. \quad (8.82)$$

Учитывая, что по условию задачи  $mN = M$ , окончательно получим:

$$k = \frac{20}{27}. \quad (8.83)$$

**Ответ:**  $k = \frac{20}{27}$ .

### 8.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 8.4.1.** Частица массой  $m$  испытала столкновение с покоящейся частицей массой  $M$ , в результате которого первая частица отклонилась на угол  $\pi/2$ , а вторая частица стала двигаться в направлении, составляющим угол  $\alpha = 30^\circ$  с первоначальным направлением движения налетающей частицы. Как изменилась кинетическая энергия системы этих двух частиц после столкновения, если  $M/m = 5$ ?

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{m}{M} + \sin^2 \alpha \right] = \frac{2}{5}.$$

**Задача 8.4.2.** Частица массой  $m_1$  испытала абсолютно упругое центральное столкновение с покоящейся частицей массой  $m_2$ . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы.

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

**Задача 8.4.3.** Частица массой  $m_1$  испытала абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей массой  $m_2$ . Определить относительное изменение кинетической энергии налетающей частицы, если в результате столкновения она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения.

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta E^k}{E_0^k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 8.4.4.** После абсолютно упругого столкновения частицы массой  $m_1$  с покоящейся частицей массой  $m_2$  обе частицы разлетелись симметрично относительно направления первоначального движения первой частицы, и угол между их направлениями разлета  $\alpha = 60^\circ$ . Найти отношение масс этих частиц.

$$\text{Ответ: } \frac{m_1}{m_2} = 2.$$



**Задача 8.4.5.** При бомбардировке атомов гелия  $\alpha$ -частицами с энергией  $E_{\alpha 0} = 1 \text{ МэВ}$  найдено, что налетающая частица отклонилась на угол  $\varphi = 60^\circ$  по отношению к первоначальному направлению полета. Считая удар абсолютно упругим, определить энергию атома гелия  $E_{\text{He}}$  и  $\alpha$ -частицы  $E_\alpha$  после соударения.

*Ответ:*  $E_{\text{He}} = E_{\alpha 0} \sin^2 \varphi = 0,75 \text{ МэВ}$ ,  $E_\alpha = E_{\alpha 0} \cos^2 \varphi = 0,25 \text{ МэВ}$ .

**Задача 8.4.6.** Найти приращение кинетической энергии системы из двух шариков массами  $m_1$  и  $m_2$  при их абсолютно неупругом соударении. До соударения скорости шариков были  $v_1$  и  $v_2$ .

*Ответ:*  $\Delta K = -\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}$ .

**Задача 8.4.7.** Частица А массой  $m$ , пролетев вблизи другой покоившейся частицы В, отклонилась на угол  $\alpha$ . Импульс частицы А до взаимодействия был равен  $p_0$ , после взаимодействия стал  $p$ . Найти массу частицы В, если система замкнутая.

*Ответ:*  $M = \frac{m(p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \alpha)}{(p_0^2 - p^2)}$ .

**Задача 8.4.8.** Замкнутая система состоит из двух одинаковых частиц, которые движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  так, что угол между направлениями их движения равен  $\theta$ . После упругого столкновения скорости частиц оказались равными  $v'_1$  и  $v'_2$ . Найти угол  $\theta'$  между направлениями их разлета.

*Ответ:*  $\cos \theta' = \left( \frac{v_1 v_2}{v'_1 v'_2} \right) \cos \theta$ .

**Задача 8.4.9.** Частица массой  $m_1$  испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массой  $m_2$ . Какую относительную часть кинетической энергии потеряла налетающая частица, если а) она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения; б) столкновение лобовое?

*Ответ:* а)  $\eta = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}$ ; б)  $\eta = \frac{4m_1}{(m_1 + m_2)^2}$ .

**Задача 8.4.10.** В результате лобового столкновения частицы 1 массой  $m_1$  с покоившейся частицей 2 частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2.

*Ответ:*  $m_2 = 3 m_1$ .

**Задача 8.4.11.** Шар массой  $m_2$  находится на гладкой поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены. Другой шар массой  $m_1$  движется с некоторой скоростью по направлению к шару массой  $m_2$ . Между шарами происходит абсолютно упругий лобовой удар, после чего оба шара движутся по направлению к стене. Затем шар массы  $m_2$  ударяется о стену и, отскочив, вновь сталкивается с шаром массой  $m_1$ , который после этого останавливается. Найти, при каком соотношении масс  $m_1/m_2$  это возможно.

*Ответ:*  $m_1/m_2 = 5,83$ .

**Задача 8.4.12.** Шар массы  $M$  находится на гладкой поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены. Другой шар массой  $m$  движется по направлению к первому шару. Между шарами происходит абсолютно упругий лобовой удар. При каком соотношении масс  $M/m$  между шарами не произойдет второго удара?

*Ответ:*  $\frac{m}{M} \geq \frac{1}{3}$ .

## **НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ**

**2**

- ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.  
СИЛЫ ИНЕРЦИИ.
- РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ  
СЛЕДСТВИЯ. ИНВАРИАНТНОСТЬ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ.
- РЕЛЯТИВИСТСКОЕ СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ
- ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
ЭНЕРГИЯ ПОКОЯ

## ГЛАВА 9

**ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.  
СИЛЫ ИНЕРЦИИ.  
ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИЕСЯ НИСО**

## 9.1. Теоретический материал

Рассмотрим две системы отсчета  $S$  и  $S'$ , движущиеся произвольно друг относительно друга. Зададим движение системы отсчета  $S'$  относительно системы  $S$  зависимостями от времени радиус-вектора  $\mathbf{R}(t)$  начала системы отсчета  $S'$  и угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}(t)$  системы  $S'$  вокруг своего начала отсчета (рис. 9.1).

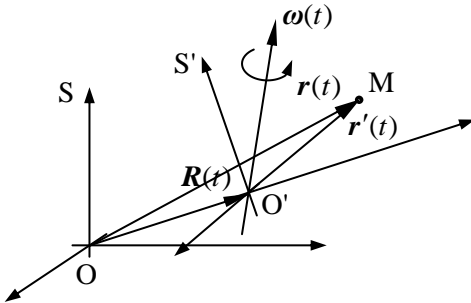


Рис. 9.1. Взаимная ориентация осей координат произвольно движущихся систем отсчета  $S$  и  $S'$ .

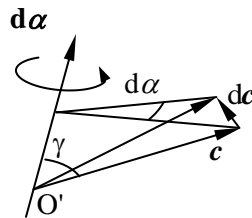


Рис. 9.2. Изменение произвольного вектора  $\mathbf{c}$ , жестко связанного с телом отсчета системы  $S'$ .

Физически бесконечно малый поворот системы отсчета  $S'$  (в том числе и тела отсчета) описывается вектором  $d\boldsymbol{\alpha}$  (рис. 9.2). Направление этого вектора совпадает с осью поворота и согласно правилу буравчика задает направление поворота, а его модуль  $d\alpha \equiv |d\boldsymbol{\alpha}|$  равен углу поворота.

Найдем скорость изменения произвольного вектора  $\mathbf{c}$ , жестко связанного с телом отсчета системы  $S'$ . В соответствии с рис. 9.2 модуль изменения вектора  $\mathbf{c}$  равен:

$$|d\mathbf{c}| = d\alpha \cdot c \cdot \sin \gamma, \quad (9.1)$$

следовательно

$$d\mathbf{c} = [d\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c}] \quad (9.2)$$

и

$$\dot{\mathbf{c}} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \mathbf{c} \right] \equiv [\boldsymbol{\omega} \mathbf{c}], \quad (9.3)$$

где  $\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}$  – **угловая скорость вращения**.

Запишем радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  произвольной материальной точки М относительно системы S через радиус-вектор  $\mathbf{R}(t)$  начала системы отсчета S' относительно системы S и радиус-вектор  $\mathbf{r}'(t)$  материальной точки М относительно системы S' (рис. 4.1):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t). \quad (9.4)$$

Продифференцируем обе части уравнения (9.4) по времени при постоянных ортах системы S. В соответствии с определением скорости и ускорения материальной точки (см. Главу 1), а также угловой скорости вращения системы отсчета, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}|_S &= \dot{\mathbf{R}}|_S + \dot{\mathbf{r}}'|_S = \mathbf{V} + \frac{\partial(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')}{\partial t} \Big|_S = \\ &= \mathbf{V} + (\dot{x}'|_S \mathbf{i}' + \dot{y}'|_S \mathbf{j}' + \dot{z}'|_S \mathbf{k}') + \left( x' \frac{\partial \mathbf{i}'}{\partial t} \Big|_S + y' \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t} \Big|_S + z' \frac{\partial \mathbf{k}'}{\partial t} \Big|_S \right) = \\ &= \mathbf{V} + \mathbf{v}' + (x'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{i}'] + y'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{j}'] + z'[\boldsymbol{\omega} \mathbf{k}']) = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}|_S &= \dot{\mathbf{V}}|_S + \dot{\mathbf{v}}'|_S + \frac{\partial[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']}{\partial t} \Big|_S = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Здесь нижние индексы S и S' означают дифференцирование при постоянных ортах систем S и S' соответственно,  $\mathbf{V}$  – скорость и  $\mathbf{A}$  – ускорение начала отсчета системы S' относительно S.

В результате мы получили взаимосвязь (формулы сложения) радиус-векторов  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$ , скоростей  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{v}'(t)$ , а также ускорений  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{a}'(t)$  материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета S и S':

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (9.7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] + \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}', \quad (9.8)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \underbrace{[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\text{переносное}} + \underbrace{2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']}_{\text{Кориолиса}} + \underbrace{\mathbf{a}'}_{\text{относительное}} =$$

$$= \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{Кор}} + \mathbf{a}'. \quad (9.9)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$  – **переносная** и  $\mathbf{v}'$  – **относительная** скорости движения материальной точки;  $\mathbf{a}_{\text{Кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$  – **ускорение Кориолиса**,  $\mathbf{a}_{\text{цс}} = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$  – **центростремительное**,  $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$  – **переносное** и  $\mathbf{a}'$  – **относительное** ускорения материальной точки.

Если материальная точка покоится относительно системы  $S'$ , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (9.10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} = \underbrace{\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']}_{\text{переносная}}, \quad (9.11)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \underbrace{[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\substack{\text{центростремительное} \\ \text{переносное}}}, \quad (9.12)$$

### Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета

Пусть система отсчета  $S$  является инерциальной (см. Главу 2). Запишем уравнение движения материальной точки  $M$ , на которую действуют силы  $\mathbf{F}_i$ , относительно системы отсчета  $S$  – 2-ой закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (9.13)$$

Подставим в уравнение (9.13) полученное выражение (9.9) для ускорения материальной точки относительно произвольно движущейся системы отсчета  $S'$  и несколько его преобразуем:

$$m\mathbf{A} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + m\mathbf{a}' = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

$$ma' = \sum_i F_i - \underbrace{mA - m[\dot{\omega}r'] - \underbrace{m[\omega[\omega r']]}_{\text{центробежная}} - 2m[\omega v']}_{\text{переносная}}, \quad (9.14)$$

$$ma' = \sum_i F_i + F_{\text{пер}} + F_{\text{Кор}}. \quad (9.15)$$

В результате мы получили уравнение движения материальной точки относительно в общем случае неинерциальной системы отсчета  $S'$ . Как видим, в неинерциальной системе отсчета также можно использовать второй закон Ньютона, если к "материальным" силам, действующим на материальную точку со стороны материальных тел, добавить так называемые **силы инерции**:

**переносную** –

$$F_{\text{пер}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] - \underbrace{m[\omega[\omega r']]}_{\text{центробежная}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] - F_{\text{цб}}, \quad (9.16)$$

**Кориолиса** –

$$F_{\text{Кор}} = -2m[\omega v']. \quad (9.17)$$

Заметим, что силы инерции вызваны не взаимодействием материальных объектов, а выбором неинерциальной системы отсчета, относительно которой рассматривается движение тел. В отличие от "материальных" сил для сил инерции нельзя указать тела, со стороны которых они действуют, следовательно, к ним не применим третий закон Ньютона (см. Главу 2).

Переносная сила инерции связана как с ускоренным движением начала системы отсчета  $S'$ , так и с вращением этой системы относительно инерциальной системы отсчета. Сила Кориолиса возникает только при движении материальной точки относительно вращающейся неинерциальной системы отсчета  $S'$ .

Любую задачу можно решать как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета, пользуясь либо уравнениями движения, либо законами сохранения. При этом необходимо учитывать силы инерции, их импульс и работу точно так же, как и для "материальных" сил – сил взаимодействия материальных объектов.

## 9.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач на движение тел в неинерциальных системах отсчета можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на движение тел в:

- 1) поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета,
- 2) вращающейся неинерциальной системе отсчета.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

### I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать неинерциальную систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы, в том числе и силы инерции, а также необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

### II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат выбранной неинерциальной системы отсчета для всех тел системы.
2. Использовать третий закон Ньютона для материальных сил, если это не было сделано ранее в п. 3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать уравнения кинематической связи.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

### III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).



3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – I.5 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах (в том числе силах инерции), действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

### 9.3. Примеры решения задач

**Задача 9.3.1.** (*Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета*). Два небольших шарика с одинаковой массой  $m$ , соединенные нерастянутой пружинкой длиной  $l_0$ , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. На один из шариков начинает действовать постоянная сила  $F$ , направленная вдоль оси пружинки (см. рис. 9.3). Через некоторое время длина пружинки становится максимальной и равной  $l_{\max}$ . Определить коэффициент упругости пружинки  $k$ .

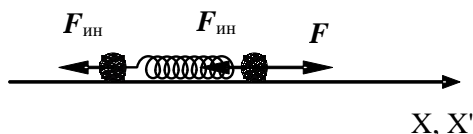


Рис. 9.3. Шарика, соединенные пружинкой.

#### Решение

I. Приложим силу  $F$  к переднему по направлению действия силы шарика (см. рис. 9.3), поскольку в соответствии с условием задачи в результате действия силы происходит растяжение пружинки. При решении задачи будем использовать две системы отсчета: лабораторную инерциальную систему, связанную с неподвижной поверхностью, по которой скользят рассматриваемые тела, и поступательно движущуюся неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс системы «два шарика + пружинка».

Направим ось  $X$  лабораторной системы отсчета и ось  $X'$  неинерциальной системы отсчета вдоль направления действия силы  $F$  (рис. 9.3). В инерциальной системе отсчета система тел движется под действием одной внешней силы  $F$ . В неинерциальной системе к указанной силе добавляются две переносные силы инерции  $F_{\text{пер}}$ . Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Используя теорему о движении центра масс, найдем ускорение центра масс системы «два шарика + пружинка» в инерциальной системе отсчета:

$$a_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}. \quad (9.18)$$

Переносные силы инерции (9.16), действующие на каждый из шариков в неинерциальной системе отсчета, равны:

$$F_{\text{пер}} = -ma_{\text{цм}}. \quad (9.19)$$

Запишем закон изменения механической энергии системы «два шарика + пружинка» в неинерциальной системе отсчета на интервале времени от начала движения до момента максимального растяжения пружины (см. (3.39) в Главе 3):

$$\frac{k(l_{\text{max}} - l_0)^2}{2} = -F_{\text{пер}}\Delta x'_1 + (F - F_{\text{пер}})\Delta x'_2. \quad (9.20)$$

Здесь  $F_{\text{пер}}$  – модуль силы инерции,  $\Delta x'_1$  и  $\Delta x'_2$  – изменения координат заднего и переднего шариков (по отношению к направлению действия силы) за указанный промежуток времени. Левая часть уравнения (9.20) представляет собой изменение потенциальной энергии упруго деформированной пружинки. В момент максимального растяжения пружинки относительная скорость шариков становится равной нулю, следовательно, в системе отсчета, связанной с центром масс, кинетическая энергия шариков обращается в ноль и ее изменение за указанный интервал времени также равно нулю. Правая часть уравнения (9.20) представляет собой суммарную работу постоянных внешних сил, действующих на тела системы (включая силы инерции).

III. Решая систему уравнений (9.18)–(9.20) с учетом  $\Delta x_2 - \Delta x_1 = l_{\text{max}} - l_0$ , получаем искомый коэффициент упругости пружинки:

$$k = \frac{F}{l_{\text{max}} - l_0}. \quad (9.21)$$

**Ответ:**  $k = \frac{F}{l_{\max} - l_0}$ .

**Задача 9.3.2.** (Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета).

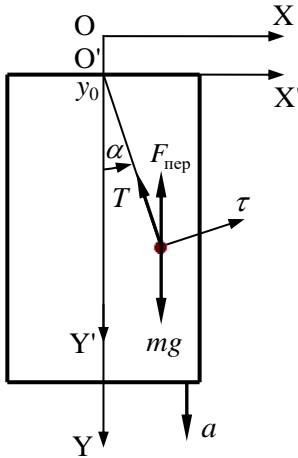


Рис. 9.4. Математический маятник в лифте.

Математический маятник длиной  $l$  и массой  $m$  подвешен к потолку кабины лифта, опускающегося вниз с ускорением  $a \leq g$  (см. рис. 9.4). Найти закон движения маятника относительно кабины лифта. Решить задачу в неинерциальной и инерциальной системах отсчета. Влиянием вращения Земли пренебречь.

### Решение 1

I. В неинерциальной системе отсчета  $X'O'Y'$ , связанной с лифтом (рис. 9.4), на маятник действуют три силы: сила тяжести  $mg$ , сила натяжения нити  $T$  и переносная сила инерции  $F_{\text{пер}} = -ma$ , направленная вверх. Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Уравнение движения тела массой  $m$  в проекции на тангенциальную к траектории ось  $\tau$  относительно неинерциальной системы отсчета имеет вид:

$$ma_{\tau} = ma \sin \alpha - mg \sin \alpha, \quad (9.22)$$

где  $\alpha$  – угол отклонения маятника от положения равновесия (рис. 4.4).

Тангенциальное и угловое ускорения связаны соотношением:

$$a_{\tau} = \dot{v} = \ddot{l}l \quad (9.23)$$

где  $v$  – модуль линейной скорости маятника.

III. Из уравнений (9.22) и (9.23) получаем уравнение движения маятника:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g-a}{l} \sin \alpha = 0. \quad (9.24)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\alpha$  легко решить в двух частных случаях: при малых углах отклонения маятника и при движении лифта с ускорением, равным по величине ускорению свободного падения –  $a = g$ .

При малых углах отклонения маятника  $\sin \alpha \approx \alpha$  уравнение (9.24) сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (9.25)$$

здесь  $\omega = \sqrt{(g-a)/l}$  – круговая частота колебаний, которая определяется не только длиной маятника и ускорением свободного падения, но и ускорением лифта.

Нетрудно убедиться подстановкой, что решением уравнения (9.25) является гармоническая функция

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (9.26)$$

где амплитуда колебаний  $\alpha_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

В случае движения лифта с ускорением, равным по модулю ускорению свободного падения, уравнение (9.24) принимает вид

$$\ddot{\alpha} = 0. \quad (9.27)$$

Следовательно, движение маятника относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с лифтом, будет происходить с постоянной угловой скоростью  $\dot{\alpha}$ , значение которой задается начальными условиями. Закон движения в этом случае имеет вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \dot{\alpha} t, \quad (9.28)$$

где  $\alpha_0$  – начальное отклонение маятника.

Искомый закон движения маятника относительно кабины лифта в общем случае является решением уравнения (9.24), которое допускает аналитическое решение в двух рассмотренных нами частных случаях (см. (9.26) и (9.28)).

## Решение 2

В инерциальной системе отсчета ХОУ (см. рис. 9.4) координаты математического маятника  $x, y$  связаны с его углом отклонения  $\alpha$  в неинерциальной системе Х'О'У' следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= l \sin \alpha, \\y &= y_0 + l \cos \alpha,\end{aligned}\tag{9.29}$$

где  $y_0$  – координата начала отсчета  $O'$  системы  $X'O'Y'$  относительно системы  $XOY$ .

Проекции ускорения маятника относительно инерциальной системы отсчета находим, дважды дифференцируя по времени соотношения (9.29):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\alpha} \cos \alpha, \\y &= \ddot{y}_0 - l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\alpha} \sin \alpha.\end{aligned}\tag{9.30}$$

Уравнение движения маятника в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  имеет вид (см. (2.2) в Главе 2):

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= T \sin \alpha, \\m\ddot{y} &= mg - T \cos \alpha.\end{aligned}\tag{9.31}$$

Учитывая, что в соответствии с условием задачи лифт движется вниз с постоянным ускорением  $\ddot{y}_0 = a$ , получаем из уравнений (9.30) и (9.31) уравнение движения маятника относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g-a}{l} \sin \alpha = 0.\tag{9.32}$$

Как видим, уравнение (9.32) совпадает с уравнением (9.24), а следовательно решению задачи в инерциальной системе отсчета совпадет с решением (9.26) и (9.28) в неинерциальной системе.

Заметим, что оптимальным в данной задаче является выбор неинерциальной системы отсчета.

**Ответ:**  $\ddot{\alpha} + \frac{g-a}{l} \sin \alpha = 0.$

**Задача 9.3.3.** (*Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета*). Небольшое тело поместили на вершину гладкого полуцилиндра радиусом  $R$ , находящегося на горизонтальной поверхности (см. рис. 9.5). Полуцилиндру сообщают постоянное горизонтальное ускорение  $a$ , в результате чего тело начинает соскальзывать с поверхности полуцилиндра. Определить модуль скорости  $v_0$  тела относительно полуцилиндра в момент отрыва и высоту  $H$ , на которой произойдет отрыв.

### Решение

I. Задачу решаем в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета, связанной с полуцилиндром. Относительно инерциальной системы отсчета ускорение неинерциальной системы равно  $a$ . На тело, находящееся на поверхности цилиндра действуют сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и переносная сила инерции  $F_{\text{пер}} = -ma$ , изображенные на рис. 9.5.

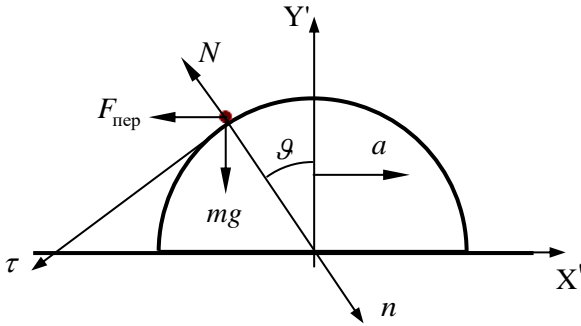


Рис. 9.5. Ориентация осей координат неинерциальной системы отсчета, цилиндр и соскальзывающее с него тело.

Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем. Полуцилиндр считаем абсолютно твердым телом, а соскальзывающее с его поверхности тело – материальной точкой.

II. Уравнение движения тела относительно неинерциальной системы отсчета в проекциях на нормальную и тангенциальную к траектории оси имеет вид:

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \vartheta - N - ma \sin \vartheta, \quad (9.33)$$

$$m \dot{v} = mg \sin \vartheta + ma \cos \vartheta, \quad (9.34)$$

где  $v$  – модуль скорости тела относительно полуцилиндра, а  $\vartheta$  – угол, задающий положение тела на поверхности полуцилиндра в любой момент времени до его отрыва (см. рис. 9.5).

В момент отрыва сила нормальной реакции, действующая на тело со стороны полуцилиндра, обращается в ноль:

$$N = 0. \quad (9.35)$$

Дополним систему уравнений (9.33) – (9.35) начальными условиями для угла  $\vartheta$  и скорости тела  $v$ :

$$\vartheta(t=0) = 0, \quad v(t=0) = 0. \quad (9.36)$$

Получена полная система уравнений (9.33) – (9.36), позволяющая определить не только скорость тела, но и угол  $\vartheta$ .

Заметим, что попытка прямого решения полученной системы уравнений относительно скорости  $v$  и угла  $\vartheta$  приводит к громоздким преобразованиям. Решение задачи можно упростить, если воспользоваться законом изменения механической энергии. Изменение механической энергии тела на интервале времени от начала движения тела до момента его отрыва от поверхности полуцилиндра равно работе силы инерции (работа силы реакции опоры в выбранной неинерциальной системе отсчета равна нулю) на этом интервале:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR(1 - \cos \vartheta_0) = \int_0^{\vartheta_0} ma \cos \vartheta R d\vartheta, \quad (9.37)$$

где  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  – скорость и угол  $\vartheta$  в момент отрыва тела от поверхности полуцилиндра.

III. Из уравнений (9.33), (9.35) и (9.37) получаем два соотношения для квадрата скорости:

$$v_0^2 = R(g \cos \vartheta_0 - a \sin \vartheta_0), \quad (9.38)$$

$$v_0^2 = 2R(g(1 - \cos \vartheta_0) + a \sin \vartheta_0). \quad (9.39)$$

Соотношение (9.39) перепишем в виде

$$\frac{v_0^2}{2} - Rg = -Rg \cos \vartheta_0 + Ra \sin \vartheta_0. \quad (9.40)$$

Сложение уравнений (9.38) и (9.40) позволяет легко получить скорость тела относительно полуцилиндра в момент отрыва:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} gR}. \quad (9.41)$$

Для угла  $\vartheta_0$ , при котором произойдет отрыв, из соотношений (9.38) и (9.41) получаем следующее выражение:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)}. \quad (9.42)$$

Искомая высота  $H$ , на которой тело оторвется от поверхности полуцилиндра, равна:

$$H = R \cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)} R. \quad (9.43)$$

Нетрудно видеть, что при  $a=0$  выражение (9.43) дает значение высоты отрыва тела от неподвижного полуцилиндра  $H = \frac{2}{3}R$ .

**Ответ:**  $H = R \cos \vartheta_0 = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)} R.$

**Задача 9.3.4.** (Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета). Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массы  $m_1$  и  $m_2$ . Кабина поднимается с ускорением  $a$ . Найти ускорение грузов относительно кабины лифта.

### Решение

I. Выберем ось неинерциальной системы отсчета, связанной с лифтом, так, как показано на рис. 9.6.

Выберем модели тел и их движений. Будем считать грузы материальными точками, подвешенными на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый абсолютно твердый цилиндрический блок. Будем считать, что грузы движутся вертикально, нить не проскальзывает относительно блока, сопротивлением воздуха и трением в оси блока пренебрегаем.

II. В неинерциальной системе отсчета, связанной с лифтом, на каждый из грузов действуют три силы: сила тяжести, сила натяжения нити и переносная сила инерции, направленная вниз.

Запишем уравнения движения грузов в проекции на ось и уравнение кинематической связи, являющееся следствием нерастяжимости нити:

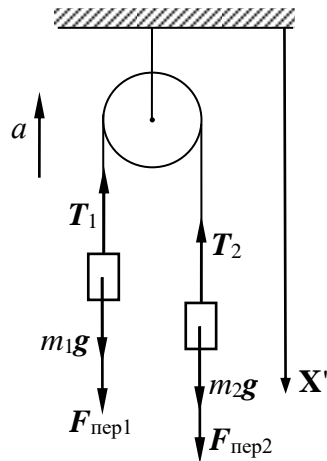


Рис. 9.6. Силы, действующие на грузы в неинерциальной системе отсчета.



$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= m_1 g - T_1 + F_{\text{пер}1}, \\
 m_2 a_2 &= m_2 g - T_2 + F_{\text{пер}2}, \\
 a_1 + a_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{9.44}$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – проекции ускорений грузов на ось  $X'$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – модули сил, действующих на грузы со стороны нити,  $F_{\text{пер}1} = m_1 a$  и  $F_{\text{пер}2} = m_2 a$  – модули переносных сил инерции, действующих на грузы. Как следует из невесомости нити и блока, а также из отсутствия силы сопротивления воздуха и силы трения в оси блока,

$$T_1 = T_2. \tag{9.45}$$

III. Решая систему уравнений (9.44) и (9.45) относительно искомого ускорения, получаем:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a), \quad a_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a). \tag{9.46}$$

Как видно из полученного результата, при  $a = 0$  задача сводится к известной задаче о машине Атвуда. Заметим также, что решение, полученное в задаче, становится очевидным, если учесть, что переносная сила инерции – массовая сила, и движение тел в однородном поле сил инерции  $\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}$  эквивалентно движению в таком же поле сил тяготения. Таким образом, движение тел массы  $m_1$  и  $m_2$ , связанных нитью, происходит под действием разности эффективных сил тяжести  $m_1(\mathbf{g} - \mathbf{a})$  и  $m_2(\mathbf{g} - \mathbf{a})$ . Отсюда сразу получаем ответ задачи (9.46).

**Ответ:**  $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a), \quad a_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a).$

**Задача 9.3.5.** (*Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета*). Небольшое тело находится в покое на вершине наклонной плоскости длиной  $l$ . За какое время тело соскользнет с плоскости, если плоскость начнет двигаться влево в горизонтальном направлении с ускорением  $a$ ? Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu$ .

### Решение

I. Выберем неинерциальную систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. Оси системы координат направим так, как показано на рис. 9.7. Тело считаем материальной точкой.

II. В неинерциальной системе отсчета, связанной с лифтом, на тело действуют: сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $N$ , сила трения  $F_{тр}$ , переносная сила инерции  $F_{пер}$ . Направления этих сил указаны на рис. 9.7.

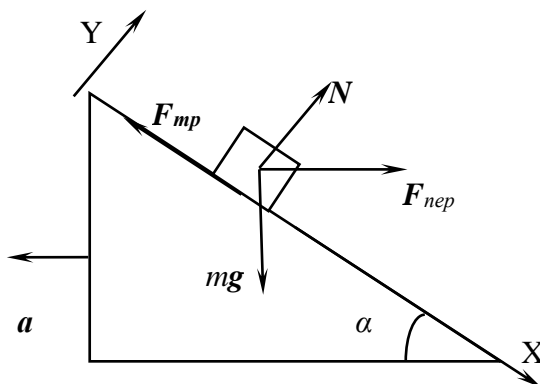


Рис. 9.7. Тело, соскальзывающее с наклонной плоскости, движущейся с ускорением.

Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси выбранной неинерциальной системы координат:

$$ma_x = mg \sin \alpha - F_{тр} + F_{пер} \cos \alpha, \quad (9.47)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha + F_{пер} \sin \alpha. \quad (9.48)$$

Здесь  $a_x$  – проекция ускорения тела на ось OX. Запишем выражения для  $F_{тр}$  и  $F_{пер}$ :

$$F_{тр} = \mu N, \quad (9.49)$$

$$F_{пер} = ma. \quad (9.50)$$

Время соскальзывания тела с наклонной плоскости определяется как

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_x}}. \quad (9.51)$$

III. Решая систему уравнений (9.47) – (9.51), найдем искомое время:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}}. \quad (9.52)$$

**Ответ:**  $t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}}$

**Задача 9.3.6.** (Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета). Сосуд с водой движется с ускорением  $a$ . В сосуде закреплен гладкий клин, к которому при помощи нити прикреплен шар (рис. 9.8). Объем шара  $V$ , плотность воды  $\rho_0$ , плотность шара  $\rho$ . Найти силу натяжения нити.

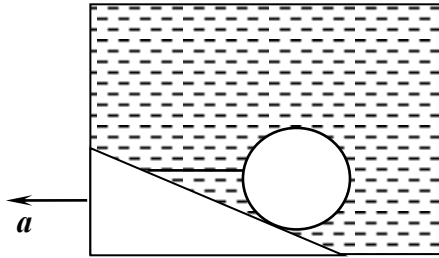


Рис. 9.8. Шар, закрепленный при помощи нити на клине, находящемся в движущемся сосуде с водой.

### Решение

I. Выберем неинерциальную систему отсчета, связанную с движущимся сосудом (рис. 9.9). Относительно выбранной системы отсчета жидкость покоится.

II. На шар действуют: сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $N$ , выталкивающая сила  $F_{Ay}$ , переносная сила инерции  $F_{пер}$ . Кроме того, в неинерциальной системе отсчета появляется массовая сила – переносная сила инерции,  $F_{пер} = -ma$ , которая действует на все тела и объекты в задаче. Действует она и на элементы жидкости в сосуде. Поэтому необходимо учесть, что при таком движении возникает горизонтальная составляющая выталкивающей силы,  $F_{Ax} = \rho_0 a V$ . Направления сил указаны на рис. 9.9.

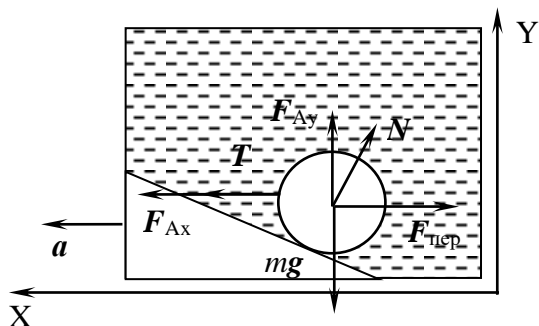


Рис. 9.9. Оси системы координат и силы, действующие на шар.

Запишем условие равновесия шара под действием рассмотренных сил (в проекциях на оси координат):

$$0 = -F_{\text{пер}} + T + F_{Ax} - N \sin \alpha, \quad (9.53)$$

$$0 = N \cos \alpha + F_{Ay} - mg. \quad (9.54)$$

Здесь

$$F_{Ax} = \rho_0 a V, \quad (9.55)$$

$$F_{Ay} = \rho_0 g V. \quad (9.56)$$

III. Решая совместно (9.53) и (9.54) с учетом (9.55) и (9.56), находим выражение для искомой силы натяжения нити:

$$T = (\rho - \rho_0)V(a + g \operatorname{tg} \alpha). \quad (9.57)$$

**Ответ:**  $T = (\rho - \rho_0)V(a + g \operatorname{tg} \alpha)$ .

**Задача 9.3.7.** (Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета). Тележка с укрепленным на ней невесомым блоком движется с ускорением  $a$ . Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой закреплены два груза массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 9.10). Трение между тележкой и грузами отсутствует. Определить ускорение  $a$ , при котором груз массы  $m_1$  начнет движение вправо.

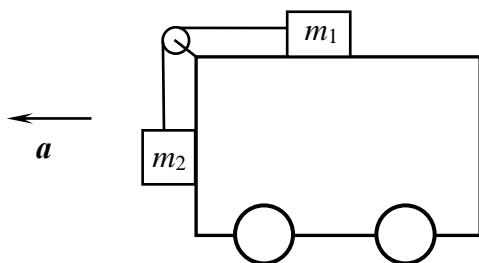


Рис. 9.10. Тележка с блоком и грузами.

### Решение

I. Задачу решаем относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с движущейся тележкой (рис. 9.11). Выберем абстрактную модель: будем считать тела материальными точками, блок невесомым, нить нерастяжимой, сопротивлением воздуха и трением в оси блока пренебрегаем.

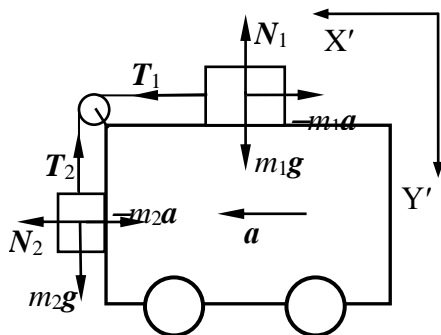


Рис. 9.11. Силы, действующие на грузы в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой.

II. Силы, действующие на грузы, указаны на рис.9.11. На первый груз, масса которого  $m_1$ , действуют: сила тяжести  $m_1g$ , сила реакции опоры  $N_1$ , сила натяжения нити  $T_1$ , переносная сила инерции  $-m_1a$ . На второй груз, масса которого  $m_2$ , действуют: сила тяжести  $m_2g$ , сила натяжения нити  $T_2$ , сила реакции опоры  $N_2$ , переносная сила инерции  $-m_2a$ . В рамках выбранной абстрактной модели  $a'_1 = a'_2 = a'$  и  $T_1 = T_2 = T$ .

Запишем уравнения движения грузов в проекциях на выбранные координатные оси:

$$m_1 a'_{1x'} = -m_1 a + T; \quad (9.58)$$

$$0 = m_1 g + N_1; \quad (9.59)$$

$$m_2 a'_{2y'} = m_2 g - T; \quad (9.60)$$

$$0 = -m_1 a + N_2. \quad (9.61)$$

Добавим сюда уравнение кинематической связи для ускорений брусков:

$$a'_{1x'} = a'; \quad (9.62)$$

$$a'_{2y'} = a'. \quad (9.63)$$

III. Решая систему уравнений (9.58) – (9.61) с учетом (9.62) и (9.63), получаем следующее выражение для ускорения  $a'$  брусков:

$$a' = \frac{m_2 g - m_1 a}{m_1 + m_2}. \quad (9.64)$$

В зависимости от величины ускорения  $a$  тележки грузы могут двигаться вправо, влево или покоиться относительно нее. Из (9.64) видно, что при  $a > (m_2/m_1)g$  груз  $m_1$  движется вправо.

**Ответ:**  $a > (m_2/m_1)g$ .

**Задача 9.3.8.** (Поступательно движущаяся неинерциальная система отсчета). Небольшое тело находится в верхней точке внутренней поверхности гладкого полуцилиндра радиуса  $R$ . Цилиндр движется горизонтально с ускорением  $a = g/\sqrt{3}$ . Тело отпускают без начальной скорости. Найти значение силы, с которой тело давит на полуцилиндр в процессе движения (рис. 9.12).

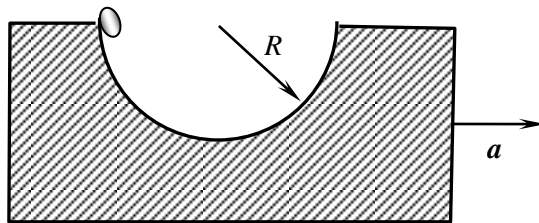


Рис. 9.12. Небольшое тело, соскальзывающее по внутренней поверхности гладкого полуцилиндра.

### Решение

I. Свяжем неинерциальную систему координат с движущимся полуцилиндром. Тело считаем материальной точкой, силой сопротивления воздуха и трением о полуцилиндр пренебрегаем.

II. Силы, действующие на тело в некоторый момент времени, показаны на рис. 9.13. Это – сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и переносная сила инерции  $F_{\text{пер}} = -ma$ .

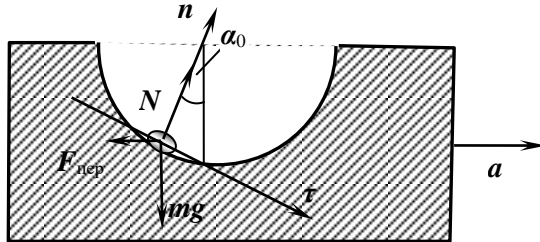


Рис. 9.13. Силы, действующие на тело, скользящее по внутренней поверхности движущегося полуцилиндра.

Видно, что сумма сил, действующих на тело, оказывается равна нулю, при значении угла отклонения от вертикали

$$\alpha_0 = \arctg \frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (9.65)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{6}. \quad (9.66)$$

Этот угол соответствует положению равновесия тела.

Введем систему координат, тангенциальную ось которой направим по касательной к окружности в месте нахождения тела, а нормальную – в сторону центра окружности. Тогда при отклонении тела от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  возникнет «возвращающая» сила, проекция которой на тангенциальную ось равна:

$$F_{\text{возвр}} = -\sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} \sin \alpha. \quad (9.67)$$

Уравнение движения тела в проекциях на тангенциальную ось может быть записано тогда в виде:

$$ma' = -m\sqrt{a^2 + g^2} \sin \alpha, \quad (9.68)$$

где  $a'$  – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Учтем, что ускорение  $a'$  следующим образом связано с углом отклонения  $\alpha$ :

$$a' = \ddot{\alpha}R. \quad (9.69)$$

Искомое значение силы реакции опоры  $N$ , направленная всегда вдоль нормальной оси, может быть определена следующим образом:

$$N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos\alpha. \quad (9.70)$$

III. С помощью (9.68) и (9.69) запишем уравнение движения тела в виде:

$$\ddot{\alpha}R = -\sqrt{a^2 + g^2} \sin\alpha. \quad (9.71)$$

В случае, если отклонение тела от положения равновесия невелико, это выражение можно записать в виде:

$$\ddot{\alpha} + \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{R} \alpha = 0. \quad (9.72)$$

Это – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{R}}. \quad (9.73)$$

Решение его будем искать в виде:

$$\alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (9.74)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $\varphi_0$  – начальная фаза. Для нахождения этих величин используем начальные условия. Так как в начальный момент времени тело находилось в верхней точке полуцилиндра, то его отклонение от положения равновесия составляло

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}. \quad (9.75)$$

Поскольку в начальный момент скорость тела была равна нулю, то

$$v = \dot{\alpha}R = 0, \quad \dot{\alpha} = 0. \quad (9.76)$$

Из (9.74), (9.75) и (9.76) находим:

$$A = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_0 = 0. \quad (9.77)$$

Таким образом, тело будет совершать колебания около положения равновесия, определяемого углом отклонения от вертикали  $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$

по закону

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \cos\omega_0 t, \quad (9.78)$$

где  $\omega_0$  определяется выражением (9.73).



Выражение для величины силы реакции опоры (9.70) будет тогда иметь вид:

$$N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos\omega_0 t\right). \quad (9.79)$$

Эта величина достигает максимального значения при

$$t = \frac{\pi}{2\omega_0}, \quad (9.80)$$

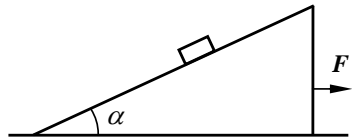
(предлагается убедиться в этом самостоятельно). В этот момент времени тело проходит положение равновесия:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \cos\omega_0 - \frac{\pi}{2\omega_0} = 0.$$

**Ответ:**  $N = m\sqrt{a^2 + g^2} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cos\omega_0 t\right)$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{R}}$ .

#### 9.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.4.1.** С какой горизонтальной силой  $F$  следует двигать клин с углом  $\alpha$  при основании и массой  $M$ , чтобы лежащий на нем брусок массой  $m$  не перемещался относительно клина? Сила  $F$  направлена так, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен  $\mu$ .



*Ответ:*

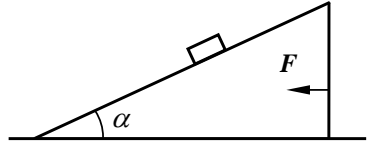
$$\text{при } \mu > \operatorname{tg} \alpha \quad F \leq (M + m)g \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha},$$

при  $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$  проскальзывание будет при любом значении модуля силы  $F$ .

**Задача 9.4.2.** Сплошной цилиндр скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом  $\alpha$  к горизонту. Наклонная плоскость опускается в лифте с ускорением  $a_0$ . Определить ускорение оси цилиндра относительно наклонной плоскости.

$$\text{Ответ: } a = \frac{2}{3}(g - a_0) \sin \alpha.$$

**Задача 9.4.3.** С какой горизонтальной силой  $F$  следует двигать клин с углом  $\alpha$  при основании и массой  $M$ , чтобы лежащий на нем брусок массой  $m$  не перемещался относительно клина? Сила  $F$  направлена так, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между бруском и клином равен  $\mu$ .

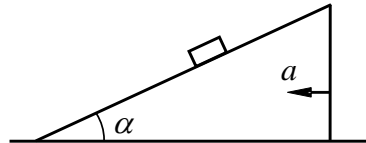


*Ответ:*

$$\text{при } \mu < \operatorname{ctg} \alpha \quad (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\text{при } \mu \geq \operatorname{ctg} \alpha \quad (M + m)g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \leq F \leq \infty.$$

**Задача 9.4.4.** Наклонная плоскость с углом  $\alpha$  при основании движется с ускорением в направлении, указанном на рисунке. Определить ускорение, при котором тело, лежащее на наклонной плоскости, начнет равномерно скользить вверх. Коэффициент трения тела о плоскость  $\mu$ .

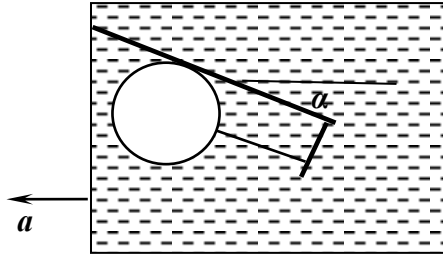


$$\text{Ответ: } a = g \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

**Задача 9.4.5.** Небольшой груз массы  $m$  лежит на краю доски длиной  $l$ , масса которой  $M$ . Доска может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. Найти значение величины горизонтально направленной силы  $F$ , которую необходимо приложить к доске, чтобы груз соскользнул с нее за время  $t$ . Коэффициент трения между доской и грузом равен  $\mu$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{2Ml}{t^2} + \mu g(M + m).$$

**Задача 9.4.6.** В сосуде с водой закреплена полка, наклоненная под углом  $\alpha$  к горизонту. Деревянный шар опирается на гладкую поверхность полки и удерживается с помощью нити, натянутой под углом  $\alpha$  к горизонту. Объем шара  $V$ , плотность воды  $\rho$ , плотность дерева  $(3/5)\rho$ . Определить силу натяжения нити, если сосуд движется с горизонтальным ускорением  $a$ .

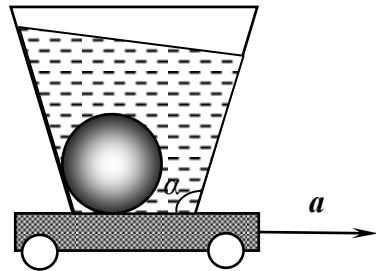


$$\text{Ответ: } T = \frac{2}{5}(g \sin \alpha + a \cos \alpha)\rho V.$$

**Задача 9.4.7.** В цилиндрическом сосуде, заполненном жидкостью плотности  $\rho$ , находится шар плотности  $3\rho$ . Сосуд движется горизонтально с ускорением  $a$ . Найти, с какой силой шар действует на боковую поверхность сосуда. Объем шара  $V$ .

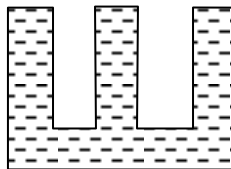
$$\text{Ответ: } N = 2\rho Va.$$

**Задача 9.4.8.** Шар объемом  $V_0$  и плотностью  $\rho_0$  находится в гладком сосуде с жидкостью плотности  $\rho$ . Угол между стенками сосуда и горизонтальным дном  $\alpha$  (см. рис.). Сосуд находится на тележке, которая движется горизонтально с ускорением  $a$ . Найти силу давления шара на дно сосуда.



$$\text{Ответ: } N = V_0 g (\rho_0 - \rho)(g + a \operatorname{ctg} \alpha).$$

**Задача 9.4.9.** Сосуд, состоящий из трех вертикальных трубок, соединенных между собой (см. рис.), полностью заполнен водой. При равноускоренном движении в горизонтальном направлении из него вылилась часть  $k$  от всей массы воды. Найти ускорение сосуда.



*Ответ:*  $a = \frac{8}{3} kg$ .

**Задача 9.4.10.** Математический маятник укреплен на подставке, которая соскальзывает с наклонной плоскости с углом при вершине  $\alpha$ . Найти период колебаний маятника.

*Ответ:*  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$ .

## ГЛАВА 10

## ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ. ВРАЩАЮЩИЕСЯ НИСО

### 10.1. Теоретический материал

Рассмотрим две системы отсчета  $S$  и  $S'$ , движущиеся произвольно друг относительно друга. Зададим движение системы отсчета  $S'$  относительно системы  $S$  зависимостями от времени радиус-вектора  $\mathbf{R}(t)$  начала системы отсчета  $S'$  и угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}(t)$  системы  $S'$  вокруг своего начала отсчета (рис. 10.1).

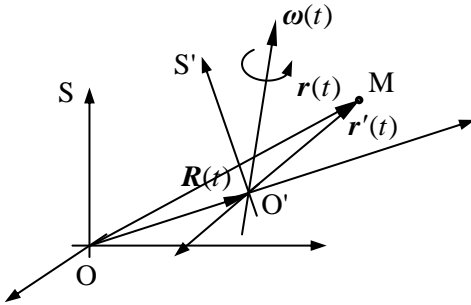


Рис. 10.1. Взаимная ориентация осей координат произвольно движущихся систем отсчета  $S$  и  $S'$ .

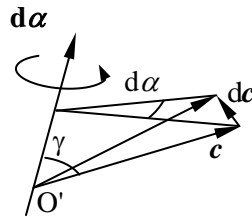


Рис. 10.2. Изменение произвольного вектора  $\mathbf{c}$ , жестко связанного с телом отсчета системы  $S'$ .

Физически бесконечно малый поворот системы отсчета  $S'$  (в том числе и тела отсчета) описывается вектором  $d\boldsymbol{\alpha}$  (рис. 10.2). Направление этого вектора совпадает с осью поворота и согласно правилу буравчика задает направление поворота, а его модуль  $d\alpha \equiv |d\boldsymbol{\alpha}|$  равен углу поворота.

Найдем скорость изменения произвольного вектора  $\mathbf{c}$ , жестко связанного с телом отсчета системы  $S'$ . В соответствии с рис. 10.2 модуль изменения вектора  $\mathbf{c}$  равен:

$$|d\mathbf{c}| = d\alpha \cdot c \cdot \sin \gamma, \quad (10.1)$$

следовательно

$$d\mathbf{c} = [d\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c}] \quad (10.2)$$

и

$$\dot{\mathbf{c}} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \mathbf{c} \right] \equiv [\boldsymbol{\omega} \mathbf{c}], \quad (10.3)$$

где  $\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}$  – угловая скорость вращения.

Запишем радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  произвольной материальной точки М относительно системы S через радиус-вектор  $\mathbf{R}(t)$  начала системы отсчета S' относительно системы S и радиус-вектор  $\mathbf{r}'(t)$  материальной точки М относительно системы S' (рис. 10.1):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t). \quad (10.4)$$

Продифференцируем обе части уравнения (10.4) по времени при постоянных ортах системы S. В соответствии с определением скорости и ускорения материальной точки (см. Главу 1), а также угловой скорости вращения системы отсчета, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}|_S &= \dot{\mathbf{R}}|_S + \dot{\mathbf{r}}'|_S = \mathbf{V} + \left. \frac{\partial(x'i' + y'j' + z'k')}{\partial t} \right|_S = \\ &= \mathbf{V} + (\dot{x}'|_S i' + \dot{y}'|_S j' + \dot{z}'|_S k') + \left( x' \left. \frac{\partial i'}{\partial t} \right|_S + y' \left. \frac{\partial j'}{\partial t} \right|_S + z' \left. \frac{\partial k'}{\partial t} \right|_S \right) = \\ &= \mathbf{V} + \mathbf{v}' + (x'[\boldsymbol{\omega} i'] + y'[\boldsymbol{\omega} j'] + z'[\boldsymbol{\omega} k']) = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}|_S &= \ddot{\mathbf{V}}|_S + \ddot{\mathbf{r}}'|_S + \left. \frac{\partial[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']}{\partial t} \right|_S = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Здесь нижние индексы S и S' означают дифференцирование при постоянных ортах систем S и S' соответственно,  $\mathbf{V}$  – скорость и  $\mathbf{A}$  – ускорение начала отсчета системы S' относительно S.

В результате мы получили взаимосвязь (формулы сложения) радиус-векторов  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$ , скоростей  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{v}'(t)$ , а также ускорений  $\mathbf{a}(t)$  и  $\mathbf{a}'(t)$  материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета S и S':

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (10.7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{nep} + \mathbf{v}', \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \underbrace{\mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}']}_{\text{переносное}} + \underbrace{[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\text{центростремительное}} + \underbrace{2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']}_{\text{Кориолиса}} + \underbrace{\mathbf{a}'}_{\text{относительное}} = \\
 &= \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{Кор}} + \mathbf{a}' .
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

Здесь  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$  – переносная и  $\mathbf{v}'$  – относительная скорости движения материальной точки;  $\mathbf{a}_{\text{Кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$  – ускорение Кориолиса,  $\mathbf{a}_{\text{цс}} = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$  – центростремительное,  $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$  – переносное и  $\mathbf{a}'$  – относительное ускорения материальной точки.

Если материальная точка покоится относительно системы S', то

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' , \tag{10.10}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} = \underbrace{\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']}_{\text{переносная}} , \tag{10.11}$$

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}']}_{\text{переносное}} + \underbrace{[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\text{центростремительное}} , \tag{10.12}$$

### Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета

Пусть система отсчета S является инерциальной (см. Главу 2). Запишем уравнение движения материальной точки M, на которую действуют силы  $\mathbf{F}_i$ , относительно системы отсчета S – 2-ой закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i . \tag{10.13}$$

Подставим в уравнение (10.13) полученное выражение (10.9) для ускорения материальной точки относительно произвольно движущейся системы отсчета S' и несколько его преобразуем:

$$\begin{aligned}
 m\mathbf{A} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + m\mathbf{a}' &= \sum_i \mathbf{F}_i , \\
 m\mathbf{a}' &= \sum_i \mathbf{F}_i - \underbrace{m\mathbf{A} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]}_{\text{переносная}} - \underbrace{2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']}_{\text{Кориолиса}} ,
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$ma' = \sum_i F_i + F_{\text{пер}} + F_{\text{Кор}}. \quad (10.15)$$

В результате мы получили уравнение движения материальной точки относительно в общем случае неинерциальной системы отсчета  $S'$ . Как видим, в неинерциальной системе отсчета также можно использовать второй закон Ньютона, если к "материальным" силам, действующим на материальную точку со стороны материальных тел, добавить так называемые **силы инерции**:

**переносную** –

$$F_{\text{пер}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] - \underbrace{m[\omega[\dot{\omega}r']]}_{\text{центробежная}} = -mA - m[\dot{\omega}r'] - F_{\text{цб}}, \quad (10.16)$$

**Кориолиса** –

$$F_{\text{Кор}} = -2m[\omega v']. \quad (10.17)$$

Заметим, что силы инерции вызваны не взаимодействием материальных объектов, а выбором неинерциальной системы отсчета, относительно которой рассматривается движение тел. В отличие от "материальных" сил для сил инерции нельзя указать тела, со стороны которых они действуют, следовательно, к ним не применим третий закон Ньютона (см. Главу 2).

Переносная сила инерции связана как с ускоренным движением начала системы отсчета  $S'$ , так и с вращением этой системы относительно инерциальной системы отсчета. Сила Кориолиса возникает только при движении материальной точки относительно вращающейся неинерциальной системы отсчета  $S'$ .

Любую задачу можно решать как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета, пользуясь либо уравнениями движения, либо законами сохранения. При этом необходимо учитывать силы инерции, их импульс и работу точно так же, как и для "материальных" сил – сил взаимодействия материальных объектов.

## 10.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач на движение тел в неинерциальных системах отсчета можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на движение тел в:

- 1) поступательно движущейся неинерциальной системе отсчета,
- 2) вращающейся неинерциальной системе отсчета.



При решении задачи на движение тел в неинерциальных системах отсчета с использованием законов Ньютона необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать неинерциальную систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить все силы, в том числе и силы инерции, а также необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат выбранной неинерциальной системы отсчета для всех тел системы.
2. Использовать третий закон Ньютона для материальных сил, если это не было сделано ранее в п. 3.
3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать уравнения кинематической связи.
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

**Примечания.**

В случае решения задач на динамику материальной точки в пп. I.3 – I.5 речь идет о характеристиках материальной точки, а п. II.2 надо опустить.

В случае решения задач на динамику простейших механических систем в пп. I.3 – II.2 речь идет о характеристиках и уравнениях движения тел и силах (в том числе силах инерции), действующих между телами рассматриваемой системы.

Пункты II.1 – II.4 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

### 10.3. Примеры решения задач

**Задача 10.3.1.** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска в сторону от центра движется небольшое тело массой  $m$  с постоянной относительно диска скоростью  $V$  (см. рис. 10.3). Найти силу  $F$ , с которой диск действует на тело в момент времени, когда оно находится на расстоянии  $r$  от оси вращения.

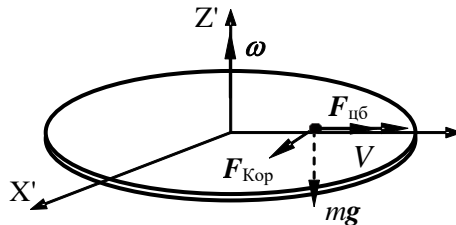


Рис. 10.3. Расположение осей неинерциальной системы отсчета и силы, действующие на тело.

#### Решение

I. Выберем неинерциальную систему отсчета  $X'Y'Z'$ , жестко связанную с вращающимся диском, при этом направим одну из осей системы координат  $Z'$  вдоль угловой скорости вращения диска  $\omega$ , а другую  $Y'$  – вдоль скорости движения тела относительно диска  $V$  (рис. 10.3). В этой системе отсчета на тело действуют сила тяжести  $mg$ , сила реакции диска  $F$  (не изображенная на рисунке), переносная сила инерции, равная в данном случае центробежной силе инерции  $F_{цб}$  (см. (10.16)) –

$$F_{цб} = -m[\omega[\omega r]], \quad (10.18)$$

и сила инерции Кориолиса (см. (10.17)) –

$$\mathbf{F}_{\text{Кор}} = -2m[\boldsymbol{\omega}V]. \quad (10.19)$$

Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Под действием рассмотренных выше сил тело движется в соответствии с условием задачи с постоянной относительно диска скоростью. Запишем уравнение движения тела в векторной форме в выбранной нами неинерциальной системе отсчета:

$$0 = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{Кор}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F} \quad (10.20)$$

Уравнение движения (10.20) в проекциях на оси координат системы  $X'Y'Z'$ , указанные на рис. 10.3, имеет вид:

$$0 = F_{x'} + F_{\text{Кор}}, \quad (10.21)$$

$$0 = F_{y'} + F_{\text{цб}} \quad (10.22)$$

$$0 = F_{z'} - mg \quad (10.23)$$

Как видим, сила реакции диска имеет отличные от нуля проекции на все координатные оси.

III. Подставляя в (10.21) – (10.22) выражения для центробежной силы инерции (10.18) и силы Кориолиса (10.19), получаем выражения для искомых проекций на оси координат системы  $X'Y'Z'$  силы реакции диска:

$$F_{x'} = -2m\omega V,$$

$$F_{y'} = -m\omega^2 r, \quad (10.24)$$

$$F_{z'} = mg.$$

При этом модуль силы реакции диска  $F$  равен

$$F = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}, \quad (10.25)$$

а направляющие косинусы силы  $\mathbf{F}$  относительно системы отсчета  $X'Y'Z'$ , жестко связанной с диском, равны:

$$\cos\alpha' = \frac{2m\omega V}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}, \quad (10.26)$$

$$\cos\beta' = \frac{m\omega^2 r}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}, \quad (10.27)$$

$$\cos\gamma' = \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}}. \quad (10.28)$$

$$\text{Ответ: } F = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 4(m\omega V)^2}.$$

**Задача 10.3.2** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Небольшое тело массы  $m$  движется равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиусом  $R$ , которую вращают с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Результирующая сил инерции, приложенных к телу в системе отсчета «платформа», равна нулю. Известно, что тело действует на платформу с силой  $F$ . Найти угловую скорость вращения платформы  $\omega$ .

### Решение

Выберем неинерциальную систему отсчета, связав ее с вращающейся платформой. Координатные оси направим таким образом, чтобы ось  $Z'$  совпадала по направлению с угловой скоростью вращения платформы, оси  $X'$  и  $Y'$  – перпендикулярны ей и лежали в плоскости платформы. В этой системе отсчета на тело действуют: сила тяжести  $mg$ , сила реакции платформы  $N$  (которая, в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю  $F$ ), переносная сила инерции, равная в данном случае центробежной силе инерции и сила инерции Кориолиса (рис. 10.4). Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

Силы инерции, действующие на человека, равны:

$$F_{цб} = -m[\omega[\omega r]], \quad (10.29)$$

$$F_{Кор} = -2m[\omega V] \quad (10.30)$$

Здесь  $V$  – скорость человека относительно платформы.

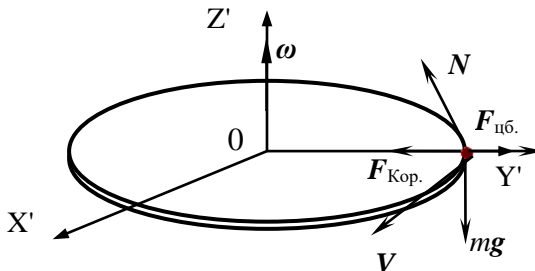


Рис. 10.4. Оси неинерциальной системы отсчета, связанной с платформой, и силы, действующие на тело в этой системе отсчета.

II. Запишем уравнение движения тела в векторной форме в выбранной неинерциальной системе отсчета:

$$ma = mg + N + F_{\text{кор.}} + F_{\text{цб.}} \quad (10.31)$$

По условию задачи результирующая сил инерции, действующих на тело в системе отсчета, связанной с платформой, равна нулю. Значит,

$$F_{\text{кор.}} + F_{\text{цб.}} = 0. \quad (10.32)$$

Учтем также, что в системе отсчета, связанной с диском, тело движется равномерно по окружности радиуса  $R$ , а значит, его центростремительное ускорение равно:

$$a_{\text{цс.}} = \frac{V^2}{R}. \quad (10.33)$$

III. Подставляем в (10.32) выражения (10.29) и (10.30) и записываем полученное равенство в проекциях на ось  $Y'$ :

$$0 = m\omega^2 R - 2m\omega V. \quad (10.34)$$

Отсюда определим величину скорости  $V$ :

$$V = \frac{\omega R}{2}. \quad (10.35)$$

При равномерном движении по окружности центростремительное ускорение сообщается телу горизонтальной составляющей силы реакции платформы; поэтому уравнение (10.31) с учетом (10.33) может быть записано следующим образом в проекциях на ось  $Y'$ :

$$\frac{mV^2}{R} = N_{Y'}, \quad (10.36)$$

где  $N_{Y'}$  – горизонтальная составляющая силы реакции платформы.

Подставляя (10.35) в (10.36), получаем выражение для  $N_{Y'}$ :

$$N_{Y'} = \frac{m\omega^2 R}{4}. \quad (10.37)$$

Записывая (10.31) в проекциях на ось  $Y'$ , получаем:

$$0 = N_{Z'} - mg, \quad (10.38)$$

где  $N_{Z'}$  – вертикальная составляющая силы реакции платформы,

$$N_{Z'} = mg. \quad (10.39)$$

Сила, с которой тело действует на платформу, равна

$$F = \sqrt{N_{Y'} + N_{Z'}}. \quad (10.40)$$

Подставляя в (10.40) выражения (10.37) и (10.39), получаем выражение для искомой угловой скорости:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{F^2 - (mg)^2}{mR}}. \quad (10.41)$$

**Ответ:**  $\omega = 2\sqrt{\frac{F^2 - (mg)^2}{mR}}$

**Задача 10.3.3** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Тонкий однородный стержень длиной  $L$  и массой  $m$ , шарнирно закрепленный в верхней точке  $O$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через данную точку (см. рис. 10.5). Определить угол устойчивого вращения стержня.

### Решение

Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной со стержнем и вертикальной осью вращения. Будем считать стержень абсолютно твердым телом. На стержень действуют три силы: сила тяжести  $mg$ , сила реакции со стороны шарнира и центробежная сила инерции. Силой сопротивления воздуха пренебрегаем.

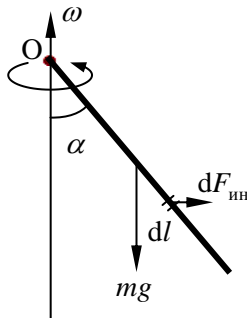


Рис. 10.5. Вращающийся стержень и силы, действующие на него в неинерциальной системе отсчета.

Под действием силы тяжести и силы реакции со стороны шарнира стержень совершает вращательное движение относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, причем различные участки стержня движутся по окружностям разных радиусов. Сле-

довательно, различна и сила инерции  $dF_{\text{ин}}$ , действующая на отдельные элементы стержня в неинерциальной системе отсчета.

II. При устойчивом вращении стержень отклонен от вертикальной оси на постоянный угол  $\alpha$ . Поскольку стержень покоится в выбранной неинерциальной системе отсчета, сумма моментов всех сил, действующих на стержень в этой системе, относительно горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 10.5) и направленной из плоскости чертежа, равна нулю:

$$M_{mg} + M_{\text{ин}} = 0. \quad (10.42)$$

При записи (10.42) учтено, что момент силы реакции шарнира относительно указанной оси равен нулю.

Запишем выражение для момента силы тяжести:

$$M_{mg} = -mg \frac{L}{2} \sin \alpha. \quad (10.43)$$

Для нахождения суммарного момента сил инерции рассмотрим элемент стержня длиной  $dl$ , находящийся на расстоянии  $l$  от точки  $O$ . Центробежная сила инерции (см. (10.16)), действующая на этот элемент, равна

$$dF_{\text{ин}} = \rho S dl \omega^2 r, \quad (10.44)$$

где  $\rho$  – плотность стержня,  $S$  – площадь его поперечного сечения,  $r$  – расстояние от элемента стержня до оси вращения.

Момент силы инерции относительно горизонтальной оси можно записать в виде:

$$dM_{\text{ин}} = dF_{\text{ин}} l \cos \alpha = \rho S dl \omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha. \quad (10.45)$$

Суммарный момент сил инерции равен

$$\begin{aligned} M_{\text{ин}} &= \int dM_{\text{ин}} = \rho S \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^L l^2 dl = \\ &= \frac{1}{3} L^2 \omega^2 m \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10.46)$$

III. Решая полученную систему уравнений (10.42), (10.43) и (10.46) относительно угла  $\alpha$ , получаем:

$$\cos \alpha = \frac{3g}{2L\omega^2}, \quad (10.47)$$

$$\sin \alpha = 0. \quad (10.48)$$

Нетрудно видеть, что при  $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2L}}$  значение угла

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3g}{2L\omega^2}\right) \quad (10.49)$$

соответствует устойчивому вращению стержня, а значение  $\alpha = 0$ , которое следует из уравнения (10.48), соответствует неустойчивому вращению стержня. В случае  $\omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2L}}$  устойчивым является вертикальное положение стержня ( $\alpha = 0$ ).

**Ответ:** при  $\omega > \sqrt{\frac{3g}{2L}}$  :  $\alpha = \arccos\left(\frac{3g}{2L\omega^2}\right)$ ; при  $\omega \leq \sqrt{\frac{3g}{2L}}$  :  $\alpha = 0$ .

**Задача 10.3.4** (Вращающаяся неинерциальная система отсчета). Гладкая горизонтальная трубка длиной  $L$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов (см. рис. 10.6). Определить, за какое время  $t_0$  маленький шарик, находящийся на расстоянии  $l$  от оси трубки, достигнет ее конца, а также модуль скорости шарика относительно земли  $v_0$  в момент его вылета из трубки. Начальную скорость шарика относительно трубки принять равной нулю.



Рис. 10.6. Вращающаяся горизонтальная трубка и оси неинерциальной системы отсчета.

### Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с трубкой и вертикальной осью вращения. Оси  $X'$  и  $Y'$  правой системы координат  $X'Y'Z'$  направим вдоль трубки и угловой скорости



ее вращения соответственно (см. рис. 10.6). Шарик считаем материальной точкой, а трубку – абсолютно твердым телом. На шарик в процессе движения действуют четыре силы: сила тяжести  $mg$ , сила реакции трубки, центробежная сила инерции, а также сила инерции Кориолиса. Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем. Шарик движется вдоль трубки, причем его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета определяется только центробежной силой инерции, поскольку направление действия остальных сил перпендикулярно его движению.

II. Запишем уравнение движения шарика относительно выбранной неинерциальной системы отсчета в проекции на ось, совпадающую с геометрической осью трубки (см. рис. 10.6):

$$ma' = m\omega^2 r'. \quad (10.50)$$

С целью упрощения дальнейшего интегрирования уравнения (10.50) выразим проекцию ускорения шарика  $a'$  через производную проекции скорости по пространственной координате  $r'$  шарика:

$$a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dr'} \cdot \frac{dr'}{dt} = \frac{dv'}{dr'} v'. \quad (10.51)$$

III. Используя соотношение (10.51), исключаем проекцию ускорения из уравнения движения шарика (10.50):

$$v' \frac{dv'}{dr'} = \omega^2 r'. \quad (10.52)$$

Полученное уравнение (10.52) решаем методом разделения переменных:

$$\int_0^{v'} v' dv' = \int_l^{r'} \omega^2 r' dr'. \quad (10.53)$$

Интегрируя (10.53), получаем связь проекции скорости шарика  $v'$  и его координаты  $r'$ :

$$v' = \omega \sqrt{r'^2 - l^2}. \quad (10.54)$$

Следовательно

$$\frac{dr'}{dt} = \omega \sqrt{r'^2 - l^2}. \quad (10.55)$$

Уравнение (10.55) решаем методом разделения переменных:

$$\int_l^L \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - l^2}} = \int_0^{t_0} \omega dt. \quad (10.56)$$

В результате интегрирования уравнения (10.56) находим искомое время движения шарика в трубке:

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} \right). \quad (10.57)$$

Для нахождения скорости шарика относительно трубки воспользуемся (10.54):

$$\mathbf{v}' = \omega \sqrt{r'^2 - l^2} \cdot \mathbf{e}_{X'}, \quad (10.58)$$

где  $\mathbf{e}_{X'}$  – единичный вектор вдоль оси  $X'$ .

Скорость шарика относительно лабораторной инерциальной системы отсчета в соответствии с (10.8) может быть записана в виде:

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}'] + \mathbf{v}' = -\omega r' \mathbf{e}_{Z'} + \omega \sqrt{r'^2 - l^2} \cdot \mathbf{e}_{X'}, \quad (10.59)$$

где  $\mathbf{e}_{Z'}$  – единичный вектор вдоль оси  $Z'$ . Следовательно, искомый модуль скорости шарика относительно лабораторной системы отсчета равен:

$$v = \omega \sqrt{2r'^2 - l^2}. \quad (10.60)$$

**Ответ:**  $v = \omega \sqrt{2r'^2 - l^2}$ .

**Задача 10.3.5** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Вертикальный цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда на нити длины  $l$  привязан шарик радиуса  $r_0$  и плотности  $\rho_0 (< \rho)$ . При вращении нить образует со стенкой угол  $\alpha$ . Определить угловую скорость вращения сосуда.

### Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета  $X'Y'$ , жестко связанной с Землей. Направим одну из осей системы координат  $Y'$  вдоль угловой скорости вращения сосуда, а ось  $X'$  перпендикулярно ей (рис. 10.7).

На шарик действуют: сила тяжести  $mg$  ( $m$  – масса шарика), сила натяжения нити  $T$ , центробежная сила инерции  $F_{цб}$ , выталкивающая сила  $F_y$ . Также необходимо учесть, что поскольку центробежная сила инерции – массовая сила, и она действует на все тела и объекты в системе, то за счет нее появляется еще одна составляющая выталкивающей силы –  $F_x$ .

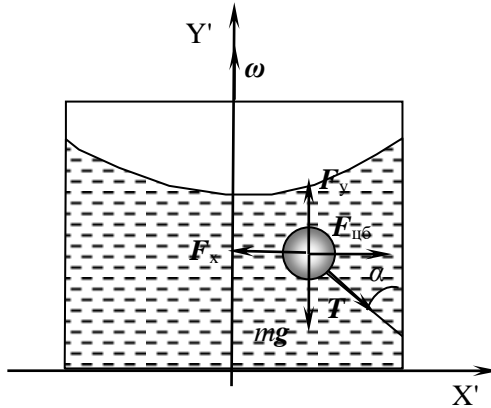


Рис.10.7. Вращающийся цилиндрический сосуд, оси системы координат и силы, действующие на шарик.

II. Относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с сосудом, шарик покоится. Запишем уравнение движения шарика в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$T \sin \alpha + F_{цб} - F_X = 0, \quad (10.61)$$

$$-T \cos \alpha - mg + F_Y = 0. \quad (10.62)$$

Центробежная сила инерции выражается в данном случае как

$$F_{цб} = m\omega^2 r, \quad (10.63)$$

где  $r$  – расстояние от шарика до оси вращения. Из рис.10.7 видно, что

$$r = R - (r_0 + l) \sin \alpha. \quad (10.64)$$

Здесь  $R$  – радиус сосуда,  $r_0$  – радиус шарика,  $l$  – длина нити.

Выражения для составляющих выталкивающей силы можно представить в виде:

$$F_Y = \rho g V, \quad (10.65)$$

$$F_X = \rho \omega^2 r V. \quad (10.66)$$

Здесь  $V$  – объем шарика.

Учтем также, что масса шарика связана с его плотностью как

$$m = \rho_0 V. \quad (10.67)$$

III. Решая систему уравнений (10.61) – (10.62), получаем выражение для искомой угловой скорости вращения сосуда:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R - (r + l) \sin \alpha}}. \quad (10.68)$$

Заметим, что в полученное выражение вошли только геометрические параметры эксперимента. Этот ответ можно было бы получить, рассуждая несколько иначе. Относительно вращающегося сосуда, за счет появления центробежной силы инерции (массовой!) направление «вертикали» изменится – новая «вертикаль» будет направлена так же, как вектор

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_{\text{цб}}}{m}. \quad (10.69)$$

Заметим заодно, что поверхность жидкости будет перпендикулярна этому направлению. Положение шарика и нити при этом не изменится. Тогда из векторного треугольника для ускорений можно записать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}, \quad (10.70)$$

откуда следует полученный выше ответ (10.68).

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R - (r + l) \sin \alpha}}$$

**Задача 10.3.6** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Винтовку с оптическим прицелом навели на вертикальную черту мишени, находящуюся точно в северном направлении, и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить на какое расстояние и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен вдоль поверхности Земли на широте  $\varphi = 60^\circ$  (см. рис. 10.8), начальная скорость пули  $V = 900$  м/с, расстояние до мишени  $s = 1$  км.

### Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета  $X'Y'Z'$ , жестко связанной с Землей, при этом направим одну из осей системы координат  $Z'$  вдоль угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , а другую – в меридиональной плоскости, в которой лежит вектор начальной скорости пули  $\mathbf{V}$  (рис. 10.8). Будем считать, что поверхность Земли является сферической, и Земля вместе со связан-

ной с ней системой отсчета  $X'Y'Z'$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T = 24$  ч.

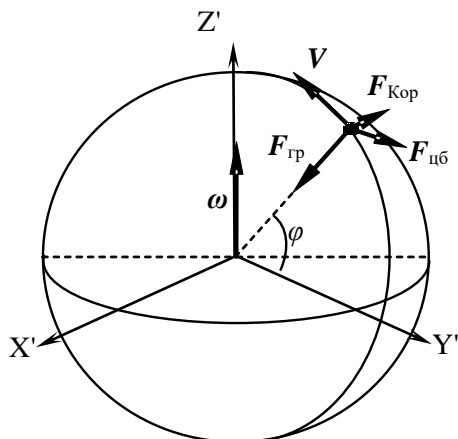


Рис. 10.8. Расположение осей неинерциальной системы отсчета и силы, действующие на пулю.

На пулю в процессе полета действуют сила гравитационного взаимодействия с Землей  $F_{гр}$  и силы инерции – центробежная сила инерции  $F_{цб}$  и сила инерции Кориолиса  $F_{Кор}$ , изображенные на рис. 10.8. Отклонение пули от вертикальной черты мишени вызывает сила инерции Кориолиса.

Центробежная сила инерции имеет горизонтальную составляющую, и, следовательно, изменяет горизонтальную проекцию скорости пули. Однако учет центробежной силы инерции даст малые поправки к величине и направлению скорости полета пули.

Сила инерции Кориолиса не меняя величины скорости пули, изменяет направление ее полета. При этом проекция скорости полета пули на направление выстрела практически не меняется. Поэтому будем считать, что в первом приближении движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью, равной начальной скорости пули.

II. Время полета пули  $t$  находим из условия равномерного движения в направлении выстрела:

$$t = \frac{s}{V}. \quad (10.71)$$

Ускорение в восточном направлении, перпендикулярном начальной скорости пули, определяется силой инерции Кориолиса (см. рис. 10.8) и равно

$$a = 2\omega V \sin \varphi. \quad (10.72)$$

Отклонение пули от вертикальной черты мишени при ускоренном движении в течение времени  $\tau$  равно

$$l = \frac{at^2}{2}. \quad (10.73)$$

III. Решая полученную систему уравнений (10.71) – (10.73), находим искомое значение отклонения от вертикальной черты мишени:

$$l = \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{V} \approx 7 \text{ см.} \quad (10.74)$$

Оценим изменение горизонтальной проекции скорости пули  $\Delta V_\tau$  под действием горизонтальной составляющей центробежной силы инерции  $F_{цб}^\tau$ . Запишем уравнение движения пули в проекции на тангенциальную ось (см. рис. 10.9):

$$ma_\tau = F_{цб}^\tau \quad (10.75)$$

Используя (10.16) и (10.75), получаем для горизонтальной проекции ускорения пули:

$$a_\tau = -\omega^2 r \sin \varphi = -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi. \quad (10.76)$$

Изменение горизонтальной проекции скорости пули под дей-

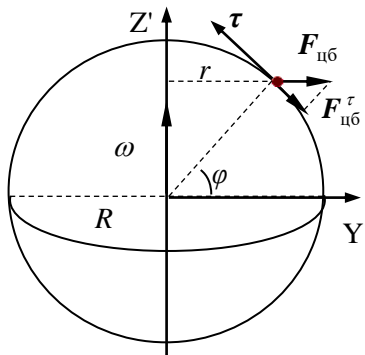


Рис. 10.9. Проекция центробежной силы инерции на тангенциальную ось.

ствием центростремительной силы инерции с учетом (10.71) равно:

$$\Delta V_\tau \cong a_\tau t = -\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi \frac{s}{V}. \quad (10.77)$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин в (10.77) дает  $\Delta V_\tau \cong -0,01 \text{ м/с} \ll V = 900 \text{ м/с}$ , что подтверждает справедливость принятого допущения.

**Ответ:**  $l = \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{V} \approx \text{см.}$

**Задача 10.3.7** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Определить, у какого берега и на какую величину  $h$  уровень воды в реке будет выше. Река течет в северном полушарии на широте  $\varphi = 60^\circ$  с севера на юг. Ширина реки  $L = 1 \text{ км}$ , скорость течения  $V = 1 \text{ м/с}$ , период обращения Земли вокруг своей оси  $T = 24 \text{ м/с}$ . Считать ускорение свободного падения на данной широте равным  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

**Решение**

I. Выделим мысленно небольшой объем жидкости вблизи поверхности и рассмотрим его движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с Землей. Направим ось  $Y'$  вертикально вверх (вдоль линии отвеса), а ось  $X'$  – горизонтально, перпендикулярно скорости течения реки в сторону правого берега (на запад).

На рис. 10.10 изображены силы, действующие на элемент объема жидкости – сила тяжести  $mg$ , равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды  $N$  и сила инерции Кориолиса  $F_{\text{Кор}}$ .

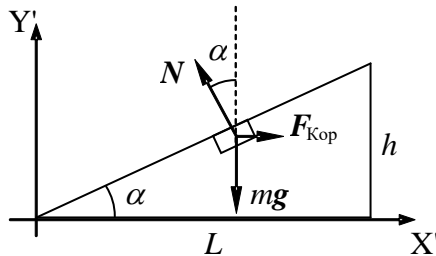


Рис. 10.10. Расположение осей координат неинерциальной системы отсчета и небольшого объема жидкости.

Жидкость считаем несжимаемой, сил вязкого трения нет. Направление течения реки направлено за плоскость чертежа. Равнодействующая сил давления направлена перпендикулярно поверхности жидкости и образует угол  $\alpha$  с вертикалью.

II. Жидкость движется в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, следовательно, векторная сумма сил, лежащих в плоскости чертежа и изображенных на рисунке, равна нулю:

$$mg + N + F_{\text{Кор}}. \quad (10.78)$$

Уравнение (10.78) в проекциях на оси выбранной системы координат принимает вид:

$$-N \sin \alpha + F_{\text{Кор}} = 0, \quad (10.79)$$

$$N \cos \alpha - mg = 0. \quad (10.80)$$

Разность высот правого и левого берегов реки, как видно на рис. 10.10, равна

$$h = L \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.81)$$

Для силы инерции Кориолиса (см. (10.17)) в данном случае справедливо выражение:

$$F_{\text{Кор}} = 2m\omega V \sin \varphi. \quad (10.82)$$

III. Решая систему уравнений (10.79) – (10.82), получаем, что уровень воды у правого берега будет выше на величину

$$h = \frac{2\omega VL \sin \alpha}{g}. \quad (10.83)$$

Подстановка численных значений заданных в условии задачи величин в (10.83) дает искомое значение разности высот правого и левого берегов  $h \cong 1,3$  см.

**Ответ:**  $h = \frac{2\omega VL \sin \alpha}{g} \cong 1,3$  см.

**Задача 10.3.8** (*Вращающаяся неинерциальная система отсчета*). На экваторе с высоты  $h$  на поверхность Земли падает тело без начальной скорости. Найти, на какое расстояние оно отклонится по вертикали в процессе падения.

### Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета  $X'Y'Z'$ , жестко связанной с Землей. Направим одну из осей системы коор-



динат  $Z'$  вдоль угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , а две другие – в экваториальной плоскости (рис. 10.11). Будем считать, что поверхность Земли является сферической, и Земля вместе со связанной с ней системой отсчета  $X'Y'Z'$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

На тело в процессе падения действуют сила гравитационного взаимодействия с Землей  $F_{гп} = mg$  и силы инерции – центробежная сила инерции  $F_{цб}$  и сила инерции Кориолиса  $F_{кор}$ , изображенные на рис. 10.9. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

II. Запишем уравнение движения тела:

$$ma = mg + F_{кор} + F_{цб}. \quad (10.84)$$

Отклонение падающего тела от вертикали определяется действием силы инерции Кориолиса:

$$F_{кор} = -2m[\omega V], \quad (10.85)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $V$  – скорость тела.

Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси  $X'$  и  $Y'$ :

$$ma_{x'} = 2m\omega V_{y'}, \quad (10.86)$$

$$ma_{y'} = mg - m\omega^2 y'. \quad (10.87)$$

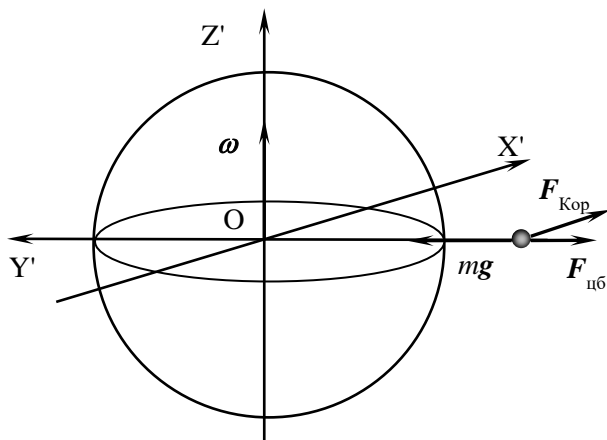


Рис. 10.11. Оси неинерциальной системы отсчета, связанной с Землей, и силы, действующие на падающее тело в этой системе отсчета.

В уравнении (10.87) можно пренебречь величиной центробежной силы инерции по сравнению с силой тяжести (чтобы убедиться

в том, что это можно сделать, достаточно оценить значение центростремительного ускорения  $\omega^2 R_3$  вблизи поверхности Земли и сравнить его с ускорением свободного падения  $g$ . Тогда, как следует из (10.87), в вертикальном направлении тело совершает свободное падение, и зависимость его скорости от времени с учетом начального условия (начальная скорость  $V_0 = 0$ ) можно записать следующим образом:

$$V_{y'}(t) = gt. \quad (10.88)$$

Время движения при свободном падении с высоты  $h$  равно:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (10.89)$$

III. Интегрируя (10.86) с учетом (10.88) и (10.89), получаем зависимость от времени проекции скорости на ось  $X'$ :

$$V_{x'}(t) = \int_0^t a_x dt = \omega g t^2. \quad (10.90)$$

Интегрируя (10.90) с учетом (10.89), получим искомое отклонение тела от вертикали за все время падения:

$$x' = \int_0^{t_{\text{пад}}} V_{x'} dt = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (10.91)$$

**Ответ:**  $x' = \frac{2h\omega}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$

#### 10.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 10.4.1.** Горизонтальный диск радиуса  $R$  вращают с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его край. По краю диска равномерно относительно него движется частица массой  $m$ . В момент времени, когда она оказывается на максимальном расстоянии от оси вращения, сумма всех сил инерции  $F_{\text{ин}}$ , действующих на частицу в системе отсчета, связанной с диском, обращается в ноль. Найти зависимость модуля силы  $F_{\text{ин}}$  от расстояния  $r$  от частицы до оси вращения.

$$\text{Ответ: } F_{\text{ин}} = m\omega^2 r \sqrt{\left(\frac{2R}{r}\right)^2 - 1}.$$

**Задача 10.4.2.** Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили небольшую шайбу массой  $m$  и толчком сообщили ей горизонтальную скорость  $V_0$ . Найти модуль силы Кориолиса, действующей на шайбу в системе отсчета «диск» в тот момент, когда шайба оказалась на расстоянии  $R$  от центра диска.

$$\text{Ответ: } F_{\text{кор}} = 2m\omega\sqrt{V_0^2 + \omega^2 R^2}.$$

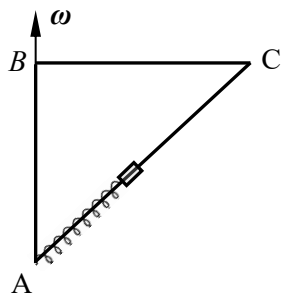
**Задача 10.4.3.** По диаметру диска радиусом  $R$  высверлен канал, в котором вблизи центра диска находится шарик. Диск приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью  $\omega$ . Найти скорость, с которой шарик вылетит из канала. Трением пренебречь.

$$\text{Ответ: } v = \sqrt{2}\omega R.$$

**Задача 10.4.4.** Гладкая горизонтальная трубка длиной  $L$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов. На трубку надета муфточка, находящаяся в начальный момент времени на расстоянии  $l$  от оси трубки. Начальная скорость муфточки относительно трубки равна нулю. Найти модуль силы, действующей на муфточку в тот момент, когда она достигнет конца трубки.

$$\text{Ответ: } F = m\sqrt{4\omega^2(L^2 - l^2) + g^2}.$$

**Задача 10.4.5.** Жесткие стержни образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикального катета АВ (см. рис.). По стержню АС скользит без трения муфта массой  $m$ , связанная пружиной жесткостью  $k$  с вершиной А треугольника. Длина нерастянутой



пружины  $l$ . Определить при каком значении модуля угловой скорости  $\omega$  муфта будет в равновесии при недеформированной пружине? Будет ли это равновесие устойчивым?

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{l}}, \text{ равновесие устойчиво, если } kl > \frac{mg}{\sqrt{2}}.$$

**Задача 10.4.6.** Велосипедист движется с постоянной скоростью  $v$  по радиусу горизонтального диска, вращающегося с частотой  $n$  оборотов в минуту. Определить угол наклона  $\alpha$  велосипеда.

$$\text{Ответ: } \alpha = \arctg\left(\frac{\pi n v}{15g}\right).$$

**Задача 10.4.7** ([2], 290). Иногда устраивают в качестве аттракциона комнату, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Пол такой комнаты имеет вогнутую форму. Во время вращения все находящиеся там предметы и люди стоят на этом полу, как на плоском, устойчиво и нормально к его поверхности. Определить форму пола, если угловая скорость вращения комнаты равна  $\omega$ .

*Ответ:* Пол комнаты представляет собой параболоид вращения  $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$ , ось  $Z$  направлена вдоль оси вращения,  $X, Y$  – в горизонтальной плоскости.

**Задача 10.4.8** ([2], 310). Велосипедное колесо радиуса  $R$  вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его центр. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени, шарик находился у обода колеса. Какую начальную скорость  $V_0$  следует сообщить шарик в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть оси вращения? Угловая скорость вращения  $\omega$  поддерживается постоянной.

$$\text{Ответ: } v \geq \omega R.$$

**Задача 10.4.9.** Из ружья произведен выстрел вверх (параллельно линии отвеса). Географическая широта места  $\varphi = 60^\circ$ ,

начальная скорость пули  $V_0 = 100$  м/с. Определить насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля.

*Ответ:* пуля отклонится к западу на расстояние

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_0^3 \omega \cos \varphi}{g^2} \approx 0,5 \text{ м.}$$

**Задача 10.4.10.** Под каким углом к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Начальная скорость пули  $V_0 = 100$  м/с, географическая широта места  $\varphi = 60^\circ$ .

*Ответ:* ствол ружья надо наклонить к востоку под углом

$$\alpha = \frac{2V_0 \omega \cos \varphi}{3g} \approx 51''.$$

**Задача 10.4.11** ([2], 307). Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса  $R$ , равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели  $T$ , скорость пули  $v$ . Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели по сравнению со скоростью пули, определить приблизительно, под каким углом  $\alpha$  к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

*Ответ:*  $\alpha = \frac{4\pi R}{vT}.$

**Задача 10.4.12** ([2], 308). В диаметрально противоположных точках карусели диаметра  $D$ , вращающейся с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$ , расположены стрелок в точке  $C$  и мишень  $M$ . Стрелок целится в мишень, не вводя поправки на вращение карусели. Каково должно быть угловое ускорение карусели, чтобы при этих условиях пуля попала в цель, если в момент выстрела угловая скорость карусели была  $\omega$ , а скорость пули  $v_0$ . Стрелок и условия стрельбы предполагаются идеальными. Влиянием центробежной силы инерции пренебречь.

*Ответ:*  $\varepsilon = \frac{4v_0\omega_0}{D}.$

**Задача 10.4.13** ([2], 292). Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов и ружейных пуль от начального направления выстрела, заданного в горизонтальной плоскости по земным ориентирам. Рассчитать величину поперечного смещения  $x$  пули, выпущенной в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду ее полета. Выстрел произведен на широте Москвы ( $55^\circ 45'$ ), начальная скорость пули 1000 м/с. Указать, в какую сторону отклонится пуля, если в момент выстрела ствол ружья был направлен на юг. Силу сопротивления воздуха полету пули не учитывать. Решить задачу в системе отсчета, связанной с Землей.

*Ответ:*  $x = vt^2\omega \sin \varphi = 5,8$  см, на запад.

**Задача 10.4.14** ([2], 293) Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой  $\varphi = 30^\circ$ , производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда  $v_0 = 500$  м/с, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта)  $\alpha = 60^\circ$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение  $y$  точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

*Ответ:*  $y = \frac{4\omega v_0^3 \sin \varphi \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} = 71$  м, на юг.

**Задача 10.4.15** ([2], 300) Вращение Земли приводит к отклонению свободно падающих тел (без начальной скорости) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в системе отсчета, связанной с Землей.

*Ответ:* к востоку:  $s_{\text{вост}} = \frac{2}{3} \omega h \cos \varphi$ , к экватору:

$s_{\text{эки}} = \frac{1}{2} \omega t \sin \varphi \cdot s_{\text{вост}}$ , где  $\varphi$  – широта местности,  $h$  – высота, с которой падает тело,  $t$  – время падения

**Задача 10.4.16.** Поезд массой  $m$  движется вдоль меридиана на северной широте  $\varphi$  со скоростью  $V$ . Определить величину и направление силы бокового давления поезда на рельсы.

*Ответ:*  $F = 2mV\omega \sin \varphi$  (на правый по ходу поезда рельс).

**Задача 10.4.17.** Поезд массой  $m$  движется вдоль экватора с постоянной скоростью  $v$ . Определить силу  $N$  нормального давления поезда на рельсы. Решить задачу в двух неинерциальных системах отсчета: в системе, связанной с поверхностью Земли, и в системе, связанной с поездом. Радиус Земли  $R$  и ее угловую скорость вращения  $\omega$  считать заданными.

*Ответ:* 
$$N = m \left( g - \frac{(\omega R \pm v)^2}{R} \right).$$

**Задача 10.4.18** ([2], 295). На северной широте  $\varphi$  поезд массой  $m$  идет с запада на восток со скоростью  $v$  по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели данной местности. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонент кориолисовой силы, действующей на поезд.

*Ответ:* вертикальная составляющая равна  $F_{\text{верт}} = 2m\omega \cos \varphi$ , горизонтальная составляющая (направленная на юг)  $F_{\text{гориз}} = 2m\omega \sin \varphi$ .

**Задача 10.4.19** ([2], 296). Корабль движется на восток вдоль параллели с географической широтой  $\varphi$ . Скорость корабля  $v$ . Определить вес тела  $P$  на корабле, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен  $P_0$ .

*Ответ:* 
$$P = P_0 \left[ 1 - \frac{2\omega v \cos \varphi + v^2 / R}{g} \right] \quad (R - \text{радиус Земли}).$$

**Задача 10.4.20** ([2], 298). На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если самолет взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз с востока на запад. Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно

но Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна  $v_0$ .

$$\text{Ответ: } \Delta v = \frac{2\omega_0 v_0^2}{g - \omega_0^2 R} \quad (R - \text{радиус Земли}).$$

**Задача 10.4.21** ([2], 309). Представим себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу, с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

$$\text{Ответ: } F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P, \text{ где } P - \text{вес тела на поверхности Земли,}$$

$T$  – продолжительность звездных суток,  $R$  – радиус Земли.



## ГЛАВА 11

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ СЛЕДСТВИЯ.  
ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ  
ИНТЕРВАЛОВ**

### 11.1. Теоретический материал

#### Постулаты и основные понятия (специальной) теории относительности

**I. Принцип относительности:** любое физическое явление в природе протекает **одинаковым образом** во **всех** инерциальных системах отсчета. Следовательно, **любой** закон природы **одинаково формулируется** во **всех** инерциальных системах отсчета (уравнения, описывающие законы природы в различных инерциальных системах отсчета, имеют один и тот же вид).

**II. Принцип постоянства скорости света:** скорость распространения электромагнитных волн (в том числе света) в вакууме **одинакова** во всех инерциальных системах отсчета и **не зависит** от скоростей движения источника и приемника излучения.

**Событие.** Любое **событие**, произошедшее в некоторой точке пространства, определяется пространственными координатами  $(x, y, z)$  этой точки и моментом времени  $t$ , когда оно произошло.

**Пространственно-временные координаты события** –  $(x, y, z, t)$  или  $(\mathbf{r}, t)$ .

**Синхронизация часов в системе отсчета.** Для того чтобы часы, неподвижно расположенные во всех точках системы отсчета  $S$ , показывали одно и то же время с точки зрения наблюдателя, неподвижного в той же системе отсчета, необходимо их синхронизовать. В этом случае можно говорить о едином времени в системе отсчета.

**Условие синхронизации часов**  $A$  и  $B$ , расположенных в произвольных точках системы отсчета  $S$  (в предположении об изотропности пространства):

$$t^B = \frac{t_1^A + t_2^A}{2}. \quad (11.1)$$

Здесь (см. рис. 11.1)  $t_1^A$  – момент времени излучения из точки А светового сигнала (кванта света) по часам в точке А,  $t^B$  – момент времени регистрации этого сигнала в точке В по часам в точке В,  $t_2^A$  – момент времени регистрации в точке А отраженного в точке В сигнала по часам в точке А.

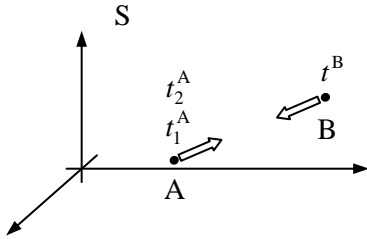


Рис. 11.1. Синхронизация часов, расположенных в разных точках инерциальной системы отсчета S.

### Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца – это **взаимосвязь** пространственно-временных координат **одного и того же** события относительно различных инерциальных систем отсчета (см. рис. 11.2).

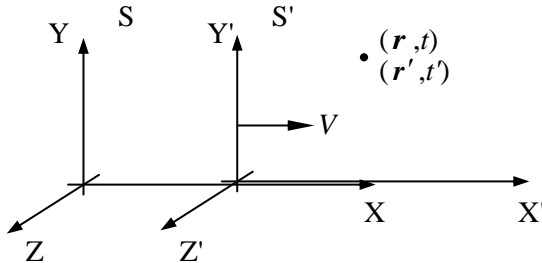


Рис. 11.2. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты события.

Пусть система отсчета  $S'$  движется относительно системы  $S$  с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $X$  (рис. 11.2). При этом **оси систем ориентированы** в пространстве одинаково и **часы синхронизованы** так, что событие с пространственно-временными координатами  $(\mathbf{r} = 0, t = 0)$  в системе  $S$  имеет координаты  $(\mathbf{r}' = 0, t' = 0)$  в системе  $S'$ . Тогда в соответствии с постулатами теории относительности и из однородности времени, а также однородности и изотропности пространства пространственно-временные координата-

ты любого события  $(x, y, z, t)$  и  $(x', y', z', t')$  в этих системах отсчета связаны преобразованиями Лоренца:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \end{array} \right. \quad (11.2)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right); \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + Vt'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{array} \right. \quad (11.3)$$

Здесь  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1$  – Лоренц-фактор  $\left(\beta \equiv \frac{V}{c} < 1\right)$ .

В силу линейности преобразований Лоренца (11.3) аналогичные соотношения можно записать и для интервалов пространственных координат  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$  и  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ ,  $\Delta y' = y'_2 - y'_1$ ,  $\Delta z' = z'_2 - z'_1$ , а также интервалов времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  между двумя любыми событиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t), \\ \Delta y' = \Delta y, \\ \Delta z' = \Delta z, \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right); \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \\ \Delta y = \Delta y', \\ \Delta z = \Delta z', \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right). \end{array} \right. \quad (11.4)$$

Заметим, что величины интервалов пространственных координат и времени зависят от выбора системы отсчета.

### Следствия преобразований Лоренца

#### 1. Предельная скорость распространения взаимодействий.

Скорость распространения любых взаимодействий (а значит и скорость движения физических объектов) в природе **не превышает** скорость распространения электромагнитных волн (в том числе света) в вакууме.

**2. "Относительность одновременности"**. События, происходящие одновременно в одной инерциальной системе отсчета и имеющие различные пространственные координаты вдоль направления движения другой инерциальной системы, не являются в ней одновременными. Это утверждение непосредственно следует из (11.4).

**3. "Замедление времени"**. Рассмотрим два события, происходящие в одной и той же точке пространства в движущейся системе  $S'$  (например, последовательное "тиканье" часов системы  $S'$ ) (рис. 11.3).

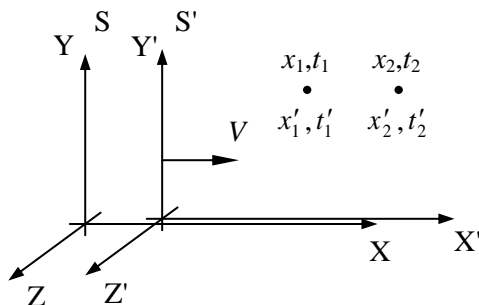


Рис. 11.3. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты рассматриваемых событий.

Принципиально важно, что эти два события происходят **в одной и той же точке пространства** в системе  $S'$ :  $x'_1 = x'_2$ ,  $\Delta x' = x'_1 - x'_2 = 0$ . Для системы  $S$  эти события будут происходить в разных точках пространства. В этом случае (см. (11.4)):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma \Delta t' \quad \text{или} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (11.5)$$

Здесь  $\Delta t'$  – интервал времени между событиями, происходящими в одной и той же точке пространства в системе  $S'$ , по часам системы  $S'$ ;  $\Delta t$  – интервал времени между теми же событиями по часам системы  $S$ .

Другими словами, для системы отсчета, в которой события происходят в одной точке пространства, наблюдается сокращение интервала времени между этими событиями (по сравнению с любой другой системой отсчета).

Если  $T_0 \equiv \Delta t'$  – период хода движущихся часов (часов системы  $S'$ ) по часам системы  $S'$ , а  $T \equiv \Delta t$  – период хода движущихся часов по часам системы  $S$ , то можно утверждать, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных часов:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma T_0, \quad T_0 = \frac{T}{\gamma}. \quad (11.6)$$

**4. "Сокращение длины".** Рассмотрим два события, происходящие одновременно относительно некоторой системы отсчета  $S$ . Этими событиями могут быть, например, измерения координат правого  $x_2$  и левого  $x_1$  концов движущейся вместе с системой  $S'$  линейки, расположенной вдоль осей  $X$  и  $X'$  (см. рис. 11.4).

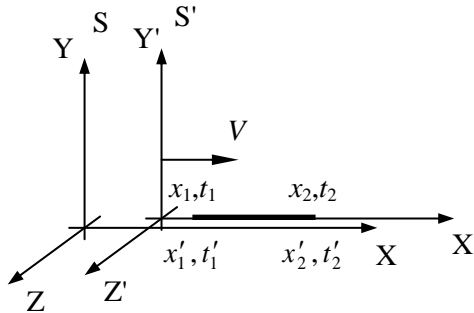


Рис. 11.4. Взаимная ориентация осей координат движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета и пространственно-временные координаты рассматриваемых событий.

Принципиально важно, что эти два события происходят **одновременно** в системе  $S$ :  $t_1 = t_2$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ . Для системы  $S'$  эти события будут происходить не одновременно. В соответствии с (11.4)

для пространственных интервалов  $\Delta x = x_2 - x_1$  и  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$  можно записать:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma \Delta x \text{ или } \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}. \quad (11.7)$$

Другими словами, для системы отсчета, в которой события происходят одновременно, наблюдается сокращение пространственного интервала между этими событиями (по сравнению с любой другой системой отсчета) вдоль направления относительного движения систем.

Если событиями являются измерения координат линейки (см. рис. 11.4), то:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \gamma l \text{ или } l = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (11.8)$$

Здесь  $l_0 \equiv |\Delta x'|$  – **собственная длина** линейки (длина линейки в неподвижной относительно линейки системе отсчета  $S'$ , при этом измерение координат концов линейки может происходить в разные моменты времени);  $l \equiv |\Delta x|$  – длина линейки в системе отсчета  $S$ , относительно которой линейка движется со скоростью  $V$  (измерение координат концов линейки должно происходить в один и тот же момент времени).

**Пространственно-временной интервал между двумя событиями<sup>1</sup>:**

$$\begin{aligned} S_{12} &\equiv \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Здесь  $r_{12} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \geq 0$  – **пространственный интервал** (расстояние между точками пространства, в которых произошли рассматриваемые события) и  $t_{12} = |\Delta t| \geq 0$  – **временной интервал между событиями**.

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (11.2), легко показать, что **пространственно-временной интервал между дву-**

<sup>1</sup>Возможно введение пространственно-временного интервала в ином виде:  $S_{12} \equiv \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}$ , который используется в ряде учебников и задачниках.

**мя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета**, то есть является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$S_{12} = S'_{12}. \quad (11.11)$$

Заметим, что при этом переходе пространственный  $r_{12}$  и временной  $t_{12}$  интервалы либо оба уменьшаются, либо оба увеличиваются.

**Пространственноподобный интервал** – мнимый пространственно-временной интервал между двумя событиями, для которого  $S_{12}^2 < 0$ . В этом случае:  $r_{12} > ct_{12}$ .

### Свойства пространственноподобного интервала между двумя событиями

1. Существует такая инерциальная система отсчета, в которой события происходят одновременно, но в разных точках пространства. В этой системе отсчета пространственный интервал  $r'_{12}$  между событиями принимает минимальное значение:

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2} = S'_{12} = ir'_{12}, \quad (11.12)$$

$$r'_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}. \quad (11.13)$$

2. Не существует системы отсчета, в которой события происходят в одной точке пространства.

3. События, связанные пространственноподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета могут происходить во времени в обратной последовательности.

4. Эти события не могут быть связаны причинно-следственной связью, поскольку для этого потребовалась бы скорость передачи сигнала, превышающая скорость света:

$$S_{12}^2 < 0, \quad r_{12} > ct_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} > c. \quad (11.14)$$

5. Эти события не могут происходить с одним и тем же телом (достаточно малым, чтобы считать, что события происходят в одной и той же точке пространства относительно системы отсчета, связанной с этим телом), поскольку тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света.

**Времениподобный интервал** – вещественный пространственно-временной интервал между двумя событиями, для которого  $S_{12}^2 > 0$ . В этом случае:  $ct_{12} > r_{12}$ .

### Свойства времениподобного интервала между двумя событиями

1. Существует такая инерциальная система отсчета, в которой оба события происходят в одной и той же точке пространства, но в разное время. В этой системе отсчета временной интервал  $t'_{12}$  между событиями принимает минимальное значение:

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2} = S'_{12} = ct'_{12}, \quad (11.15)$$

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2 = c^2 (t'_{12})^2,$$

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2}. \quad (11.16)$$

2. Не существует системы отсчета, в которой события происходят в одно и то же время:  $t'_{12} = 0$ .

3. События, связанные времениподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета не могут происходить во времени в обратной последовательности.

4. Эти два события могут быть связаны причинно-следственной связью, поскольку для этого требуется скорость передачи сигнала меньше скорости света:

$$S_{12}^2 > 0, \quad ct_{12} > r_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} < c. \quad (11.17)$$

5. Эти события могут происходить с одним и тем же телом, поскольку тело может двигаться со скоростью, меньшей скорости света, то  $ct_{12} > r_{12}$  и  $S_{12}^2 > 0$ .

**Светоподобный интервал:**  $S_{12}^2 = 0$ .

### Свойства светоподобного интервала между двумя событиями

1. Если события происходят в одной точке пространства, то они происходят одновременно (и наоборот) в любой инерциальной системе отсчета:

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2} = 0, \quad r_{12} = 0 \Leftrightarrow t_{12} = 0. \quad (11.18)$$



2. Не существует инерциальной системы отсчета, в которой два события, разделенные пространственным интервалом происходят одновременно или разделенные временным интервалом, происходят в одной точке пространства.

3. События, связанные светоподобным интервалом, в результате перехода в другую систему отсчета не могут происходить во времени в обратной последовательности.

Докажем это. Для рассматриваемых событий  $\Delta x = \pm c\Delta t$ , следовательно, в соответствии с преобразованиями Лоренца для интервалов (11.4), можно записать:

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left( 1 - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \gamma \Delta t \left( 1 \mp \frac{V}{c} \right). \quad (11.19)$$

Как видим, знак временного интервала  $\Delta t'$  совпадает со знаком интервала  $\Delta t$  при любых возможных скоростях движения системы  $S'$  относительно системы  $S$ .

4. Эти два события могут быть связаны причинно-следственной связью, если используется сигнал, передающийся со скоростью света:

$$S_{12}^2 = 0, \quad r_{12} = ct_{12}, \quad v = \frac{r_{12}}{t_{12}} = c. \quad (11.20)$$

5. Эти события не могут происходить с одним и тем же телом, имеющим массу покоя, поскольку оно не может двигаться со скоростью света.

Понятия времениподобный, пространственноподобный и светоподобный интервалы – понятия абсолютные, не зависящие от выбора инерциальной системы отсчета.

## 11.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач кинематики в теории относительности можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на:

1) преобразования Лоренца или их следствия ("относительность одновременности", "замедление времени" и "сокращение длины");

2) инвариантность пространственно-временных интервалов.

Как правило, один из типов задач имеет основное, другие – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с событиями и системами отсчета.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела (если это необходимо).
2. Выбрать движущиеся друг относительно друга инерциальные системы отсчета и изобразить на чертеже их системы координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить скорости тел.
4. Выбрать интересующие нас события и записать их пространственно-временные координаты относительно выбранных систем отсчета.

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать преобразования Лоренца или их следствия (для задач типа (1)).
2. Записать пространственно-временные интервалы между событиями (для задач типа (2)).
3. Использовать условия задачи (например, соотношения между характеристиками системы и пространственно-временными координатами событий).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (рассмотреть характерные случаи).
3. Получить численный результат.

### 11.3. Примеры решения задач

**Задача 11.3.1.** (*Преобразования Лоренца или их следствия*) Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в системе отсчета  $S$ . Время пролета в этой системе  $\Delta t = 20$  нс. В системе же отсчета  $S'$ , связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение  $\Delta t' = 25$  нс. Найти собственную длину стержня.

### Решение

I. Пусть стержень, а значит и система  $S'$ , движутся со скоростью  $V$  вдоль оси  $X$  системы  $S$ . С такой же по величине скоростью, но в обратном направлении, движется метка относительно стержня. Для решения задачи воспользуемся рис. 11.4 (см. п. 11.1. Теоретический материал). Определим события  $A$  и  $B$ , как моменты пролета метки мимо обоих концов стержня. Обозначим пространственно-временные координаты этих событий, как  $(x'_1, t'_1)$  и  $(x'_2, t'_2)$  в системе отсчета  $S'$  и как  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$  в системе отсчета  $S$ . Заметим, что в соответствии с выбором событий  $x_1 = x_2$ .

II. Искомая собственная длина стержня  $l_0$  равна пространственному интервалу между событиями  $A$  и  $B$  в системе отсчета, связанной со стержнем —  $l_0 = x'_2 - x'_1$ . Поскольку метка движется относительно стержня со скоростью  $V$ , то

$$l_0 = V\Delta t', \quad (11.23)$$

где  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  — временной интервал между рассматриваемыми событиями в системе отсчета  $S'$ .

Для нахождения  $V$  запишем преобразования Лоренца для временных интервалов  $\Delta t'$  и  $\Delta t = t_2 - t_1$  (см. (11.5)):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (11.24)$$

Заметим, что в данном случае сокращается интервал времени  $\Delta t$ , поскольку в системе отсчета  $S$  события  $A$  и  $B$  происходят в одной точке пространства (наблюдается "замедление времени").

III. Используя (11.24), определим величину скорости  $V$ :

$$V = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}. \quad (11.25)$$

В соответствии с (11.23) и (11.25) искомая собственная длина стержня (длина стержня в неподвижной относительно него системе отсчета  $S'$ ) равна

$$l_0 = V\Delta t' = c\Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2}. \quad (11.26)$$

Подставив в (11.26) значения  $\Delta t = 20$  нс и  $\Delta t' = 25$  нс, заданные в условии задачи, а также значение скорости света  $c \cong 3 \cdot 10^8$  м/с, получим:

$$l_0 = 4,5 \text{ м.}$$

**Ответ:**  $l_0 = 4,5$  м.

**Задача 11.3.2.** (Преобразования Лоренца или их следствия) Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы  $\Delta t_0 = 10$  нс. Какой путь пролетит эта частица, двигаясь с постоянной скоростью, до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни  $\Delta t = 20$  нс?

### Решение

I. Выберем системы отсчета. Свяжем систему отсчета  $S'$  с движущейся частицей. Следовательно, система  $S'$  движется относительно лабораторной системы  $S$  со скоростью движения частицы  $V$ . Для решения задачи воспользуемся рис. 11.3 (см. п. 5.1. Теоретический материал). Определим события А и В как события, состоящие в рождении и распаде частицы соответственно. Пусть пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета  $S$  равны  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$ , а в системе отсчета  $S'$  –  $(x'_1, t'_1)$  и  $(x'_2, t'_2)$ , причем  $x'_1 = x'_2$ . Собственное время жизни нестабильной частицы  $\Delta t_0$  – время жизни в системе отсчета  $S'$ , в которой эти два события происходят в одной и той же точке пространства:

$$\Delta t_0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (11.27)$$

II. Искомый путь  $l$ , который пролетит частица до своего распада в лабораторной системе отсчета  $S$  определяется ее скоростью и временем жизни частицы в этой системе:

$$l = V \Delta t. \quad (11.28)$$

Для нахождения скорости частицы (а, следовательно, и скорости движущейся системы отсчета  $S'$ ) воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени". Поскольку в системе отсчета  $S'$  события А и В происходят в одной точке пространства, то, согласно (11.5), должно наблюдаться сокращение интервала времени в системе  $S'$  между рассматриваемыми событиями

ями. Таким образом, собственное время жизни и время жизни в лабораторной системе отсчета связаны следующим соотношением:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (11.29)$$

III. Используя (11.29), определим скорость системы отсчета S':

$$V = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}. \quad (11.30)$$

Подставляя полученное выражение (11.30) для скорости в (11.28), определим искомый путь  $l$ , который пролетит частица до своего распада в лабораторной системе отсчета S:

$$l = c \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}. \quad (11.31)$$

Подставив в (11.31) численные значения величин  $\Delta t_0$  и  $\Delta t$ , заданные в условии задачи, получаем:

$$l = 5,2 \text{ м.}$$

**Ответ:**  $l = 5,2 \text{ м.}$

**Задача 11.3.3.** (Преобразования Лоренца или их следствия) Система отсчета S' движется относительно системы S вдоль оси X с постоянной скоростью  $V = 0,9c$ . В каждой системе в точках с координатами  $-200 \text{ м}$ ,  $-100 \text{ м}$ ,  $0 \text{ м}$ ,  $100 \text{ м}$  и  $200 \text{ м}$  находятся одинаковые синхронизованные часы. За начало отсчета времени в обеих системах отсчета взят такой момент, когда часы, неподвижные относительно системы S и имеющие координату  $x = 0 \text{ м}$ , окажутся напротив часов, неподвижных относительно системы S' и имеющих координату  $x' = 0 \text{ м}$ . Определить время, которое в этот момент будут показывать часы, а также их координаты "с точки зрения" наблюдателей, находящихся как в системе S, так и в системе S'. Изобразить расположение часов обеих систем и примерное положение стрелок этих часов в этот момент времени относительно различных систем отсчета.

### Решение

I. Пусть событие  $A_j$  ( $j=1, 2, 3, 4, 5$ ) заключается в том, что в момент времени  $t_{A_j} = 0$  по часам системы S фиксируется показа-

ния  $j$ -ых часов, расположенных в системе  $S'$  в точке с координатой  $x'_{A_j}$  (принимаяющей значения  $-200$  м,  $-100$  м,  $0$  м,  $100$  м и  $200$  м для разных часов) в системе  $S'$ . Событие  $B_k$  ( $k=1, 2, 3, 4, 5$ ) – фиксация показания  $k$ -ых часов системы  $S$ , имеющих координату  $x_{B_k}$  ( $-200$  м,  $-100$  м,  $0$  м,  $100$  м и  $200$  м) в системе  $S$  в момент времени  $t'_{B_k} = 0$  по часам системы  $S'$ . Обратим внимание на то, что все события  $A_j$  происходят в один и тот же момент времени в системе  $S$ . И наоборот, все события  $B_j$  происходят в один и тот же момент времени в системе  $S'$ .

II. Пространственно-временные координаты событий  $A_j$  и  $B_k$  в системах  $S$  и  $S'$  связаны преобразованиями Лоренца (см. (11.3)), полученными с учетом  $t_{A_j} = 0$  и  $t'_{B_k} = 0$ :

$$x'_{A_j} = \gamma x_{A_j}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} \gamma x_{A_j}; \quad (11.32)$$

$$x_{B_k} = \gamma x'_{B_k}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} \gamma x'_{B_k}. \quad (11.33)$$

Здесь  $t'_{A_j}$  – показания часов системы  $S'$ ,  $x_{A_j}$  – координата часов системы  $S'$  в системе  $S$ ,  $t_{B_k}$  – показания часов системы  $S$ ,  $x'_{B_k}$  – координата часов системы  $S$  в системе  $S'$ .

Систему уравнений (11.32), (11.33) дополним выражением для Лоренц-фактора:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (11.34)$$

III. Решая полученную систему уравнений (11.32) – (11.34) относительно неизвестных пространственно-временных координат ( $t'_{A_j}$ ,  $x_{A_j}$  и  $t_{B_k}$ ,  $x'_{B_k}$ ) интересующих нас событий  $A$  и  $B$  и модуля скорости  $V$  движения системы отсчета  $S'$  относительно  $S$ , получим:

$$x_{A_j} = \frac{1}{\gamma} x'_{A_j} = x'_{A_j} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} x'_{A_j}; \quad (11.35)$$

$$x'_{B_k} = \frac{1}{\gamma} x_{B_k} = x_{B_k} \sqrt{1 - (V/c)^2}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} x_{B_k}. \quad (11.36)$$

Изобразим на рисунках расположение часов обеих систем и положение стрелок этих часов относительно различных систем от-

счета с учетом того, что координаты  $x'_{A_j}$  и  $x_{B_k}$  часов в каждой из своих систем отсчета различны.

На рис 11.5 расположение часов и положение их стрелок соответствуют случаю, когда наблюдатель находится в системе  $S$ , а на рис. 11.6 – когда наблюдатель находится в системе  $S'$ .

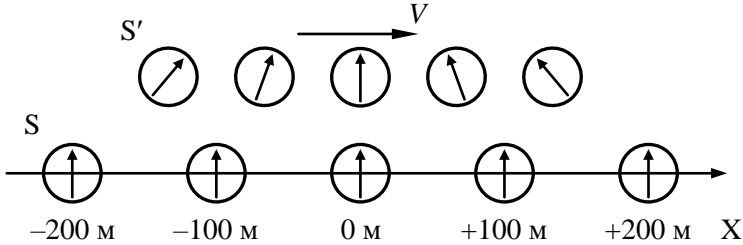


Рис. 11.5. Расположение часов и положение их стрелок в случае, когда наблюдатель находится в системе отсчета  $S$ .

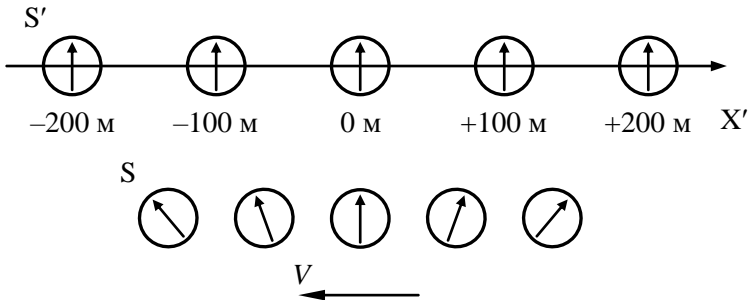


Рис. 11.6. Расположение часов и их стрелок в случае, когда наблюдатель находится в системе отсчета  $S'$ .

Как видим, пространственные интервалы между соседними часами в обеих системах отсчета "с точки зрения" наблюдателей, находящихся в другой системе, уменьшается в  $\gamma$  раз (см. (11.35) и (11.36)). При этом показания часов линейно зависят от их пространственных координат в своих системах отсчета. Если часы расположены относительно начала отсчета своей системы координат в направлении скорости ее движения относительно другой системы отсчета, то они отстают от часов, расположенных в начале отсчета (см. рис. 11.5 и 11.6). И наоборот, часы расположенные относительно начала отсчета своей системы координат в направле-

нии, противоположном скорости ее движения относительно другой системы отсчета, опережают часы, расположенные в начале отсчета (см. рис. 11.5 и 11.6).

Оценим максимальное различие в показаниях часов, которое соответствует часам, расположенным на максимальном расстоянии друг от друга. В соответствии с условием задачи  $V = 0,9c$ ,  $x'_{A_1} = x_{B_1} = -200\text{ м}$  и  $x'_{A_5} = x_{B_5} = 200\text{ м}$ , следовательно:

$$\begin{aligned} t'_{A_5} - t'_{A_1} &= -\frac{V}{c^2} x'_{A_5} + \frac{V}{c^2} x'_{A_1} = \frac{V}{c^2} (x'_{A_1} - x'_{A_5}) = \\ &= -1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = -1,2 \text{ мкс} \end{aligned} \quad (11.37)$$

и

$$\begin{aligned} t_{B_5} - t_{B_1} &= \frac{V}{c^2} x_{B_5} - \frac{V}{c^2} x_{B_1} = \frac{V}{c^2} (x_{B_5} - x_{B_1}) = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 1,2 \text{ мкс} . \end{aligned} \quad (11.38)$$

**Ответ:**  $x_{A_j} = x'_{A_j} \sqrt{1 - (V/c)^2}$ ,  $x_{B_k} = x'_{B_k} \sqrt{1 - (V/c)^2}$  ;

$$t'_{A_j} = -\frac{V}{c^2} x'_{A_j}, \quad t_{B_k} = \frac{V}{c^2} x_{B_k} .$$

**Задача 11.3.4.** (*Преобразования Лоренца или их следствия*)  
Межзвездный корабль движется от Земли к звезде, находящейся от нее на расстоянии  $L = 3$  световых года, со скоростью  $V = 5 \cdot 10^6$  м/с. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно с той же по величине скоростью. На какое время  $\Delta t$  часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю? При решении задачи пренебrecь временем, затраченным на разгон и торможение ракеты.

### Решение

I. Предположим, что система отсчета  $S$ , связанная с Землей и звездой, является инерциальной. Другую инерциальную систему отсчета  $S'$  свяжем с движущимся относительно Земли межзвездным кораблем. Пусть корабль, а значит и система  $S'$ , движутся со скоростью  $V$  вдоль оси  $X$  системы  $S$ . Определим, как обычно, интересные нас события:



А – межзвездный корабль начал двигаться со скоростью  $V$  к звезде;

В – корабль долетел до звезды;

С – межзвездный корабль возвратился обратно на Землю.

II. Интервалы времени между событиями А и В и событиями В и С в системе отсчета S равны

$$T_{AB} = T_{BC} = \frac{L}{V}. \quad (11.39)$$

С точки зрения космонавта, находящегося в корабле, события А, В и события В, С происходят в одной точке пространства. Следовательно, для системы отсчета, связанной с кораблем, происходит сокращение интервала времени между событиями А, В и В, С, то есть наблюдается "замедлением времени". Тогда, согласно (11.6), в системе отсчета S':

$$T'_{AB} = T'_{BC} = \frac{L}{V\gamma}. \quad (11.40)$$

Время  $\Delta t$ , на которое часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю, равно:

$$\Delta t = (T_{AB} + T_{BC}) - (T'_{AB} + T'_{BC}) \quad (11.41)$$

III. Решая систему уравнений (11.39) – (11.41) относительно  $\Delta t$  получаем:

$$\Delta t = \frac{2L}{V} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right). \quad (11.42)$$

Поскольку по условию задачи  $V/c \cong 0.33 \cdot 10^{-2} \ll 1$ , то  $1 - \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{V^2}{2c^2}$  и, следовательно, искомое время, на которое часы на корабле отстанут от земных часов равно

$$\Delta t \approx \frac{2L}{V} \cdot \frac{V^2}{2c^2} = \frac{LV}{c^2} \approx 0,05 \text{ года} \approx 18 \text{ сут.} \quad (11.43)$$

**Ответ:**  $\Delta t \approx \frac{2L}{V} \cdot \frac{V^2}{2c^2} = \frac{LV}{c^2} \approx 0,05 \text{ года} \approx 18 \text{ сут.}$

**Задача 11.3.5.** (Преобразования Лоренца или их следствия) Стержень, движущийся со скоростью  $V = c/2$  относительно системы S, имеет собственную длину  $l_0 = 1$  м. В системе отсчета S', свя-

занной с движущимся стержнем, угол между стержнем и направлением его движения составляет  $\varphi_0 = 45^\circ$  (рис. 11.7). Найти длину стержня  $l$  и угол его наклона  $\varphi$  в системе  $S$ .

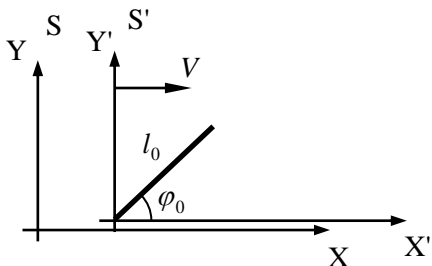


Рис. 11.7. Расположение осей систем отсчета  $S$  и  $S'$  и движущегося стержня.

### Решение

I. Поскольку в соответствии с условием задачи, необходимо определить длину стержня в системе отсчета  $S$ , определим следующие два события – А и В. Эти события состоят в том, что одновременно измерены положения двух концов стержня в системе  $S$ . Пусть пространственно-временные координаты этих событий в системе отсчета  $S$  равны  $(x_1, y_1, t_1)$  и  $(x_2, y_2, t_2)$ , причем  $t_1 = t_2$ . В системе отсчета  $S'$  события А и В происходят не одновременно, их пространственно-временные координаты равны соответственно  $(x'_1, y'_1, t'_1)$  и  $(x'_2, y'_2, t'_2)$ .

II. Собственная длина стержня (длина стержня в неподвижной относительно него системе отсчета  $S'$ ) равна:

$$l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \quad (11.44)$$

Интервалы  $\Delta x'$  и  $\Delta y'$  связаны с собственной длиной стержня  $l_0$  и углом его наклона  $\varphi_0$  в системе отсчета  $S'$  следующими соотношениями:

$$\Delta x' = l_0 \cos \varphi_0 \text{ и } \Delta y' = l_0 \sin \varphi_0. \quad (11.45)$$

Поскольку события А и В происходят одновременно в системе отсчета  $S$ , для определения длины стержня в системе отсчета  $S$  воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "сокращением длины" (см. п. 5.1.3). Согласно (11.7):

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'. \quad (11.46)$$

При этом в соответствии с преобразованиями Лоренца (11.4) сокращение интервала  $\Delta y$  между координатами  $y_1$  и  $y_2$  наблюдаться не будет:  $\Delta y = \Delta y'$ .

Длина стержня  $l$  определяется его проекциями на оси системы отсчета S:

$$l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (11.47)$$

Угол наклона стержня в системе S связан с интервалами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  следующим образом:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \quad (11.48)$$

III. Подставив в формулу (11.47) соотношения (11.45) и (11.46), получим длину стержня в системе отсчета S:

$$l = l_0 \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \frac{\cos^2 \varphi_0}{\gamma^2}} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cos^2 \varphi_0}. \quad (11.49)$$

Воспользовавшись соотношениями (11.46) и (11.48) получим угол наклона стержня в той же системе отсчета:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma \Delta y'}{\Delta x'}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \operatorname{tg} \varphi_0\right). \quad (11.50)$$

Подставив в (11.49) и (11.50) заданные в условии задачи значения  $l_0$  и  $V$ , получим численные значения искомых величин:

$$l \approx 0,935 \text{ м}, \quad \varphi \approx 49^\circ. \quad (11.51)$$

**Ответ:**  $l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cos^2 \varphi_0} \approx 0,935 \text{ м},$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \operatorname{tg} \varphi_0\right) \approx 49^\circ.$$

**Задача 11.3.6.** (Преобразования Лоренца или их следствия) Космический корабль летит со скоростью  $V = 0,6c$  от одного неподвижного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих

импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за время  $\tau = 60$  сут.

### Решение

I. Свяжем систему отсчета  $S'$  с космическим кораблем, а систему отсчета  $S$  с неподвижными маяками (рис. 11.8).

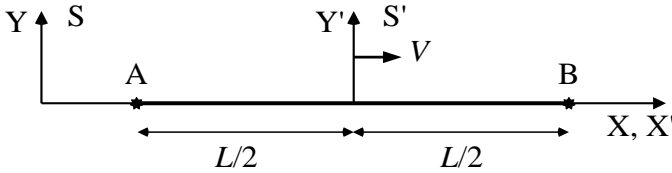


Рис. 11.8. Расположение осей систем отсчета  $S$  и  $S'$ .

Пусть события  $A$  и  $B$  состоят в том, что на корабле происходит последовательная регистрация двух испущенных маяками световых импульсов. В системе отсчета  $S$  сначала в момент времени  $t_1$  в точке с координатой  $x_1$  происходит регистрация импульса, испущенного маяком  $B$ . Регистрация импульса, испущенного маяком  $A$ , происходит в последующий момент времени  $t_2$  в точке с координатой  $x_2$ .

II. Для наблюдателя, находящегося в системе отсчета  $S$ , моменты времени регистрации сигналов определяются соотношениями:

$$ct_1 = \frac{L}{2} - Vt_1, \quad (11.52)$$

$$ct_2 = \frac{L}{2} + Vt_2. \quad (11.53)$$

Тогда интервал времени между событиями  $A$  и  $B$  в системе отсчета  $S$  будет равен:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V} \right) = \frac{LV}{c^2 - V^2}. \quad (11.54)$$

Здесь  $L$  – расстояние между космическими маяками, причем в соответствии с условием задачи

$$L = c\tau. \quad (11.55)$$

Воспользуемся следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени". Поскольку в системе отсчета  $S'$  события А и В происходят в одной точке пространства, то, согласно (11.6), должно наблюдаться сокращение интервала времени между рассматриваемыми событиями в этой системе:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}. \quad (11.56)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (11.54) – (11.56), определим искомый промежуток времени между моментами регистрации световых импульсов на корабле:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = \frac{LV}{c^2 - V^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} = \frac{c\tau V}{c\sqrt{c^2 - V^2}} = \\ &= \tau \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \end{aligned} \quad (11.57)$$

Подставляя в (11.57) заданные в условии задачи значения скорости космического корабля  $V = 0,6c$  и времени, необходимого для прохождения света между маяками  $\tau = 60$  сут., получаем:

$$\Delta t' = 45 \text{ сут.}$$

$$\text{Ответ: } \Delta t' = \tau \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} = 45 \text{ сут.}$$

**Задача 11.3.7.** (Преобразования Лоренца или их следствия) Корабль, летящий по направлению к Земле, испускает последовательно два коротких световых импульса с интервалом времени  $\tau_1 = 1$  мин. Отраженный от Земли первый импульс возвращается на корабль через время  $T = 1,5$  месяца. При этом временной интервал между принятыми сигналами составляет  $\tau_2 = 15$  с. Промежутки времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $T$  отсчитываются по часам корабля. Найти скорость корабля и время  $T_3$ , которое пройдет на Земле от момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля.

### Решение

I. Определим интересующие нас события:

- А – испускание кораблем первого светового импульса;
- В – испускание кораблем второго светового импульса;
- $A_1$  – отражение первого импульса от поверхности Земли;
- $B_1$  – отражение второго импульса от поверхности Земли;
- $A_2$  – регистрация первого импульса кораблем;
- $B_2$  – регистрация второго импульса кораблем;
- С – прилет корабля на Землю.

На рис. 11.9 схематично (без соблюдения масштаба) изображена временная последовательность указанных событий в системах отчета, связанных с Землей (верхняя на рисунке ось времени  $t$ ) и с кораблем (нижняя ось  $t'$ ).

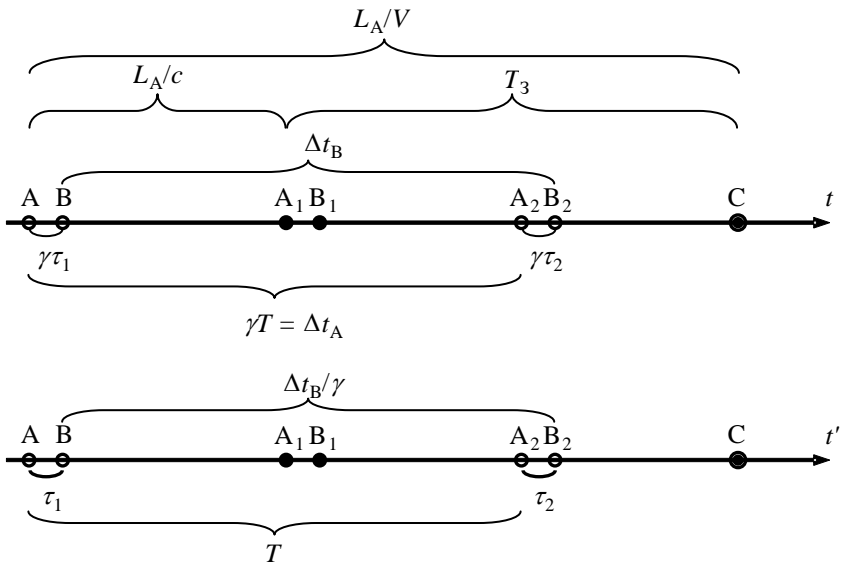


Рис. 11.9. Схематичное изображение временной последовательности событий в системах отчета, связанных с Землей (верхняя на рисунке ось времени  $t$ ) и с кораблем (нижняя ось  $t'$ ).

События, произошедшие на корабле, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на Земле, – закрашенными кружками. На рисунке изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи по часам корабля, –  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $T$ . В соответствии со следствием преобразований Лоренца – так называемым "замедлением времени" (см. Теоретический материал, формула (11.6)) – интервалы времени, соответствующие тем

же парам событий, измеренные по земным часам, увеличиваются в  $\gamma$  раз (см. рис. 11.9).

II. Поскольку по условию задачи задан интервал времени  $T$  между событиями  $A$  и  $A_2$  в системе отсчета, связанной с кораблем, запишем интервал времени  $\Delta t_A$  между теми же событиями в системе отсчета, связанной с Землей, как функцию скорости корабля:

$$\Delta t_A = \frac{L_A + (L_A - V\Delta t_A)}{c}, \quad (11.58)$$

где  $L_A$  – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие  $A$  в системе отсчета, связанной с Землей. С другой стороны, используя следствие преобразований Лоренца, "замедление времени", можно записать:

$$\Delta t_A = \gamma T. \quad (11.59)$$

Уравнение, аналогичное (11.58), запишем для интервала времени  $\Delta t_B$  между событиями  $B$  и  $B_2$  в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\Delta t_B = \frac{L_B + (L_B - V\Delta t_B)}{c}, \quad (11.60)$$

где  $L_B$  – расстояние между Землей и кораблем в момент времени, когда произошло событие  $B$  в системе отсчета, связанной с Землей. Как видно в верхней части рис. 11.9, интервал времени  $\Delta t_B$  может быть выражен через заданные в задаче интервалы  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $T$ :

$$\Delta t_B = \gamma T - \gamma\tau_1 + \gamma\tau_2. \quad (11.61)$$

Запишем пройденный кораблем путь с момента испускания первого светового импульса до момента испускания второго светового импульса (пространственный интервал между событиями  $A$  и  $B$ ) в системе отсчета, связанной с Землей (за время  $\gamma\tau_1$ ):

$$L_A - L_B = V\gamma\tau_1. \quad (11.62)$$

Искомый интервал времени между событиями  $A_1$  и  $C$

$$T_3 = \frac{L_A}{V} - \frac{L_A}{c}. \quad (11.63)$$

III. Решая систему уравнений (11.58) – (11.63), находим скорость движения корабля  $V$  и время  $T_3$ , которое пройдет на Земле от

момента регистрации земным наблюдателем первого светового импульса до прилета корабля:

$$V = c \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad (11.64)$$

$$T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2}. \quad (11.65)$$

Подставляя численные значения интервалов времени, заданных в условии задачи, получим:

$$V = 0,6c, \quad T_3 \cong 1 \text{ месяц}.$$

$$\text{Ответ: } V = c \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 0,6c, \quad T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} \cong 1 \text{ месяц}.$$

**Задача 11.3.8.** (*Преобразования Лоренца или их следствия*)

Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу (см. рис. 11.10). На носу и на корме первого звездолета периодически, каждые  $\tau_1 = 1$  с, по часам этого звездолета одновременно зажигаются сигнальные огни. На втором звездолете каждые  $\tau_2 = 0,5$  с наблюдают две вспышки с интервалом времени  $\Delta\tau = 1$  мкс. Найти собственную длину  $l_0$  первого звездолета и скорость  $U$  относительного движения звездолетов.



Рис. 11.10. Расположение осей систем отсчета  $S$  и  $S'$  и двух звездолетов.

**Решение**

I. Свяжем систему отсчета  $S$  с первым звездолетом, тогда второй звездолет, с которым свяжем систему отсчета  $S'$ , будет двигаться относительно системы  $S$  со скоростью  $U$  (рис. 11.10).

Определим интересующие нас события:

А и В – две ближайшие по времени вспышки, происходящие на носу первого звездолета;

А<sub>1</sub> и В<sub>1</sub> – регистрация этих вспышек на втором звездолете;



- С – вспышка на корме первого звездолета, которая произошла одновременно в системе отсчета S со вспышкой на носу этого звездолета (событие А);
- С<sub>1</sub> – регистрация на втором звездолете вспышки, произошедшей на корме первого звездолета.

На рис. 11.11 схематично изображена временная последовательность указанных событий в системах отчета, связанных с первым (верхняя на рисунке ось времени  $t$ ) и со вторым звездолетом (нижняя ось  $t'$ ).

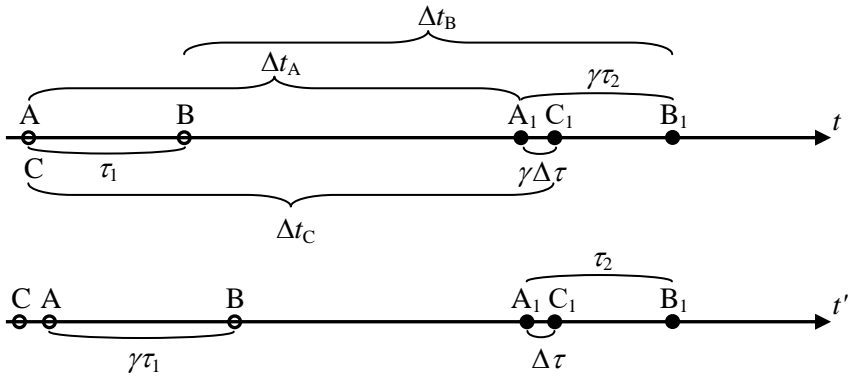


Рис. 11.11. Интервалы времени между событиями, произошедшими на первом звездолете (незакрашенные кружки) и на втором звездолете (закрашенные кружки).

События, произошедшие на первом звездолете, обозначены незакрашенными кружками, а события, произошедшие на втором звездолете, – закрашенными кружками.

На рис. 11.11 изображены также интервалы времени между событиями, заданные в условии задачи, –  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\Delta\tau$ . Эти интервалы времени относятся к событиям, происходящим в одной точке пространства, – А и В в системе S (интервал  $\tau_1$ ), А<sub>1</sub> и В<sub>1</sub> в системе S' (интервал  $\tau_2$ ), А<sub>1</sub> и С<sub>1</sub> в системе S' (интервал  $\Delta\tau$ ). В соответствии со следствием преобразований Лоренца – "замедлением времени" (см. Теоретический материал, формулу (11.6)) – эти интервалы времени, соответствующие тем же парам событий, измеренные по часам

другой системы отсчета, увеличиваются в  $\gamma$  раз (см. рис. 11.11), где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (U/c)^2}}.$$

II. Пусть в момент вспышки света на носу первого звездолета (событие А) второй звездолет находился на расстоянии  $L_A$  в системе отсчета S. Тогда интервал времени  $\Delta t_A$  между событиями А и  $A_1$  в этой системе отсчета с учетом скорости сближения звездолетов равен:

$$\Delta t_A = \frac{L_A}{c + U}. \quad (11.66)$$

Вспышка света на корме первого звездолета (событие С), произошедшая одновременно с первой вспышкой на его носу (событие А) будет зарегистрирована на втором звездолете через время  $\Delta t_C$  по часам первого звездолета:

$$\Delta t_C = \frac{L_A + l_0}{c + U}. \quad (11.67)$$

Интервал времени  $\Delta t_B$  между событиями В и  $B_1$  в системе отсчета S с учетом уменьшения расстояния между звездолетами за время  $\tau_1$  равен:

$$\Delta t_B = \frac{L_A - U\tau_1}{c + U}. \quad (11.68)$$

Как видно на рис. 11.11, рассматриваемые интервалы времени связаны между собой соотношениями:

$$\Delta t_C = \Delta t_A + \gamma \Delta \tau, \quad (11.69)$$

$$\Delta t_B = \Delta t_A - \tau_1 + \gamma \tau_2. \quad (11.70)$$

III. Решаем полученную систему уравнений (11.66) – (11.70) относительно искомых величин  $l_0$  и  $U$ :

$$l_0 = c \Delta \tau \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad (11.71)$$

$$U = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2} c. \quad (11.72)$$

Подставив в (11.71) и (11.72) заданные численные значения  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\Delta \tau$ , определим собственную длину первого звездолета  $l_0$  и скорость относительного движения звездолетов  $U$ :

$$l_0 = 600 \text{ м}, U = \frac{3}{5}c. \quad (11.73)$$

$$\text{Ответ: } l_0 = c\Delta\tau \frac{\tau_1}{\tau_2} = 600 \text{ м}, U = \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2}c = \frac{3}{5}c.$$

**Задача 11.3.9.** (Инвариантность пространственно-временных интервалов). В некоторой системе отсчета происходят два события со следующими пространственно-временными координатами:  $x_1 = 0$ ;  $t_1 = 0$  (событие А) и  $x_2 = 5 \text{ м}$ ;  $t_2 = 10^{-8} \text{ с}$  (событие В). Определить:

1) в какой системе отсчета эти события происходят на минимальном расстоянии друг от друга  $|\Delta x'|_{\min}$ , найти это расстояние и скорость движения системы отсчета  $V$ ;

2) в какой системе отсчета эти события происходят с минимальным временным интервалом  $|\Delta t'|_{\min}$ , найти этот интервал и скорость системы отсчета  $V$ ;

3) могут ли эти события находиться в причинно-следственной связи.

### Решение

I. В условии задачи заданы пространственно-временные координаты событий А и В в системе отсчета S. Определим величину квадрата пространственно-временного интервала (11.9) между этими событиями:

$$S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = -16\text{м}^2 < 0, \quad (11.74)$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$  и  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Так как  $S_{12}^2 < 0$ , то интервал между рассматриваемыми событиями – пространственно-подобный, и поэтому события А и В не могут быть связаны причинно-следственной связью (см. п. 5.1.4. Пространственно-временной интервал)

II. Поскольку пространственно-временной интервал инвариантен ( $S_{12} = S'_{12}$ ), то величина  $|\Delta x'|$  будет минимальна в системе S', когда  $\Delta t' = 0$ :

$$|\Delta x'|_{\min} = i\sqrt{S'_{12}} = i\sqrt{S_{12}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2}. \quad (11.75)$$

Очевидно, что  $|\Delta t'|_{\min} = 0$  в той же системе отсчета  $S'$ .

Для определения скорости системы отсчета  $S'$  можно воспользоваться одним из преобразований Лоренца (11.4):

$$\Delta t' = \left( \Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c} \right) \gamma. \quad (11.76)$$

III. Используя (11.76) при  $\Delta t' = 0$ , получим:

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{c \Delta t}{\Delta x} = c \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad V = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}. \quad (11.77)$$

Подставив численные значения пространственно-временных координат событий в (11.75) и (11.77), получим значения искомых величин:

$$|\Delta x'|_{\min} = 4 \text{ м}, \quad \beta = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad V = \frac{3}{5} c.$$

**Ответ:**  $|\Delta x'|_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} = 4 \text{ м},$

$$V = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{5} c.$$

#### 11.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 11.4.1** ([1], 1, с. 180). Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость  $V = c/2$  и угол между ним и направлением движения  $\vartheta = 45^\circ$ .

**Ответ:**  $l_0 = l \sqrt{\left(1 - (V/c)^2 \sin^2 \vartheta\right) / \left(1 - (V/c)^2\right)} = 1,08 \text{ м}.$

**Задача 11.4.2** ([1], 2, с. 180). Два стержня одинаковой собственной длиной  $l_0$  движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения левых и правых концов стержней оказался равным  $\Delta t$ . Какова скорость одного стержня относительно другого?

**Ответ:**  $V = \frac{2l_0 c^2 \Delta t}{(c \Delta t)^2 + l_0^2}.$

**Задача 11.4.3** ([1], 3, с. 180). Стержень, длина которого в системе отсчета  $S$  равна  $L$ , расположен в ней так, что составляет с осью  $X$  угол  $\vartheta$ . Система отсчета  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V = c/2$  в сторону, противоположную оси  $Y$ . Определить, какой угол  $\vartheta'$  составляет стержень с осью  $X$  системы отсчета  $S'$  и чему равна длина  $L'$  стержня в этой системе.

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \vartheta, \quad L' = \frac{\sqrt{3 + \cos^2 \vartheta}}{2} L.$$

**Задача 11.4.4** ([1], 4, с. 180). Космонавт спустя время  $\tau_0$  (по собственным часам) после старта получает радиogramму с сообщением о рождении внука. Тотчас же, для того, чтобы внук получил поздравление вовремя, он посылает ответную радиogramму, в которой поздравляет внука с совершеннолетием (возраст равен  $T$ ). Какова скорость космического корабля?

$$\text{Ответ: } V = Tc / \sqrt{4\tau_0^2 + T^2}.$$

**Задача 11.4.5** ([1], 6, с. 180). Два космических корабля летят вдоль одной прямой в одном направлении со скоростями  $V_1 > V_2$ . Со второго корабля вдогонку первому посылается два электромагнитных импульса с интервалом времени  $\tau_1$  относительно лабораторной системы отсчета. С каким интервалом времени  $\tau_2$  относительно той же системы отсчета они вернуться назад после отражения от первого корабля?

$$\text{Ответ: } \tau_2 = \tau_1 \left( \frac{c + V_1}{c - V_1} \right) \left( \frac{c - V_2}{c + V_2} \right).$$

**Задача 11.4.6** ([1], 7, с. 180). Два события совершаются на расстоянии  $l = 6 \cdot 10^5$  км друг от друга с промежутком времени  $\tau = 1$  с относительно некоторой инерциальной системы отсчета. С какой скоростью  $V$  должен лететь космический корабль, чтобы в системе отсчета, связанной с кораблем, эти события стали одновременными?

$$\text{Ответ: } V = \frac{c^2 \tau}{l} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

**Задача 11.4.7** ([1], 9, с. 180). Две частицы с одинаковыми скоростями  $V$  движутся вдоль одной прямой и попадают в мишень с интервалом времени  $\tau$  в системе отсчета, связанной с мишенью. Найти расстояние  $l$  между летящими частицами в системе отсчета, связанной с частицами.

$$\text{Ответ: } l = \frac{V\tau}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

**Задача 11.4.8** ([1], 10, с. 182). Космический корабль удаляется от Земли, двигаясь сначала со скоростью  $v_1$ , потом со скоростью  $v_2$ . С точки зрения космонавта, находящегося на космическом корабле, время движения со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  одинаково. Какое расстояние  $L$  пролетит корабль, если время движения корабля по земным часам равно  $T$ ? (Пренебречь временем, затраченным на изменение скорости корабля.)

$$\text{Ответ: } L = \frac{v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} T, \text{ где } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2}}.$$

**Задача 11.4.9** ([2], 723). Вдоль оси  $X$  инерциальной системы отсчета  $S$  движется ракета со скоростью  $V = 0,9c$  ( $c$  – скорость света), проходящая начало координат  $O$  в момент времени  $t = 0$ . В момент  $t_1 = 9$  с вслед за ракетой посылается световой сигнал из точки  $O$ , а с ракеты – световой сигнал в точку  $O$ . Предполагая, что ракета движется в вакууме, найти: 1) момент времени  $t_2$ , когда световой сигнал, посланный из точки  $O$ , достигнет ракеты; 2) момент времени  $t_3$ , когда сигнал, посланный с ракеты, придет в точку  $O$ ; 3) на каком расстоянии  $x_2$  от точки  $O$  будет ракета, когда к ней придет сигнал из точки  $O$ ; 4) когда вернется в точку  $O$  посланный из нее сигнал, если он отражается от зеркала, установленного на ракете (момент времени  $t_4$ )?

$$\text{Ответ: } 1) t_2 = \frac{t_1}{1 - V/c} = 10 \text{ с, } 2) t_3 = \frac{1 + V/c}{1 - V/c} t_1 = 9,9 \text{ с,}$$

$$3) t_4 = (1 + V/c)t_1 = 9,9 \text{ с.}$$

**Задача 11.4.10** ([2], 725). Космический корабль с постоянной скоростью  $V = (24/25)c$  движется по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени  $\Delta t' = 1$  с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

*Ответ:*  $S = (24/25)c\Delta t'\gamma = 72 \cdot 10^8$  м.

**Задача 11.4.11** ([3], 1.399). Стержень движется равномерно в продольном направлении мимо двух меток  $A$  и  $B$ , расположенных на расстоянии  $\Delta x$  друг от друга. Сначала в момент  $t_1$  напротив метки  $A$  оказался передний конец стержня. Затем напротив метки  $B$  в моменты  $t_2$  и  $t_3$  оказались соответственно передний и задний концы стержня. Найти его собственную длину.

*Ответ:*  $l_0 = \frac{\Delta x(t_3 - t_2)}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (\Delta x/c)^2}}$ .

**Задача 11.4.12** ([3], 1.401). Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в  $S$ -системе отсчета. Время пролета  $\Delta t = 20$  нс в  $S$ -системе. В системе же отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение  $\Delta t' = 25$  нс. Найти собственную длину стержня.

*Ответ:*  $l_0 = c\Delta t'\sqrt{1 - (\Delta t/\Delta t')^2} = 4,5$  м.

**Задача 11.4.13** ([3], 1.403). В  $K$ -системе отсчета мюон, движущийся со скоростью  $V = 0,990$  с, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние  $l = 3,0$  км. Определить: а) собственное время жизни этого мюона; б) расстояние, которое пролетел мюон в  $A$ -системе отсчета с «его точки зрения».

*Ответ:* а)  $\Delta t_0 = (l/v)\sqrt{1 - (v/c)^2} = 1,4$  мкс,

б)  $l' = l\sqrt{1 - (v/c)^2} = 0,42$  км.

**Задача 11.4.14** ([3], 1.404). Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью  $v = 3c/4$ , попали в неподвижную мишень с промежутком вре-

мени  $\Delta t = 50$  нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

$$\text{Ответ: } l_0 = v\Delta t / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 17 \text{ м.}$$

**Задача 11.4.15** ([3], 1.405). Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке  $\Delta x_1 = 4,0$  м. Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по этой же линейке  $\Delta x_2 = 9,0$  м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки.

$$\text{Ответ: } l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2} = 6 \text{ м, } v = c\sqrt{1 - (\Delta x_1 \Delta x_2)} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$



## ГЛАВА 12

## РЕЛЯТИВИСТСКОЕ СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

## 12.1. Теоретический материал

## 11.1.5. Преобразование (сложение) скоростей

Пусть система отсчета  $S'$  движется относительно системы  $S$  с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $X$  (см. рис. 11.2). При этом оси систем ориентированы в пространстве одинаково и часы синхронизованы (п. 11.1 в Главе 11). Если  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  и  $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$  – скорости материальной точки относительно систем отсчета  $S$  и  $S'$ , то в соответствии с преобразованиями Лоренца (11.2) и определением скорости (см. п. 1.1 в Главе 1)

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}, \\ v_y = \frac{dy}{dt}, \\ v_z = \frac{dz}{dt}; \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'}; \end{cases} \quad (12.1)$$

получим:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ v'_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \\ v_z = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \end{cases} \quad (12.2)$$

**Относительная скорость** – скорость движения одного тела относительно системы отсчета, связанной с другим телом. Эта скорость не может быть больше скорости света.

**Скорость сближения тел** – скорость изменения расстояния между телами в данной системе отсчета. Эта скорость может быть больше скорости света.

## 12.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач, связанных с релятивистским сложением скоростей, можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на:

- 1) применение формул преобразования скоростей при решении задач о движении частиц со скоростями, близкими к скорости света;
- 2) вычисление скорости сближения, относительной скорости, ускорений тел, преобразование направления скорости при движении с релятивистскими скоростями.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

### **I. Определиться с системами отсчета и скоростями тел.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела (если это необходимо).
2. Выбрать движущиеся друг относительно друга инерциальные системы отсчета и изобразить на чертеже их системы координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить скорости тел.

### **II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать формулы преобразования скоростей.
2. Использовать условия задачи.

### **III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (рассмотреть характерные случаи).
3. Получить численный результат.

## 12.3. Примеры решения задач

**Задача 12.3.1.** (*Преобразования скоростей, относительная скорость*) Две релятивистские частицы движутся навстречу друг

другу вдоль одной прямой со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  относительно лабораторной системы отсчета. Найти скорость их сближения и относительную скорость.

### Решение

I. По определению, скорость сближения тел – это скорость изменения расстояния между телами в данной системе отсчета; относительная скорость – это скорость движения одного тела относительно системы отсчета, связанной с другим телом. Выберем системы отсчета. Пусть  $S$  – лабораторная инерциальная система отсчета, относительно которой движутся частицы. Свяжем систему отсчета  $S'$  с одной из частиц, допустим, с первой; обозначим  $V$  – скорость движения системы отсчета  $S'$  относительно  $S$ .

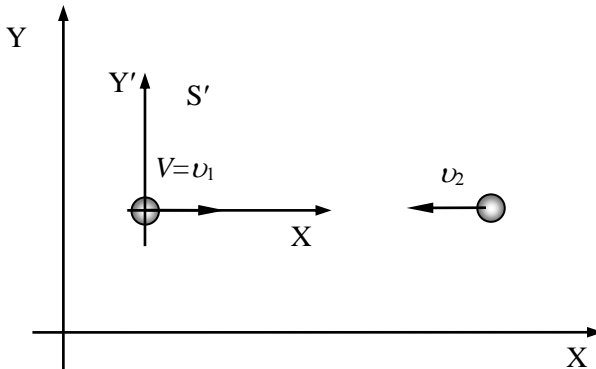


Рис. 12.1. Оси лабораторной системы отсчета  $S$  и движущейся системы отсчета  $S'$ , связанной с одной из частиц.

II. Для нахождения относительной скорости воспользуемся формулой преобразования скорости:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (12.1)$$

Здесь  $v'_x$  – скорость второй частицы относительно системы отсчета, связанной с первой частицей (т.е. искомая относительная скорость),  $V$  – скорость системы отсчета  $S'$  относительно  $S$ ,  $v_x$  – скорость второй частицы относительно лабораторной системы отсчета.

В соответствии с условием задачи, величины, входящие в (12.1) можно представить следующим образом:

$$V = v_1, v_x = -v_2. \quad (12.2)$$

III. В соответствии с данным выше определением скорости сближения и с (12.1), получаем, что скорость сближения равна

$$v_{\text{сближ}} = v_1 + v_2, \quad (12.3)$$

а относительная скорость

$$v_{\text{отн}} = -\frac{(v_1 + v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (12.4)$$

Как видно из (12.3) и из (12.4), скорость сближения тел может быть больше скорости света, тогда как относительная скорость всегда меньше скорости света.

**Ответ:**  $v_{\text{сближ}} = v_1 + v_2, v_{\text{отн}} = -\frac{(v_1 + v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$

**Задача 12.3.2.** (*Преобразования скоростей, относительная скорость*) Две частицы движутся относительно лабораторной системы отсчета в плоскости (XY) под углом  $\alpha$  друг к другу, первая – со скоростью  $v_1$ , вторая – со скоростью  $v_2$ . Найти их относительную скорость.

### Решение

I. Выберем системы отсчета. Пусть S – лабораторная инерциальная система отсчета, относительно которой движутся частицы. Свяжем систему отсчета S' с первой частицей; направление осей систем S и S' выберем так, как показано на рис. 12.2. Тогда скорость второй частицы относительно системы отсчета S' и есть относительная скорость.

II. Для нахождения относительной скорости воспользуемся формулами преобразования компонент скорости, а также выражением для модуля скорости:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad (12.5)$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad (12.6)$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2 (1 - (V/c)^2)}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (12.7)$$

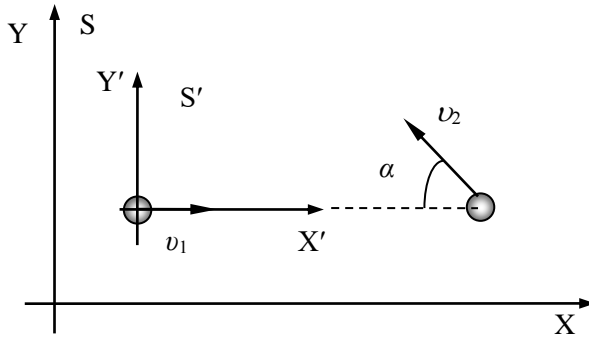


Рис. 12.2. Оси лабораторной системы отсчета  $S$  и движущейся системы отсчета  $S'$ , связанной с одной из частиц.

В этих формулах  $v_x$ ,  $v_y$  – компоненты скорости второй частицы относительно лабораторной системы отсчета,  $v'_x$ ,  $v'_y$  – компоненты скорости частицы относительно системы отсчета, движущейся относительно лабораторной с постоянной скоростью  $V$ , направленной вдоль оси  $X$ .

В соответствии с условием задачи, величины, входящие в (12.5) – (12.7) представляются следующим образом:

$$V = v_{1x} = v_1, \quad v_{2x} = -v_2 \cos \alpha, \quad v_{2y} = v_2 \sin \alpha. \quad (12.8)$$

III. Формулу (12.7) применим для определения относительной скорости частиц:

$$|v_{\text{отн}}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos^2 \alpha - \frac{v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}. \quad (12.9)$$

Рассмотрим частные случаи этого выражения. При  $\alpha = 0^\circ$  мы имеем дело с ситуацией, рассмотренной в задаче 12.3.1: частицы

движутся навстречу друг другу. Тогда, как и в 12.3.1, выражение для относительной скорости имеет вид:

$$|v_{\text{отн}}| = \frac{(v_1 + v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (12.10)$$

В другом частном случае, когда  $\alpha = 90^\circ$ , частицы движутся в перпендикулярных направлениях. Тогда относительная скорость представляется в виде:

$$|v_{\text{отн}}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}. \quad (12.11)$$

Заметим, что и в этом случае при малых скоростях получается классический закон сложения скоростей:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (12.12)$$

**Ответ:**  $|v_{\text{отн}}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos^2 \alpha - \frac{v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}.$

**Задача 12.3.3.** (*Преобразования направления скорости*) Частица движется со скоростью  $v'$ , направленной под углом  $\varphi'$  к оси  $X'$  системы отсчета, движущейся со скоростью  $V$  вдоль оси  $X$  лабораторной системы отсчета. Найти соответствующий угол  $\varphi$  в лабораторной системе отсчета (рис. 12.3).

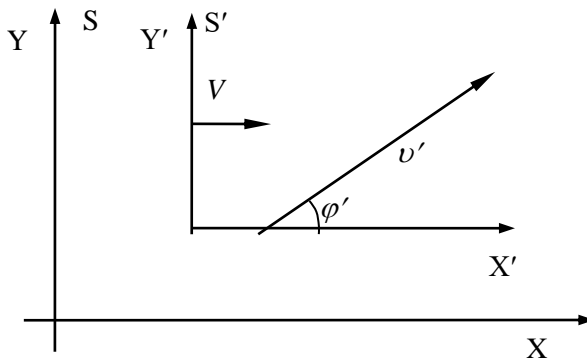


Рис. 12.3. Оси лабораторной системы отсчета S, движущейся системы отсчета S', и направление скорости частицы.

### Решение

I. Пусть  $S$  – лабораторная система отсчета, а  $S'$  – система отсчета, движущаяся относительно  $S$  со скоростью  $V$  в направлении оси  $X$ . В системе отсчета  $S$  компоненты вектора скорости частицы равны  $v_x$  и  $v_y$ , в системе  $S'$  – соответственно  $v'_x$  и  $v'_y$ .

II. Для тангенса угла  $\varphi'$  справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{v'_y}{v'_x}. \quad (12.13)$$

Для тангенса соответствующего угла  $\varphi$ , который составляет скорость частицы с осью  $X$  лабораторной системы отсчета  $S$ , аналогичное выражение имеет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} \quad (12.14)$$

Для нахождения  $v_x$  и  $v_y$  воспользуемся формулами преобразования скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (12.15)$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} v'_x} \quad (12.16)$$

Компоненты скорости  $v'_x$  и  $v'_y$  могут быть представлены в виде:

$$v'_x = v' \cos \varphi' \quad (12.17)$$

$$v'_y = v' \sin \varphi' \quad (12.18)$$

III. Преобразование выражения (12.14) с учетом (12.15) – (12.18) приводит к следующему выражению для искомого угла  $\varphi'$ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varphi' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi' + V/v'} \right) \quad (12.19)$$

Заметим, что закон преобразования углов для скоростей иной, нежели для отрезков (ср. с **задачей 11.3.5** из Главы 11).

**Ответ:** 
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varphi' \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi' + V/v'} \right).$$

**Задача 12.3.4.** (*Преобразования направления скорости*) Луч света распространяется вдоль оси  $OY'$  системы отсчета  $S'$  системы отсчета, движущейся со скоростью  $V$  вдоль оси  $OX$  лабораторной системы отсчета. Найти угол, который образует этот луч с осью  $OY$  лабораторной системы отсчета (угол абберации). Найти этот угол в рамках классической теории, применяя преобразования Галилея. На какой порядок относительно величины  $V/c$  отличаются классическая и релятивистские формулы?

### Решение

I. Абберацией называется изменение направления распространения света при переходе из одной системы отсчета в другую. Пусть в системе отсчета  $S'$  – система отсчета, движущейся со скоростью  $V$  относительно лабораторной системы отсчета  $S$ , а луч света распространяется вдоль положительного направления оси  $OY'$  (рис. 12.4). Обозначим искомый угол за  $\theta$ .

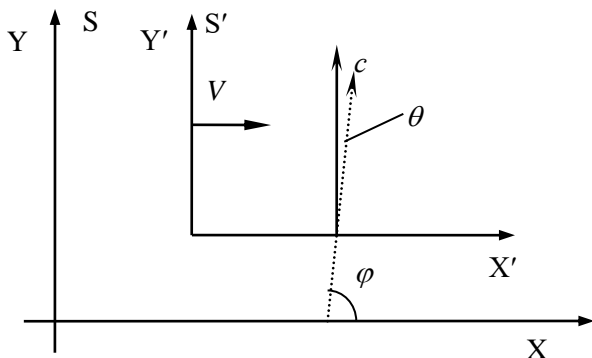


Рис. 12.4. Оси лабораторной системы отсчета  $S$ , движущейся системы отсчета  $S'$ , и направление распространения луча.

II, III. Воспользуемся результатом решения задачи 12.3.3. В данном случае  $v' = c$ , и, поскольку луч света распространяется



вдоль оси  $OY'$  то  $\varphi' = 90^\circ$ . Тогда для угла, который составит луч с осью  $OX$  системы  $S$  получаем следующее выражение:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2}}{V/c} \right). \quad (12.20)$$

Искомый угол – дополнительный к углу  $\varphi$  ( $\varphi + \theta = 90^\circ$ ). Поэтому для угла  $\theta$  имеем:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right). \quad (12.21)$$

В соответствии с классическими формулами сложения скоростей получаем:

$$v'_x = 0, \quad v'_y = c, \quad v'_z = 0, \quad (12.22)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}, \quad (12.23)$$

тогда из (12.22) и (12.23)

$$v_x = V, \quad v_y = c, \quad v_z = 0, \quad (12.24)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(V/c). \quad (12.25)$$

Воспользовавшись разложением выражения  $\sqrt{1 - (V/c)^2}$  по малому параметру  $V/c$ , обнаруживаем, что классическая и релятивистская формулы совпадают с точностью до  $(V/c)^3$ .

**Ответ:**  $\theta = \operatorname{arctg}(V/c)$ ; классическая и релятивистская формулы совпадают с точностью до  $(V/c)^3$ .

**Задача 12.3.5. (Преобразования скорости)** В опыте Л.Физо, осуществленном в 1851 г, в лабораторной системе отсчета определялась скорость света в воде, текущей со скоростью  $V$ . Луч света от источника проходил через текущую в трубах воду в одном случае по направлению её движения, а другом – против направления её движения. Получить выражение для скорости света в этом опыте с точностью до  $(V/c)^2$ .

### Решение

I. Пусть  $S$  – лабораторная система отсчета, а система  $S'$  – система отсчета, связанная с движущейся водой. Направим ось  $OY$  лабораторной системы отсчета по направлению скорости течения,

ось  $OX'$  – параллельно ей. Тогда  $V$  – скорость движения системы  $S'$  относительно  $S$ . Пусть направление распространения света совпадает с направлением скорости  $V$ .

II. В системе  $S'$  скорость света равна:

$$v'_x = c/n \quad (12.26)$$

Для нахождения скорости света относительно лабораторной системы отсчета  $S$  воспользуемся формулой преобразования скоростей (12.2):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (12.27)$$

III. Подставляя (12.26) в (12.27), имеем:

$$v_x = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right) \left(1 - \frac{V}{cn}\right)}{\left(1 + \frac{V}{cn}\right) \left(1 - \frac{V}{cn}\right)} = \frac{\frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{cn}}{\left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{V^2}{c^2}\right)}. \quad (12.28)$$

Для скорости воды, очевидно, справедливо  $V \ll c$ , тогда знаменатель с точностью до  $(V/c)^2$  можно считать равным единице. Тогда

$$v_x = \frac{c}{n} \left[ 1 + \frac{V}{c/n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{c^2} \right] \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (12.29)$$

так же с точностью до  $(V/c)^2$ .

В случае, если направление распространения света противоположно направлению течения воды, аналогичным образом получаем:

$$v_x \approx \frac{c}{n} - V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (12.30)$$

**Ответ:**  $v_x \approx \frac{c}{n} \pm V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$

**Задача 12.3.6.** (*Преобразования скоростей*) Два стержня одинаковой собственной длиной  $l_0$  движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же по величине скоростью  $V$  относительно лабораторной системы от-

счета  $S$  (рис. 12.5). Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

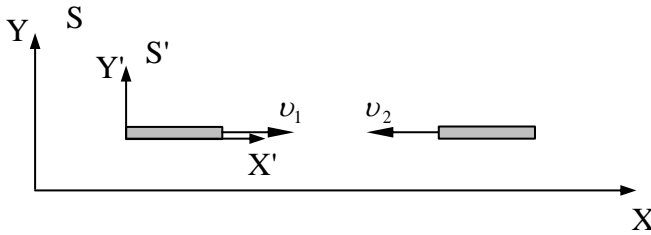


Рис. 12.5. Оси лабораторной системы отсчета  $S$ , движущейся системы отсчета  $S'$ , связанной с первым стержнем, и направления скоростей стержней относительно лабораторной системы отсчета.

### Решение

I. Свяжем систему отсчета  $S'$  с первым стержнем (см. рис. 5.12). Скорость этой системы отсчета относительно лабораторной системы  $S$  совпадает со скоростью первого стержня  $v_1$  и равна  $V$ . Скорость второго стержня относительно той же системы  $S$  равна  $v_2 = -V$ .

Определим длину второго стержня относительно системы отсчета  $S'$ , связанной с первым стержнем. Для этого необходимо провести измерение координат концов второго стержня в системе  $S'$  одновременно. Пусть события  $A$  и  $B$  состоят в том, что в системе  $S'$  одновременно фиксируются положения двух концов второго стержня.

II. В соответствии со следствием преобразований Лоренца – "сокращением длины" – в системе отсчета  $S'$ , для которой события  $A$  и  $B$  происходят одновременно, наблюдается сокращение пространственного интервала – длины второго стержня:

$$l'_2 = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v'_2}{c}\right)^2}, \quad (12.31)$$

где  $v'_2$  – скорость второго стержня относительно системы отсчета  $S'$ . Определим эту скорость, используя формулу преобразования скоростей:

$$v'_2 = \frac{v_2 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_2} = - \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}. \quad (12.32)$$

III. Подставив найденную скорость  $v_2'$  (12.32) в соотношение (12.31), получим:

$$l_2' = l_0 \sqrt{1 - \frac{4V^2}{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^2 c^2}} = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}. \quad (12.33)$$

Связав систему отсчета  $S'$  со вторым стержнем, аналогичным образом можно получить длину первого стержня в системе отсчета, связанной со вторым стержнем:

$$l_1' = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}. \quad (12.34)$$

**Ответ:**  $l_1' = l_0 \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}.$

**Задача 12.3.7. (Преобразования скоростей)** Два неподвижных прожектора излучают узкие пучки света в противоположных направлениях относительно оси  $Y$  лабораторной системы отсчета (см. рис. 12.6). С какой скоростью  $U$  эти прожекторы должны двигаться в направлении, перпендикулярном оси  $Y$ , чтобы пучки света распространялись под углом  $\alpha = 90^\circ$  друг к другу?

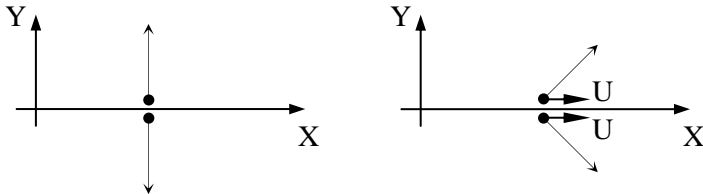


Рис. 12.6. Расположение координатных осей лабораторной системы отсчета и прожекторов, излучающих пучки света.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи направим ось  $Y$  лабораторной системы отсчета  $S$  вдоль пучка света, излучаемого одним из прожекторов (рис. 12.6), а ось  $X$  – в направлении их движения. Свяжем систему отсчета  $S'$  с прожекторами, движущимися со скоростью  $U$  относительно лабораторной системы  $S$ , и направим ее оси  $X'$  и  $Y'$  вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

II. Поскольку прожектора покоятся относительно системы  $S'$ , то проекции скоростей распространения двух пучков света относительно этой системы в соответствии с условием задачи равны:

$$v'_{1x} = v'_{2x} = 0, \quad v'_{1y} = c \quad \text{и} \quad v'_{2y} = -c. \quad (12.35)$$

Запишем формулы преобразования (сложения) скоростей для определения проекций скоростей распространения пучков света относительно лабораторной системы отсчета  $S$ :

$$v_{1x} = \frac{U + v'_{1x}}{1 + \frac{Uv'_{1x}}{c^2}}, \quad v_{2x} = \frac{U + v'_{2x}}{1 + \frac{Uv'_{2x}}{c^2}}, \quad (12.36)$$

$$v_{1y} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} v'_{1y}}{1 + \frac{Uv'_{1x}}{c^2}}, \quad v_{2y} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2} v'_{2y}}{1 + \frac{Uv'_{2x}}{c^2}}. \quad (12.37)$$

Для того чтобы пучки света распространялись под углом  $\alpha = 90^\circ$  в лабораторной системе отсчета, необходимо выполнение следующих условий:

$$v_{1x} = v_{1y} \quad \text{и} \quad v_{2x} = -v_{2y}. \quad (12.38)$$

III. Определим проекции скоростей распространения пучков относительно системы отсчета  $S$  (12.36) и (12.37) с учетом соотношений (12.35):

$$v_{1x} = v_{2x} = U, \quad v_{1y} = c \sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}, \quad v_{2y} = -c \sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}. \quad (12.39)$$

Подставив полученные значения проекций скоростей в (12.38), определим, с какой скоростью  $U$  должны двигаться прожекторы в направлении, перпендикулярном лучам, для того, чтобы пучки света распространялись под углом  $90^\circ$  друг к другу:

$$U = c \sqrt{1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2}. \quad (12.40)$$

Следовательно

$$U = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (12.41)$$

**Ответ:**  $U = \frac{c}{\sqrt{2}}.$

**Задача 12.3.8.** (*Преобразования скоростей*) Стержень АВ ориентирован параллельно оси  $X'$  в системе отсчета  $S'$  и движется в этой системе со скоростью  $U' = 0,7c$ , направленной противоположно оси  $Y'$  (см. рис. 12.7). Система  $S'$  в свою очередь движется со скоростью  $V = 0,6c$  относительно лабораторной системы отсчета  $S$  в направлении ее оси  $X$ , совпадающей по направлению с осью  $X'$ . Найти угол между стержнем и осью  $X$  в системе  $S$ .

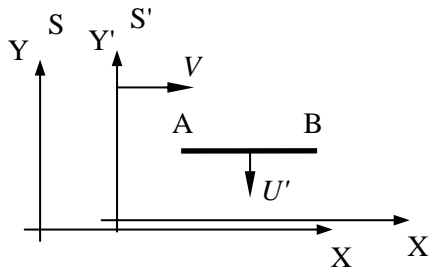


Рис. 12.7. Расположение осей систем отсчета  $S$  и  $S'$ , направление скорости системы  $S'$  относительно  $S$  и направление скорости стержня  $U'$  относительно системы  $S'$ .

### Решение

I. Пусть интересующими нас событиями будут события  $C$  и  $D$ , состоящие в том, что в некоторый момент времени концы стержня совпали с осью  $X'$  в системе отсчета  $S'$ . Пространственно-временные координаты событий  $C$  и  $D$  в системе отсчета  $S$  равны  $(x_1, y_1, t_1)$  и  $(x_2, y_2, t_2)$ , а в системе отсчета  $S'$  —  $(x'_1, y'_1, t'_1)$  и  $(x'_2, y'_2, t'_2)$  (см. рис. 12.8).

II. События  $C$  и  $D$  в системе отсчета  $S'$  происходят одновременно, то есть

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0. \quad (12.42)$$

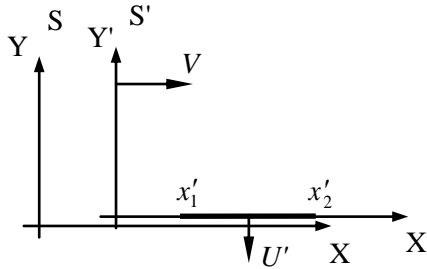


Рис. 12.8. Расположение стержня и осей систем координат  $S$  и  $S'$  в тот момент, когда концы стержня совпали с осью  $X'$  (события  $C$  и  $D$ ).

В отличие от системы  $S'$  в системе  $S$  события  $C$  и  $D$  происходят не одновременно. В соответствии с преобразованиями Лоренца интервал времени  $\Delta t$  между событиями  $C$  и  $D$  в системе  $S$  с учетом (12.42) равен:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (12.43)$$

Поскольку  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 > 0$ , то  $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ . Это означает, что в системе отсчета  $S$  концы стержня  $A$  и  $B$  пересекут некоторую произвольную прямую  $y = y_0$  в разные моменты времени, сначала  $A$ , потом через интервал времени  $\Delta t$  —  $B$  (см. рис. 12.9).

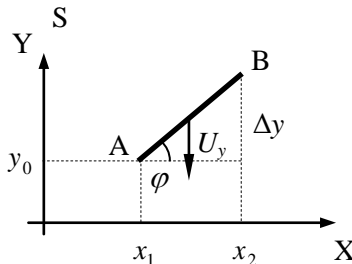


Рис. 12.9. Расположение стержня относительно системы  $S$ . События  $C$  и  $D$  заключаются в том, что концы стержня пересекут некоторую прямую  $y_0$  в разные моменты времени, и стержень оказывается под углом  $\varphi$  к прямой  $y_0$ .

Таким образом, в системе отсчета  $S$  стержень оказывается наклоненным к оси  $X$  под углом  $\varphi$ . В тот момент времени, когда конец  $A$  достиг прямой  $y = y_0$ , конец  $B$  оказался выше этой прямой на расстоянии

$$\Delta y = |U_y| \Delta t, \quad (12.44)$$

где  $U_y$  – скорость, с которой стержень движется вдоль оси  $Y$  в системе  $S$ . При этом в системе отсчета  $S$  произойдет сокращение интервала  $\Delta x = x_2 - x_1$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \Delta x' \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (12.45)$$

Угол поворота стержня в системе  $S$  определяется следующим образом:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right). \quad (12.46)$$

Проекция скорости стержня  $U_y$  на ось  $Y$  лабораторной системы отсчета  $S$  в соответствии с одной из формул преобразования (сложения) скоростей (12.1) равна

$$U_y = \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot U'_y}{1 + \frac{V}{c^2} U'_x}. \quad (12.47)$$

В соответствии с условиями задачи

$$U'_x = 0, \quad U'_y = -U'. \quad (12.48)$$

III. Искомый угол  $\varphi$  между стержнем и осью  $X$  в системе  $S$  находим, решая полученную систему уравнений (12.43) – (12.48):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{U'V}{c^2 \sqrt{1 - (V/c)^2}} \right). \quad (12.49)$$

Подставляя в (12.49) численные значения скоростей движения стержня и системы  $S'$ , заданные в условии задачи, получаем:

$$\varphi \cong 27,7^\circ.$$

Проанализируем зависимость угла  $\varphi$  (12.49) от скорости движения  $V$  системы отсчета  $S'$  при различных скоростях движения стержня  $U'$ . На рис. 12.10 изображены графики зависимости



$\varphi(V/c)$  при трех значениях параметра  $U'/c$ . График 1 соответствует значению  $U'/c = 0,999$ , график 2 – заданному в условии задачи значению  $U'/c = 0,7$ , а график 3 –  $U'/c = 0,3$ .

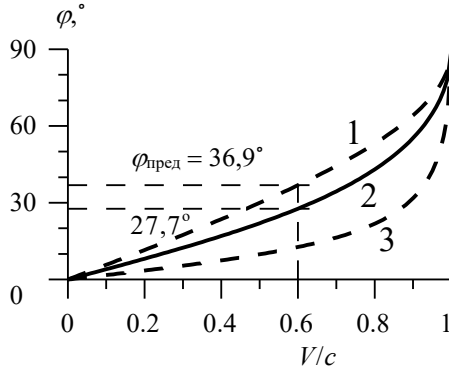


Рис. 12.10. Зависимость угла  $\varphi$  от параметра  $V/c$  ( $V$  – скорость движения системы отсчета  $S'$  относительно  $S$ ) при различных скоростях движения стержня  $U'$ .

Как видим, при заданной скорости движения системы отсчета  $S'$  в лабораторной системе отсчета  $S$  угол между движущимся стержнем и осью  $X$  имеет предельное значение  $\varphi_{\text{пред}}$ , определяемое графиком 1 на рис. 12.10.

$$\text{Ответ: } \varphi = \arctg \left( \frac{U'V}{c^2 \sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) \cong 27,7^\circ.$$

**Задача 12.3.9.** (*Преобразование ускорения*) Частица движется относительно системы отсчета  $S$  со скоростью  $v$  и ускорением  $a$ . Найти ускорение этой частицы в системе отсчета  $S'$ , которая перемещается в положительном направлении оси  $X$  системы  $S$  со скоростью  $V$ . Рассмотреть случаи, когда частица движется: а) вдоль оси  $X$  системы  $S$ ; б) вдоль оси  $Y$  системы  $S$ .

### Решение

I. В соответствии с условием задачи,  $S$  – система отсчета, относительно которой частица движется со скоростью  $v$  и ускорени-

ем  $\mathbf{a}$  – в одном случае в направлении оси X, в другом – в направлении оси Y. Система отсчета S' движется относительно S со скоростью  $\mathbf{V}$  в положительном направлении оси X.

II. Запишем каждую проекцию ускорения частицы в системе отсчета S' следующим образом:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt} \frac{1}{dt'/dt}, \quad (12.50)$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{dv'_y}{dt} \frac{1}{dt'/dt}. \quad (12.51)$$

Для проекций скорости частицы воспользуемся формулами преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad (12.52)$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad (12.53)$$

а для времени  $t'$  в системе отсчета – преобразованиями Лоренца для времени:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (12.54)$$

III. Решая систему уравнений (12.50) – (12.54) и учитывая, что в первом случае  $v_y = 0$ , а во втором –  $v_x = 0$ , получаем выражения для проекций искомого ускорения. В первом случае

$$\frac{dv'_x}{dt} = \frac{a_x (1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)^2}, \quad (12.55)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right), \quad (12.56)$$

в результате из (12.55) и (12.56) получаем:

$$a'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta v_x / c)^3} a_x, \quad a'_y = 0. \quad (12.57)$$

Во втором случае –

$$\frac{dv'_y}{dt} = a_y \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (12.58)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (12.59)$$

$$a'_x = 0, \quad a'_y = (1 - \beta^2) a_y. \quad (12.60)$$

В этих формулах  $\beta \equiv V/c$ .

Заметим, что в случае а)  $a'_x$  зависит от скорости частицы, а в случае б)  $a'_y$  – не зависит.

**Ответ:**  $a'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta v_x / c)^3} a_x, \quad a'_y = 0$  когда частица движется

вдоль оси X системы S;  $a'_x = 0, \quad a'_y = (1 - \beta^2) a_y$  когда частица движется вдоль оси Y системы S.

## 12.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 12.4.1** ([1], 8, с. 182). В системе отсчета S', движущейся со скоростью  $c/2$  вдоль оси X лабораторной системы отсчета S, движется тело небольших размеров со скоростью  $c/\sqrt{2}$  под углом  $\alpha'$  к оси X'. Найти угол  $\alpha$ , который составляет скорость тела с осью X в системе S.

**Ответ:**  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha'}{2 \cos \alpha' + \sqrt{2}}.$

**Задача 12.4.2** ([1], 11, с. 183). На легкую подвижную частицу налетает тяжелая плита. Определить скорость  $V$ , приобретенную частицей после упругого столкновения с плитой, движущейся в направлении, перпендикулярном своей плоскости, со скоростью  $v = c/3$ .

$$\text{Ответ: } V = \frac{2v}{1+(v/c)^2} = 0,6c.$$

**Задача 12.4.3** ([2], 742). Пусть в системе  $K$  две частицы движутся вдоль оси  $X$  навстречу друг другу со скоростями  $v_1 = a_1c$  и  $v_2 = a_2c$ , где  $a_1$  и  $a_2$  больше  $1/2$ , но меньше 1. Найти скорость сближения этих частиц в системе  $K$  и их относительную скорость. Убедиться, что эта скорость всегда меньше  $c$ .

$$\text{Ответ: } v_{\text{сбл}} = (a_1 + a_2)c > c, \quad v_{\text{отн}} = -\frac{(a_1 + a_2)}{1 + a_1a_2}c < c.$$

**Задача 12.4.4** ([3], 1.416). Два стержня одинаковой собственной длины  $l_0$  движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина одного стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

$$\text{Ответ: } l = \frac{l_0}{(1 + v_1v_2/c^2)} \sqrt{1 + \frac{v_1^2v_2^2}{c^4} - \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{c^2}}.$$

**Задача 12.4.5** ([3], 1.417). Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета, причем одна со скоростью  $v_1$ , а другая – со скоростью  $v_2$ . Найти их относительную скорость.

$$\text{Ответ: } |v_{\text{отн}}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2v_2^2}{c^2}}.$$

**Задача 12.4.6** ([3], 1.418). Некоторая нестабильная частица движется со скоростью  $v'$  в  $S'$ -системе отсчета вдоль ее оси  $Y'$ .  $S'$ -система в свою очередь перемещается относительно  $S$ -системы со скоростью  $V$  в положительном направлении ее оси  $x$ . Оси  $X'$  и  $X$  обеих систем отсчета совпадают, оси  $Y'$  и  $Y$  параллельны друг другу. Найти путь, который частица пролетит в  $S$ -системе, если ее собственное время жизни равно  $\Delta t_0$ .

$$\text{Ответ: } s = \Delta t_0 \sqrt{\frac{V^2 + (1 - \beta^2)v'^2}{(1 - \beta^2)(1 - v'^2/c^2)}}, \text{ где } \beta = V/c.$$

**Задача 12.4.7** ([3], 1.419). Частица движется в S-системе со скоростью  $v$  под углом  $\varphi$  к оси X. Найти соответствующий угол в S'-системе, перемещающейся со скоростью  $V$  относительно S-системы в положительном направлении ее оси X, если оси X и X' совпадают.

$$\text{Ответ: } \varphi' = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varphi \sqrt{1 - (V/c)^2}}{\cos \varphi - V/v'} \right).$$

**Задача 12.4.8** ([3], 1.422). Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением  $a'$ , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени  $\tau = 1,0$  год. Найти скорость ракеты в конце разгона.

$$\text{Ответ: } v = \frac{a't}{\sqrt{1 + (a't/c)^2}}.$$

**Задача 12.4.9** ([3], 1.423). Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением  $a'$ , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени  $\tau = 1,0$  год. Определить время разгона ракеты  $\tau_0$  в системе отсчета, связанной с ракетой.

(Учтите, что  $\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$ ), где  $\tau$  – время разгона в системе отсчета, связанной с Землей).

$$\text{Ответ: } \tau_0 = \frac{c}{a'} \ln \left[ \frac{a'\tau}{c} + \sqrt{1 + \left( \frac{a'\tau}{c} \right)^2} \right].$$

## ГЛАВА 13

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ. ЭНЕРГИЯ ПОКОЯ

## 13.1. Теоретический материал

Релятивистский импульс частицы массой  $m$  и скоростью  $v$ :

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} mv = \gamma mv, \quad (13.1)$$

где  $c$  – скорость света.

Релятивистское уравнение движения частицы импульсом  $p$ , на которую действует сила  $F$ :

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (13.2)$$

Энергия частицы:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} mc^2 = \gamma mc^2. \quad (13.3)$$

Энергия покоя частицы:

$$E_0 = mc^2.$$

Кинетическая энергия частицы:

$$T = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (13.4)$$

Связь релятивистского импульса с энергией:

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad (13.5)$$

Связь массы частицы с ее энергией и импульсом:

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2}. \quad (13.6)$$

Соотношение между импульсом и энергией для частиц, двигающихся со скоростью света:

$$p = \frac{E}{c^2} c, \quad m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} = 0. \quad (13.7)$$

Импульс системы из  $n$  свободных (невзаимодействующих) частиц:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (13.8)$$

где  $\{\mathbf{p}_i\}$  – импульсы частиц.

**Энергия системы из  $n$  свободных (невзаимодействующих) частиц:**

$$E = \sum_{i=1}^n E_i, \quad (13.9)$$

где  $\{E_i\}$  – энергии частиц.

**Масса системы из  $n$  свободных (невзаимодействующих) частиц:**

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i\right)^2 c^2}}{c^2}. \quad (13.10)$$

**Дефект массы составной частицы массой  $m$ , состоящей из  $n$  частиц массами  $m_i$ :**

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - m. \quad (13.11)$$

**Импульс и энергия системы из  $n$  свободных (невзаимодействующих) частиц аддитивны, а масса этой системы – нет.**

**Масса изолированной системы свободных частиц со временем не меняется:**

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}}{c^2} = \text{const}. \quad (13.12)$$

**Масса изолированной системы свободных частиц не меняется (является инвариантом) при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, несмотря на то, что импульс и энергия этой системы могут меняться.**

### 13.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач релятивистской динамики материальной точки можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на:

1) определение динамических характеристик тел, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света;

2) определение динамических или энергетических характеристик процессов распада и столкновения релятивистских частиц;

3) определение динамических или энергетических характеристик частиц, движущихся со скоростью света.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат.
3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики движущегося тела или системы тел (для задач типа (1)).
4. Определиться с энергетическими характеристиками процессов, происходящих в системе тел (для задач типа (2)).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать релятивистское уравнение движения (для задач типа (1)).
2. Записать релятивистский инвариант (для задач типа (2)).
3. Использовать условия задачи (например, связь релятивистского импульса и энергии, выражение для кинетической энергии, законы сохранения импульса и полной энергии, преобразования Лоренца и их следствия и т.п.).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 13.3. Примеры решения задач

**Задача 13.3.1.** (*Релятивистское уравнение движения*). Релятивистская частица массы  $m$  начинает двигаться под действием постоянной силы  $F$ . Найти зависимость скорости частицы от време-



ни. Сравнить полученное выражение с выражением, полученным в рамках классической механики.

### Решение

I, II. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, ось  $X$  которой направим в направлении действия силы  $F$ . Тогда в проекциях на эту ось релятивистское уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (13.13)$$

Запишем выражение для релятивистского импульса частицы:

$$p = \frac{m\nu}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}}. \quad (13.14)$$

Из (13.13) и (13.14) имеем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\nu}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} \right) = F, \quad (13.15)$$

$$d \left( \frac{m\nu}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} \right) = F dt. \quad (13.16)$$

III. Проинтегрируем (13.15) с учетом постоянства силы  $F$  и того, что при  $t = 0$   $\nu = 0$ :

$$\int_0^\nu d \left( \frac{m\nu}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} \right) = \int_0^t F dt, \quad (13.17)$$

$$\frac{m\nu}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} = Ft. \quad (13.18)$$

Отсюда получаем искомое выражение для  $\nu(t)$ :

$$\nu(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}. \quad (13.19)$$

Сравним полученное выражение с выражением для скорости  $\nu_{кл}$ , получаемым в классическом случае. Согласно второму закону Ньютона,

$$a = \frac{F}{m}, \quad (13.20)$$

$$v_{кл} = at = \frac{Ft}{m}. \quad (13.21)$$

Представим выражение (13.19) с учетом (13.21) в виде:

$$v(t) = \frac{v_{кл}(t)}{\sqrt{1 + (v_{кл}(t)/c)^2}}. \quad (13.22)$$

Из (13.22) видно, что скорость в релятивистском случае растет со временем медленнее, чем в классическом, причем при  $t \rightarrow \infty$  скорость  $v \rightarrow c$ . Заметим, что импульс частицы при этом будет расти линейно со временем:  $p = Ft$ . В этом заключается особенность релятивистского движения: в то время, как скорость стремится к скорости света, импульс частицы продолжает расти.

**Ответ:** 
$$v(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}.$$

**Задача 13.3.2.** (*Релятивистское уравнение движения*). Релятивистский протон с импульсом  $p_0$  влетел в момент  $t = 0$  плоский конденсатор параллельно его пластинам. В конденсаторе создано однородное электрическое поле напряженности  $E$ . Найти зависимость компонент скорости протона от времени, а также его закон движения.

### Решение

I. Выберем инерциальную систему отсчета, ось  $X$  которой направим вдоль первоначального импульса протона, а ось  $Y$  — вдоль направления электрического поля  $E$  (см. рис. 13.1).

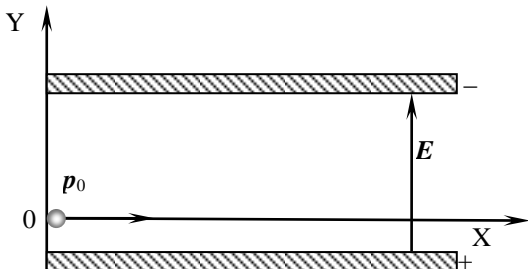


Рис. 13.1. Расположение осей системы координат и направление первоначального импульса протона.

На протон действует сила со стороны электрического поля  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ , направленная вертикально вверх.

II, III. Запишем релятивистское уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (13.23)$$

в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \quad (13.24)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = eE. \quad (13.25)$$

Здесь  $e$  – заряд протона (равный по модулю заряду электрона). В результате интегрирования, учитывая, что по условию задачи  $p_x(0) = p_0$ ,  $p_y(0) = 0$ , получаем:

$$p_x = p_0, \quad (13.26)$$

$$p_y = eEt. \quad (13.27)$$

Воспользуемся выражением для релятивистского импульса в проекциях на оси координат и представим (13.26) и (13.27) в виде:

$$\frac{mv_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = p_0, \quad (13.28)$$

$$\frac{mv_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = eEt. \quad (13.29)$$

Из (13.28) и (13.29), воспользовавшись формулой для полной энергии частицы (обозначим ее символом  $E$ , чтобы не было путаницы с символом  $E$ , обозначающим напряженность электрического поля)

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (13.30)$$

получим:

$$v_x = \frac{c^2 p_0}{E}, \quad (13.31)$$

$$v_y = \frac{c^2 eEt}{E}. \quad (13.32)$$

Заметим, что (13.31) и (13.32) можно было получить также, воспользовавшись связью между скоростью частицы, ее энергией и импульсом, см. (13.5).

Запишем связь между полной энергией и импульсом частицы и преобразуем его, учитывая (13.26) и (13.27):

$$E = p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2(0) + (ceEt)^2, \quad (13.33)$$

где введено обозначение  $E^2(0) = p_0^2 c^2 + m^2 c^4$ .

Из (13.31) и (13.32) с учетом (13.33) получаем искомые выражения для зависимости компонент скоростей от времени:

$$v_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}, \quad (13.34)$$

$$v_y = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}. \quad (13.35)$$

Найдем теперь закон движения протона. Из (13.34) имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}, \quad (13.36)$$

$$dx = \frac{c^2 p_0 dt}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}. \quad (13.37)$$

Интегрируя (13.37) с учетом начальных условий, получаем

$$x(t) = \frac{cp_0}{eE} \ln \left( \frac{ceEt}{E(0)} + \sqrt{\left( \frac{ceEt}{E(0)} \right)^2 + 1} \right) \equiv \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsh} \left( \frac{ceEt}{E(0)} \right), \quad (13.38)$$

Где  $(\operatorname{arsh}(z) \equiv \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}))$  – гиперболический аресинус, график этой функции изображен на рис. 13.2).

Так же, из (13.35):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{E(0) + (ceEt)^2}}, \quad (13.39)$$

$$dy = \frac{c^2 eEt dt}{\sqrt{E(0) + (ceEt)^2}}, \quad (13.40)$$

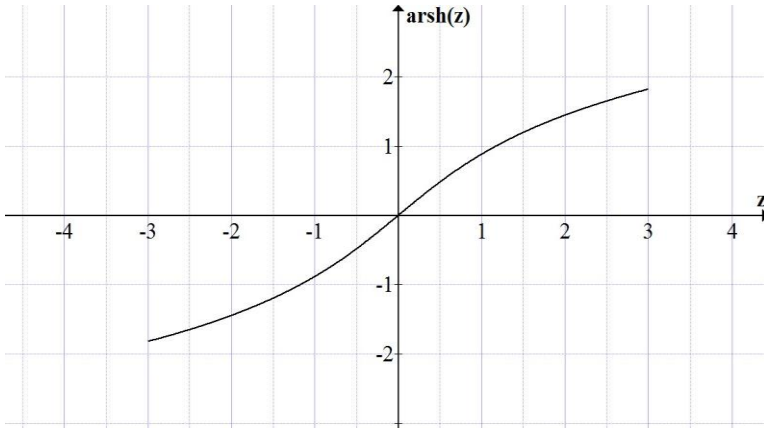


Рис. 13.2. График функции  $\text{arsh}(z)$ .

Интегрируя (13.40) с учетом начальных условий, получаем:

$$y(t) = \frac{1}{eE} \sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2} - \frac{E(0)}{eE}. \quad (13.41)$$

Сравним полученный результат с классическим. В классическом случае закон движения для протона имеет вид:

$$x(t) = v_0 t, \quad (13.42)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2. \quad (13.43)$$

Используя разложение функции  $\text{arsh}(z)$  в ряд по малому параметру

$$\text{arsh}(z) = z - \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \dots \quad (13.44)$$

и учитывая только слагаемое первого порядка, а также учитывая, что в классическом случае  $v_0 \ll c$ ,  $p_0 = m v_0$ ,  $E^2(0) = p_0^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4$ , из (13.38) и (13.41) получаем классический результат (13.42) и (13.43).

Интересно отметить также, что, как видно из (13.34), в отличие от классического случая, компонента скорости  $v_x$  уменьшается с течением времени.

$$\text{Ответ: } v_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}}, \quad v_y = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2}},$$

$$x(t) = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsh}\left(\frac{ceEt}{E(0)}\right), \quad y(t) = \frac{1}{eE} \sqrt{E^2(0) + (ceEt)^2} - \frac{E(0)}{eE},$$

где  $E(0) = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}$ .

**Задача 13.2.3.** (Релятивистской уравнение движения, энергия релятивистской частицы). В ускорителе протоны из-за воздействия магнитного поля движутся по окружности радиуса  $R$ . Индукция магнитного поля равна  $\mathbf{B}$  и ее вектор направлен перпендикулярно к плоскости траектории протонов. Найдите полную энергию  $E$  протона.

### Решение

I. Будем рассматривать движение протонов относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, связанной с ускорителем. Ось  $X$  системы координат направим к центру окружности, по которой движутся протоны.

II. Релятивистское уравнение движения частицы с импульсом  $\mathbf{p}$ , на которую действует сила  $\mathbf{F}$ , имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (13.45)$$

где сила  $\mathbf{F}$  в условиях данной задачи – сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (13.46)$$

Здесь  $e$  – заряд протона (равный по модулю заряду электрона).

В соответствии с определением, релятивистский импульс частицы массы  $m$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , равен:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad (13.47)$$

полная энергия частицы (протона) выражается формулой:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (13.48)$$

III. Уравнение (13.45) с учетом (13.46) представляется в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (13.49)$$

Преобразуем выражение (13.49), учитывая, что скорость протона при движении по окружности не изменяется по модулю и изменяется по направлению:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\gamma\mathbf{a}, \quad (13.50)$$

где  $\gamma$  – лоренцевский фактор,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (13.51)$$

$\mathbf{a}$  – центростремительное ускорение протона:

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (13.52)$$

$R$  – радиус окружности, по которой движется протон.

Из (13.49), учитывая (13.50) – (13.52), произведя алгебраические преобразования, получаем соотношение:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{e}{m} BR \right)^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (13.53)$$

Из (13.53) находим выражение для  $v^2/c^2$ :

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(eBR/mc)^2}{1 + (eBR/mc)^2}. \quad (13.54)$$

Из (13.51) и (13.54) получаем выражение для  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{1 + \left( \frac{eBR}{mc} \right)^2}; \quad (13.55)$$

после чего, используя (13.48) и (13.55), находим выражение для искомой полной энергии протона:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left( \frac{eBR}{mc} \right)^2} \approx mc^2 \frac{eBR}{mc} = ecBR. \quad (13.56)$$

$$\text{Ответ: } E = mc^2 \sqrt{1 + \left( \frac{eBR}{mc} \right)^2} \approx mc^2 \frac{eBR}{mc} = ecBR.$$

**Задача 13.2.4** (Импульс и кинетическая энергия релятивистской частицы). Пучок релятивистских частиц с кинетической энер-

гией  $T$  падает на поглощающую мишень. Сила тока в пучке равна  $I$ , заряд и масса каждой частицы равны  $m$  и  $e$ . Найти силу давления пучка на мишень.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, ось  $X$  которой направим вдоль направления движения частиц в пучке. Будем считать удар частиц о мишень абсолютно неупругим.

II. Каждая частица, ударяясь о мишень, передает ей импульс, равный по модулю первоначальному импульсу частицы  $p$  (в силу того, что удар абсолютно неупругий):

$$|\Delta p| = p. \quad (13.57)$$

Сила, с которой мишень действует при этом на частицу (а значит, по третьему закону Ньютона, и частица на мишень) связана с изменением импульса соотношением:

$$F_0 = \frac{|\Delta p|}{\Delta t}, \quad (13.58)$$

где  $\Delta t$  – время взаимодействия. Тогда сила, которая действует на мишень со стороны частиц пучка выражается следующим образом:

$$F = NF_0 = N \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = N \frac{p}{\Delta t}, \quad (13.59)$$

где  $N$  – число частиц, попавших в мишень за время  $\Delta t$ .

Сила тока в пучке может быть представлена следующим образом:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{Ne}{\Delta t}, \quad (13.60)$$

где  $\Delta q = Ne$  – заряд, прошедший через сечение мишени за время  $\Delta t$ .

Для того, чтобы выразить импульс частицы  $p_0$  через ее кинетическую энергию  $T$ , воспользуемся соотношениями:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2, \quad (13.61)$$

$$E = T + mc^2. \quad (13.62)$$

III. Решаем полученную систему уравнений. Из (13.61) и (13.62) получаем связь импульса частицы и ее кинетической энергии:



$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2Tmc^2)}}{c}. \quad (13.63)$$

Используя (13.59), (13.60) и (13.63) получаем выражение для искомой силы давления пучка на мишень:

$$F = \frac{I}{ec} \sqrt{T(T + 2mc^2)}. \quad (13.64)$$

**Ответ:**  $F = \frac{I}{ec} \sqrt{T(T + 2mc^2)}.$

**Задача 13.2.5.** (Кинетическая энергия релятивистской частицы, релятивистские инварианты). Два протона движутся навстречу друг другу с одинаковыми кинетическими энергиями  $T$ . Найти кинетическую энергию  $T'$  одного протона в системе отсчета, где другой протон покоится. Провести численную оценку для случая, когда кинетическая энергия протона равна 50 ГэВ (энергия покоя протона  $mc^2 = 1$  ГэВ).

### Решение

I. Выберем неподвижную инерциальную лабораторную систему отсчета  $S$ , относительно которой движутся протоны, и движущуюся систему отсчета  $S'$ , относительно которой один из протонов покоится (рис. 13.3).

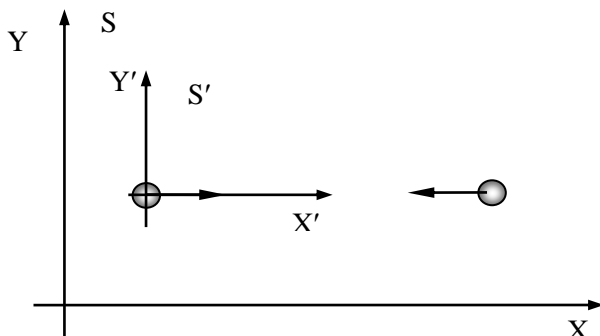


Рис. 13.3. Оси лабораторной системы отсчета  $S$  и движущейся системы отсчета  $S'$ , связанной с одним из протонов.

II. Воспользуемся инвариантностью величины

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2 c^2 = m^2 c^4, \quad (13.65)$$

где  $\sum_{i=1}^n E_i$  и  $\sum_{i=1}^n p_i$  – соответственно полная энергия и импульс си-

стемы из  $n$  невзаимодействующих частиц,  $m$  – масса системы. Запишем эту величину первый раз в  $S$  – системе, а второй раз – в системе  $S'$ , относительно которой один из протонов покоится и приравняем эти величины:

$$(2E)^2 = (E_0 + E')^2 - (\mathbf{p}')^2 c^2. \quad (13.66)$$

Здесь учтено, что относительно системы  $S$  суммарный импульс системы протонов равен нулю, а относительно системы  $S'$  один из протонов покоится, поэтому его полная энергия равна энергии покоя  $E_0$

$$E_0 = mc^2, \quad (13.67)$$

а второй протон движется, и его полная энергия равна некоторому значению  $E'$ , а импульс – величине  $\mathbf{p}'$ .

Полная энергия и импульс релятивистской частицы, в данном случае – второй частицы, следующим образом связаны с ее кинетической энергией  $T'$ :

$$E' = T' + mc^2, \quad (13.68)$$

$$p' = \frac{\sqrt{T'(T' + 2mc^2)}}{c}. \quad (13.69)$$

III. Подставляя (13.67), (13.68) и (13.69) в (13.66), получаем:

$$(2(T + mc^2))^2 = (mc^2 + (T' + mc^2))^2 - T'(T' + 2mc^2). \quad (13.70)$$

Отсюда, в результате алгебраических преобразований получаем искомую кинетическую энергию  $T'$  одного протона в системе отсчета, относительно которой другой протон покоится:

$$T' = \frac{2T(T + 2mc^2)}{mc^2}. \quad (13.71)$$

Подставляя численные данные из условия задачи,  $T = 50$  ГэВ,  $mc^2 = 1$  ГэВ, получаем, что  $T' = 5 \cdot 10^3$  ГэВ. Как видим, получается огромный «выигрыш» в энергии. Этот эффект лежит в основе так называемого метода встречных пучков – экспериментального метода исследования элементарных частиц, в котором два пучка за-

ряженных частиц, ускоренных до заданной энергии, движутся навстречу друг другу, взаимодействуя на участке встречи. Самое важное преимущество этого метода – достижение энергии реакции, недоступной ускорителям с неподвижной мишенью, что мы и проиллюстрировали в данной задаче.

**Задача 13.2.6.** (*Кинетическая энергия релятивистской частицы, закон сохранения полной энергии*). Две релятивистские частицы, массы которых  $m$  и  $2m$  и кинетические энергии  $T$  и  $2T$  соответственно, движутся навстречу друг другу. Найти скорость составной частицы, образовавшейся в результате их соударения.

### Решение

I. Задачу решаем относительно неподвижной лабораторной системы отсчета, в которой частицы движутся навстречу друг другу. Ось  $X$  системы координат направим так, как направлен импульс первой частицы.

II. Запишем законы сохранения для системы частиц. Закон сохранения полной энергии для частиц на интервале времени «до соударения», «после соударения»:

$$E_1 + E_2 = E. \quad (13.72)$$

Закон сохранения импульса для частиц на том же интервале времени:

$$p_1 + p_2 = p. \quad (13.73)$$

Выражения для полной энергии и релятивистского импульса составной частицы имеют вид:

$$E = \gamma M c^2, \quad (13.74)$$

$$p = \gamma M V. \quad (13.75)$$

Запишем также взаимосвязь импульса и кинетической энергии для релятивистской частицы и выражение для ее полной энергии:

$$p^2 c^2 = T(T + 2mc^2), \quad (13.76)$$

$$E = T + mc^2, \quad (13.77)$$

III. Из (13.74) и (13.75) получаем выражение для скорости составной частицы, получившейся в результате соударения:

$$V = \frac{pc^2}{E}. \quad (13.78)$$

Запишем закон сохранения импульса (13.73) в проекциях на ось  $X$  лабораторной системы отсчета:

$$p_1 - p_2 = p. \quad (13.79)$$

Из (13.76) для первой и второй частиц имеем:

$$p_1^2 c^2 = T_1(T_1 + 2m_1 c^2), \quad (13.80)$$

$$p_2^2 c^2 = T_2(T_2 + 2m_2 c^2). \quad (13.81)$$

Отсюда получаем выражение для импульсов частиц:

$$p_1 = \frac{\sqrt{T_1(T_1 + 2m_1 c^2)}}{c}, \quad (13.82)$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{T_2(T_2 + 2m_2 c^2)}}{c}. \quad (13.83)$$

Из (13.72) с учетом (13.77) получим выражение для полной энергии соударяющихся частиц:

$$E = E_1 + E_2 = T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2. \quad (13.84)$$

Искомую скорость получим из (13.78), используя (13.79), (13.82), (13.83) и (13.84):

$$\begin{aligned} V &= \frac{(p_2 - p_1) c^2}{E_1 + E_2} = \frac{c \left( \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1 c^2)} - \sqrt{T_2(T_2 + 2m_2 c^2)} \right)}{(m_1 + m_2) c^2 + (T_1 + T_2)} = \\ &= \frac{-c \sqrt{T(T + 2mc^2)}}{3(mc^2 + T)}. \end{aligned} \quad (13.85)$$

**Ответ:**  $|V| = \frac{c \sqrt{T(T + 2mc^2)}}{3(mc^2 + T)}.$

**Задача 13.2.7.** (Определение динамических характеристик частиц, движущихся со скоростью света). Релятивистский  $\pi$ -мезон массы  $m$  распадается на лету на два фотона с энергиями  $E_1$  и  $E_2$  относительно лабораторной системы отсчета. Найти угол  $\theta$  разлета этих фотонов.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета  $S$ , относительно которой первоначально двигался  $\pi$ -мезон, и инерциальную систему отсчета  $S'$ , связанную с  $\pi$ -мезоном.

II. Воспользуемся инвариантностью величины

$$m^2 c^4 = \left( \sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right)^2 c^2. \quad (13.86)$$

Запишем эту величину до распада  $\pi$ -мезона относительно системы отсчета, связанной с ним ( $S'$ ) а сразу после распада – относительно лабораторной системы отсчета  $S$ :

$$m^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2, \quad (13.87)$$

где  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  – импульсы разлетающихся фотонов.

Учтем также, что для фотонов связь между энергией и импульсом имеет вид:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{E_1}{c} \mathbf{c}, \quad (13.88)$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{E_2}{c} \mathbf{c}. \quad (13.89)$$

III. Преобразуем (13.87):

$$m^2 c^4 = E_1^2 + 2E_1 E_2 + E_2^2 - \mathbf{p}_1^2 c^2 - \mathbf{p}_2^2 c^2 - 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 c^2, \quad (13.90)$$

подставим (13.88) и (13.89) в (13.90) и представим скалярное произведение импульсов частиц через угол  $\theta$  между ними:

$$m^2 c^4 = 2E_1 E_2 - 2E_1 E_2 \cos \theta. \quad (13.91)$$

Используя известные тригонометрические формулы, окончательно получаем:

$$m^2 c^4 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) = E_1 E_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (13.92)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}. \quad (13.93)$$

$$\theta = 2 \arcsin \left( \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1 E_2}} \right). \quad (13.94)$$

**Ответ:**  $\theta = 2 \arcsin \left( \frac{mc^2}{\sqrt{E_1 E_2}} \right).$

**Задача 13.2.8.** (Взаимосвязь между массой и энергией). Солнечная постоянная (плотность потока энергии, излучаемая Солн-

цем) равна  $I = 1.36 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ . Расстояние от Солнца до Земли равно  $R = 1.5 \cdot 10^8 \text{ км}$ . Найдите массу  $m$  вещества Солнца, которая преобразуется в энергию за одну секунду.

### Решение

I. Выберем инерциальную систему отсчета, связанную с Солнцем, ось  $X$  которой направлена от Солнца к Земле.

II, III. Энергия, переносимая через площадь сферы, радиус которой равен расстоянию от Солнца до Земли, равна:

$$E = I \cdot 4\pi R^2. \quad (13.95)$$

Связь между массой и энергией имеет вид:

$$E = \Delta m c^2. \quad (13.96)$$

Из (13.95) и (13.96) имеем:

$$\Delta m = \frac{I(4\pi R^2)}{c^2}. \quad (13.97)$$

Подставляя численные данные из условия задачи, получаем:  
 $\Delta m \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{ кг}$ .

$$\text{Ответ: } \Delta m = \frac{I(4\pi R^2)}{c^2} \approx 4.3 \cdot 10^9 \text{ кг}.$$

**Задача 13.2.9.** (Энергетический выход ядерной реакции, дефект масс). Найти энергетический выход ядерной реакции:  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}$ . Измеренные массы ядер составляют:  $m({}^7_3\text{Li}) = 7,0160 \text{ а.е.м.}$ ,  $m({}^1_1\text{H}) = 1,0078$ ,  $m({}^4_2\text{He}) = 4,0024 \text{ а.е.м.}$

### Решение

I. Задачу решаем относительно инерциальной лабораторной системы отсчета.

II. Применим к данной реакции закон сохранения полной энергии:

$$E_1 + E_2 = E_3, \quad (13.98)$$

где  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – полные энергии частиц, участвующих в реакции.

Полная энергия частицы может быть представлена в виде:

$$E = mc^2 + T, \quad (13.99)$$

где  $T$  – кинетическая энергия частицы.

III. Подставим выражения для полной энергии частиц (13.98) в (13.99):

$$(m_1 c^2 + T_1) + (m_2 c^2 + T_2) = (m_3 c^2 + T_3), \quad (13.100)$$

где  $m_1 = m({}_3^7\text{Li})$ ,  $m_2 = m({}_1^1\text{H})$ ,  $m_3 = m({}_2^4\text{He})$  – массы ядер,  $T_1, T_2, T_3$  – соответственно, их кинетические энергии.

Преобразуем выражение (13.96) следующим образом:

$$(m_1 + m_2 - m_3)c^2 = T_3 - (T_1 + T_2). \quad (13.101)$$

В левой части (13.101) стоит выражение для дефекта масс составного ядра. В правой части – приращение суммарной кинетической энергии рассматриваемых ядер. Это приращение называется *энергетическим выходом ядерной реакции*. Обозначим эту величину  $Q$ :

$$Q = T_3 - (T_1 + T_2). \quad (13.102)$$

Подставляя в (13.102) численные данные из условия задачи и учитывая, что 1 а.е.м. = 931,4 МэВ, получаем:  $Q = 17,7$  МэВ.

### 13.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 13.4.1** ([3], 1.428). Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой  $m$  от  $0,60c$  до  $0,80c$ ? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

*Ответ:*  $A = 0,42mc^2$  вместо  $0,14mc^2$ .

**Задача 13.4.2** ([3], 1.431). Найти зависимость импульса частицы с массой  $m$  от ее кинетической энергии.

*Ответ:*  $p = \sqrt{T(T + 2mc^2)} / c$ .

**Задача 13.4.3** ([3], 1.434). Сколько энергии (в расчете на единицу массы) необходимо затратить, чтобы сообщить первоначально-но покоившемуся космическому кораблю скорость  $v = 0,980c$ ?

*Ответ:*  $\frac{\Delta E}{m} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) c^2 = 3,6 \cdot 10^{17}$  Дж/кг.

**Задача 13.4.4** ([3], 1.435). Частица массы  $m$  в момент  $t = 0$  начинает двигаться под действием постоянной силы  $F$ . Найти скорость частицы и пройденный ею путь в зависимости от времени  $t$ .

$$\text{Ответ: } v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/Ft)^2}}, \quad s = \frac{(\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1)mc^2}{F}.$$

**Задача 13.4.5** ([3], 1.440). Показать, что величина  $E^2 - p^2 c^2$  является инвариантом, т.е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Каково значение этого инварианта?

$$\text{Ответ: } m^2 c^4.$$

**Задача 13.4.6** ([2], 1.441). Две частицы, каждая массы  $m$ , летят навстречу друг другу с одинаковой скоростью  $V$ . Найти  $V$ , если масса образовавшейся при столкновении частицы равна  $M$ .

$$\text{Ответ: } v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2}.$$

**Задача 13.4.7** ([3], 1.442). Нейтрон с кинетической энергией  $T = 2mc^2$ , где  $m$  – его масса, налетает на другой, покоящийся нейтрон. Найти в системе их центра масс: а) суммарную кинетическую энергию  $\tilde{T}$  нейтронов; б) импульс  $p$  каждого нейтрона.

$$\text{Ответ: а) } \tilde{T} = 2mc^2 \sqrt{1 + T/2mc^2} - 1,$$

$$\text{б) } p = \sqrt{\frac{mT}{2}}.$$

**Задача 13.4.8** ([2], 770). При распаде некоторой частицы появляются две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Из опыта известны абсолютные величины импульсов  $p_1$  и  $p_2$  этих частиц и угол  $\theta$  между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы.

*Ответ:*

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2\left(\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta\right)}$$



**КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА.  
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ  
МОМЕНТА ИМПУЛЬСА**

**3**

- **КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО  
ТВЕРДОГО ТЕЛА**
- **ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО  
И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА**
- **ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА  
ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.  
ГИРОСКОПЫ.  
ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ**

## ГЛАВА 14

### КИНЕМАТИКА

### АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### 14.1. Теоретический материал

**Абсолютно твердое тело** – тело (система материальных точек), расстояния между двумя любыми материальными точками которого можно считать постоянными в условиях данной задачи.

Рассмотрим движение абсолютно твердого тела относительно лабораторной системы отсчета  $S$ . Для этого жестко свяжем систему отсчета  $S'$  с этим телом. Таким образом, интересующее нас абсолютно твердое тело выступает в качестве тела отсчета системы  $S'$ .

Запишем формулы, связывающие кинематические характеристики некоторой материальной точки относительно двух произвольно движущихся относительно друг друга систем отсчета  $S$  и  $S'$  (см. Главу 4):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (14.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] + \mathbf{v}', \quad (14.2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \mathbf{a}'. \quad (14.3)$$

Здесь  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}'(t)$  – радиус-векторы,  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{v}'(t)$  – скорости и  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{a}'(t)$  – ускорения некоторой материальной точки относительно систем отсчета  $S$  и  $S'$  соответственно;  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  и  $\mathbf{A}(t)$  – радиус-вектор, скорость и ускорение начала системы отсчета  $S'$ , которое может и не совпадать с материальной точкой рассматриваемого абсолютно твердого тела;  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$  – угловая скорость и угловое ускорение системы  $S'$  (абсолютно твердого тела) вокруг оси вращения, проходящей через начало системы отсчета  $S'$  (рис. 6.1).

Если некоторая материальная точка  $M$  (см. рис. 6.1) принадлежит абсолютно твердому телу (телу отсчета системы  $S'$ ), то, поскольку  $\mathbf{v}'=0$  и  $\mathbf{a}'=0$ , для этой точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (14.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'], \quad (14.5)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]. \quad (14.6)$$

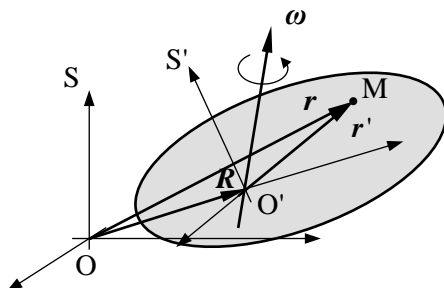


Рис. 14.1. Радиус-векторы произвольной материальной точки  $M$  абсолютно твердого тела в лабораторной системе отсчета  $S$  и системе отсчета  $S'$ , связанной с телом.

Из уравнения для скорости произвольной материальной точки абсолютно твердого тела (6.5) следует принцип суперпозиции движений (материальных точек) абсолютно твердого тела.

**Принцип суперпозиции движений абсолютно твердого тела** – любое перемещение абсолютно твердого тела (материальных точек этого тела) в пространстве можно представить как суперпозицию последовательно осуществляемых поступательного движения этого тела (параллельного переноса со скоростью  $V$ ) и поворота вокруг оси вращения (вращательного движения с угловой скоростью  $\omega$ ).

**Поступательное движение** абсолютно твердого тела – движение, при котором прямая, соединяющая любые две материальные точки тела, перемещается параллельно самой себе. Для описания поступательного движения абсолютно твердого тела достаточно описать движение любой материальной точки этого тела.

Произвольное движение абсолютно твердого тела (и жестко связанной с ней системы отсчета  $S'$ ) однозначно задается законом движения любой материальной точки тела (начало системы отсчета  $S'$  совпадает с этой точкой тела)  $R(t)$  и законом изменения угловой скорости вращения тела (системы отсчета  $S'$ ) относительно этой точки  $\omega(t)$ .

**Число степеней свободы** механической системы – число независимых физических величин, так называемых **обобщенных координат**, однозначно определяющих положение тел системы в пространстве.

У абсолютно твердого тела шесть степеней свободы. Например, три координаты произвольной материальной точки тела, два угла, задающих направление прямой, соединяющей две точки и угол поворота тела вокруг этой прямой.

### Плоское движение абсолютно твердого тела

**Плоское движение** – движение тела, при котором траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. В случае плоского движения абсолютно твердое тело имеет три степени свободы.

**Вращательное движение** абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси – плоское движение, при котором материальные точки тела двигаются по окружностям с центрами, лежащими на этой оси, называемой **осью вращения**. В этом случае абсолютно твердое тело обладает одной степенью свободы.

При плоском движении скорость  $v(t)$  и ускорение  $a(t)$  материальной точки абсолютно твердого тела лежат все время в плоскости движения  $P$  этой точки (см. рис. 14.2).

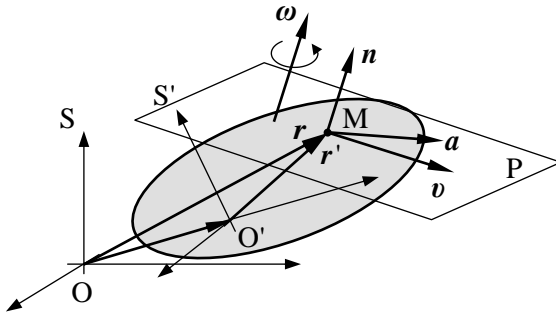


Рис. 16.2. Кинематические характеристики материальной точки  $M$  абсолютно твердого тела при его плоском движении.

Действительно, пусть  $\mathbf{n} = \text{const}$  – единичный вектор нормали к плоскости движения, тогда

$$(\mathbf{n}\mathbf{v}) = \left( \mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0, \quad \frac{\partial(\mathbf{n}\mathbf{v})}{\partial t} = (\dot{\mathbf{n}}\mathbf{v}) + (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) = (\mathbf{n}\mathbf{a}) = 0. \quad (14.7)$$

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и угловое ускорение  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  абсолютно твердого тела в случае плоского движения всегда перпендикулярны плоскости движения.

Действительно, умножим обе части уравнения взаимосвязи скоростей (16.5) скалярно на нормаль к плоскости движения. Так как результат будет справедлив при любых  $\mathbf{V}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$ , то:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\mathbf{v}) &= \underbrace{(\mathbf{n}\mathbf{V})}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'])}_{=0} = 0, \\ \mathbf{n} \perp \mathbf{V}, \mathbf{n} \parallel \boldsymbol{\omega} \text{ и } \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Умножим обе части уравнения взаимосвязи ускорений (16.6) скалярно на нормаль к плоскости движения. Так как результат будет справедлив при любых  $\mathbf{A}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$ , то:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\mathbf{a}) &= \underbrace{(\mathbf{n}\mathbf{A})}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{n}[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'])}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']])}_{=0, \mathbf{n} \parallel \boldsymbol{\omega}} = 0, \\ \mathbf{n} \perp \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{n} \parallel \dot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Покажем, что в случае плоского движения абсолютно твердого тела в любой момент времени найдется такой вектор  $\mathbf{r}'_0$ , что

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_0]. \quad (14.10)$$

Действительно, преобразуя (14.10), получим:

$$\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0] = 0, \quad \mathbf{d} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{d}]] = 0.$$

При этом будем искать такой вектор  $\mathbf{d}$ , что  $\mathbf{d} \perp \mathbf{n}$ , тогда:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}\mathbf{V}] + [\mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{d}]] &= [\mathbf{n}\mathbf{V}] + \underbrace{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{n}\mathbf{d})}_{=0} - \mathbf{d}(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{n}\mathbf{V}] - \mathbf{d}(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}) = 0, \\ \mathbf{d} &= \frac{[\mathbf{n}\mathbf{V}]}{(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega})} = \frac{[\mathbf{n}\mathbf{V}]}{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

И, наконец, найдем радиус-вектор нового начала системы отсчета  $\mathbf{R}_0$ , для которой будет выполняться соотношение (14.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}'_0, \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0 = \mathbf{R} + \mathbf{d} = \mathbf{R} + \frac{[\mathbf{n}\mathbf{V}]}{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Итак, плоское движение абсолютно твердого тела в течение бесконечно малого интервала времени можно представить, как

"чистый" поворот относительно некоторой оси – **мгновенной оси вращения**.

На рис. 14.3 изображена векторная диаграмма скоростей материальных точек тела, лежащих в плоскости движения на одной прямой, проходящей через мгновенную ось вращения.

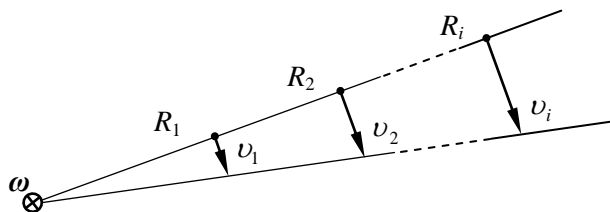


Рис. 14.3. Векторная диаграмма скоростей материальных точек абсолютно твердого тела при его плоском движении.

Как видно на рис. 14.3, в этом случае выполняется соотношение:

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \dots = \frac{v_i}{R_i}, \quad (14.13)$$

где  $v_i$  – скорость материальной точки абсолютно твердого тела, а  $R_i$  – расстояние от этой материальной точки до мгновенной оси вращения.

**Мгновенная ось вращения** – ось вращения, относительно которой в течение бесконечно малого интервала времени можно представить абсолютно твердого тела, как "чистый" поворот, т.е. представить скорость движения произвольной материальной точки тела в виде (14.10).

В общем случае положение мгновенной оси вращения изменяется относительно абсолютно твердого тела в выбранной системы отсчета – радиус-вектор  $R_0$ , задающий положение мгновенной оси, является функцией времени (см. (14.12)).

Мгновенная ось вращения всегда перпендикулярна плоскости движения и проходит через неподвижную в данный момент времени материальную точку абсолютно твердого тела или точку пространства, которая жестко связана с этим абсолютно твердым телом.

**Движение абсолютно твердого тела, закрепленного в точке**

Если абсолютно твердое тело (тело отсчета системы  $S'$ ) закреплено в точке, покоящейся относительно системы  $S$ , то, совмещив начала отсчета обеих систем ( $\mathbf{R} = 0$ ,  $\mathbf{V} = 0$ ,  $\mathbf{A} = 0$ ), получим:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (14.14)$$

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \quad (14.15)$$

$$\mathbf{a} = [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']]. \quad (14.16)$$

Из уравнения (14.15) для скорости произвольной материальной точки абсолютно твердого тела, закрепленного в точке, следует теорема Эйлера.

**Теорема Эйлера** – абсолютно твердое тело, закрепленное в точке, может быть переведено из одного положения в любое другое одним поворотом вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления. Причем это утверждение справедливо как для бесконечно малого, так и для конечного поворота. Однако результат двух конечных поворотов зависит от их последовательности, в отличие от двух бесконечно малых поворотов.

Если система отсчета  $S_1$  с общим началом с системой  $S$  вращается относительно нее с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  и абсолютно твердое тело, закрепленное в начале отсчета этих систем, вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_1$  относительно системы  $S_1$ , то в соответствии с (16.5):

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{V}}_{=0} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}'] + \mathbf{v}' = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}'] = [\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{r}'] = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'], \quad (14.17)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_1. \quad (14.18)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость материальной точки абсолютно твердого тела относительно системы  $S$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения абсолютно твердого тела относительно той же системы.

Как видим, угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  вращения данного тела, закрепленного в точке относительно первой системы отсчета, будет равна сумме угловых скоростей второй системы отсчета  $\boldsymbol{\omega}_1$  и тела относительно этой системы  $\boldsymbol{\omega}_2$ .

Как и в случае плоского движения, движение абсолютно твердого тела, закрепленного в точке, можно представить как "чистый" поворот вокруг мгновенной оси вращения.

## 16.2. Основные типы задач и методы их решения.

Большинство задач кинематики абсолютно твердого тела можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям:

- а) определение линейной скорости некоторой точки твердого тела,
- б) определение угловой скорости вращения для плоского движения твердого тела,
- в) определение мгновенной оси вращения при плоском движении,
- г) определение угловой скорости вращения твердого тела при сложном (не плоском) движении твердого тела.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

### I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой будет рассматриваться вращение тела (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить на чертеже все необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения.

### II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать уравнения кинематической связи.
2. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

### III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.



2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 14.3. Примеры решения задач

**Задача 14.1.** (Плоское движение абсолютно твердого тела). Колесо радиусом  $R$  катится с проскальзыванием по горизонтальной поверхности. Модуль скорости верхней точки обода колеса  $A$ , лежащей на вертикальном диаметре, равен  $v_A$ . Модуль скорости точки обода колеса  $B$ , лежащей на горизонтальном диаметре, равен  $v_B = 5v_A$ . Определить угловую скорость вращения колеса  $\omega$ , скорость движения его центра  $v_0$  и положение мгновенной оси вращения колеса  $M$  (рис. 14.4).

#### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Направим оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат так, как показано на рис. 14.4.

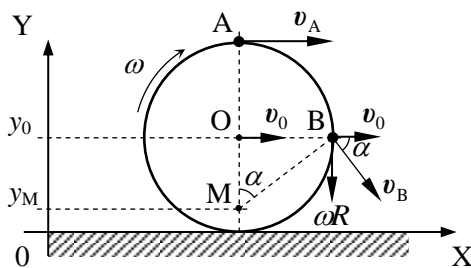


Рис. 14.4. Компоненты скоростей точек  $A$ ,  $B$  и  $O$  колеса относительно осей выбранной декартовой системы координат.

Плоское движение колеса в течение бесконечно малого интервала времени можно представить, как "чистый" поворот относительно мгновенной оси вращения, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку пересечения прямых, перпендикулярных скоростям движения материальных точек колеса (см. п. 14.1. Теоретический материал). Поскольку при движении колеса

не происходит его отрыва от горизонтальной поверхности, то скорость нижней точки обода колеса, которая соприкасается с поверхностью, может быть направлена только вдоль поверхности. Следовательно, мгновенная ось вращения проходит через одну из точек вертикального диаметра колеса. В общем случае мгновенная ось вращения может находиться как выше, так и ниже поверхности, по которой катится колесо.

Пусть  $u_M$  – координата мгновенной оси вращения (см. рис. 16.4) в лабораторной системе отсчета. Для удобства решения задачи введем вторую систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с центром колеса со скоростью  $v_0$  относительно лабораторной системы, с осями координат, параллельными осям лабораторной системы координат  $X$  и  $Y$ .

II. При решении задачи воспользуемся формулой (14.2), связывающей скорости материальной точки в лабораторной и движущейся системах отсчета (см. п. 14.1. Теоретический материал). В движущейся со скоростью  $v_0$  системе отсчета модули скоростей точек обода колеса  $A$  и  $B$  одинаковы и равны  $|\omega R|$ . Для модулей этих скоростей относительно лабораторной системы отсчета можно записать (см. рис. 14.4):

$$v_A = v_0 + \omega R, \quad (14.19)$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}. \quad (14.20)$$

Здесь и далее положительным значениям  $\omega$  соответствует вращение колеса по часовой стрелке.

Воспользуемся очевидными геометрическими соотношениями (см. рис. 14.4):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega R}{v_0}, \quad (14.21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{R - y_M}, \quad (14.22)$$

где  $\alpha$  – угол между скоростью точки  $B$  и направлением движения центра колеса.

III. Преобразуя систему уравнений (14.19) и (14.20) получаем уравнение относительно угловой скорости  $\omega$  вращения колеса:

$$\omega^2 - \omega \frac{v_A}{R} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2R^2} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, получаем два значения угловой скорости:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_A}{2R} \pm \frac{1}{2R} \sqrt{2v_B^2 - v_A^2}.$$

По условию задачи  $v_B = 5v_A$ , следовательно:

$$\omega_1 = 4 \frac{v_A}{R} \text{ и } \omega_2 = -3 \frac{v_A}{R}. \quad (14.23)$$

Согласно (14.19) этим значениям угловой скорости вращения колеса соответствуют два значения скорости центра колеса:

$$v_{01} = -3v_A \text{ и } v_{02} = 4v_A. \quad (14.24)$$

Используя (14.21) и (14.22) для координаты мгновенной оси вращения получаем следующее выражение:

$$y_M = R - \frac{v_0}{\omega}. \quad (14.25)$$

Подставляя (14.23) и (14.24) в (14.25), получаем два значения координаты мгновенной оси вращения:

$$y_{M1} = \frac{7}{4}R, \quad y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

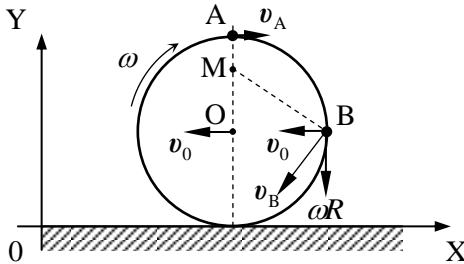


Рис. 14.5. Положение мгновенной оси вращения при вращении колеса по часовой стрелке.

Итак, задача имеет два решения.

1. Скорость центра колеса направлена в отрицательном направлении оси X, вращение колеса происходит по часовой стрелке, мгновенная ось вращения расположена на вертикальном диаметре ниже точки A, но выше центра колеса (см. рис. 14.5):

$$v_{01} = -3v_A, \quad \omega_1 = 4 \frac{v_A}{R}, \quad y_{M1} = \frac{7}{4}R.$$

2. Скорость центра колеса направлена в положительном направлении оси  $X$ , вращение колеса происходит против часовой стрелки, мгновенная ось вращения расположена выше точки  $A$  (см. рис. 14.6):

$$v_{02} = 4v_A,$$

$$\omega_2 = -3 \frac{v_A}{R},$$

$$y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

**Ответ:**  $v_{01} = -3v_A$ ,  $\omega_1 = 4 \frac{v_A}{R}$ ,  $y_{M1} = \frac{7}{4}R$ ;

$$v_{02} = 4v_A, \quad \omega_2 = -3 \frac{v_A}{R}, \quad y_{M2} = \frac{7}{3}R.$$

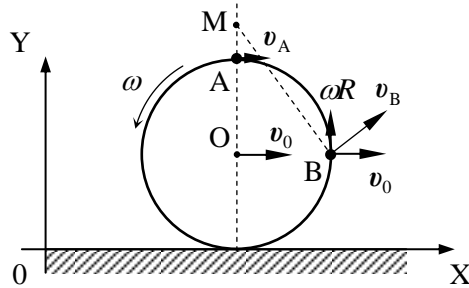


Рис. 14.6. Положение мгновенной оси вращения при вращении колеса против часовой стрелки.

**Задача 14.2.** (Плоское движение абсолютно твердого тела). Колесо радиусом  $R$  катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением  $a_0$ . Определите модули ускорений и скоростей относительно неподвижной системы отсчета точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $N$  (рис. 14.7) в тот момент, когда скорость центра колеса равна  $v_0$ .

Точки обода колеса  $A$  и  $M$  лежат на вертикальном его диаметре, точки  $B$  и  $C$  лежат на горизонтальном диаметре (рис. 14.7), причем  $B$  находится на обode колеса, а  $C$  – на расстоянии  $r$  от центра колеса. Точка  $N$  находится на обode колеса и смещена на угол  $\varphi$  относительно точки  $A$ .

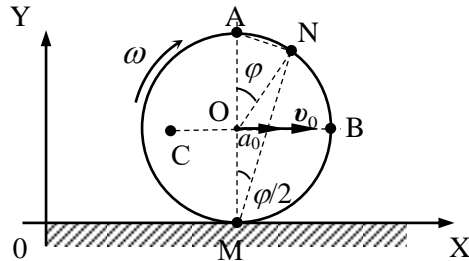


Рис. 14.7. Положение точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $N$  колеса относительно осей выбранной декартовой системы координат.

### Решение

I. Выберем инерциальную систему отсчета  $S$ , связанную с горизонтальной поверхностью. Направим оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат так, как показано на рис. 14.7.

Для удобства решения задачи введем вторую, жестко связанную с колесом неинерциальную систему отсчета  $S'$ , начало отсчета которой совпадает с центром масс колеса. Система  $S'$  движется вместе с центром масс колеса со скоростью  $v_0(t)$  и ускорением  $a_0$  относительно лабораторной системы, а также вращается вместе с колесом с угловой скоростью  $\omega(t)$ .

Плоское движение колеса в течение бесконечно малого интервала времени можно представить как "чистый" поворот относительно мгновенной оси вращения, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку пересечения прямых, перпендикулярных скоростям движения материальных точек колеса. Поскольку, по условию задачи, колесо катится без проскальзывания, скорость нижней точки обода колеса  $v_M = 0$ , а значит, мгновенная ось вращения проходит через точку  $M$ .

II. Скорость и ускорение центра масс колеса связаны следующим соотношением:

$$a_0 = \dot{v}_0(t).$$

При решении задачи воспользуемся формулой, связывающей скорости материальной точки в лабораторной  $S$  и движущейся  $S'$  системах отсчета:

$$v = v_0 + [\omega r'], \quad (14.26)$$

где  $r'(t)$  – радиус-вектор материальной точки относительно системы отсчета  $S'$ , то есть вектор, проведенный из точки  $O$  колеса в рассматриваемую точку,  $\omega(t)$  – угловая скорость системы  $S'$  вокруг оси вращения, проходящей через начало этой системы отсчета.

Запишем, используя соотношение (14.26), проекцию скорости точки  $M$  на ось  $X$  системы координат относительно лабораторной системы отсчета  $S$ :

$$v_M(t) = v_0(t) - \omega(t)R = 0. \quad (14.27)$$

Здесь и далее положительным значениям  $\omega$  соответствует вращение колеса по часовой стрелке.

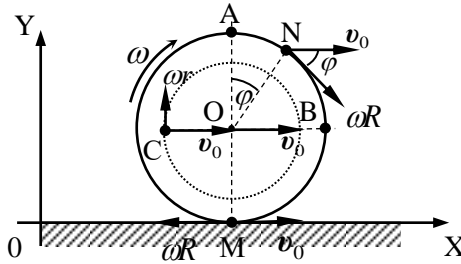


Рис. 14.8. Компоненты скоростей точек С, М и N колеса относительно осей выбранной декартовой системы координат.

Поскольку точки А и В можно рассматривать как частный случай точки N при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  (см. рис. 14.8), запишем, используя (14.26), проекции ее скорости на оси системы координат относительно лабораторной системы отсчета:

$$v_{Nx}(t) = v_0(t) + \omega(t)R \cos \varphi, \quad (14.28)$$

$$v_{Ny}(t) = -\omega(t)R \sin \varphi. \quad (14.29)$$

Проекции скоростей точки С на оси X и Y лабораторной системы отсчета имеют следующий вид:

$$v_{Cx}(t) = v_0(t), \quad (14.30)$$

$$v_{Cy}(t) = \omega(t)r. \quad (14.31)$$

Тогда модули скоростей точек N и М соответственно равны

$$v_N(t) = \sqrt{v_{Nx}^2(t) + v_{Ny}^2(t)}, \quad (14.32)$$

$$v_C(t) = \sqrt{v_{Cx}^2(t) + v_{Cy}^2(t)}. \quad (14.33)$$

Для определения ускорений воспользуемся связью между ускорениями материальной точки относительно лабораторной и движущейся систем отсчета:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\dot{\omega} \mathbf{r}'] + [\omega [\omega \mathbf{r}']]. \quad (14.34)$$

Здесь  $\mathbf{a}(t)$  – ускорение материальной точки относительно лабораторной системы отсчета S;  $\mathbf{a}_0(t)$  – ускорение начала системы отсчета S',  $\mathbf{r}'(t)$  – радиус-вектор материальной точки относительно движущейся системы отсчета S',  $\omega(t)$  и  $\dot{\omega}(t)$  – угловая скорость и угловое ускорение системы S' вокруг оси вращения, проходящей через начало этой системы отсчета.

Заметим, что  $[\dot{\omega}r']$  и  $[\omega[\omega r']]$  являются соответственно тангенциальным ( $a_\tau$ ) и нормальным ( $a_n$ ) ускорениями точки N (см. рис. 14.9).

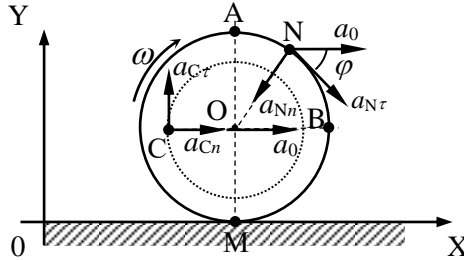


Рис. 14.9. Компоненты ускорений точек С, М и N колеса относительно осей выбранной декартовой системы координат.

Воспользовавшись соотношением (14.34), запишем проекции ускорений точек N и C на оси X и Y лабораторной системы отсчета:

$$a_{N_x}(t) = a_0 + \beta R \cos \varphi - \omega^2 R \sin \varphi, \quad (14.35)$$

$$a_{N_y}(t) = -\beta R \sin \varphi - \omega^2 R \cos \varphi, \quad (14.36)$$

$$a_{C_x}(t) = a_0 + \omega^2 r, \quad (14.37)$$

$$a_{C_y}(t) = \beta r, \quad (14.38)$$

где  $\beta$  – проекция вектора углового ускорения на ось декартовой системы координат, совпадающую с осью вращения. Величина  $\beta$  может быть определена путем дифференцирования соотношения (14.27):

$$a_0 = \dot{v}_0 = \beta R. \quad (14.39)$$

Модули ускорений точек N и C относительно лабораторной системы отсчета равны:

$$a_N(t) = \sqrt{(a_{N_x}(t))^2 + (a_{N_y}(t))^2}, \quad (14.40)$$

$$a_C(t) = \sqrt{(a_{C_x}(t))^2 + (a_{C_y}(t))^2}. \quad (14.41)$$

III. Используя соотношения (14.27) – (14.33), определим скорости точек N и C относительно лабораторной системы отсчета:

$$\begin{aligned} v_N(t) &= \sqrt{(v_0(t) + v_0(t)\cos\varphi)^2 + (-v_0(t)\sin\varphi)^2} = \\ &= v_0(t)\sqrt{2(1+\cos\varphi)}, \end{aligned} \quad (14.42)$$

$$v_C(t) = \sqrt{v_0^2(t) + \left(\frac{v_0(t)r}{R}\right)^2} = v_0(t)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Подставив значения углов  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  в (14.42), определим искомые скорости точек А и В:

$$v_A = 2v_0(t)$$

$$v_B = \sqrt{2}v_0(t).$$

Решая систему уравнений (14.35) – (14.42) с учетом (14.27), получим модули ускорений для точек N и C:

$$\begin{aligned} a_N(t) &= \sqrt{(a_0 + \beta R \cos\varphi - \omega^2 R \sin\varphi)^2 + (-\beta R \sin\varphi - \omega^2 R \cos\varphi)^2} = \\ &= \sqrt{\left(a_0 + a_0 \cos\varphi - \frac{v_0^2(t)}{R} \sin\varphi\right)^2 + \left(a_0 \sin\varphi + \frac{v_0^2(t)}{R} \cos\varphi\right)^2} = \\ &= \sqrt{2a_0^2(1+\cos\varphi) + \frac{v_0^4(t)}{R^2} - 2a_0 \frac{v_0^2(t)}{R} \sin\varphi}, \end{aligned} \quad (14.43)$$

$$a_C(t) = \sqrt{(a_0 + \omega^2 r)^2 + (\beta r)^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2(t)}{R^2} r + a_0\right)^2 + \left(\frac{r}{R} a_0\right)^2}.$$

Подставив значения углов  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = \pi$  в (14.43), определим ускорения точек А, В и М:

$$a_A(t) = \sqrt{4a_0^2 + \frac{v_0^4(t)}{R^2}},$$

$$a_B(t) = \sqrt{2a_0^2 + \frac{v_0^4(t)}{R^2} - 2a_0 \frac{v_0^2(t)}{R}},$$

$$a_M(t) = \frac{v_0^2(t)}{R}.$$

Заметим, что модуль скорости точки N можно определить более простым способом, рассматривая движение колеса относительно мгновенной оси вращения.



Угол  $\varphi/2$  в прямоугольном треугольнике ANM равен половине центрального угла AON (см. рис. 14.7). Тогда скорость точки N равна:

$$v_N(t) = \omega(t)2R \cos \frac{\varphi}{2} = 2v_0(t) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

В ходе разбора задачи на семинаре следует отметить, что использовать понятие мгновенной оси вращения для определения ускорений сложно, поскольку положение мгновенной оси меняется при перемещении твердого тела. Для определения ускорений необходимо дифференцировать и орты системы координат, связанной с мгновенной осью вращения.

**Ответ:**

$$v_N(t) = v_0(t) \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}, \quad v_C(t) = v_0(t) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2},$$

$$v_A = 2\omega R, \quad v_B = \sqrt{2}\omega R, \quad v_M = 0,$$

$$a_N(t) = \sqrt{2a_0^2(1 + \cos \varphi) + \frac{v_0^4(t)}{R^2}} - 2a_0 \frac{v_0^2(t)}{R} \sin \varphi,$$

$$a_C(t) = \sqrt{\left(\frac{v_0^2(t)}{R^2} r + a_0\right)^2 + \left(\frac{r}{R} a_0\right)^2}, \quad a_A(t) = \sqrt{4a_0^2 + \frac{v_0^4(t)}{R^2}},$$

**Задача 14.3.** (Плоское движение абсолютно твердого тела). Катушку, лежащую на горизонтальной поверхности, тянут за намотанную на ее внутреннюю цилиндрическую часть нерастяжимую нить так, что ее конец движется со скоростью  $V$  под углом  $\alpha$  к горизонту. При этом катушка катится без проскальзывания, а ее ось движется поступательно. Найти скорость движения оси катушки  $v_0$ , если отношение внешнего и внутреннего радиусов катушки

$$\text{равно } \frac{R}{r} = n.$$

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с горизонтальной поверхностью. Направим оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат так, как показано на рис. 14.10.

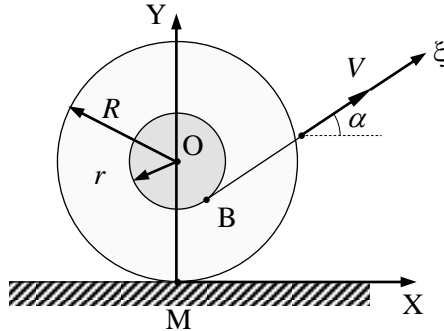


Рис. 14.10. Ориентация катушки и нити относительно осей выбранной декартовой системы координат и дополнительной оси  $\xi$ .

Введем дополнительную ось  $\xi$ , совпадающую с направлением нити.

Поскольку по условию задачи катушка катится без проскальзывания, скорость нижней точки катушки  $v_M = 0$  относительно лабораторной системы отсчета.

Так как по условию задачи нить нерастяжима, скорость точки  $B$  вдоль оси  $\xi$  должна быть равна  $V$  относительно лабораторной системы отсчета. Будем считать для определенности, что катушка движется в положительном направлении оси  $X$ .

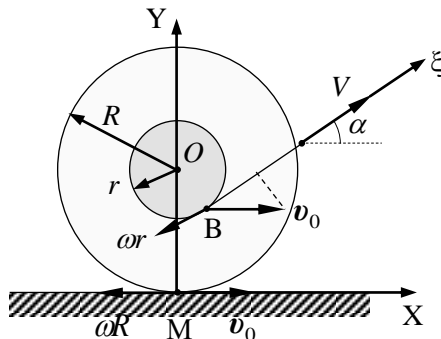


Рис. 14.11. Проекция скоростей точек  $B$  и  $M$  на оси  $X$  и  $\xi$ .

II. Для скорости точки М относительно лабораторной системы отсчета можно записать (см. рис. 14.11):

$$v_M = v_0 - \omega R. \quad (14.44)$$

Для проекции скорости точки В на ось  $\xi$ , запишем:

$$V = v_0 \cos \alpha - \omega r. \quad (14.45)$$

III. Используя условие равенства нулю скорости точки М ( $v_M = 0$ ), а также соотношения (14.44) и (14.45), получим:

$$\omega = \frac{V}{R \cos \alpha - r},$$

$$v_0 = \omega R = \frac{VR}{R \cos \alpha - r}.$$

Так как по условию задачи  $R/r = n$ , то

$$v_0 = \frac{Vn}{n \cos \alpha - 1}.$$

При решении задачи мы предполагали, что катушка движется в положительном направлении оси X. Это возможно при условии:

$$n \cos \alpha - 1 > 0.$$

Таким образом, в случае, когда

$$\cos \alpha > r/R,$$

катушка будет двигаться в положительном направлении оси X, в противном случае – в другую сторону.

При  $n \cos \alpha - 1 = 0$  движение без проскальзывания невозможно.

**Ответ:**  $v_0 = \frac{Vn}{n \cos \alpha - 1}.$

**Задача 14.4.** (Плоское движение абсолютно твердого тела). В некоторый момент времени скорость центра стержня АВ, движущегося в горизонтальной плоскости, составила угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением стержня (см. рис. 14.12). Величина скорости точки В равна  $v_B = 2$  м/с, а скорость точки А перпендикулярна к скорости

точки В. Определите величину скорости  $v_0$ , с которой движется центр стержня в этот момент времени.

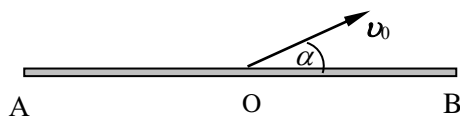


Рис. 14.12. Ориентация вектора скорости центра стержня.

### Решение

I. При решении задачи удобно воспользоваться понятием мгновенной оси вращения. Мгновенная ось вращения перпендикулярна плоскости и находится на пересечении перпендикуляров, проведённых к векторам скоростей точек стержня (А, В и центра стержня). Поскольку скорости точек А и В взаимно перпендикулярны по условию задачи, то мгновенная ось вращения будет пересекать плоскость чертежа в точках, лежащих на окружности, диаметром которой является отрезок АВ (рис. 14.13).

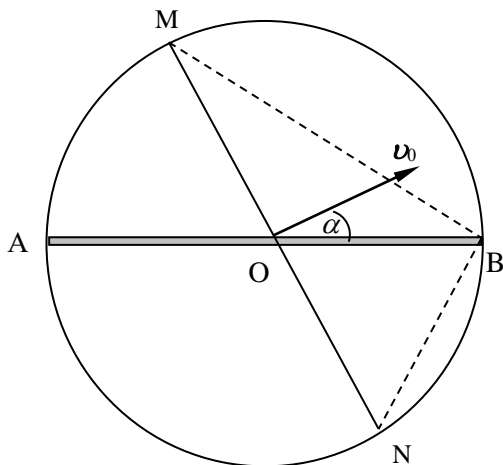


Рис. 14.13. Нахождение мгновенной оси вращения стержня.

Проведя перпендикуляр к скорости точки О, являющейся центром стержня, определим две возможных мгновенных оси вращения. Мгновенные оси вращения могут проходить через точки М и

N, являющиеся точками пересечения окружности и проведенного к скорости  $v_0$  перпендикуляра.

II. В случае, когда мгновенная ось проходит через точку M, скорость точки B и скорость, с которой движется центр стержня в этот момент времени равны:

$$v_B = \omega \cdot BM, v_0 = \omega \cdot OM,$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения стержня.

В случае, когда мгновенная ось проходит через точку N, скорость точки B и скорость, с которой движется центр стержня в этот момент времени равны:

$$v_B = \omega \cdot BN, v_0 = \omega \cdot OM.$$

III. В первом случае искомая скорость равна

$$v_0 = v_B \cdot \frac{OM}{BM}.$$

В треугольнике MOB угол MOB равен  $120^\circ$ . Пусть радиус окружности равен R, тогда  $BM = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$ . Отсюда

$$v_0 = v_B \cdot \frac{R}{R\sqrt{3}} = v_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м/с.}$$

Во втором случае искомая скорость равна

$$v_0 = v_B \cdot \frac{OM}{BN}.$$

Поскольку в треугольнике NOB угол NOB равен  $60^\circ$ ,  $NB = R$ . Отсюда

$$v_0 = v_B = 2 \text{ м/с.}$$

**Ответ:**  $v_0 = v_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м/с; } v_0 = v_B = 2 \text{ м/с.}$

**Задача 14.5.** (Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг оси, вращающейся относительно неподвижной в пространстве оси). Два соосных колеса с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) вращаются в одну сторону с постоянными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_1 > \omega_2$ ). Между колесами зажато третье колесо радиусом  $r_3 = (r_2 - r_1)/2$ , движущееся без проскальзывания (рис. 14.14). Найти угловую скорость  $\omega$  вращения третьего колеса и скорость  $v_0$  его центра.

### Решение

I. Обозначим точки соприкосновения третьего колеса с первым и вторым точками В и А соответственно. Для третьего колеса, зажатого между двумя вращающимися колесами, скорости точек А и В совпадают со скоростями точек, находящихся на ободах соответствующих колес (см. рис. 14.14).

II. Поскольку первое и второе колеса вращаются с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , скорости движения точек А и В при вращении этих колес равны:

$$v_A = \omega_2 r_2, \quad (14.46)$$

$$v_B = \omega_1 r_1. \quad (14.47)$$

При решении задачи удобно воспользоваться понятием мгновенной оси вращения для третьего колеса (см. п. 14.1. Теоретический материал), относительно которой колесо вращается с угловой скоростью  $\omega$ . В данном случае эта ось перпендикулярна плоскости чертежа и пересекает прямую, проходящую через точки О, В и А. Пусть мгновенная ось вращения лежит между точками О и В на расстоянии  $r_x$  от точки О, тогда:

$$v_A = \omega(r_1 - r_x + 2r_3), \quad (14.48)$$

$$v_B = \omega(r_1 - r_x), \quad (14.49)$$

при этом для скорости центра третьего колеса можно записать:

$$v_0 = \omega(r_1 - r_x + r_3). \quad (14.50)$$

III. Решая систему уравнений (14.46) – (14.49) относительно угловой скорости вращения третьего колеса  $\omega$ , получаем:

$$\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2r_3}. \quad (14.51)$$

Подставляя (14.51) в (14.50), получаем искомую скорость центра третьего колеса:

$$v_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}.$$

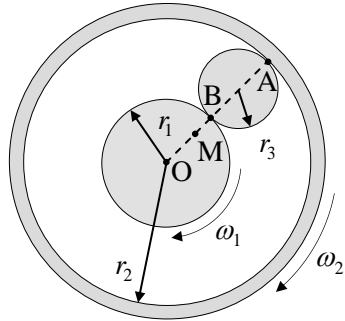


Рис. 14.14. Взаимное расположение колес.

**Ответ:** 
$$v_0 = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}.$$

**Задача 14.6.** (Движение абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой). Конус, высота которого  $h = 4$  см и радиус основания  $r = 3$  см, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, имея неподвижную вершину в точке  $O$  (рис. 14.15). Определить угловую скорость вращения конуса относительно лабораторной системы отсчета, связанной с поверхностью, если конус делает один оборот вокруг оси  $OZ$  за время  $T = 3$  с.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи выберем лабораторную систему отсчета, жестко связанную с горизонтальной поверхностью. При этом ось  $Z$  системы направим перпендикулярно поверхности, а начало отсчета совместим с неподвижной вершиной конуса  $O$  (см. рис. 14.15).

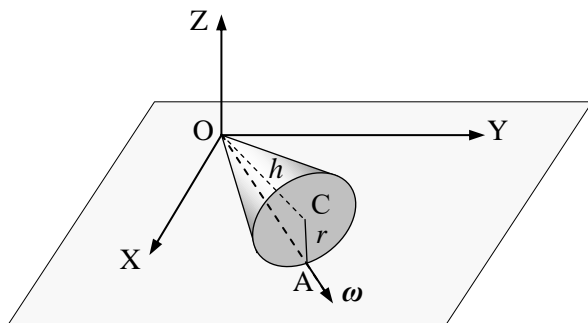


Рис. 14.15. Взаимное расположение конуса и осей выбранной декартовой системы координат.

В соответствии с принципом суперпозиции движений движение каждой материальной точки конуса (за исключением точек, лежащих на оси конуса  $OC$ ) относительно выбранной лабораторной системы отсчета можно рассматривать как суперпозицию двух движений – вращение с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси конуса  $OC$  и вращение с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг оси  $Z$ . Точки, лежащие на прямой  $OA$  соприкосновения конуса с поверхностью, в

данный момент времени покоятся, так как нет проскальзывания. Эта прямая является мгновенной осью вращения, вокруг которой конус вращается с угловой скоростью  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

II. Материальная точка С в центре основания конуса участвует только в одном движении – вращении вокруг оси Z с радиусом R (см. рис. 14.16). При этом ее скорость в соответствии с условием задачи равна:

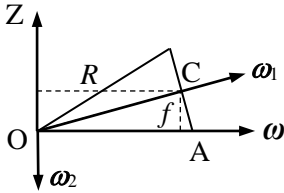


Рис. 14.16. Ориентация угловых скоростей вращения конуса.

$$v_C = \omega_2 R = \frac{2\pi}{T} R. \quad (14.52)$$

Можно считать, что в течение бесконечно малого интервала времени точка С вращается вокруг мгновенной оси вращения OA с угловой скоростью  $\omega$ .

Следовательно, скорость материальной точки С в центре основания конуса относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$v_C = \omega f, \quad (14.53)$$

Как видно на рис. 14.14, для R и f выполняются следующие соотношения:

$$\frac{r}{f} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - f^2}}, \quad (14.54)$$

$$R = \sqrt{h^2 - f^2}. \quad (14.55)$$

III. Решая систему уравнений (14.52) и (14.55), получаем:

$$\omega = \frac{R}{f} \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

Из (14.54) и (14.55) определяем R и f:

$$f = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad R = \frac{h^2}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Искомая угловая скорость вращения конуса вокруг мгновенной оси относительно лабораторной системы отсчета равна:

$$\omega = \frac{h}{r} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2,79 \text{ рад/с.}$$



Проанализируем полученный результат. В частности, убедимся, что выполняется соотношение между угловыми скоростями вращения конуса:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega.$$

Определим модуль угловой скорости  $\omega_1$ . Для этого воспользуемся тем, что точка А, лежащая на мгновенной оси вращения, участвует в двух движениях, при этом ее скорость относительно лабораторной системы отсчета равна нулю:

$$v = OA \cdot \omega_2 - \omega_1 r = 0. \quad (14.56)$$

Следовательно, угловая скорость вращения конуса вокруг оси OZ в соответствии с (14.56) и рис. 14.15 равна:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}. \quad (14.57)$$

Направления векторов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , и  $\omega$  показаны на рис. 14.17.

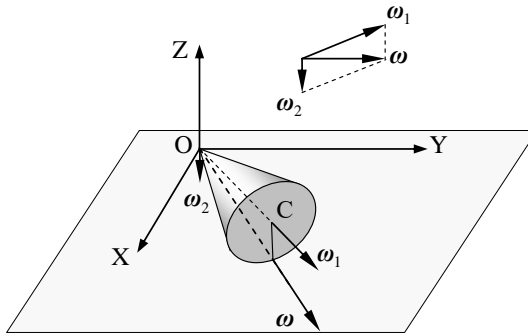


Рис. 14.17. Ориентация векторов угловых скоростей вращения конуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega$ .

Вектор  $\omega_1$  направлен вдоль оси конуса OC,  $\omega_2$  – вдоль оси Z лабораторной системы отсчета,  $\omega$  – вдоль мгновенной оси вращения. Все три вектора лежат в одной плоскости и составляют прямоугольный треугольник (см. рис. 14.17). Используя соотношения (14.56) и (14.57), убеждаемся, что

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_2^2 \left( \frac{h^2 + r^2}{r^2} - 1 \right) = \omega_2^2 \frac{h^2}{r^2} = \omega^2.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{h}{r} \cdot \frac{2\pi}{T} = 2,79 \text{ рад/с.}$$

**Задача 14.7.** (Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг подвижной в пространстве оси). Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = 0,5$  рад/с вокруг горизонтальной оси ОВ. В момент  $t = 0$  ось ОА начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением  $\beta_0 = 0,1$  рад/с<sup>2</sup>. Найти угловую скорость и угловое ускорение тела через  $t = 5$  с.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с неподвижным наблюдателем. Направим ось X декартовой системы координат вдоль горизонтальной оси ОА, а ось Y – вертикально вверх. Угловая скорость тела  $\omega_0$  направлена вдоль оси X, а угловое ускорение  $\beta_0$  – вдоль оси Y.

II. Угловая скорость вращения тела относительно вертикальной оси равна  $\omega_1 = \beta_0 t$ . Угловая скорость тела определяется как векторная сумма угловых скоростей (см. 14.18):

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \beta_0 t. \quad (14.58)$$

Угловое ускорение тела является суммой двух слагаемых:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} + \beta_0. \quad (14.59)$$

Для определения  $\frac{d\omega_0}{dt}$  рассмотрим, как изменяется ориентация вектора угловой скорости  $\omega_0$  при повороте тела относительно оси вращения ОА (рис. 14.18).

Как видно на рис. 14.18, величины  $d\omega$  и  $d\varphi$  связаны соотношением:

$$d\omega_0 = [d\varphi \omega_0].$$

Тогда:

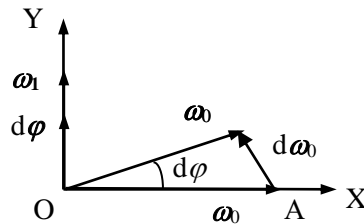


Рис. 14.18. Изменение ориентации вектора угловой скорости вращения твердого тела  $\omega_0$  за время  $\Delta t$ .

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} = \left[ \frac{d\varphi}{dt} \boldsymbol{\omega}_0 \right] = [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_0] = [\boldsymbol{\beta}_0 t \boldsymbol{\omega}_0], \quad (14.60)$$

так, как  $\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{d\varphi}{dt}$ .

III. Поскольку вектора  $\boldsymbol{\omega}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}$  взаимно перпендикулярны, модуль угловой скорости равен:

$$\omega = \sqrt{(\omega_0)^2 + (\beta_0 t)^2} = \sqrt{(0,5)^2 + (0,1 \cdot 5)^2} \approx 0,7 \text{ рад/с.}$$

Объединяя (14.59) и (14.60), определим искомое угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_0 t \boldsymbol{\omega}_0] + \boldsymbol{\beta}_0.$$

Модуль углового ускорения равен:

$$\beta = \sqrt{(\beta_0)^2 + (\omega_0 \beta_0 t)^2} = \beta_0 \sqrt{1 + (\omega_0 t)^2} = 0,1 \sqrt{1 + (0,5 \cdot 5)^2} \approx 0,2 \text{ рад/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{(\omega_0)^2 + (\beta_0 t)^2} \approx 0,7 \text{ рад/с,}$$

$$\beta = \beta_0 \sqrt{1 + (\omega_0 t)^2} \approx 0,2 \text{ рад/с}^2.$$

**Задача 14.8.** Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями  $\omega_1 = 3$  рад/с и  $\omega_2 = 4$  рад/с. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с неподвижным наблюдателем. Направим ось X декартовой системы координат вдоль угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_1$ , а ось Y – вдоль угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_2$ .

II. Угловая скорость первого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$  относительно неподвижного наблюдателя, относительно второго тела равна:

$$\boldsymbol{\omega}'_1 = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2.$$

Относительное угловое ускорение можно получить, используя результат предыдущей задачи 14.7.

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2].$$

III. Поскольку вектора  $\omega_1$  и  $\omega_2$  взаимно перпендикулярны, модуль угловой скорости  $\omega'$  равен:

$$\omega = \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ рад/с.}$$

В силу взаимной перпендикулярности векторов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , модуль относительного углового ускорения равен

$$\beta = \omega_1 \omega_2 = 12 \text{ рад/с}^2.$$

**Ответ:**  $\omega = \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ рад/с,}$

$$\beta = \omega_1 \omega_2 = 12 \text{ рад/с}^2.$$

#### 14.4. Задачи для самостоятельного решения

##### Плоское движение

**Задача 14.4.1** ([1], 1, с. 226). Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями  $v_1$  и  $v_2$  относительно лабораторной системы отсчета XY. Между рейками зажата катушка с радиусами  $R$  и  $r$ , которая движется вдоль реек без проскальзывания (рис. 14.19). Найти координату  $y_M$  мгновенной оси вращения, угловую скорость вращения  $\omega$  катушки и скорость  $v$  ее оси.

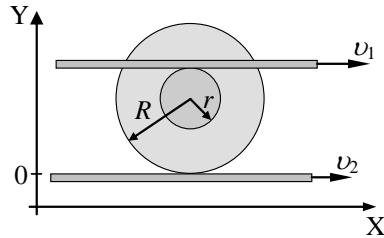


Рис. 14.19. Взаимное расположение системы тел и осей декартовой системы координат.

**Ответ:**  $y_M = \frac{v_2(R+r)}{v_1-v_2}, \quad \omega = \frac{v_1-v_2}{(R+r)}, \quad v = \frac{v_1R+v_2r}{R+r}.$

**Задача 14.4.2** ([2], 59). Колесо радиусом  $R$  катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью  $v_0$  (рис. 14.20). Найти горизонтальную компоненту  $v_x$  линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту  $v_y$  этой скорости и модуль полной скорости для этой точки. Найти значение угла  $\alpha$  между вектором полной скорости точек на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси. Показать, что направление вектора полной скорости произвольной точки А на ободе колеса всегда перпендикулярно прямой АВ и

проходит через высшую точку катящегося колеса. Показать, что для точки А  $v_{\text{полн}} = \omega \cdot \text{ВА}$ .

Построить график распределения скоростей для всех точек на вертикальном диаметре (в данный момент времени) катящегося без скольжения колеса.

Выразить все искомые величины через  $v_0$ ,  $R$  и угол  $\varphi$ , составленный верхним вертикальным радиусом колеса и радиусом, проведенным из центра колеса  $O$  в исследуемую точку его обода  $A$ .

*Указание.* Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью  $v_0$  оси колеса и вращения вокруг этой оси. Для этих точек при отсутствии скольжения колеса модули векторов скорости поступательного движения и линейной скорости, обусловленной вращением, равны друг другу.

$$\text{Ответ: } v_x = v_0(1 + \cos\varphi) = 2v_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad v_y = -v_0 \sin\varphi,$$

$$v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = -\arctg\left(\tg \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2}.$$

**Задача 14.4.3** ([2], 62). Колесо радиусом  $R$  равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью  $v$ . Найти координаты  $x$  и  $y$  произвольной точки  $A$  на обode колеса, выразив их как функции времени  $t$  или угла поворота колеса  $\varphi$ , полагая, что при  $t = 0$   $\varphi = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . По найденным выражениям для  $x$  и  $y$  построить график траектории точки на обode колеса.

$$\text{Ответ: } x = R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t), \\ y = R(1 - \cos\varphi) = R(1 - \cos\omega t),$$

где  $\varphi = \omega t$  и  $\omega = v/R$  – угловая скорость вращения колеса. Траекторией точек, находящихся на обode движущегося колеса, является простая циклоида, уравнение которой получено в параметрическом виде.

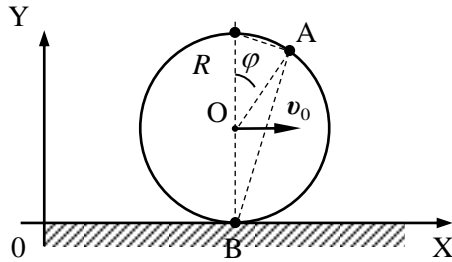


Рис. 14.20. Положение точек А и В на катящемся колесе.

**Задача 14.4.4** ([2], 63). Пользуясь выражением для полной скорости точек, лежащих на ободе катящегося колеса (см. **задачи 14.4.2 и 14.4.3**), найти длину полного пути  $S$  каждой точки обода колеса между двумя ее последовательными касаниями полотна дороги.

*Ответ:*  $S = 8R$ .

**Задача 14.4.5** ([2], 64). Автомобиль с колесами радиусом  $R$  движется со скоростью  $v$  по горизонтальной дороге, причем  $v^2 > Rg$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту  $h$  может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колес автомобиля? Указать положение той точки на покрышке колеса, с которой при данной скорости движения автомобиля грязь будет забрасываться всего выше. Сопротивление воздуха движению отброшенной вверх грязи не учитывать.

*Ответ:*  $h_{\max} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}$ ,  $\cos\varphi = -\frac{Rg}{v^2}$ ,

где  $\varphi$  — угловая координата искомой точки на ободе колеса.

**Задача 14.4.6** ([2], 65). Используя условия качения колеса из **задачи 14.4.2** и результаты ее решения, найти горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения произвольной точки на ободе колеса. Указать величину и направление вектора полного ускорения точек, лежащих на ободе колеса.

*Ответ:*  $a_{\text{гор}} = (v^2/R)\sin\phi$ ,  $a_{\text{верт}} = (v^2/R)\cos\phi$ ,

при равномерном вращении полное ускорение всегда направлено к центру колеса.

### *Вращательное движение*

**Задача 14.4.7** ([1], 2, с. 226). Круглый конус высотой  $h$  и радиусом основания  $r$  катится без скольжения по горизонтальной поверхности (рис. 14.21). Вершина конуса шарнирно закреплена в точке  $O$  на уровне центра основания конуса, который движется с постоянной по модулю скоростью  $v$ . Найти угловую скорость вращения конуса  $\omega$  и его угловое ускорение  $\beta$ .

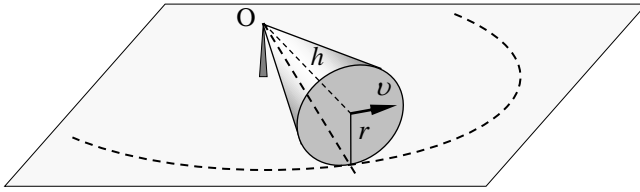


Рис. 14.21. Вращение конуса, шарнирно закрепленного в точке  $O$ , по горизонтальной поверхности.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{v}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}, \quad \beta = \frac{v^2}{rh}.$$

**Задача 14.4.8** ([1] 4, с. 227). Кривошип, соединяющий оси двух зубчатых колес радиусами  $R$  и  $r$ , вращается с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 14.22). Внутреннее колесо неподвижно. Найти угловую скорость вращения внешнего колеса  $\omega$  и его относительную (по отношению к кривошипу) угловую скорость вращения  $\omega_{\text{отн}}$ .

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{\Omega(R+r)}{r}, \quad \omega_{\text{отн}} = \frac{\Omega R}{r}.$$

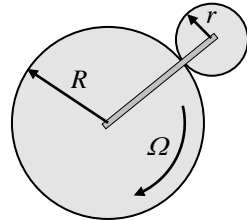


Рис. 14.22. Кривошип, соединяющий оси двух зубчатых колес.

**Задача 14.4.9** ([2], 68). Некоторое твердое тело одновременно вращается с угловыми скоростями  $\omega_1$ ,  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,  $\omega_3 = 3\omega_1$  вокруг трех взаимно перпендикулярных мгновенных осей, проходящих через одну точку. Найти, как по отношению к названным трем осям должна быть ориентирована одна ось, вращение вокруг которой могло бы заменить сразу все три указанных независимых вращения. С какой угловой скоростью тогда должно вращаться тело вокруг найденной новой оси вращения?

**Ответ:** Косинусы углов между новой осью вращения и тремя прежними осями определяются выражениями  $\cos \alpha = 1/\sqrt{14}$ ,  $\cos \beta = 2/\sqrt{14}$ ,  $\cos \gamma = 3/\sqrt{14}$ , угловая скорость вращения вокруг новой оси будет равна  $\omega_1 \sqrt{14}$ .

**Задача 14.4.10** ([2], 69). Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг вертикальной оси. В некоторой точке на этом диске на расстоянии  $R$  от его оси установлен второй диск, ось которого также вертикальна. Второй диск вращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и первый диск, но с угловой скоростью  $\omega_2$ . Где располагается та мгновенная ось вращения, движение вокруг которой второго диска будет эквивалентно его участию в двух описанных вращательных движениях с угловыми скоростями  $\omega_1$ , и  $\omega_2$ ? С какой угловой скоростью  $\omega$  должен вращаться второй диск вокруг этой мгновенной оси?

*Ответ:* Искомая мгновенная ось вращения будет описывать окружность с радиусом  $r = \omega_2 R / (\omega_1 + \omega_2)$  вокруг оси первого диска. Угловая скорость вращения вокруг этой мгновенной оси будет  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

**Задача 14.4.11** ([2], 70). Вращение от мотора автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал — устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с разной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от мотора?

*Ответ:* При повороте автомобиля его внешние и внутренние (по отношению к центру закругления дороги) колеса описывают разные окружности, т. е. проходят разные пути, и угловая скорость вращения колес, если они не скользят по дороге, должна быть различной. Это условие для задних ведущих колес обеспечивает дифференциал в заднем мосте автомобиля. Колеса, не имеющие привода от мотора, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

**Задача 14.4.12** ([3], 1.48). Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением  $\beta = at$ , где  $a = 2,0 \cdot 10^{-2}$  рад/с<sup>3</sup>. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол  $\varphi = 60^\circ$  с ее вектором скорости?

*Ответ:*  $t = \sqrt[3]{(4/a)\operatorname{tg}\varphi} = 7$  с.



**Задача 14.4.13** ([3], 1.49). Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорением  $\beta \sim \sqrt{\omega}$ , где  $\omega$  – его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна  $\omega_0$ .

*Ответ:*  $\langle \omega \rangle = \omega_0/3$ .

**Задача 14.4.14** ([3], 1.50). Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота  $\varphi$  по закону  $\omega = \omega_0 - \alpha \varphi$ , где  $\omega_0$  и  $\alpha$  – положительные постоянные. В момент  $t = 0$  угол  $\varphi = 0$ . Найти зависимости от времени:

а) угла поворота; б) угловой скорости.

*Ответ:* а)  $\varphi = (1 - \exp(-\alpha t))\omega_0 / \alpha$  ;

б)  $\omega = \omega_0 \exp(-\alpha t)$  .

**Задача 14.4.15** ([3], 1.55). Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями  $\omega_1 = 3,0$  рад/с и  $\omega_2 = 4,0$  рад/с. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

*Ответ:*  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$  рад/с,  $\beta = \omega_1\omega_2 = 12$  рад/с<sup>2</sup>.

**Задача 14.4.16** ([3], 1.58). Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = 0,50$  рад/с вокруг горизонтальной оси АВ. В момент времени  $t = 0$  ось АВ начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением  $\beta_0 = 0,10$  рад/с<sup>2</sup>. Найти модули угловой скорости и углового ускорения тела через  $t = 3,5$  с.

*Ответ:*  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + (\beta_0 t / \omega_0)^2} = 0.6$  рад/с.

## ГЛАВА 15

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.  
ЧАСТЬ 1

## 15.1. Теоретический материал

**Момент импульса  $L$  материальной точки относительно некоторой точки пространства** – векторное произведение радиус-вектора  $r$  материальной точки относительно данной точки пространства на ее импульс  $p$  в заданной системе отсчета:

$$L = [rp]. \quad (15.1)$$

**Момент импульса  $L$  механической системы относительно точки** – сумма моментов импульсов  $L_i$  материальных точек, входящих в систему:

$$L = \sum_i L_i. \quad (15.2)$$

Найдем связь между моментом импульса механической системы  $L$  относительно произвольной неподвижной точки  $O$  и моментом импульса этой системы  $L_0$  относительно ее центра масс  $O'$  в лабораторной системе отсчета (см. рис. 15. 1). Радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки  $r_i$  относительно точки  $O$  равен:

$$r_i = r_{\text{цм}} + r'_i, \quad (15.3)$$

где  $r_{\text{цм}}$  – радиус-вектор центра масс относительно точки  $O$ ,  $r'_i$  – радиус-вектор материальной точки системы относительно ее центра масс.

**Момент импульса системы материальных точек относительно точки  $O$**  в соответствии с (15.1) и (15.2) равен:

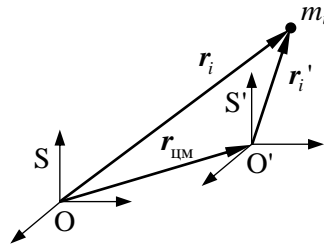


Рис. 15.1. Связь между радиус-векторами материальной точки в лабораторной системе отсчета  $S$  и в системе центра масс  $S'$ .

$$L = \sum_i \left[ \mathbf{r}_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right]. \quad (15.4)$$

Преобразуем (15.4) с учетом (15.3):

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}} + \mathbf{r}'_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \sum_i \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_i \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_i \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i \right] = \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}} \right] + L_0 \equiv L_{\text{цм}} + L_0, \end{aligned} \quad (15.5)$$

где  $\mathbf{p}_i$  – импульс  $i$ -ой материальной точки механической системы,  $\mathbf{p}_{\text{цм}} \equiv \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i$  – импульс центра масс этой системы,  $L_0 \equiv \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i \right]$  – момент импульса механической системы относительно центра масс  $O'$  и  $L_{\text{цм}} \equiv \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}} \right]$  – момент импульса центра масс механической системы относительно точки  $O$ , в лабораторной системе отсчета.

Введем поступательно движущуюся систему отсчета  $S'$ , начало которой  $O'$  совпадает с центром масс механической системы и осями, ориентированными параллельно осям лабораторной системы отсчета (см. рис. 15.1). В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. п. 1.1 и формулу (1.24) в Главе 1) можно записать:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{цм}} + \mathbf{v}'_i, \quad (15.6)$$

В соответствии с (15.6) импульс  $i$ -ой материальной точки механической системы относительно лабораторной системы отсчета равен:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{\text{цм}} + \mathbf{p}'_i. \quad (15.7)$$

Подставляя (6.25) в (6.23), получаем:

$$\begin{aligned} L &= \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}} \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i \right] = \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}} \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, m_i \mathbf{v}_{\text{цм}} \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i \right] = \\ &= \left[ \mathbf{r}_{\text{цм}}, \mathbf{p}_{\text{цм}} \right] + \left[ \sum_i m_i \mathbf{r}'_i, \mathbf{v}_{\text{цм}} \right] + \sum_i \left[ \mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i \right]. \end{aligned} \quad (15.8)$$

В соответствии с определением центра масс (см. п.5.1 в **Главе 5**)  $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$ , следовательно, выражение (15.8) для момента импульса механической системы относительно произвольной неподвижной точки  $O$  принимает вид:

$$L = [r_{\text{цм}}, p_{\text{цм}}] + \sum_i [r'_i, p'_i] = [r_{\text{цм}}, p_{\text{цм}}] + L'_0, \quad (15.9)$$

$L'_0 \equiv \sum_i [r'_i, p'_i]$  – момент импульса механической системы относительно центра масс  $O'$  в системе отсчета  $S'$ .

Таким образом, **момент импульса механической системы относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета равен сумме момента импульса центра масс этой системы относительно данной точки и момента импульса механической системы относительно ее центра масс.** Заметим, что момент импульса механической системы относительно ее центра масс в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс одинаковы (ср. (15.5) с (15.9)).

Сформулированное утверждение справедливо для абсолютно твердого тела, поскольку оно является механической системой.

В случае вращения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки скорость материальной точки и угловая скорость вращения тела связаны соотношением (14.15), следовательно, момент импульса относительно этой точки может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} L &= \sum_i [r_i, m_i v_i] = \sum_i m_i [r_i, [\omega r_i]] = \sum_i m_i (\omega r_i^2 - r_i(r_i \omega)) = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J \omega. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Здесь  $r_i$  – радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки массой  $m_i$ ,  $v_i$  –

ее скорость,  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$  – угловая скорость вращения тела и

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} - \text{тензор инерции абсолютно твердого тела}$$

относительно неподвижной точки.

Диагональные элементы тензора  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  называются **осевыми моментами инерции**, а недиагональные  $J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}, J_{yz} = J_{zy}$  – **центробежными моментами инерции**. Осевые моменты инерции в соответствии с определением являются моментами инерции тела относительно соответствующих осей координат.

Поскольку тензор инерции тела является симметричным тензором, он обладает **главными осями инерции**, при записи в которых диагонализуется:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (15.11)$$

В этом случае центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции  $J_x, J_y$  и  $J_z$  называются **главными моментами инерции тела**, при этом:

$$\mathbf{L}_\alpha = J_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad (15.12)$$

где  $\mathbf{L}_\alpha$  и  $\boldsymbol{\omega}_\alpha$  – составляющие момента импульса  $\mathbf{L}$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вдоль главных осей инерции ( $\alpha = x, y, z$ ).

Заметим, что в случае сферической симметрии абсолютно твердого тела  $J_x = J_y = J_z \equiv J$  и согласно (15.10) направления момента импульса тела и его угловой скорости вращения совпадают:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = J\boldsymbol{\omega}. \quad (15.13)$$

Поскольку в системе центра масс  $S'$  абсолютно твердое тело вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , его момент импульса относительно центра масс равен:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (15.14)$$

Здесь  $\mathbf{J}_0$  – тензор инерции абсолютно твердого тела относительно его центра масс.

Следовательно, выражение для момента импульса механической системы относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета равен:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{цм}} + \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (15.15)$$

**Момент импульса  $L_n$  механической системы относительно некоторой оси** – проекция на эту ось момента импульса относительно произвольной точки, лежащей на данной оси:

$$L_n = (\mathbf{nL}), \quad (15.16)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, задающий направление оси.

Найдем связь между моментом импульса тела  $L_n$  относительно некоторой оси в заданной системе отсчета и моментом импульса тела  $L_{0,n}$  относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси, в системе отсчета, связанной с центром масс. Умножая скалярно на единичный вектор  $\mathbf{n}$  левую и правую части соотношения  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{цм}} + \mathbf{L}_0$ , получаем:

$$L_n = L_{\text{цм},n} + L_{0,n}, \quad (15.17)$$

где  $L_{\text{цм},n}$  – момент импульса центра масс тела относительно заданной оси в лабораторной системе отсчета.

**Точка приложения силы** – материальная точка, на которую действует сила.

**Момент силы относительно точки  $M$**  – векторное произведение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки приложения силы на силу  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]. \quad (15.18)$$

**Момент силы относительно оси  $M_n$**  – проекция на эту ось момента силы относительно произвольной точки, лежащей на данной оси:

$$M_n = (\mathbf{nM}). \quad (15.19)$$

**Равнодействующая сил.** В ряде случаев, когда несколько сил действует на абсолютно твердое тело, их действие можно заменить действием одной равнодействующей силы. Это возможно, поскольку движение абсолютно твердого тела определяется в общем случае совокупностью двух уравнений – уравнением движения центра масс тела и уравнением моментов относительно некоторой точки, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета.

Понятие равнодействующей силы можно ввести только для совокупности сил, действующих на абсолютно твердое тело, если сумма этих сил не равна нулю и если существует точка пространства, относительно которой сумма моментов действующих на тело сил равна нулю.

**Равнодействующая  $F_p$  совокупности сил  $\{F_i\}$** , действующих на абсолютно твердое тело, – сила, равная сумме этой совокупности сил  $F_p = \sum_i F_i$ ; точка приложения равнодействующей силы совпадает с точкой, относительно которой сумма моментов этих сил равна нулю. Точка приложения равнодействующей силы не обязательно должна совпадать с одной из материальных точек тела, на которое действует совокупность сил.

Под **силой инерции, действующей на произвольно движущееся абсолютно твердое тело**, в дальнейшем понимается равнодействующая сил инерции для материальных точек этого тела (см. **Главу 9**) в неинерциальной системе отсчета, которая движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета. В этом случае равнодействующая сил инерции приложена к центру масс тела.

**Центр тяжести тела** – точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на материальные точки этого тела при его произвольной ориентации в однородном поле сил тяжести (например, вблизи земной поверхности). Центр тяжести тела определяется только распределением массы в этом теле и может не совпадать ни с одной из материальных точек данного тела.

**Уравнения движения абсолютно твердого тела** – уравнение движения центра масс (см. п.5.1 в **Главе 5**) и уравнение моментов для этого тела относительно инерциальной системы отсчета.

**Уравнение моментов (закон изменения момента импульса) для механической системы относительно точки** – скорость изменения момента импульса системы  $L$  относительно данной точки в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов внешних сил  $M^{\text{ex}}$ , действующих на систему:

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{ex}}, \quad (15.20)$$

где  $M^{\text{ex}} = \sum_i M_i^{\text{ex}} = \sum_i [r_i F_i^{\text{ex}}]$ .

**Уравнение моментов (закон изменения момента импульса) для механической системы относительно неподвижной оси** – скорость изменения момента импульса системы  $L_n$  относительно данной оси в инерциальной системе отсчета равна сумме моментов внешних сил  $M_n^{\text{ex}}$ , действующих на систему:

$$\frac{dL_n}{dt} = M_n^{\text{ex}}. \quad (15.21)$$

**Момент инерции тела относительно оси** – физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат расстояния их до оси:

$$J = \sum_i m_i r_i^2. \quad (15.22)$$

В случае непрерывного распределения в пространстве массы тела, расчет момента инерции тела сводится к вычислению интеграла:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (15.23)$$

где  $r$  – расстояние от элемента тела объемом  $dV$  и массой  $dm$ ,  $\rho$  – плотность тела.

**Теорема Гюйгенса – Штейнера** – момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела  $J_0$  относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (15.24)$$

Вычислим моменты инерции однородных тонкого стержня, цилиндра и шара относительно осей, проходящих через их центры масс.

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню, в соответствии с (15.23) равен:

$$J_{\text{ст}} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{12}, \quad (15.25)$$

где  $m$  – масса стержня,  $l$  – его длина,  $x$  – декартова координата материальной точки стержня с началом отсчета в центре стержня.



Момент инерции однородного цилиндра (диска) относительно его оси в соответствии с (15.23) равен:

$$J_{\text{ц}} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r d\varphi dr dz = \frac{mR^2}{2}, \quad (15.26)$$

где  $m$ ,  $R$  и  $L$  – масса, радиус и длина цилиндра,  $r$  и  $z$  – цилиндрические координаты материальной точки цилиндра.

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, в соответствии с (15.23) равен:

$$J_{\text{ш}} = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 \rho r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta = \frac{2}{5} mR^2, \quad (15.27)$$

где  $m$  и  $R$  – масса и радиус шара,  $r$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  – сферические координаты материальной точки шара.

### Плоское движение абсолютно твердого тела

Если в качестве оси вращения выбрать ось  $n$ , проходящую через центр масс абсолютно твердого тела, то его уравнениями движения будут:

- уравнение движения центра масс (см. п.5.1 в **Главе 5**)

$$m \mathbf{a}_{\text{цм}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}; \quad (15.28)$$

- уравнение моментов относительно оси  $n$ , проходящей через центр масс

$$J_{0,n} \frac{d\omega}{dt} = M_{0,n}^{\text{ex}}. \quad (15.29)$$

Здесь  $m$  – масса тела,  $\mathbf{a}_{\text{цм}}$  – ускорение центра масс тела,  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$  – сумма всех внешних сил, действующих на тело,  $J_{0,n}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения,  $\omega$  – угловая скорость вращения тела относительно этой оси,  $M_{0,n}^{\text{ex}}$  – сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

### Вращательное движение абсолютно твердого тела

В случае вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной относительно инерциальной системы отсчета оси уравнением движения тела будет **уравнение моментов** для этого тела относительно данной оси, которое принимает вид:

$$J_n \frac{d\omega}{dt} = M_n^{\text{ex}}, \quad (15.30)$$

где  $J_n$  – момент инерции тела относительно оси,  $\omega$  – угловая скорость вращения тела,  $M_n^{\text{ex}}$  – сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Заметим, что при рассмотрении плоского движения абсолютно твердого тела в ряде случаев удобно записывать уравнение моментов (15.30) относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения.

## 15.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач динамики твердого тела можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям.

а) определение углового ускорения при плоском движении твердого тела,

б) определение ускорения центра масс твердого тела при одновременном вращательном и поступательном плоском движении твердого тела,

в) определение сил взаимодействия между твердыми телами при их движении (силы трения, силы упругости).

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

### **I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой будет рассматриваться вращение тела (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить на чертеже все необходимые силы и кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения.
5. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.

**II. Записать полную систему уравнений по отношению к искомым величинам.**

1. Записать уравнения движения для тел системы в выбранной системе отсчета.
2. Записать уравнения моментов для тел системы относительно выбранных осей.
3. Записать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать моменты сил, действующих на тела системы.
5. Записать моменты инерции тел относительно выбранных осей вращения.
6. Записать уравнения кинематической связи.
7. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

**15.3. Примеры решения задач**

**Задача 15.1.** (*Плоское движение абсолютно твердого тела*). С наклонной поверхности клина с углом  $\alpha$  при вершине скатывается без проскальзывания однородный шар массой  $m$  и радиусом  $R$ . Найти ускорение  $a$  центра шара.

**Решение**

I. При самопроизвольном скатывании шара по наклонной поверхности клина в сторону его ребра движение шара является плоским, поскольку все его материальные точки движутся в параллельных плоскостях. Мгновенная ось вращения в данный момент времени проходит через точку М (см. рис. 15.2) соприкосновения шара с поверхностью параллельно ребру клина (перпендикулярно скорости центра масс шара).

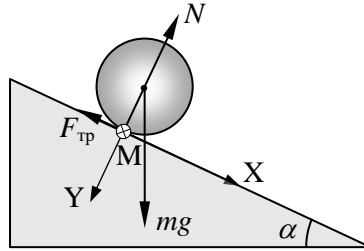


Рис. 15.2. Ориентация мгновенной оси вращения шара относительно выбранной системы отсчета.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с наклонной поверхностью, ось  $X$  декартовой системы координат которой направлена вдоль наклонной поверхности клина, а ось  $Y$  – перпендикулярно, причем плоскость  $XY$  параллельна плоскостям, в которых движутся материальные точки шара (рис. 15.2).

На шар в процессе движения действуют три силы – сила тяжести  $mg$ , сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$  (проскальзывания нет) и сила реакции опоры  $N$  (рис. 15.2).

II. Запишем уравнение вращательного движения (уравнение моментов (15.30)) для шара относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения (см. рис. 15.2), в лабораторной инерциальной системе отсчета:

$$J \frac{d\omega}{dt} = mgR \sin \alpha, \quad (15.31)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения шара,  $J$  – момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения. Моменты силы трения и силы нормальной реакции опоры относительно этой оси равны нулю.

Запишем также уравнение кинематической связи между ускорением центра масс  $a$  и угловым ускорением шара  $\frac{d\omega}{dt}$  (вследствие движения шара без проскальзывания):

$$a = R \frac{d\omega}{dt}. \quad (15.32)$$

Момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения найдем, используя теорему Гюйгенса-Штейнера (15.24):

$$J = J_0 + mR^2, \quad (15.33)$$

где  $J_0$  – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс (15.27), равный

$$J_0 = \frac{2}{5}mR^2. \quad (15.34)$$

III. Решая систему уравнений (15.31) – (15.33) относительно ускорения центра масс шара, получим:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{J_0}{mR^2}} g \sin \alpha. \quad (15.35)$$

Учитывая выражение (15.34) для момента инерции шара, получаем искомое ускорение центра шара:

$$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

Определим условия, при которых полученный результат является верным. Для движения шара по поверхности клина без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 4.1 в **Главе 4**) удовлетворяла неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (15.36)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент трения.

Модули сил трения и нормальной реакции опоры можно найти из уравнения движения шара, записанного в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  выбранной системы координат (см. рис. 15.2):

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (15.37)$$

$$0 = mg \cos \alpha - N. \quad (15.38)$$

Решая систему двух уравнений (15.37) – (15.38) и одного неравенства (15.36) с учетом найденного ускорения центра шара (15.35), получаем условие качения шара без проскальзывания по наклонной поверхности клина:

$$\text{tg } \alpha \leq \frac{7}{2} \mu.$$

**Ответ:**  $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$  при  $\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{7}{2}$ .

**Задача 15.2.** (Плоское движение абсолютно твердого тела). На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой  $m_1$  и на ней – однородный шар массой  $m_2$ . К доске приложили постоянную горизонтальную силу  $F$ . С какими ускорениями будут двигаться доска  $a_1$  и центр шара  $a_2$  в отсутствие скольжения между ними?

### Решение

I Введем лабораторную инерциальную систему отсчета, оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат которой направлены так, как показано на рис. 15.3. При движении шара по доске вдоль горизонтальной поверхности в направлении силы  $F$  движение шара является плоским.

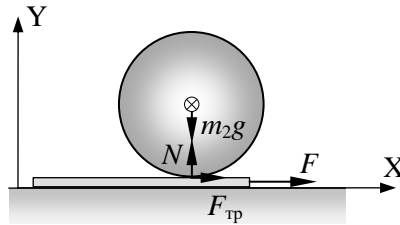


Рис. 15.3. Ориентация осей лабораторной системы координат.

В лабораторной системе отсчета движение шара будем рассматривать как суперпозицию его поступательного движения и вращения шара относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр масс.

II. Уравнение движения центра масс шара (совпадающего с его геометрическим центром) в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  лабораторной системы координат имеют вид:

$$m_2 a_2 = F_{\text{тр}}, \quad (15.39)$$

$$0 = N - m_2 g, \quad (15.40)$$

где  $F_{\text{тр}}$  – модуль силы трения покоя, действующей на шар со стороны доски,  $N$  – модуль силы нормальной реакции доски, действующей на шар.

Доска движется с ускорением  $a_1$  в направлении оси  $X$  под действием силы  $F$  и силы трения со стороны шара, модуль которой в соответствии с третьим законом Ньютона равен модулю  $F_{\text{тр}}$  силы трения покоя, действующей на шар со стороны доски.

Уравнение движения доски относительно лабораторной инерциальной системы отсчета в проекции на ось  $X$  имеет вид:

$$m_1 a_1 = F - F_{\text{тр}}. \quad (15.41)$$

Уравнение моментов (15.29) для шара запишем относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскостям движения всех материальных точек шара:

$$J_0 \beta = F_{\text{тр}} R, \quad (15.42)$$

где  $J_0$  – момент инерции шара относительно данной оси,  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение шара. В (15.42) учтено, что моменты сил тяжести и нормальной реакции доски равны нулю, поскольку линии их действия проходят через ось вращения.

Дополним систему уравнений движения шара и доски (15.39) – (15.42) уравнением кинематической связи, которое следует из условия отсутствия проскальзывания между шаром и доской:

$$a_2 = a_1 - \beta R. \quad (15.43)$$

Учтем также, что момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр масс (6.45) равен:

$$J_0 = \frac{2}{5} m R^2. \quad (15.44)$$

III. Решая систему уравнений (15.39), (15.41) – (15.44), получаем искомые ускорения доски и центра шара:

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2}, \quad (15.45)$$

$$a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2}. \quad (15.46)$$

Определим условия, при которых движение шара будет происходить без проскальзывания. Для движения шара по доске без проскальзывания необходимо, чтобы сила трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 4.1 в **Главе 4**) удовлетворяла неравенству:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (15.47)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент трения.

Модули сил трения и нормальной реакции опоры находим из уравнения движения шара, записанного в проекциях на оси X и Y выбранной системы координат (15.39) и (15.40) и подставляем в неравенство (15.47). В результате с учетом найденного ускорения центра шара (15.46) получим:

$$F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}.$$

**Ответ:**

$$a_1 = \frac{7F}{7m_1 + 2m_2} \text{ и } a_2 = \frac{2F}{7m_1 + 2m_2} \text{ при } F \leq \mu g \frac{7m_1 + 2m_2}{2}.$$

**Задача 15.3.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Система тел,

состоящая из двух грузов, связанных между собой с помощью невесомой нерастяжимой нити, и двух одинаковых блоков, изображена на рис. 15.4. Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массы грузов  $m_1$  и  $m_2$ , массы блоков  $M$  и их радиусы  $R$ , определить ускорения грузов  $a_1$  и  $a_2$ , а также разности сил натяжения нитей по обе стороны каждого из блоков. Трением в оси блока пренебречь.

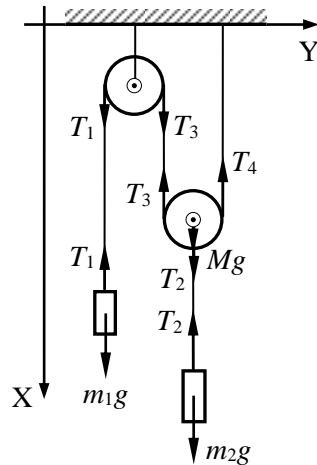


Рис. 15.4. Силы, действующие на грузы и блоки в выбранной декартовой системе координат.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с точкой подвеса оси левого блока, оси X и Y декартовой системы координат которой изображены на рис. 17.4. Выберем положительное направление оси вращения, перпендику-



лярной плоскости рисунка, как указано на рис. 15.4. В рассматриваемой системе оба груза и незакрепленный блок движутся поступательно вдоль оси X, при этом блоки вращаются вокруг собственных осей под действием сил натяжения нитей ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$ ). Поскольку массы блоков по условию задачи отличны от нуля, то силы натяжения нити слева и справа от блоков различны.

II. Запишем уравнения движения грузов и центра масс незакрепленного блока в проекции на ось X выбранной системы координат:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad (15.48)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad (15.49)$$

$$M a_2 = M g + T_2 - T_3 - T_4. \quad (15.50)$$

Уравнения моментов для вращающихся блоков относительно осей, проходящих через их центры масс (см. рис. 15.4), имеют вид:

$$J_0 \beta_1 = T_1 R - T_3 R, \quad (15.51)$$

$$J_0 \beta_2 = T_4 R - T_3 R, \quad (15.52)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – угловые ускорения блоков, моменты инерции  $J_0$  которых относительно указанных осей равны:

$$J_0 = \frac{MR^2}{2}. \quad (15.53)$$

Дополним полученную систему уравнений уравнениями кинематических связей, следующими из условий нерастяжимости нитей и отсутствия проскальзывания нитей по блокам:

$$a_2 = \beta_2 R, \quad (15.54)$$

$$a_1 = \beta_1 R, \quad (15.55)$$

$$2\beta_2 = -\beta_1. \quad (15.56)$$

В результате получена полная система уравнений для девяти неизвестных величин:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $J_0$ .

III. Используя уравнения кинематической связи (15.54) – (15.56), получим:

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad (15.57)$$

Выразим все силы натяжения нитей через ускорение  $a_1$ , используя уравнения (15.48), (15.49), (15.51) – (15.53) и (15.57):

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_1, \quad (15.58)$$

$$T_2 = m_2 g + \frac{m_2}{2} a_1, \quad (15.59)$$

$$T_3 = m_1 g - \left( m_1 + \frac{M}{2} \right) a_1, \quad (15.60)$$

$$T_4 = m_1 g - \left( m_1 + \frac{3}{4} M \right) a_1. \quad (15.61)$$

Подставляя (15.58) – (15.61) в уравнение (15.50), находим искомое ускорение первого груза в проекции на ось X:

$$a_1 = - \frac{4(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g. \quad (15.62)$$

Используя уравнение кинематической связи (15.62), получим искомое ускорение второго груза также в проекции на ось X:

$$a_2 = \frac{2(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g.$$

Искомые разности сил натяжения нитей с учетом (15.62) равны:

$$T_1 - T_3 = \frac{M}{2} a_1 = - \frac{2M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g.$$

$$T_3 - T_4 = \frac{M}{4} a_1 = - \frac{M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g.$$

$$\text{Ответ: } a_1 = - \frac{4(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g, \quad a_2 = \frac{2(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g,$$

$$T_1 - T_3 = - \frac{2M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g, \quad T_3 - T_4 = - \frac{M(M - 2m_1 + m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 7M} g.$$

**Задача 15.4.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). В системе тел, показанной на рис. 6.15, известны масса груза  $m_1$ , масса ступенчатого блока  $m_2$ , момент инерции блока  $J_0$  относительно его оси и радиусы ступеней блока  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорения груза  $a_1$  и центра масс блока  $a_2$  в лабораторной системе отсчета.

## Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с потолком (см. рис. 15.5), ось  $Y$  декартовой системы координат которой направим вертикально вниз. В зависимости от соотношения между массами тел системы блок может как в положительном, так и в отрицательном направлении оси  $Y$ , совершая при этом чисто вращательное движение относительно мгновенной оси вращения. Поскольку нить, прикрепленная к потолку, нерастяжима, то мгновенная ось вращения блока проходит через точку  $A$  соприкосновения блока и этой нити. При этом мгновенная ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа, а ее выбранное положительное направление указано на рис. 15.5.

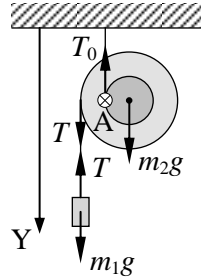


Рис. 15.5. Силы, действующие на ступенчатый блок и груз в выбранной декартовой системе координат.

II. Уравнение движения груза в проекции на ось  $Y$  (см. рис. 15.5) имеет вид:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T, \quad (15.63)$$

где  $T$  – сила натяжения нити, на которой подвешен груз.

Уравнение вращательного движения (уравнение моментов) блока запишем относительно мгновенной оси вращения в лабораторной инерциальной системе отсчета:

$$J\beta = m_2 g R - T(R_2 - R_1). \quad (15.64)$$

Здесь  $J$  – момент инерции блока относительно мгновенной оси,  $\beta$  – угловое ускорение блока. В (15.63) учтено, что момент силы натяжения  $T_0$  верхней нити, прикрепленной к потолку (рис. 15.5), относительно мгновенной оси вращения равен нулю.

Момент инерции блока относительно мгновенной оси выразим через заданный в условии задачи момент инерции  $J_0$  относительно его оси в соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера (15.24):

$$J = J_0 + m_2 R_1^2. \quad (15.65)$$

Дополним уравнения (15.63) – (15.65) уравнениями кинематической связи, которые следуют из условия нерастяжимости нитей:

$$a_1 = -\beta(R_2 - R_1), \quad (15.66)$$

$$a_2 = \beta R_1. \quad (15.67)$$

III. Решая систему уравнений (15.63) – (15.67), получаем выражения для искоемых ускорений груза  $a_1$  и центра масс блока  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} (R_2 - R_1), \quad (15.68)$$

$$a_2 = -\frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} R_1. \quad (15.69)$$

Как видим, ускорения груза и центра блока направлены противоположно при любом соотношении масс груза и блока (см. (15.68) и (15.69)), при этом каждое из тел изначально покоящейся системы может как опускаться, так и подниматься в зависимости от соотношения масс тел системы и радиусов ступеней блока.

Если  $\frac{m_1}{m_2} > \frac{R_1}{R_2 - R_1}$ , то груз будет опускаться с ускорением  $a_1$  (15.68), а центр блока будет подниматься с ускорением  $a_2 = -a_1 \frac{R_1}{R_2 - R_1}$ , модуль которого может быть как больше (при  $R_2 < 2R_1$ ), так и меньше ( $R_2 > 2R_1$ ) модуля ускорения груза  $a_1$ .

При обратном соотношении масс груз будет подниматься, а центр блока опускаться с тем же соотношением ускорений.

Заметим, что в частном случае равенства радиусов ступеней блока  $R_2 = R_1$  вне зависимости от соотношения масс груза и блока ускорение груза  $a_1$  равно нулю, а ускорение центра блока направлено вниз и равно

$a_2 = \frac{m_2 R_1^2}{m_2 R_1^2 + J_0} g$ . Для цилиндрического одно-

родного блока  $J_0 = \frac{1}{2} m_2 R_1^2$  и ускорение его центра будет равно

$$a_2 = \frac{2}{3} g.$$

**Ответ:** 
$$a_1 = \frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} (R_2 - R_1),$$

$$a_2 = - \frac{(m_1(R_2 - R_1) - m_2 R_1)g}{m_1(R_2 - R_1)^2 + m_2 R_1^2 + J_0} R_1$$

**Задача 15.5.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). На лежащую на горизонтальной поверхности катушку массой  $m = 100$  г и моментом инерции  $J_0 = 400$  г·см<sup>2</sup> относительно ее оси намотана невесомая нерастяжимая нить. Внешний радиус катушки равен  $R = 4$  см, а внутренний –  $r = 1$  см. К концу нити под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонтальной поверхности приложена сила  $F = 0.2$  Н (см. рис. 15.6).

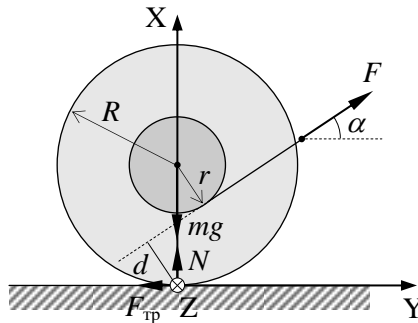


Рис. 15.6. Силы, действующие на катушку в выбранной декартовой системе координат.

Найти ускорение центра масс катушки  $\mathbf{a}$  для случая, когда катушка движется в горизонтальном направлении без проскальзывания и величину коэффициента трения, при котором такое движение возможно.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  декартовой системы координат которой направлены так, как показано на рис. 15.6. Поскольку движение катушки является плоским, то существует мгновенная ось вращения, направленная перпендикулярно параллельным плоскостям, в которых двигаются материальные точки катушки. В отсутствие проскальзывания мгновенная ось вращения проходит через точки соприкосновения катушки с горизонтальной поверхностью. Зададим в качестве положительного направления оси вращения положительное направ-

ление оси  $Z$  выбранной системы координат, начало отсчета которой совпадает с одной из точек соприкосновения (рис. 15.6).

II. Запишем систему уравнений движения катушки вместе с намотанной на нее невесомой нитью относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, в которую войдут уравнение вращательного движения вокруг мгновенной оси вращения и уравнение движения центра масс катушки в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  выбранной системы координат:

$$J \frac{d\omega}{dt} = Fd, \quad (15.70)$$

$$0 = N - mg + F \sin \alpha. \quad (15.71)$$

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (15.72)$$

Здесь  $J$  – момент инерции катушки относительно мгновенной оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость вращения катушки,  $d$  – кратчайшее расстояние от мгновенной оси вращения до линии действия силы  $F$  (плечо силы  $F$ ),  $F_{\text{тр}}$  – сила трения покоя, действующая на катушку со стороны горизонтальной поверхности,  $N$  – сила нормальной реакции опоры.

Уравнения (15.70) – (15.72) дополним уравнением кинематической связи (в силу отсутствия проскальзывания при движении катушки), теоремой Гюйгенса-Штейнера (15.24) для момента инерции  $J$  и очевидным геометрическим соотношением (см. рис. 15.6):

$$a = \frac{d\omega}{dt} R, \quad (15.73)$$

$$J = J_0 + mR^2. \quad (15.74)$$

$$\frac{d}{\cos \alpha} + \frac{r}{\cos \alpha} = R. \quad (15.75)$$

Для определения коэффициента трения, при котором возможно движение без проскальзывания, в соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 4.1 в Главе 4) запишем:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N. \quad (15.76)$$

III. Решая систему уравнений (15.70) – (15.75) относительно искомого ускорения центра масс катушки  $a$ , получаем:

$$a = \frac{FR^2}{J_0 + mR^2} \left( \cos \alpha - \frac{r}{R} \right). \quad (15.77)$$

Для отсутствия проскальзывания катушки относительно горизонтальной поверхности коэффициент трения должен удовлетворять неравенству:

$$\mu \geq \frac{F}{mg - F \sin \alpha} \cdot \frac{J_0 \cos \alpha + mrR}{J_0 + mR^2}.$$

Проанализируем полученный результат. В соответствии с (15.77) направление ускорения  $a$  определяется знаком выражения  $\left(\cos \alpha - \frac{r}{R}\right)$ . В том случае, когда точка пересечения линии действия силы  $F$  и оси  $Y$  лежит левее начала отсчета системы координат, катушка будет двигаться слева направо, поскольку  $\cos \alpha - \frac{r}{R} > 0$ . В противном случае качение будет происходить справа налево.

Подставляя численные значения физических величин, заданные в условии задачи, получим для ускорения центра масс катушки и коэффициента трения:

$$a = 0.4 \text{ м/с}^2, \mu \geq 0,075.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{FR^2}{J_0 + mR^2} \left(\cos \alpha - \frac{r}{R}\right) = 0.4 \text{ м/с}^2,$$

$$\mu \geq \frac{F}{mg - F \sin \alpha} \cdot \frac{J_0 \cos \alpha + mrR}{J_0 + mR^2} \geq 0,075.$$

**Задача 15.6.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Оси сплошного и тонкостенного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании  $\alpha$  (см. рис. 15.7). Радиусы цилиндров одинаковы и равны  $R$ , при этом масса сплошного цилиндра равна  $m_1$ , а тонкостенного –  $m_2$ . Найти угол  $\alpha$ , при котором цилиндры будут скатываться без проскальзывания.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с клином, оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат которой изображены на рис. 15.7. На цилиндры в процессе их плоского движения действуют силы тяжести  $m_1g$  и  $m_2g$ , силы

трения  $F_{\text{тр}1}$  и  $F_{\text{тр}2}$ , силы нормальной реакции опоры  $N_1$  и  $N_2$ , а также силы реакции штанги  $T$  (см. рис. 15.7).

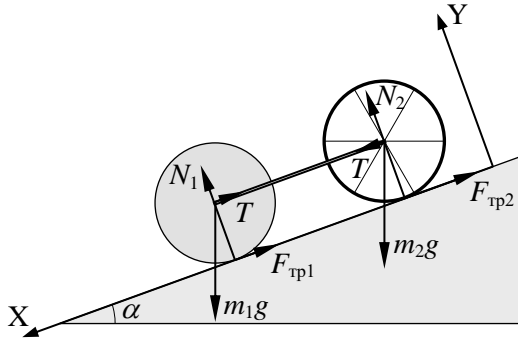


Рис. 15.7. Силы, действующие на цилиндры в выбранной декартовой системе координат.

II. Запишем уравнения движения центров масс цилиндров в проекции на оси  $X$  и  $Y$  выбранной системы координат:

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - T - F_{\text{тр}1}, \quad (15.78)$$

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha + T - F_{\text{тр}2}, \quad (15.79)$$

$$0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha, \quad (15.80)$$

$$0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha, \quad (15.81)$$

При записи уравнений (15.78) и (15.79) учтено, что силы реакции штанги  $T$ , действующие на цилиндры, равны по модулю. Это легко доказать, используя уравнение движения невесомой штанги в проекции на ось  $X$  и третий закон Ньютона. Ускорения центров масс  $a$  цилиндров также равны, поскольку штангу считаем абсолютно твердым телом.

Уравнения моментов для цилиндров относительно осей вращения, проходящих через их центры масс, имеют вид (см. (15.29)):

$$J_1 \beta = F_{\text{тр}1} R, \quad (15.82)$$

$$J_2 \beta = F_{\text{тр}2} R. \quad (15.83)$$

Здесь  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции сплошного и тонкостенного цилиндров относительно осей, проходящих через их центры масс соответственно;  $\beta$  – угловое ускорение, одинаковое для сплошного и тонкостенного цилиндров в силу уравнения кинематической



связи, которое следует из условия качения цилиндра без проскальзывания:

$$\beta R = a. \quad (15.84)$$

Воспользуемся известными выражениями для моментов инерции однородных сплошного (6.44) и тонкостенного цилиндров относительно осей, проходящих через их центры масс:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}, \quad (15.85)$$

$$J_2 = m_2 R^2. \quad (15.86)$$

В соответствии с законом Амонтона–Кулона (см. п. 4.1 в Главе 4) для сил трения покоя, действующих на цилиндры, справедливы неравенства:

$$F_{\text{тр}1} \leq \mu N_1. \quad (15.87)$$

$$F_{\text{тр}2} \leq \mu N_2. \quad (15.88)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (15.78) – (15.86), выразим силы нормальной реакции наклонной поверхности клина и сил трения покоя со стороны этой поверхности на оба цилиндра через величины, заданные в условии задачи, и искомый угол при основании клина  $\alpha$ :

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha, \quad (15.89)$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha, \quad (15.90)$$

$$F_{\text{тр}1} = \frac{m_1 + m_2}{3m_1 + 4m_2} m_1 g \sin \alpha, \quad (15.91)$$

$$F_{\text{тр}2} = \frac{2(m_1 + m_2)}{3m_1 + 4m_2} m_2 g \sin \alpha. \quad (15.92)$$

Подставляя выражения (15.89) – (15.92) в неравенства (15.87) и (15.88), получим условия, при которых качение цилиндров происходит без проскальзывания:

$$tg \alpha \leq \mu \frac{3m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.93)$$

$$tg \alpha \leq \mu \frac{3m_1 + 4m_2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (15.94)$$

Поскольку правая часть неравенства (15.94) меньше правой части неравенства (15.93) при любых значениях коэффициента

трения  $\mu$  и масс цилиндров  $m_1$  и  $m_2$ , то искомая область значений угла при основании клина  $\alpha$ , при которых цилиндры будут скатываться без проскальзывания, определяется неравенством (15.94).

В соответствии с (15.94) область возможных значений угла  $\alpha$  однозначно определяется отношением масс цилиндров при заданном значении коэффициента трения  $\mu$ :

$$\alpha \leq \arctg \left( \mu \frac{3m_1/m_2 + 4}{2(m_1/m_2 + 1)} \right).$$

На рис. 15.8 изображен график зависимости предельной величины  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} / \mu$  от отношения массы сплошного цилиндра к массе тонкостенного  $m_1 / m_2$ .

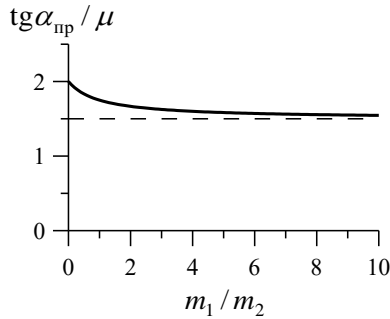


Рис. 15.8. График зависимости предельной величины  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} / \mu$  от отношения массы сплошного цилиндра к массе тонкостенного  $m_1 / m_2$ .

Как видим, область значений угла  $\alpha$ , при которых цилиндры будут скатываться без проскальзывания, ограничена сверху предельным значением  $\alpha_{\text{пр}}$ , которое равно  $\arctg(2\mu)$  при  $m_1 \ll m_2$  и асимптотически стремится к значению  $\arctg\left(\frac{3}{2}\mu\right)$  при неограниченном увеличении отношения масс цилиндров  $m_1 / m_2$

**Ответ:**  $\alpha \leq \arctg \left( \mu \frac{3m_1/m_2 + 4}{2(m_1/m_2 + 1)} \right).$

**Задача 15.7.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Цилиндрическая шайба радиусом  $r = 3$  см касается борта гладкой горизонтальной площадки, имеющей форму круга радиусом  $R = 10$  м. Шайбе придали скорость  $v_0 = 30$  м/с, направленную вдоль борта. Коэффициент трения между бортом и шайбой равен  $\mu = 0,1$ . Определить модуль скорости шайбы  $v_k$  после того, как прекратится проскальзывание между бортом и шайбой, а также интервал времени  $t_k$ , через который это произойдет.

### Решение

I. Движение шайбы рассматриваем относительно лабораторной инерциальной системы отсчета, жестко связанной с горизонтальной площадкой. Уравнение движения центра масс шайбы будем записывать в проекциях на нормальную  $n$  и тангенциальную  $\tau$  оси (см. п. 1.1. Теоретический материал в **Главе 1**), связанные с центром движущейся шайбы (см. рис. 15.19).

При плоском движении шайбы вдоль борта площадки на нее действуют сила нор-

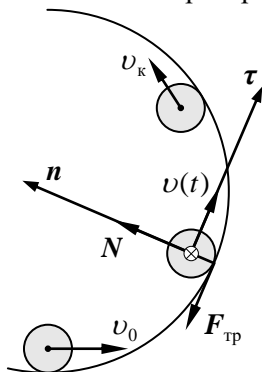


Рис. 15.9. Силы, действующие на шайбу в выбранной системе координат.

мальной реакции  $N$  и сила трения  $F_{\text{тр}}$  со стороны борта. При этом момент силы трения относительно оси, проходящей через центр масс шайбы, вызывает ее вращение вокруг указанной оси. Скорость центра масс шайбы будет уменьшаться, а угловая скорость ее вращения – увеличиваться, до тех пор, пока не прекратится проскальзывание шайбы о борт площадки. Начиная с этого момента сила трения шайбы о борт равна нулю, а модуль скорости центра масс шайбы не изменяется.

II. Запишем уравнение движения центра масс шайбы относительно лабораторной системы отсчета в проекциях на выбранные нормальную  $n$  и тангенциальную  $\tau$  оси:

$$ma_n = N, \quad (15.95)$$

$$ma_\tau = -F_{\text{тр}}. \quad (15.96)$$

Нормальная и тангенциальная проекции ускорения центра масс шайбы определяются соотношениями (см. п. 1.1. Теоретический материал в **Главе 1**):

$$a_n = \frac{v^2}{R-r}, \quad (15.97)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (15.98)$$

где  $v$  – модуль скорости центра масс шайбы и  $(R-r)$  – радиус кривизны его траектории.

Уравнение моментов (15.29) для вращающейся шайбы относительно оси, проходящей через ее центр масс, имеет вид:

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} r. \quad (15.99)$$

Момент инерции шайбы относительно указанной оси (15.26) равен:

$$J_0 = \frac{mr^2}{2}. \quad (15.100)$$

На начальном этапе ( $t < t_k$ ) шайба движется с проскальзыванием и на нее в соответствии с законом Амонтона – Кулона (см. п. 4.1 в **Главе 4**) действует сила трения скольжения, равная:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (15.101)$$

Запишем уравнение кинематической связи между угловой скоростью вращения и скоростью центра масс шайбы после прекращения проскальзывания (при  $t \geq t_k$ ):

$$v = r\omega. \quad (15.102)$$

III. Воспользовавшись соотношениями (15.95) – (15.98) и (15.101), получим дифференциальное уравнение для модуля скорости центра масс шайбы на начальном этапе движения шайбы ( $t < t_k$ ):

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R-r}. \quad (15.103)$$

Решаем уравнение (15.103) с помощью метода разделения переменных:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R-r} \int_0^t dt, \quad (15.104)$$

$$v(t) = v_0 \frac{R-r}{R-r+v_0\mu t}. \quad (15.105)$$

Связь угловой скорости вращения шайбы с модулем скорости ее центра масс получаем из (15.95) – (15.101):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\mu}{r(R-r)} v^2, \quad (15.106)$$

Подставляя (15.105) в (15.106), получаем:

$$\omega(t) = \frac{2\mu v_0^2 (R-r)}{r} \int_0^t \frac{1}{(R-r+v_0\mu t)^2} dt. \quad (15.107)$$

В результате угловая скорость шайбы на начальном этапе ее движения равна:

$$\omega(t) = \frac{2v_0^2\mu t}{r(R-r+v_0\mu t)}. \quad (15.108)$$

В соответствии с (15.105) модуль скорости центра масс шайбы уменьшается от значения  $v_0$  (при  $t=0$ ), в то время как угловая скорость вращения шайбы увеличивается по закону (15.108). В момент прекращения проскальзывания (через интервал времени  $t_k$  после сообщения шайбе скорости  $v_0$ ) угловая скорость вращения шайбы и модуль скорости ее центра масс связаны уравнением кинематической связи (15.104).

На рис. 15.10 представлены зависимости модуля скорости центра масс шайбы  $v$  и произведения угловой скорости вращения шайбы на ее радиус  $\omega r$ .

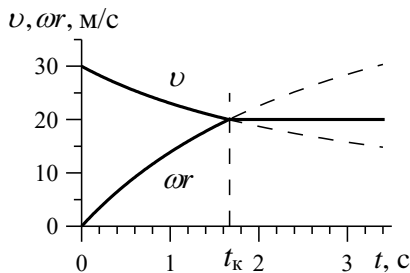


Рис. 15.10. Зависимости модуля скорости центра масс шайбы  $v$  и произведения угловой скорости вращения шайбы на ее радиус  $\omega r$ .

Графики представленных зависимостей пересекаются в момент времени  $t_k$  (см. рис. 15.10). Подставляя (15.105) – (15.108) в уравнение (15.104) получаем значение интервала времени  $t_k$ :

$$t_k = \frac{R-r}{2\mu v_0}. \quad (15.109)$$

После прекращения проскальзывания при дальнейшем движении шайбы модуль скорости ее центра масс не меняется и равен:

$$v_k \equiv v(t=t_k) = \frac{2}{3}v_0. \quad (15.110)$$

Как видим, искомый модуль скорости шайбы определяется только ее начальной скоростью  $v_0$  и не зависит от других величин, заданных в условии задачи.

Подставляя заданные численные значения в (15.109) и (15.110), находим искомые величины:

$$t_k \cong 1,66 \text{ с}, \quad v_k = 20 \text{ м/с}.$$

$$\text{Ответ: } t_k = \frac{R-r}{2\mu v_0} \cong 1,66 \text{ с},$$

$$v_k = \frac{2}{3}v_0 = 20 \text{ м/с}.$$

**Задача 15.8.** (Динамика плоско-го движения абсолютно твердого тела). Система состоит из ступенчатого блока (с радиусами  $r$  и  $R = 2r$  и моментом инерции  $J_0$  относительно его оси), подвижного блока массой  $2m$  и двух грузов массами  $m$  и  $4m$ . Тела связаны легкими нерастяжимыми нитями так, как показано на рисунке. Определить ускорение груза массой  $m$ . Трением в оси блока, сопротивлением воздуха и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

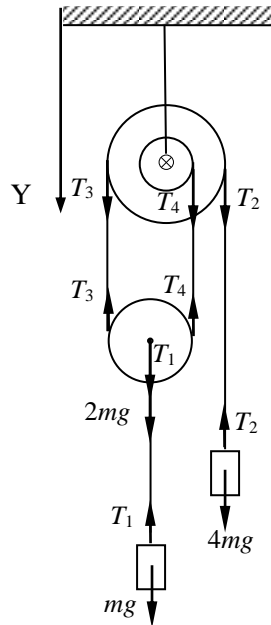


Рис. 15.11. Силы, действующие на грузы и блоки в выбранной декартовой системе координат.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с потолком (см. рис. 15.11), ось  $Y$  декартовой системы координат которой направим вертикально вниз.

Выберем положительное направление оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, как указано на рис. 15.11. В рассматриваемой системе оба груза и незакрепленный блок движутся поступательно вдоль оси  $Y$ , при этом блоки вращаются вокруг собственных осей. Поскольку массы блоков по условию задачи отличны от нуля, то силы натяжения нити слева и справа от блоков различны.

II. Запишем уравнения движения двух грузов и подвижного блока в проекции на ось  $Y$ :

$$ma_1 = mg - T_1, \quad (15.111)$$

$$4ma_2 = 4mg - T_2, \quad (15.112)$$

$$2ma_1 = 2mg + T_1 - T_3 - T_4. \quad (15.113)$$

Уравнения моментов для двух блоков в проекции на ось вращения имеют следующий вид:

$$J_0 \ddot{\alpha} = T_2 R - T_3 R + T_4 r, \quad (15.114)$$

$$\frac{1}{2} 2m \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \ddot{\beta} = T_3 \frac{R+r}{2} - T_4 \frac{R+r}{2}, \quad (15.115)$$

где  $\ddot{\alpha}$  и  $\ddot{\beta}$  – угловые ускорения ступенчатого и подвижного блоков соответственно.

Запишем уравнения кинематической связи:

$$a_2 = \ddot{\alpha} R, \quad (15.116)$$

$$a_1 + \frac{R-r}{2R} a_2 = 0, \quad (15.117)$$

$$a_1 + \ddot{\beta} \frac{R+r}{2} = \ddot{\alpha} r. \quad (15.118)$$

III. Из уравнений кинематической связи (15.116) – (15.118) с учетом условия задачи  $R = 2r$  получаем:

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\beta}, \quad a_2 = 2\ddot{a}r, \quad a_1 = -\frac{\ddot{a}r}{2}.$$

Из (15.111) – (15.113), (15.115) с использованием (15.116) – (15.117) выразим силы натяжения нитей через  $\ddot{\alpha}$ :

$$T_1 = mg + \frac{m\ddot{a}r}{2}, \quad T_2 = 4mg - 8m\ddot{a}r, \quad T_3 = \frac{3}{2}mg + \frac{3}{2}m\ddot{a}r, \\ T_4 = \frac{3}{2}mg.$$

Подставляя полученные соотношения в (15.114), получим угловое ускорение

$$\ddot{\alpha} = \frac{13mgr}{2J_0 + 38mr^2}.$$

Используя уравнение кинематической связи, получаем искомое ускорение груза массой  $m$ :

$$a_1 = -\frac{13mgr^2}{4J_0 + 76mr^2}.$$

**Ответ:**  $a_1 = -\frac{13mgr^2}{4J_0 + 76mr^2}.$

#### 15.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 15.4.1** ([1], 6, с. 228). Тонкостенный цилиндр массой  $m$  скатывается без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании  $\alpha$  (см. рис. 15.12). Найти ускорение  $a$  оси цилиндра и силу трения, действующая на него со стороны наклонной поверхности клина.

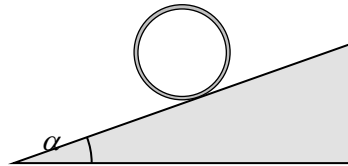


Рис. 15.12. Тонкостенный цилиндр, скатывающийся по наклонной поверхности клина.



$$\text{Ответ: } a = \frac{1}{2} g \sin \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} mg \sin \alpha.$$

**Задача 15.4.2** ([1], 3, с. 227). Однородный диск радиусом  $R$  раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega$  и положили на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения между поверхностью и диском равен  $\mu$ . Через какое время  $\tau$  угловая скорость вращения уменьшится в  $n = 2$  раза?

$$\text{Ответ: } \tau = \frac{3}{8} \cdot \frac{\omega R}{\mu g}.$$

**Задача 15.4.3** ([1], 7, с. 228). Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомым стержнем. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной поверхности клина с углом при основании  $\alpha$  (см. рис. 15.13). Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого цилиндра  $m$ . Определить силу  $F$  реакции стержня.

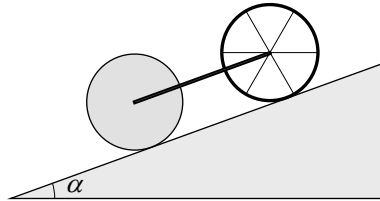


Рис. 15.13. Цилиндры, скатывающиеся по наклонной поверхности.

$$\text{Ответ: } F = mg \sin \alpha / 7.$$

**Задача 15.4.4** ([1], 8, с. 228). Сплошному однородному цилиндру массой  $m$  и радиусом  $R$  сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью  $\omega$ . Затем положили его боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. На какое расстояние переместится цилиндр за время, в течение которого движение цилиндра происходило со скольжением. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндром равен  $\mu$ .

$$\text{Ответ: } \Delta x = \frac{\omega^2 R^2}{18\mu g}.$$

**Задача 15.4.5** ([1], 9, с. 228). Два тела массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через однородный блок массой  $m$  (см. рис. 15.14). Коэффициент трения между первым телом и горизонтальной поверхностью равен  $\mu$ . В процессе движения тел не происходит проскальзывания нити по поверхности блока. Найти ускорение второго тела, пренебрегая трением в оси блока.

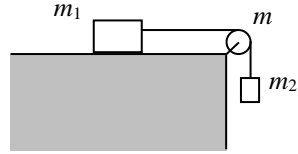


Рис. 15.14. Два тела, соединенные нитью, перекинутой через блок.

$$\text{Ответ: } a = g \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m/2} \text{ при } m_2 > \mu m_1;$$

$$a = 0 \text{ при } m_2 \leq \mu m_1.$$

**Задача 15.4.6** ([1], 11, с. 230). Система тел, состоящая из груза и двух одинаковых блоков, изображена на рис. 15.15. Ось левого блока закреплена, а правый блок свободно лежит на нити. При движении тел системы не происходит проскальзывания нити относительно поверхностей блоков. Считая заданными массу груза  $m$ , массы блоков  $M$  и их радиусы  $R$ , определить ускорение груза  $a$ . Трением в оси блока пренебречь.

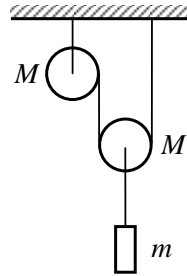


Рис. 15.15. Система тел, состоящая из груза и двух блоков.

$$\text{Ответ: } a = \frac{m + M}{m + \frac{7}{2}M} g.$$

**Задача 15.4.7** ([2], 315). Представьте себе, что груз  $P$  (см. условие задачи 17.4.7) состоит из двух одинаковых частей, связанных нитью. Определить натяжение этой нити  $T$ .

$$\text{Ответ: } T = \frac{Mg}{4(1 + Mg/2P)}.$$

**Задача 15.4.8** ([2], 314). Однородный цилиндр массой  $M$  и радиусом  $R$  вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза весом  $P$ , прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр (рис. 15.16). Найти угол  $\varphi$  поворота цилиндра в зависимости от времени, если  $\varphi = 0$  при  $t = 0$ .

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{gt^2}{2R(1 + Mg/2P)}.$$

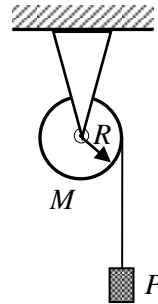


Рис. 15.16. Система тел, состоящая из груза и однородного цилиндра.

**Задача 15.4.9** ([2], 319). Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображен на рис. 15.17. На валик радиусом  $r$  наглухо насажен сплошной диск радиусом  $R$  и массой  $M$ . Валик и диск сделаны из одного материала, причем выступающие из диска части оси имеют массу  $m$ . К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается, а затем предоставляют диску свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

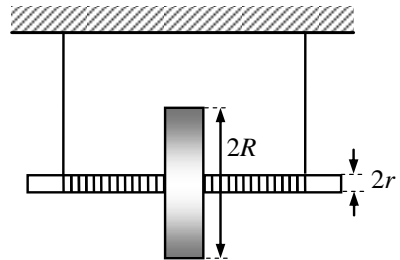


Рис. 15.17. Диск Максвелла.

$$\text{Ответ: } a = \frac{2(M+m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M+m)r^2} g.$$

**Задача 15.4.10** ([2], 321). На горизонтальную неподвижную ось насажен блок, представляющий собой сплошной цилиндр массой  $M$ . Через него перекинута невесомая веревка, на концах которой висят две обезьяны массой  $m$  каждая. Первая обезьяна начинает подниматься с ускорением  $a$  относительно веревки. Определить, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат будет двигаться вторая обезьяна.

$$\text{Ответ: } a_2 = \frac{2ma}{M + 4m}.$$

**Задача 15.4.11** ([2], 323). С каким ускорением  $a$  будет опускаться катушка с массой  $M$  и моментом инерции  $J$  относительно оси симметрии, если она подвешена аналогично диску с валиком в задаче 17.4.9 (рис. 15.18)? На катушку намотаны еще две нити, к которым подвешен груз массой  $m$ . Определить натяжения нитей.

$$\text{Ответ: } a = \frac{M + 2m}{4m + M + J/r^2} g,$$

$$T_1 = \left( 2m + \frac{J}{r^2} \right) a - mg, \quad T_2 = m(g - 2a).$$

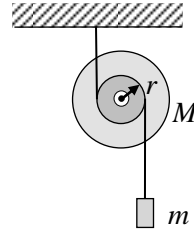


Рис. 15.18. Катушка и подвешенный к ней груз.

**Задача 15.4.12** ([3], 1.289). Горизонтальный тонкий однородный стержень АВ массой  $m$  и длиной  $l$  может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец А. В некоторый момент на конец В начала действовать постоянная сила  $F$ , которая все время перпендикулярна первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота  $\varphi$  из начального положения.

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{6F \sin \varphi / ml}.$$

## ГЛАВА 16

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.  
ЧАСТЬ 2

## 16.1. Теоретический материал

**Тензор инерции абсолютно твердого тела и его свойства:**

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор и  $x_i, y_i, z_i$  – координаты  $i$ -й материальной точки массой  $m_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  – ее скорость.

**Осевые моменты инерции.** Диагональные элементы тензора инерции  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  называются *осевыми моментами инерции*.

Осевые моменты инерции в соответствии с определением являются моментами инерции тела относительно соответствующих осей координат.

**Центробежные моменты инерции.** Недиагональные элементы тензора инерции  $J_{xy} = J_{yx}$ ,  $J_{xz} = J_{zx}$ ,  $J_{yz} = J_{zy}$  называются *центробежными моментами инерции*.

**Главные оси и моменты инерции.** Поскольку тензор инерции тела является симметричным тензором, он обладает *главными осями инерции*, при записи в которых он диагонализуется:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

В этом случае центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  называются *главными моментами инерции тела*, при этом:

$$L_\alpha = J_\alpha \omega_\alpha,$$

где  $L_\alpha$  и  $\omega_\alpha$  – составляющие момента импульса  $L$  и угловой скорости  $\omega$  вдоль главных осей инерции ( $\alpha = x, y, z$ ).

**Равнодействующая совокупности сил.** *Равнодействующая  $F_p$  совокупности сил  $\{F_i\}$ , действующих на абсолютно твердое тело, – сила, равная сумме этой совокупности сил  $F_p = \sum_i F_i$ ; точка*

приложения равнодействующей силы совпадает с точкой, относительно которой сумма моментов этих сил равна нулю. Точка приложения равнодействующей силы не обязательно должна совпадать с одной из материальных точек тела, на которое действует совокупность сил.

**Сила инерции, действующая на произвольно движущееся абсолютно твердое тело** – равнодействующая сил инерции для материальных точек этого тела (см. п.10.1 в **Главе 10**) в неинерциальной системе отсчета.

В случае поступательного движения неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной равнодействующая сил инерции приложена к центру масс тела.

**Центр тяжести тела** – точка приложения равнодействующей сил тяжести (см. п.4.1 в **Главе 4**), действующих на материальные точки этого тела при его произвольной ориентации в однородном поле сил тяжести (например, вблизи земной поверхности). Центр тяжести тела определяется только распределением массы в этом теле и может не совпадать ни с одной из материальных точек данного тела.

## 16.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач динамики твердого тела можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям.

а) определение углового ускорения при плоском движении твердого тела,

б) определение ускорения центра масс твердого тела при одновременном вращательном и поступательном плоском движении твердого тела,

в) определение сил взаимодействия между твердыми телами при их движении (силы трения, силы упругости).

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой будет рассматриваться вращение тела (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить на чертеже все необходимые силы и кинематические характеристики системы.
4. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения.
5. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.

**II. Записать полную систему уравнений по отношению к искомым величинам.**

1. Записать уравнения движения для тел системы в выбранной системе отсчета.
2. Записать уравнения моментов для тел системы относительно выбранных осей.
3. Записать законы, описывающие индивидуальные свойства сил.
4. Записать моменты сил, действующих на тела системы.
5. Записать моменты инерции тел относительно выбранных осей вращения.
6. Записать уравнения кинематической связи.
7. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.

2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 16.3. Примеры решения задач

**Задача 16.3.1.** (Динамика вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси). Однородный диск радиусом  $R$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$ , осторожно положили на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения  $\mu$ , так, что поверхность диска соприкасается с горизонтальной поверхностью. Определите время  $\tau$ , за которое диск полностью остановится.

#### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с горизонтальной п. Ось  $Z$  цилиндрической системы координат направим перпендикулярно плоскости диска вдоль оси вращения цилиндра (см. рис. 16.1).

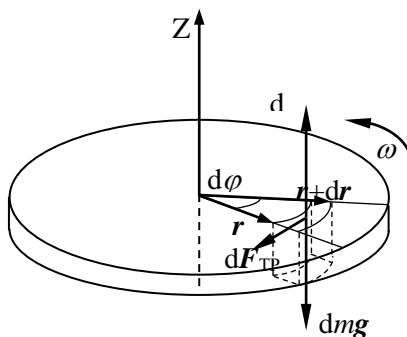


Рис. 16.1. Силы, действующие на элемент диска в выбранной декартовой системе координат.

Выделим на плоскости цилиндра элемент объема диска, ограниченный радиус-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$  и углом  $d\varphi$  (рис. 16.1). Будем считать, что масса диска равна  $m$ .

II. Уравнение моментов для диска относительно оси вращения, проходящей через центр масс диска, (см. рис. 16.1), имеет вид:



$$J_0 \beta = -M_{\text{тр}}, \quad (16.1)$$

где  $J_0$  – момент инерции диска относительно оси вращения,  $\beta$  – угловое ускорение,  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения относительно оси вращения.

Для определения момента сил трения относительно оси вращения рассмотрим выделенный элемент объема диска. На выделенный элемент действуют сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения скольжения. Запишем уравнение движения этого элемента в проекции на ось  $Z$  выбранной системы координат:

$$0 = dN - dm g .$$

Сила тяжести, действующая на выбранный элемент, определяется следующим образом:

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\varphi . \quad (16.2)$$

Момент сил трения относительно оси вращения, действующий на выделенный элемент объема диска, определяется следующим образом:

$$dM_{\text{тр}} = dF_{\text{тр}} r . \quad (16.3)$$

Используя закон Амотона – Кулона, запишем:

$$dF_{\text{тр}} = \mu dN . \quad (16.4)$$

Дополним полученную систему уравнений уравнением для определения момента инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр масс диска перпендикулярно его плоскости:

$$J_0 = \frac{MR^2}{2} . \quad (16.5)$$

Для определения времени вращения диска запишем зависимость угловой скорости от времени:

$$\omega = \omega_0 + \beta t .$$

III. Из уравнений (16.1) – (16.4) получим:

$$dM_{\text{тр}} = \mu \frac{mg}{\pi R^2} r^2 dr d\varphi . \quad (16.6)$$

Определим момент силы трения относительно оси вращения, проинтегрировав полученное выражение (16.6):

$$M_{\text{тр}} = \mu \frac{mg}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \mu mg R.$$

Подставив выражение для момента сил трения в уравнение моментов (16.1), с учетом (16.4), определим угловое ускорение диска:

$$\beta = -\frac{4\mu g}{3R}.$$

С учетом полученного выражения для углового ускорения закон изменения угловой скорости диска имеет вид:

$$\omega = \omega_0 - \frac{4\mu g}{3R} t.$$

Тогда искомое время вращения диска определим из условия равенства нулю угловой скорости в момент времени  $\tau$ .

$$\tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$$

**Ответ:**  $\tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$

**Задача 16.3.2.** (Расчет момента инерции абсолютно твердого тела относительно оси вращения). Рассчитать момент инерции  $J$  тонкой прямоугольной пластинки массой  $m$  размером  $a \times b$  относительно оси  $O_1O_2$ , проходящей через одну из вершин пластинки перпендикулярно ее плоскости (рис. 16.2).

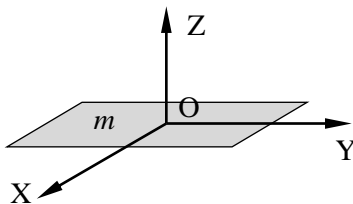


Рис. 16.2. Ориентация пластинки относительно осей выбранной декартовой системы координат.

### Решение

I. Для нахождения момента инерции пластинки выберем декартову систему координат, начало которой совпадает с центром масс пластинки (рис. 16.2).

II. Для решения задачи сначала определим момент инерции пластинки относительно оси  $Z$ , проходящей через центр масс. Для этого воспользуемся теоремой, связывающей моменты инерции абсолютно твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку:

$$J_z = J_x + J_y \quad (16.7)$$

Для этого определим моменты инерции пластинки относительно осей  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат. Для нахождения момента инерции пластинки относительно, например, оси  $X$ , представим пластинку как совокупность тонких однородных стержней массой  $dm$  как показано на рис. 16.3. Момент инерции стержня относительно  $X$  равен:

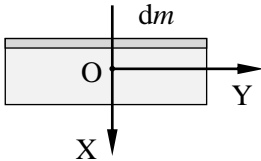


Рис. 16.3. К расчету момента инерции  $J_x$  пластинки относительно оси  $X$ .

$$dJ_x = \frac{1}{12} dm b^2 \quad (16.8)$$

Аналогичным образом можно разбить пластинку на совокупность тонких однородных стержней, ориентированных вдоль оси  $X$ . Момент инерции каждого из стержней относительно, оси  $Y$  равен

$$dJ_y = \frac{1}{12} dm a^2 \quad (16.9)$$

Для определения момента инерции пластинки относительно оси  $O_1O_2$  воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера:

$$J = J_z + md^2, \quad (16.10)$$

где  $d$  – расстояние от центра масс пластинки до ее вершины.

III. Моменты инерции пластинки относительно осей  $X$  и  $Y$  определим интегрируя соотношения (16.8) и (16.9):

$$J_x = \int_0^m \frac{1}{12} b^2 dm = \frac{mb^2}{12},$$

$$J_y = \int_0^m \frac{1}{12} a^2 dm = \frac{ma^2}{12}.$$

Используя (16.7), получим:

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

Поскольку  $d = \frac{a^2 + b^2}{4}$ , то согласно (16.10) искомый момент инерции равен:

$$J = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} + m \left( \frac{a^2 + b^2}{4} \right) = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}.$$

$$\text{Ответ: } J = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}.$$

**Задача 16.3.3.** (Расчет момента инерции абсолютно твердого тела относительно оси вращения). Прямой круглый однородный конус имеет массу  $m$  и радиус основания  $R$ . Определить момент инерции  $J$  конуса относительно его оси.

### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с основанием конуса. Ось  $Z$  декартовой системы координат направим вдоль оси конуса (рис. 16.4).

II, III. Для расчета момента инерции конуса  $J$  представим конус как совокупность дисков толщиной  $dz$ . Момент инерции диска равен:

$$dJ = \frac{1}{2} dm r^2,$$

где  $dm$  – масса диска,  $r$  – его радиус. Поскольку

$$r = \frac{R}{H} z,$$

и

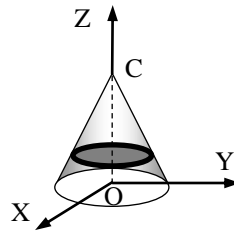


Рис. 16.4. К вопросу о расчете момента инерции конуса относительно оси  $Z$ .

$$dm = \rho \pi r^2 dz,$$

момент инерции диска равен

$$dJ = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left( \frac{R}{H} z \right)^4 dz. \quad (16.11)$$

Проинтегрировав соотношение (16.11), получим:

$$J = \int_0^H \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left( \frac{R}{H} \right)^4 \frac{H^5}{5} = \frac{\pi \rho R^4 H}{10}. \quad (16.12)$$

Выразим плотность материала, из которого сделан конус, используя величину объема конуса  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ :

$$\rho = \frac{3m}{\pi R^2 H}. \quad (16.13)$$

Подставив (16.13) в (16.12), определим искомый момент инерции конуса:

$$J = \frac{3mR^2}{10}.$$

**Ответ:**  $J = \frac{3mR^2}{10}$

**Задача 16.3.4.** (Расчет элементов тензора инерции абсолютно твердого тела). Тонкая палочка длиной  $L$  и массой  $m$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $OO_1$ . Угол между палочкой и осью вращения равен  $\alpha$  (см. рис. 16.5). Определить момент импульса палочки  $L_\xi$  относительно оси вращения и  $L$  относительно точки  $O$ , а также определить момент инерции палочки относительно оси вращения  $J_\xi$  и получить элементы тензора инерции  $\mathbf{J}$  относительно указанных на рис.16.4 осей  $X, Y, Z$  декартовой системы координат, жестко связанной с палочкой.

### Решение

I. Выберем систему отсчета, жестко связанную с палочкой, ось  $X$  декартовой системы координат которой направлена вдоль палочки, ось  $Z$  перпендикулярно плоскости рисунка (см. рис.16.5), как

это предложено в условии задачи. Введем также дополнительную ось  $\xi$ , совпадающую с осью вращения  $OO_1$ .

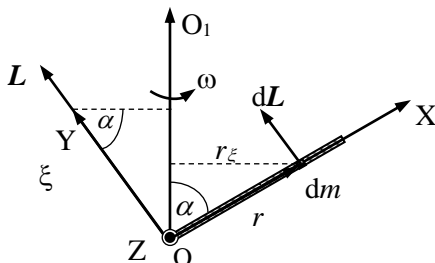


Рис. 16.5. Момент импульса палочки относительно осей декартовой системы координат.

II, III. Для определения момента инерции палочки относительно оси  $\xi$  выделим малый элемент палочки длиной  $dx$  и массой  $dm$ :

$$dm = \frac{m}{l} dx. \quad (16.14)$$

Тогда момент инерции элемента палочки  $dm$  относительно оси  $\xi$  будет равен:

$$dJ_{\xi} = r_{\xi}^2 dm, \quad (16.15)$$

где  $r_{\xi}$  – расстояние от выбранного элемента до оси вращения  $\xi$ , равное

$$r_{\xi} = x \sin \alpha. \quad (16.16)$$

Момент инерции палочки  $J_{\xi}$  относительно оси  $\xi$  можно определить путем интегрирования момента инерции элемента палочки  $dJ_{\xi}$ .

Момент импульса элемента палочки  $dm$  относительно точки  $O$  равен

$$dL = [rdmv], \quad (16.17)$$

где  $v$  – скорость элемента палочки  $dm$ . Направление вектора скорости совпадает с осью  $Z$ , а его модуль равен

$$v = \omega x \sin \alpha. \quad (16.18)$$

Для определения элементов тензора палочки относительно неподвижной точки  $O$  воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix}.$$

В нашем случае тензор инерции преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \int_0^m dm (r^2 - x^2) & -\int_0^m dm xy & -\int_0^m dm xz \\ -\int_0^m dm yx & \int_0^m dm (r^2 - y^2) & -\int_0^m dm yz \\ -\int_0^m dm zx & -\int_0^m dm zy & \int_0^m dm (r^2 - z^2) \end{pmatrix}, \quad (16.19)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (16.20)$$

В выбранной системе координат палочка ориентирована вдоль оси X ортогонально осям Y и Z, поэтому

$$y = 0, \quad z = 0. \quad (16.21)$$

Определим момент инерции палочки  $J_\xi$  относительно оси  $\xi$ , интегрируя выражение (16.15), подставив в него соотношения (16.14) и (16.16):

$$J_\xi = \int_0^l (x \sin \alpha)^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2 \sin^2 \alpha}{3}.$$

Поскольку скорость элемента палочки направлена перпендикулярно плоскости рисунка и перпендикулярно радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , то направление вектора момента импульса элемента палочки  $d\mathbf{L}$  относительно точки O совпадает с направлением оси Y. Для определения модуля вектора момента импульса палочки  $\mathbf{L}$  относительно точки O, воспользуемся выражениями (16.17) и (16.18):

$$L = \int_0^l x^2 \omega \sin \alpha \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3}. \quad (16.22)$$

Таким образом, момент импульса палочки  $L$  относительно точки  $O$  равен:

$$L = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3} \mathbf{e}_y,$$

где  $\mathbf{e}_y$  – орт оси  $Y$  декартовой системы координат.

Определим момент импульса палочки относительно оси  $\xi$  как проекцию вектора  $L$  на ось  $\xi$ :

$$L_\xi = \frac{ml^2 \omega \sin^2 \alpha}{3}.$$

Заметим, что момент импульса палочки относительно оси  $\xi$  и момент инерции относительно той же оси связаны следующим соотношением:

$$L_\xi = J_\xi \cdot \omega.$$

Учитывая равенства (16.20) и (16.21), определим элементы тензора инерции (16.19):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^m x^2 dm & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^m x^2 dm \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем с учетом (16.14) интеграл, определяющий элементы тензора инерции:

$$\int_0^m x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{3}.$$

Тогда искомый тензор инерции приобретет следующий вид:



$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку все центробежные моменты инерции тензора  $\mathbf{J}$  (недиагональные элементы) равны нулю, это означает, что оси системы координат являются главными осями инерции. Тогда осевые моменты инерции  $J_y = J_{yy} = \frac{ml^2}{3}$  и  $J_z = J_{zz} = \frac{ml^2}{3}$  являются главными моментами инерции палочки.

Убедимся в выполнении равенства, связывающего момент импульса относительно точки, тензор инерции и вектор угловой скорости:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Определим  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$  в нашем случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \cos \alpha \\ \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 0 \cdot \mathbf{e}_x + \frac{ml^2}{3} \omega \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Из соотношения (16.23) следует, что вектор  $\mathbf{L}$  направлен вдоль оси  $Y$ , а его модуль равен:

$$|\mathbf{L}| = L_y = \frac{ml^2}{3} \omega \sin \alpha,$$

что совпадает с выражением (16.22).

Заметим, что момент инерции палочки  $J_\xi$  относительно оси  $\xi$  можно определить, зная элементы тензора инерции, а также направляющие косинусы углов между вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и осями системы координат:

$$J_{\xi} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma = \frac{ml^2 \sin^2 \alpha}{3}.$$

$$\text{Ответ: } L_{\xi} = \frac{ml^2 \omega \sin^2 \alpha}{3}, \quad L = \frac{ml^2 \omega \sin \alpha}{3} e_y, \quad J_{\xi} = \frac{ml^2 \sin^2 \alpha}{3},$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Задача 16.3.5.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Два одинаковых тонких стержня длиной  $l$ , шарнирно скрепленные в верхней точке А, нижними концами опираются на гладкую горизонтальную плоскость (см. рис. 16.6). В начальный момент времени стержни удерживают так, что угол между ними составляет  $2\alpha_0$ . Затем стержни отпускают. Определить скорость точки А непосредственно перед соприкосновением с плоскостью. Трением в шарнире и сопротивлением воздуха пренебречь.

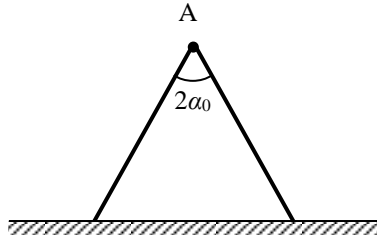


Рис. 16.6. Стержни длиной  $l$ , шарнирно скрепленные в верхней точке А.

### Решение

I. Выберем систему отсчета, жестко связанную с горизонтальной плоскостью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально вдоль плоскости, ось  $Y$  – вертикально вверх. Начало координат – на плоскости под точкой А.

II. Запишем закон сохранения механической энергии для двух стержней на интервале времени от начала движения до момента времени, когда угол между стержнем и вертикалью равен  $\alpha$ :

$$2mg \frac{l}{2} \cos \alpha_0 = mv^2 + J\omega^2 + 2mg \frac{l}{2} \cos \alpha, \quad (16.24)$$

$v$  – скорость центра масс.

Момент инерции стержня длиной  $l$  относительно оси, проходящей через центр масс, равен:

$$J = \frac{ml^2}{12}. \quad (16.25)$$

Координаты центров масс стержней и точки А равны соответственно:

$$|x| = \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad y = \frac{l}{2} \cos \alpha, \quad x_A = 0, \quad y_A = l \cos \alpha.$$

Скорости центра масс и точки А связаны с координатами следующим образом:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = |\dot{y}_A|. \quad (16.26)$$

III. Используя (16.26) с учетом того, что  $\omega = \dot{\alpha}$ , определим скорость центра масс:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \frac{l}{2}. \quad (16.27)$$

Тогда из закона сохранения энергии (16.24) с учетом соотношений (16.25) и (16.27) получим:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (16.28)$$

Скорость точки А в произвольный момент времени в соответствии с (16.26 – 16.28) равна:

$$v_A = l \sin \alpha \dot{\alpha} = l \sin \alpha \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}.$$

Перед соприкосновением с плоскостью  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и

$$v_A = \sqrt{3gl \cos \alpha_0}.$$

**Ответ:**  $v_A = \sqrt{3gl \cos \alpha_0}$

**Задача 16.3.6.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Два одинаковых сплошных цилиндра массы  $M$  катятся по горизонтальной поверхности таким образом, что один цилиндр толкает перед собой другой (см. рис. 16.7). К оси толкающего цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ . Коэффициент трения между поверхностью и цилиндрами и между цилиндрами оди-

наков и равен  $k$ . Определить силу  $F$ , при которой начнется проскальзывание между поверхностью и хотя бы одним из цилиндров.

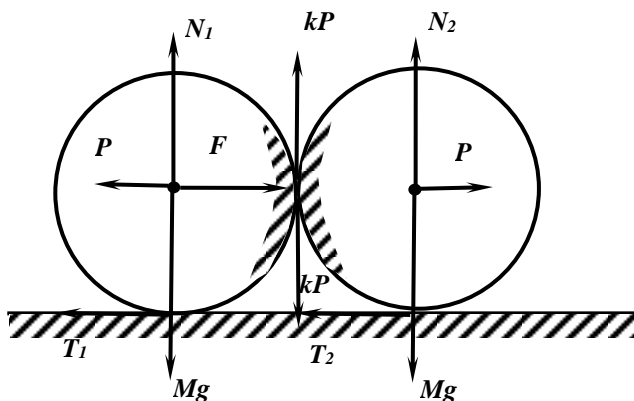


Рис. 16.7. Сплошные цилиндры, катящиеся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы  $F$ .

### Решение

I. Выберем систему отсчета, жестко связанную с горизонтальной плоскостью. Ось  $X$  декартовой системы координат направим вправо вдоль горизонтальной плоскости, ось  $Y$  – вертикально вверх.

Пусть силы трения цилиндров о поверхность равны, соответственно,  $T_1$  и  $T_2$ . Друг с другом цилиндры взаимодействуют с силами давления  $P$  и силами трения скольжения, равными в соответствии с законом Амонтона-Кулона  $kP$ . Эти и остальные силы, действующие на цилиндры, изображены на рис. 16.7.

II. Запишем уравнения движения для каждого из цилиндров в проекции на выбранные оси декартовой системы координат, а также уравнение моментов:

$$Ma_1 = F - P - T_1 \quad (16.29)$$

$$0 = Mg - N_1 - kP \quad (16.30)$$

$$Ma_2 = P - T_2 \quad (16.31)$$

$$0 = Mg - N_2 - kP \quad (16.32)$$

$$J\varepsilon_1 = (T_1 - kP)R \quad (16.33)$$

$$J\varepsilon_2 = (T_2 - kP)R \quad (16.34)$$

Уравнения кинематической связи имеют следующий вид:

$$a_1 = a_2, \quad \varepsilon_1 = a_1/R, \quad \varepsilon_2 = a_2/R. \quad (16.35)$$

Момент инерции каждого цилиндра относительно оси вращения, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен

$$J = \frac{MR^2}{2}. \quad (16.36)$$

III. Из уравнений (16.29), (16.31), (16.33), (16.34) получаем выражения для сил трения, действующих на цилиндры со стороны горизонтальной поверхности:

$$T_1 = \frac{F(1+2k)}{6},$$

$$T_2 = \frac{F(1+2k)}{6}.$$

Условие того, что первый цилиндр (толкающий) начнет проскальзывать:

$$T_1 = (T_1)_{\max} = kN_1 \quad (16.37)$$

Аналогичное условие для второго цилиндра:

$$T_2 = (T_2)_{\max} = kN_2 \quad (16.38)$$

Силы нормальной реакции  $N_1$  и  $N_2$  получим из (16.30) и (16.32):

$$N_1 = Mg - kP \quad (16.39)$$

$$N_2 = Mg + kP \quad (16.40)$$

Из уравнений (16.29) и (16.31) с учетом равенства сил трения  $T_1 = T_2$ , определим  $P = F/2$ . Тогда из (16.37) – (16.40) получим выражение для искомой силы  $F$ , необходимой для начала проскальзывания первого и второго цилиндров. Для начала проскальзывания первого цилиндра необходимо:

$$F_1 = \frac{6kMg}{1+2k+3k^2} \quad (16.41)$$

для проскальзывания второго –

$$F_2 = \frac{6kMg}{1+2k-3k^2} \quad (16.42)$$

Как следует из (16.41) и (16.42), первый (толкающий) цилиндр начинает проскальзывать при меньшем значении силы  $F$ , что и является ответом к данной задаче.

$$F = F_1 = \frac{6kMg}{1 + 2k + 3k^2}.$$

**Ответ:**  $F = \frac{6kMg}{1 + 2k + 3k^2}.$

**Задача 16.3.7.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Машина Атвуда (массы грузов –  $m_1$  и  $m_2$ , масса цилиндрического блока –  $M$ , радиус блока –  $R$ ) установлена на клине, верхняя грань которого горизонтальна (рис. 16.8). Клин, в свою очередь, находится на закрепленной наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha = 30^\circ$ . Определите угловое ускорение блока  $\beta$ , если клин в результате действия некоторой внешней силы движется вверх вдоль наклонной плоскости с постоянным ускорением  $a$ . Трением можно пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой. Считать, что колебания грузов отсутствуют.

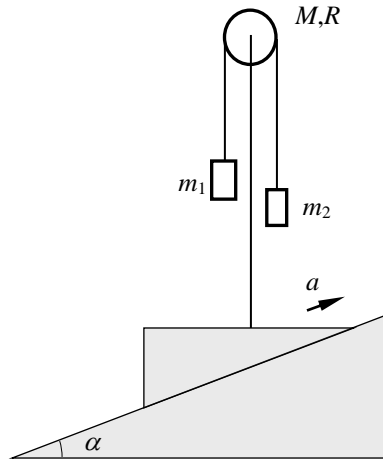


Рис. 16.8. Машина Атвуда на движущемся клине.

### Решение

I. Для решения задачи выберем неинерциальную систему отсчета, связанную с ускоренно движущимся клином.

Ось блока машины Атвуда в этой НИСО покоится. На грузы в этой системе отсчета действуют силы натяжения нити, силы тяжести и силы инерции, как показано на рисунке 16.9.

Для удобства решения задачи можно рассматривать воздействие на грузы сил тяжести и инерции как эффективную силу тяжести  $mg'$ , полученную в результате векторного сложения этих сил:

$$mg' = m\sqrt{a^2 + g^2 + 2ags\sin\alpha} . \quad (16.43)$$

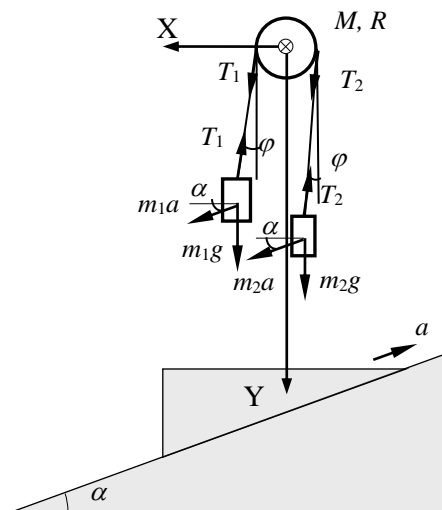


Рис. 16.9. Силы, действующие на грузы в машине Атвуда на движущемся клине.

Таким образом, задача сводится к изучению движения грузов машины Атвуда под действием эффективной силы тяжести  $mg'$  вместо «обычной» силы тяжести  $mg$ . Решение этой задачи хорошо известно.

II. Направим ось декартовой системы координат вниз вдоль нити и запишем уравнения движения грузов в проекции на эту ось:

$$m_1 a_1 = m_1 g' - T_1, \quad (16.44)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g' - T_2, \quad (16.45)$$

Выберем положительное направление оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, как указано на рис. 16.9. Запишем уравнение моментов для блока относительно этой оси вращения:

$$J\beta = T_2 R - T_1 R. \quad (16.46)$$

Момент инерции цилиндрического блока относительно оси вращения, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен

$$J = \frac{MR^2}{2}. \quad (16.47)$$

Для решения задачи воспользуемся также кинематическими связями:

$$a_2 = -a_1 = \beta R. \quad (16.48)$$

III. Решая систему уравнений (16.44) – (16.46) и (16.48), определим угловое ускорение блока:

$$\beta = \frac{1}{R} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + (J/R^2)} g'. \quad (16.49)$$

Подставив в (16.49) соотношение (16.47) с учетом (16.43), получим

$$\beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + 2ags \sin \alpha}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

При  $\alpha = 30^\circ$  получаем:

$$\beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + ag}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

$$\text{Ответ: } \beta = \frac{2(m_2 - m_1)\sqrt{a^2 + g^2 + ag}}{(2(m_2 + m_1) + M)R}.$$

**Задача 16.3.8.** (Динамика плоского движения абсолютно твердого тела). Тонкое кольцо радиусом  $R$  сделали из двух однородных полуколец (половинок колец), склеенных между собой (см. рис. 16.10). Масса верхнего полукольца равна  $m_1$ , нижнего –  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ). Кольцо поставили на горизонтальную шероховатую поверхность так, что его плоскость была вертикальной, и кольцо оказалось в положении равновесия. Затем кольцу сообщили начальную угловую скорость  $\omega_0$ , в результате чего оно сразу начало катиться по поверхности без проскальзывания. Определите, каково должно быть минимальное значение  $\omega_0$  для того, чтобы кольцо совершило не менее одного полного оборота. Потерями механической энергии можно

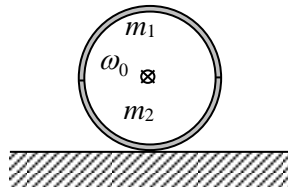


Рис. 16.10. Тонкое кольцо, состоящее из двух половинок.



пренебречь.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат с началом в центре кольца. Ось  $Y$  направим вертикально вверх, ось  $X$  вдоль горизонтальной поверхности в направлении перемещения кольца. Определим положение центра масс верхнего полукольца массой  $m_1$ :

$$y_1 = \frac{1}{m_1} \int_0^{m_1} y dm.$$

Пусть  $\varphi$  – угол между осью  $X$  и радиус-вектором в направлении элемента полукольца массой  $dm$ , тогда  $y = R \sin \varphi$ ,  $dm = \frac{m_1}{\pi} d\varphi$ , а положение центра масс полукольца определяется координатой

$$y_1 = \int_0^{\pi} R \sin \varphi \frac{1}{\pi} d\varphi = \frac{2R}{\pi} \quad (16.50)$$

Таким образом, положение центра масс верхнего полукольца находится выше центра кольца на величину  $y_1$  и не зависит от массы полукольца. Очевидно, что центр масс нижней половины полукольца находится ниже центра кольца на величину  $y_1$ .

II, III. Запишем закон сохранения механической энергии для начального и конечного моментов времени:

$$2(m_2 - m_1)gy_1 = \frac{J\omega_0^2}{2}, \quad (16.51)$$

где  $J$  – момент инерции кольца относительно оси, проходящей через точку касания кольца с горизонтальной поверхностью.

Моменты инерции полуколец относительно оси кольца равны, соответственно:

$$J_{01} = m_1 R^2, \quad J_{02} = m_2 R^2.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J_{01} = J_{Ц1} + m_1 y_1^2, \quad J_{02} = J_{Ц2} + m_2 y_1^2,$$

где  $J_{Ц1}$ ,  $J_{Ц2}$  – момент инерции полуколец относительно своих центров масс.

Тогда, с учетом (16.50),

$$J_{Ц1} = m_1 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \quad J_{Ц2} = m_2 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера моменты инерции полуколец относительно оси, проходящей через точку касания кольца горизонтальной поверхности равны:

$$J_1 = J_{Ц1} + m_1(R + y_1)^2, \quad J_2 = J_{Ц2} + m_2(R - y_1)^2.$$

Момент инерции всего кольца равен:

$$J = J_1 + J_2 = 2R^2 \left( m_1 \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) + m_2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right), \quad (16.52)$$

Подставив выражение (16.52) в (16.51), получим:

$$\omega_0 = 2 \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)g}{R(m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2))}},$$

$$\text{Ответ: } \omega_0 = 2 \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)g}{R(m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2))}}.$$

## 16.4. Задачи для самостоятельного решения

### *Динамика абсолютно твердого тела*

**Задача 16.4.1** ([1], 10, с. 229). Однородный сплошной цилиндр массой  $M$  может свободно вращаться вокруг своей неподвижной горизонтальной оси (см. рис. 16.11). На цилиндр намотана тонкая нить длиной  $L$  и массой  $m$ . Найти ускорение  $a$  свешивающейся части нити в зависимости от ее длины  $x$ .

$$\text{Ответ: } a = \frac{2mgx}{(M + 2m)L}.$$

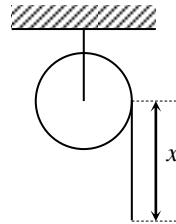


Рис. 16.11. Система тел – сплошной цилиндр и тонкая нить.

**Задача 16.4.2** ([2], 373). На двух параллельных горизонтальных брусках лежит сплошной цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m$ , на который намотана веревка (рис. 16.12). К опущенному вниз концу веревки приложена вертикальная сила равная половине веса цилиндра. Найти горизонтальное

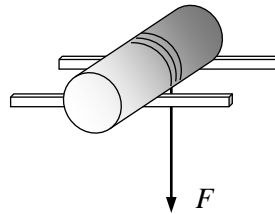


Рис. 16.12. Цилиндр с намотанной на него веревкой, лежащий на горизонтальных брусках.

ускорение цилиндра и минимальное значение коэффициента трения между цилиндром и брусью, при котором будет происходить качение без скольжения. Ось цилиндра перпендикулярна к брусью, центр его масс и сила  $P$  лежат в вертикальной плоскости, проходящей посередине между брусью.

Ответ:  $\frac{dv}{dt} = \frac{g}{3}$  и  $k \geq \frac{2}{9}$ .

**Задача 16.4.3** ([2], 375). Обруч радиусом  $r$  свободно скатывается с вершины неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R > r$  (рис. 16.13). В какой точке поверхности начнется скольжение обруча? Коэффициент трения между обручем и поверхностью  $k = 0,5$ .

Ответ: высота, на которой начнется скольжение,  $h = R \cos \varphi = 0,8R$ .

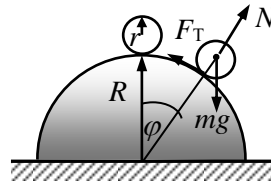


Рис. 16.13. Обруч, скатывающийся с цилиндрической поверхности.

**Задача 16.4.4** ([2], 376). Два катка, связанные штангой  $S$ , скатываются без скольжения с наклонной плоскостью, образующей угол в  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом (рис. 16.14). Катки имеют одинаковые массы  $m = 5$  кг и одинаковые радиусы  $R = 5$  см, момент инерции первого  $J_1 = 80$  кг·см<sup>2</sup>, второго  $J_2 = 40$  кг·см<sup>2</sup>. Массами рам, катков и штанги можно пренебречь. Подсчитать угловое ускорение, с которым катки скатываются без скольжения с наклонной плоскости. Определить силу, передаваемую штангой, если каток с большим моментом инерции движется впереди, и наоборот.

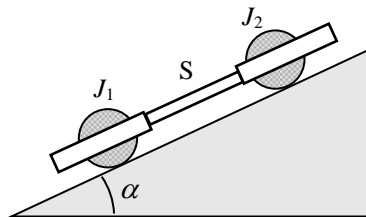


Рис. 16.14. Два катка, связанные штангой, скатывающиеся с наклонной плоскости.

$$\text{Ответ: } \frac{d\omega}{dt} = \frac{2Rg \sin \alpha}{\frac{J_1 + J_2}{m} + 2R^2} \approx 66 \text{ с}^{-2}, \quad f = \frac{J_1 - J_2}{2R} \frac{d\omega}{dt} \approx 0,27 \text{ кгс.}$$

Если каток с бóльшим моментом инерции внизу, штанга сжимается; если он сверху, штанга растягивается.

**Задача 16.4.5** ([2], 377). На подставке, имеющей массу  $m_1$  укреплена ось, на которой может свободно вращаться цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m_3$ . Нить, намотанная на цилиндр, прикреплена к телу массой  $m_2$ . Определить ускорения тел массами  $m_1$  и  $m_2$  и цилиндра при следующих условиях. 1) К телу массой  $m_2$  приложена горизонтальная сила  $F$  (рис. 16.15) и сил трения нет. 2) Те же условия, но при наличии сил трения между плоскостью и телами массами  $m_1$  и  $m_2$ . Трением в оси цилиндра пренебречь. 3) К веревке в точке А приложена горизонтальная сила  $F$ , тело массой  $m_2$  убрано; определить ускорения тела массой  $m_1$  и цилиндра. Движение всех тел считать плоским.

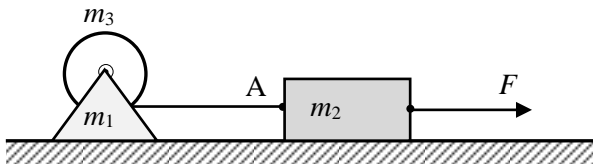


Рис. 16.15. Система тел – цилиндр массой  $m_3$ , подставка массой  $m_1$  и тело массой  $m_2$ .

*Ответ:*

$$1) \text{ ускорение тела } m_1 \quad a = \frac{F}{(\mu + m_2)}, \text{ где } \mu = \frac{m_1 + m_3}{3 + 2(m_1/m_3)};$$

$$\text{ускорение тела } m_2 \quad b = \frac{a}{3 + 2(m_1/m_3)};$$

$$\text{угловое ускорение цилиндра } \beta = 2 \frac{(1 + m_1/m_3)}{bR}.$$

$$2) \quad a = \frac{F}{(\mu + m_2)} - kg,$$

$$b = \frac{a}{3 + 2(m_1/m_3)} - 2kg \frac{\mu}{m_3};$$

$$\beta = \frac{a-b}{R}, \text{ где } k - \text{ коэффициент трения.}$$

3)  $a = \frac{F}{(m_1 + m_2)}$  в отсутствие силы трения;

$$a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} - kg \text{ при наличии трения; } \beta = \frac{2F}{m_3 R}.$$

**Задача 16.4.6** ([2], 380). Определить ускорение  $a$  центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол  $\alpha$  с горизонтом. Форма поперечных сечений желоба изображена на рис. 16.16.

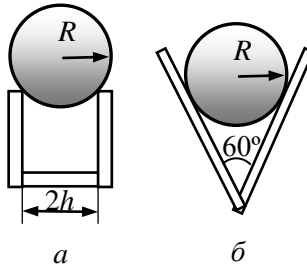


Рис. 16.16. Шарик, скатывающийся по желобам с различной формой поперечных сечений.

Ответ:

$$a) \quad a = \frac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha,$$

где  $\rho$  – радиус инерции шарика,  $2h$  – ширина желоба;

$$б) \quad a = \frac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha.$$

**Задача 16.4.7** ([2], 380). С какой высоты  $H$  должен скатиться по наклонному желобу шарик с радиусом инерции  $\rho$ , для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиусом  $R$ ? Радиусом шарика  $r$  по сравнению с  $R$  пренебречь.

Ответ:  $H = \frac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R$ . Для сплошного шара  $H = \frac{27}{10} R$ , для

полого –  $H = \frac{17}{6} R$ .

**Задача 16.4.8** ([2], 382). Цилиндр или шар радиусом  $r$  катится по плоскости, наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту. Определить, при каком значении угла  $\alpha$  начинается качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен  $k$ .

Ответ:  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$ , где  $\rho$  – радиус инерции катящегося

тела. Для сплошного шара  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} k$ , для полого –  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{2} k$ . Для сплошного цилиндра  $\operatorname{tg} \alpha > 3k$ , для полого –  $\operatorname{tg} \alpha > 2k$ .

**Задача 16.4.9** ([2], 392). Сплошному однородному шару радиусом  $r$ , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщается в начальный момент времени поступательная скорость  $v_0$  без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение, перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Ответ:  $\omega = \frac{mr}{J + mr^2} v_0 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r}$ ;  $\Delta K = \frac{1}{2} \frac{J}{J + mr^2} m v_0^2 = \frac{m v_0^2}{7}$ .

**Задача 16.4.10** ([2], 398). Вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  сплошной однородный цилиндр радиусом  $r$  ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

Ответ:  $t = \frac{J \omega_0}{mgr \sin \alpha} = \frac{r \omega_0}{2g \sin \alpha}$ .

## Расчет моментов инерции

**Задача 16.4.11** ([3], 1.277). Имеется тонкий однородный стержень массой  $m$  и длиной  $l$ . Найти его момент инерции относительно оси, проходящей через:

- его конец и перпендикулярной самому стержню;
- его центр и составляющей угол  $\alpha$  со стержнем.

Ответ: а)  $J = \frac{ml^2}{3}$ ; б)  $J = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha$ .

**Задача 16.4.12** ([3], 1.278). Найти момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластинки относительно оси, проходящей через одну из вершин пластинки перпендикулярно ее плоскости, если стороны пластинки равны  $a$  и  $b$ , а ее масса  $m$ .

Ответ:  $J = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$ .

**Задача 16.4.13** ([3], 1.279). Тонкая однородная пластинка массой  $m = 0,60$  кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого  $a = 200$  мм.

Ответ:  $J = \frac{ma^2}{6} = 4 \text{ г} \cdot \text{м}^2$ .

**Задача 16.4.14** ([3], 1.280). Вычислить момент инерции:

- медного однородного диска относительно его оси, если толщина диска  $b = 2,0$  мм и радиус  $R = 100$  мм;
- однородного сплошного конуса относительно его оси, если масса конуса  $m$  и радиус основания  $R$ .

Ответ: а)  $J = \frac{\pi \rho b R^4}{2} = 2,8 \text{ г} \cdot \text{м}^2$ ; б)  $J = \frac{3mR^2}{10}$ .

**Задача 16.4.15** ([3], 1.281). Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом  $a$  и массой  $m$  относительно оси, совпадающей с его диаметром.

Ответ:  $J = \frac{ma^2}{2}$ .

**Задача 16.4.16** ([3], 1.282). Показать, что для тонкой пластинки произвольной формы имеется следующая связь между моментами инерции:  $J_1 + J_2 = J_3$ , где 1, 2, 3 – три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку, причем оси 1 и 2 лежат в плоскости пластинки. Используя эту связь, найти момент инерции тонкого круглого однородного диска радиусом  $R$  и массой  $m$  относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров.

Ответ:  $J = \frac{mR^2}{4}$ .

**Задача 18.4.17** ([3], 1.284). Однородный диск радиусом  $R$  имеет круглый вырез (см. рисунок 16.17). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна  $m$ . Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей:

- а) через точку  $O$ ;  
 б) через его центр масс.

Ответ: а)  $J_O = \frac{13mR^2}{24}$ ; б)  $J_C = \frac{37mR^2}{72}$ .

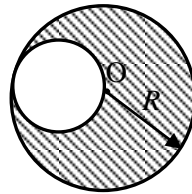


Рис. 16.17. Однородный диск с круглым вырезом.



## ГЛАВА 17

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И  
МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ГИРОСКОПЫ.  
ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ

## 17.1. Теоретический материал

**Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно точки**<sup>1</sup> – момент импульса механической системы  $L$  относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил  $M_{\text{ex}}$  относительно данной точки равна нулю:

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{ex}} = 0 \text{ или } dL = 0. \quad (17.1)$$

**Закон сохранения момента импульса (количества движения) механической системы относительно оси** – момент импульса механической системы  $L_n$  относительно инерциальной системы отсчета сохраняется, если сумма моментов внешних сил  $M_n^{\text{ex}}$  относительно данной оси равна нулю:

$$\frac{dL_n}{dt} = M_n^{\text{ex}} = 0 \text{ или } dL_n = 0. \quad (17.2)$$

Для конечного интервала времени законы сохранения моментов импульса механической системы относительно точки и оси в соответствии с (7.1) и (7.2) можно записать в виде:

$$\Delta L \equiv L(t_2) - L(t_1) = 0 \text{ или } L(t_1) = L(t_2), \quad (17.3)$$

$$\Delta L_n \equiv L_n(t_2) - L_n(t_1) = 0 \text{ или } L_n(t_1) = L_n(t_2). \quad (17.4)$$

Законы сохранения моментов импульса относительно точки и оси являются прямым следствием законов их изменений (см. (15.20) и (15.21) в п. 15.1 Теоретический материал в **Главе 15**).

---

<sup>1</sup> Определения момента импульса (количества движения) механической системы и момента силы относительно точки (оси), а также формулировка закона изменения момента импульса (уравнения моментов) относительно точки (оси) даны в п. 15.1 Теоретический материал в **Главе 15**.

**Кинетическая энергия абсолютно твердого тела**<sup>2</sup> в случае его произвольного движения равна:

$$\begin{aligned} E^k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i])^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (V^2 + 2\mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i] + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2) = \\ &= \frac{1}{2} m V^2 + m \mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_{\text{цм}}] + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Здесь  $m_i$  и  $v_i$  – массы и скорости материальных точек, из которых состоит абсолютно твердое тело,  $\mathbf{V}$  – скорость начала системы отсчета  $S'$ , жестко связанной с телом,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость системы  $S'$ ,  $\mathbf{r}'_i$  – радиус-векторы материальных точек тела относительно системы  $S'$ ,  $\mathbf{r}'_{\text{цм}}$  – радиус-вектор центра масс (см. п.5.1 в **Главе 5**) тела относительно системы  $S'$ .

Если начало отсчета системы  $S'$ , связанной с абсолютно твердым телом, совпадает с центром масс тела, то его кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$E^k = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2, \quad (17.6)$$

где  $v_{\text{цм}}$  – скорость центра масс тела.

**Кинетическая энергия вращающегося тела** вокруг неподвижной оси:

$$E^k = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (17.7)$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость вращения тела.

<sup>2</sup> Определение кинетической энергии механической системы даны в п. 7.1 Теоретический материал в **Главе 7**, а определение абсолютно твердого тела в п. 14.1 Теоретический материал в **Главе 14**.

**Работа внешних сил при повороте тела вокруг оси:**

$$\delta A = M_n d\varphi, \quad A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_n d\varphi, \quad (17.8)$$

где  $M_n$  – момент сил относительно оси (см. п. 15.1 Теоретический материал в **Главе 15**),  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальное и конечное значения угла поворота.

**Кинетическая энергия абсолютно твердого тела** в случае его плоского движения:

$$E^k = \frac{1}{2} mV^2 + m\mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\omega}r'_{\text{цм}}] + \frac{1}{2} J\omega^2. \quad (17.9)$$

Здесь смысл обозначений физических величин тот же, что и в (17.5) и (17.7).

Если начало отсчета системы  $S'$ , связанной с абсолютно твердым телом, находится в центре масс тела, то его кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и в случае плоского движения равна (теорема Кенига):

$$E^k = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{цм}} \omega^2, \quad (17.10)$$

где  $v_{\text{цм}}$  – скорость центра масс тела,  $J_{\text{цм}}$  – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс.

**Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, записанная через момент инерции тела  $J_n$  относительно мгновенной оси вращения<sup>3</sup>:**

$$E^k = \frac{1}{2} J_n \omega^2. \quad (17.11)$$

**Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, закрепленного в точке:**

$$E^k \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}r_i]^2, \quad (17.12)$$

---

<sup>3</sup> Определение мгновенной оси вращения дано в п. 14.1 Теоретический материал в **Главе 14**.

где  $r_i$  – радиус-векторы материальных точек, из которых состоит тело, относительно закрепленной точки этого тела. Если воспользоваться математическим соотношением  $[ab]^2 = a^2b^2 - (ab)^2$ , то:

$$\begin{aligned}
 E^k &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega r_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\omega r_i)^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \sum_\alpha \omega_\alpha^2 r_i^2 - \left( \sum_\alpha \omega_\alpha x_{i\alpha} \right)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \left( \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \right) r_i^2 - \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha x_{i\alpha} \omega_\beta x_{i\beta} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \right\} \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta, \\
 E^k &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta. \tag{17.13}
 \end{aligned}$$

Здесь  $J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta})$  – тензор инерции тела, характеризующий распределение массы тела относительно точки;  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера.

**Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, закрепленного на оси:**

$$E^k = \frac{1}{2} J_n \omega^2, \tag{17.14}$$

где  $J_n$  – момент инерции тела относительно оси.

В данной главе рассматриваются системы, состоящие из совокупности абсолютно твердых тел и материальных точек. Эти системы являются частными случаями механической системы, для которой в **Главе 7** сформулированы законы изменения и сохранения механической энергии.

**Закон изменения механической энергии системы** – изменение механической энергии системы равно работе внутренних  $F_i^{\text{np,in}}$

и внешних  $F_i^{\text{np,ex}}$  непотенциальных сил<sup>4</sup>:

$$dE = -(\delta A^{\text{np,in}} + \delta A^{\text{np,ex}}) = \delta A^{\text{np}}, \quad (17.15)$$

или для конечного интервала времени

$$\Delta E = \Delta A^{\text{np}}. \quad (17.16)$$

**Закон сохранения механической энергии системы** – если работа всех непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы относительно инерциальной системы отсчета сохраняется:

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = 0$$

или

$$E(t_1) = E(t_2). \quad (17.17)$$

### Гироскопы

**Гироскоп** – это аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии (см. рис. 17.1).

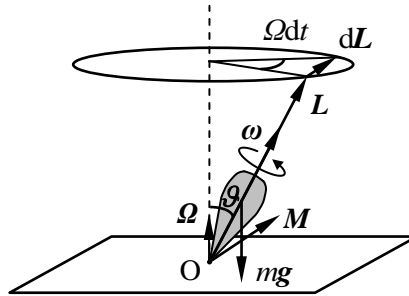


Рис. 17.1. Гироскоп в поле сил тяжести.

**Прецессия гироскопа** – вращение оси симметрии гироскопа с угловой скоростью  $\Omega$  под действием момента внешних сил наряду с его собственным вращением вокруг оси симметрии (см. рис. 17.1).

Основные физические допущения элементарной теории гироскопа:

---

<sup>4</sup> Определение механической энергии системы, внутренних и внешних непотенциальных сил даны в п. 7.1 Теоретический материал в Главе 7.

- угловая скорость вращения гироскопа и его момент импульса направлены вдоль оси симметрии гироскопа;

- величина угловой скорости вращения гироскопа вокруг своей оси  $\omega$  гораздо больше величины угловой скорости прецессии  $\Omega$ .

В рамках принятых допущений момент импульса гироскопа  $L$  равен

$$L = J_z \omega, \quad (17.18)$$

а уравнение моментов (15.20) относительно его неподвижной точки  $O$  (см. рис. 17.1) имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (17.19)$$

где  $J_z$  – момент инерции гироскопа относительно своей оси симметрии,  $M$  – сумма моментов внешних сил (в том числе силы тяжести), действующих на гироскоп.

В соответствии с (17.19) ось гироскопа вместе с моментом  $L$  прецессирует вокруг вертикального направления с угловой скоростью  $\Omega$ .

На рис. 17.1 видно, что:

$$dL = L \sin \vartheta \cdot \Omega dt, \quad (17.20)$$

$$dL = [\Omega L] dt. \quad (17.21)$$

Следовательно, прецессия гироскопа описывается уравнением:

$$\frac{dL}{dt} = [\Omega L]. \quad (17.22)$$

С учетом уравнения моментов (17.19) для гироскопа получим:

$$M = [\Omega L] = J_z [\Omega \omega]. \quad (17.23)$$

Заметим, что момент импульса определяет угловую скорость, а не ускорение прецессии, т.е. прецессионное движение является безинерционным!

**Гироскопические силы** – силы, действующие на крепление (рамку, подшипник, руки экспериментатора и т.д.) несвободного гироскопа при вынужденном вращении его оси (вынужденной прецессии) гироскопа.

В соответствии с третьим законом Ньютона на крепление действует момент гироскопических сил:

$$M_{\Gamma} = -M = -[\Omega L] = -J_z [\Omega \omega]. \quad (17.24)$$

**Правило Н.Е. Жуковского** – гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота.

## 17.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач, относящихся к теме "Законы сохранения момента импульса и механической энергии. Гироскопы. Гироскопические силы" можно условно отнести к следующим типам задач или их комбинациям. Задачи на

1) законы сохранения момента импульса и механической энергии системы (в том числе включающей в себя абсолютно твердые тела),

2) гироскопы и гироскопические силы.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета (из соображений удобства), относительно которой будут рассматриваться законы сохранения (изменения) механической энергии и момента импульса механической системы, изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой записываются моменты импульсов и сил.
3. Изобразить и обозначить силы и необходимые кинематические характеристики системы.
4. Выбрать механическую систему и рассматриваемый интервал (начальный и конечный моменты) времени.
5. Выбрать модели тел (если это не сделано в условии задачи) и рассмотреть особенности их движения на рассматриваемых интервалах времени (непосредственно перед соударением, сразу после соударения, и т.д.).
6. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.

**II. Записать полную систему уравнений по отношению к искомым величинам.**

1. Выбрать законы сохранения (изменения) и записать их в выбранной системе отсчета для выбранной механической системы и выбранных интервалов времени в рамках выбранной модели движения тел системы.
2. Записать выражения для моментов сил, моментов инерции и импульса тел и механической энергии системы тел с учетом характера их движения.
3. Записать уравнения кинематической связи.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 17.3. Примеры решения задач

**Задача 17.3.1.** (*Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения, закон сохранения механической энергии*). Вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку закрепления математического маятника массой  $m$  и длиной  $l$ , может вращаться без трения однородный стержень массой  $M$  и длиной  $L \geq l$ , шарнирно закрепленный в той же точке (см. рис. 7.2). Маятник отпускают из горизонтального положения. Найти максимальный угол отклонения стержня  $\alpha_{\max}$  после абсолютно упругого соударения с маятником.

#### Решение

I. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с точкой подвеса математического маятника и стержня. Направим горизонтальную ось вращения за плоскость чертежа (см. рис. 17.2).

Выберем четыре момента времени:  $t_1$  – момент начала движения математического маятника,  $t_2$  – момент непосредственно перед соударением маятника со стержнем,  $t_3$  – момент сразу после соударения,  $t_4$  – момент, соответствующий максимальному отклонению



стержня. В течение временного интервала  $(t_1, t_2)$  сохраняется механическая энергия математического маятника. В промежутке времени  $(t_2, t_3)$  сохраняются механическая энергия и момент импульса системы тел «маятник + стержень». Импульс системы тел в этом промежутке не сохраняется, поскольку в точке подвеса стержня во время соударения возникают дополнительные силы, импульс которых отличен от нуля. В промежутке времени  $(t_3, t_4)$  сохраняется механическая энергия стержня вследствие отсутствия сил трения.

Потенциальные энергии математического маятника и стержня будем считать равными нулю при их вертикальной ориентации.

II. Запишем закон сохранения механической энергии (17.17) для математического маятника на интервале времени  $(t_1, t_2)$ :

$$mgl = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}. \quad (17.25)$$

Здесь  $mgl$  – потенциальная энергия маятника в его исходном горизонтальном положении (в момент времени  $t_1$ ),  $\frac{J_1 \omega_1^2}{2}$  – кинетическая энергия маятника непосредственно перед соударением (в момент времени  $t_2$ ),  $J_1$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\omega_1$  – его угловая скорость перед соударением.

Для временного интервала  $(t_2, t_3)$  закон сохранения момента импульса (17.4) и механической энергии (17.17) для системы тел «маятник + стержень» имеют вид:

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 + J_1 \omega_3, \quad (17.26)$$

$$\frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_1 \omega_3^2}{2}, \quad (17.27)$$

где  $J_2$  – момент инерции стержня,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – угловые скорости вращения стержня и маятника сразу после соударения.

Запишем также закон сохранения механической энергии (17.17) для стержня на интервале времени  $(t_3, t_4)$ :

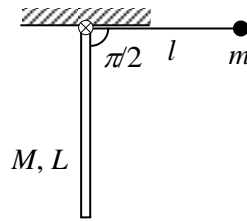


Рис. 17.2. Математический маятник и шарнирно закрепленный однородный стержень.

$$\frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{MgL}{2} (1 - \cos \alpha_{\max}). \quad (17.28)$$

Моменты инерции маятника  $J_1$  и стержня  $J_2$  относительно выбранной оси вращения равны:

$$J_1 = ml^2, \quad (17.29)$$

$$J_2 = \frac{1}{3} ML^2. \quad (17.30)$$

III. Решая систему уравнений (17.25) – (17.30) относительно искомого максимального угла отклонения стержня, получаем:

$$\alpha_{\max} = \arccos \left( 1 - \frac{24}{\left( 3 + \frac{M}{m} \left( \frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right).$$

Поскольку  $\alpha_{\max}$  не может превышать  $\pi/2$ , то на соотношения масс  $M/m$  и длин  $L/l$  стержня и математического маятника накладывается условие:

$$\frac{24}{\left( 3 + \frac{M}{m} \left( \frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} < 1,$$

при нарушении которого стержень ударится о потолок.

На рис. 17.3 изображены области значений отношений длин и масс маятника и стержня, при которых максимальный угол отклонения стержня в результате соударения с математическим маятником меньше или равен  $\pi/2$ .

Кривая, изображенная на рис. 17.3 соответствует значениям отношений длин  $l/L$  и масс  $m/M$  маятника и стержня, при которых стержень принимает горизонтальное положение, не соударяясь с потолком. Область значений отношений длин и масс, расположенная выше изображенной кривой, соответствует случаю соударения стержня с потолком.

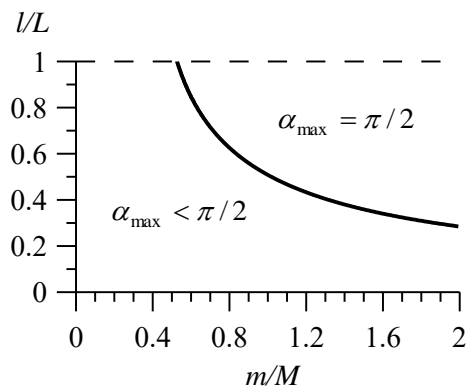


Рис. 17.3. Области значений отношений длин и масс маятника и стержня, при которых  $\alpha_{\max}$  меньше или равен  $\pi/2$ .

На рис. 17.4 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения длин маятника и стержня  $\alpha_{\max}(l/L)$  при различных значениях отношения их масс ( $m/M$ ).

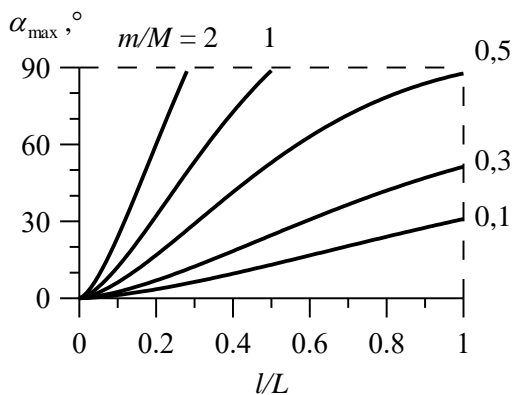


Рис. 17.4. Зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения длин маятника и стержня при различных значениях отношения их масс.

Как видим, при увеличении отношения длин маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, причем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения масс маятника и стержня.

На рис. 17.5 изображены зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения масс маятника и стержня  $\alpha_{\max}$  ( $m/M$ ) при различных значениях отношения их длин ( $l/L$ ).

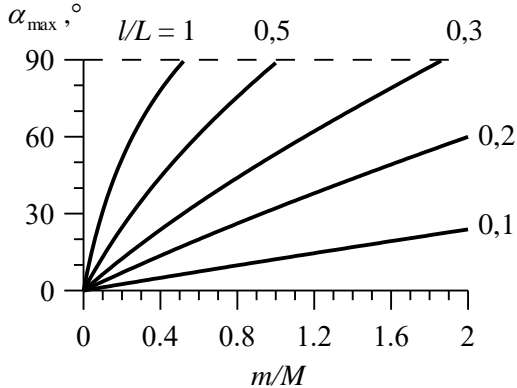


Рис. 17.5. Зависимости максимального угла отклонения стержня после соударения от отношения масс маятника и стержня при различных значениях отношения их длин.

Как видим, при увеличении отношения масс маятника и стержня максимальный угол отклонения стержня возрастает, причем скорость возрастания увеличивается с увеличением отношения длин маятника и стержня.

$$\text{Ответ: } \alpha_{\max} = \arccos \left( 1 - \frac{24}{\left( 3 + \frac{M}{m} \left( \frac{L}{l} \right)^2 \right)^2} \cdot \frac{L}{l} \right).$$

**Задача 17.3.2.** (Законы сохранения при сложном движении абсолютно твердого тела). На гладкой горизонтальной поверхности лежат небольшая шайба массой  $m$  и тонкий однородный стержень длиной  $L$  и массой  $M$ . Шайбе сообщили скорость  $v$  в горизонтальном направлении перпендикулярно стержню (см. рис. 17.6). Шайба абсолютно упруго соударяется со стержнем в точке В на расстоя-

нии  $l$  от его центра (точка  $O$ ). Определить это расстояние в трех случаях:

- 1) сразу после соударения шайба останавливается,
- 2) шайба передает стержню максимальный импульс,
- 3) скорость конца стержня (точка  $A$  на рис. 17.6) после соударения равна нулю.

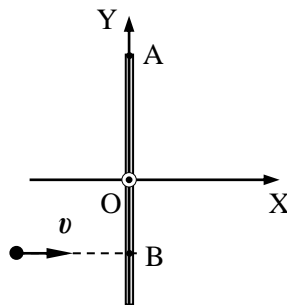


Рис. 17.6. Ориентация шайбы и стержня относительно осей выбранной декартовой системы координат.

### Решение

I. Задачу решаем относительно лабораторной инерциальной системы отсчета. Поскольку соударение шайбы со стержнем является абсолютно упругим, а на систему тел «стержень + шайба» не действуют внешние силы вдоль горизонтальной поверхности, то выполняются все три закона сохранения: закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии. Выберем систему координат так, как показано на рис. 17.6. Ось, относительно которой будем рассматривать вращение, удобно взять проходящей через центр стержня перпендикулярно горизонтальной поверхности и направленной из плоскости чертежа.

II. Запишем три закона сохранения для выбранной системы тел для интервала времени до соударения – сразу после соударения.

Закон сохранения проекции импульса на ось  $X$  выбранной системы координат:

$$mv = mv' + Mv'' \quad (17.31)$$

Закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси:

$$mvl = mv'l + J_0\omega \quad (17.32)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv''^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2} \quad (17.33)$$

Здесь  $v'$ ,  $v''$  – проекции скоростей шайбы и центра стержня на ось  $X$  сразу после соударения (проекции скоростей на ось  $Y$  в этот момент времени равны нулю),  $\omega$  – угловая скорость вращения стержня в тот же момент времени.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс, равен (15.25):

$$J_0 = \frac{1}{12}ML^2. \quad (17.34)$$

В соответствии с принципом суперпозиции движений (см. (1.24) в **Главе 1**) скорость  $v_A$  точки А стержня складывается из скорости центра масс и скорости вращательного движения этой точки вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$v_A = v'' - \omega \frac{L}{2}. \quad (17.35)$$

III. Решение системы уравнений (7.31) – (7.35) относительно искомого величин имеет вид:

$$v' = v \frac{(m - M)J_0 + Mml^2}{(m + M)J_0 + Mml^2}, \quad (17.36)$$

$$v'' = v \frac{m}{M} \cdot \frac{2MJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2}, \quad (17.37)$$

$$\omega = v \frac{ml}{J_0} \cdot \frac{2MJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2},$$

$$v_A = \frac{2mMJ_0}{(m + M)J_0 + Mml^2} \left( \frac{1}{M} - \frac{lL}{2J_0} \right). \quad (17.38)$$

Расстояние  $l$  от точки соударения до начала координат, при котором шайба остановится после удара, найдем из (17.36) при  $v' = 0$  с учетом (17.34):

$$l = L \sqrt{\frac{M - m}{12m}}.$$

Как следует из (17.37), максимальное значение скорости центра стержня достигается при  $l = 0$ . При этом условии шайба передаст стержню максимальный импульс.

Значение  $l$ , при котором скорость точки А сразу после удара будет равна нулю, находим из (17.38) с учетом (17.34):

$$l = \frac{1}{6}L.$$

После попадания шайбы в точку с такими координатами стержень сразу после удара будет совершать только вращательное дви-

жение вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку А.

**Ответ:**

- 1) шайба остановится сразу после удара, если  $l = L \sqrt{\frac{M - m}{12m}}$ ;
- 2) шайба передаст стержню максимальный импульс, если она попадет в центр масс стержня ( $l = 0$ );
- 3) скорость точки А сразу после удара будет равна нулю при условии  $l = \frac{1}{6}L$ .

**Задача 17.3.3.** (Законы сохранения при сложном движении абсолютно твердого тела). Два одинаковых однородных вращающихся тела сферической формы массой  $m$  и радиусом  $r$  движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями  $v_0$ . Угловые скорости вращения тел,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , составляют угол  $\alpha$  и равны по модулю  $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0$ . В результате лобового абсолютно неупругого соударения образуется одно тело той же плотности, форму которого можно также считать сферической. Определить угловую скорость  $\omega$  вращения образовавшегося тела и изменение кинетической энергии системы  $\Delta E^k$ .

### Решение

I. Система двух тел в данной задаче предполагается изолированной. Следовательно, суммарный импульс системы и суммарный момент импульса в лабораторной инерциальной системе отсчета сохраняются. Направим ось  $X$  лабораторной системы отсчета вдоль линии, соединяющей центры масс двух тел до соударения.

II. Запишем закон сохранения проекции импульса рассматриваемой системы тел на ось  $X$  для интервала времени, включающего момент их соударения:

$$mv_0 - mv_0 = 2m\nu,$$

где  $\nu$  – проекция на ось  $X$  скорости поступательного движения образовавшегося после соударения тела массой  $2m$ . Как видим,  $\nu = 0$ , следовательно, движение образовавшегося тела является чисто вращательным.

Запишем закон сохранения момента импульса рассматриваемой системы тел относительно их общего центра масс на интервале времени, включающем момент их соударения:

$$L_1 + L_2 = L, \quad (17.39)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – моменты импульса первого и второго тел до соударения,  $L$  – момент импульса образовавшегося тела после соударения. Поскольку скорости тел до соударения направлены вдоль линии, на которой находится центр масс системы, то в соответствии с формулой (15.9) **Главы 15** момент импульса каждого из рассматриваемых тел относительно центра масс системы тел равен моменту импульса тела относительно его центра масс.

Моменты импульса каждого из сферически симметричных тел относительно их собственных центров масс в соответствии с формулой (15.14) **Главы 15** равны:

$$L_1 = J_0 \omega_1, \quad (17.40)$$

$$L_2 = J_0 \omega_2, \quad (17.41)$$

$$L = J \omega, \quad (17.42)$$

где  $J_0$  и  $J$  – моменты инерции каждого из соударяющихся тел и образовавшегося тела относительно их собственных осей вращения. В соответствии с (15.27):

$$J_0 = \frac{2}{5} m r^2, \quad (17.43)$$

$$J = \frac{2}{5} (2m) R^2. \quad (17.44)$$

Радиус  $R$  образовавшегося тела находим из условия сохранения плотности (а, следовательно, и объема):

$$2 \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (17.45)$$

Согласно условию задачи модули угловых скоростей вращения тел до их соударения равны:

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0. \quad (17.46)$$

Изменение кинетической энергии рассматриваемой системы тел  $\Delta E^k$  в результате их абсолютно неупругого соударения в соответствии с (7.6) равно:



$$\Delta E^k = \frac{J\omega^2}{2} - 2\left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{J_0\omega_0^2}{2}\right). \quad (17.47)$$

III. Решая систему уравнений (17.39) – (17.46), получаем модуль угловой скорости вращения образовавшегося в результате соударения тела:

$$\omega = 2\omega_0 \frac{J_0}{J} \cos \frac{\alpha}{2} = \omega_0 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (17.48)$$

Поскольку в соответствии с (17.39) – (17.46)

$$\omega = \frac{J_0}{J}(\omega_1 + \omega_2),$$

а модули угловых скоростей вращения тел до их соударения равны (17.46), то угловая скорость вращения образовавшегося тела  $\omega$  направлена по биссектрисе угла  $\alpha$ , образованного векторами угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Искомое изменение кинетической энергии рассматриваемой системы тел в результате соударения получим, подставляя (17.48) в (17.47) с учетом (17.43) – (17.45):

$$\begin{aligned} \Delta E^k &= J_0\omega_0^2 \left( \frac{J_0}{J}(1 + \cos\alpha) - 1 \right) - mv_0^2 = \\ &= \frac{2}{5}mr^2\omega_0^2 \left( \frac{\sqrt[3]{2}}{4}(1 + \cos\alpha) - 1 \right) - mv_0^2. \end{aligned}$$

**Ответ:** вектор  $\omega$  направлен по биссектрисе угла  $\alpha$ , образованного векторами угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ;  $\omega = \omega_0 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ ;

$$\Delta E^k = \frac{2}{5}mr^2\omega_0^2 \left( \frac{\sqrt[3]{2}}{4}(1 + \cos\alpha) - 1 \right) - mv_0^2.$$

**Задача 17.3.4.** (Законы сохранения при сложном движении абсолютно твердого тела). Две одинаковые гантели массой  $m$  в виде шариков, соединенных стержнем, скользят по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  так, как изображено на рис. 17.7. Момент инерции каждой гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно плоскости чертежа, равен  $J$ , а расстояние между центрами

шариков гантели –  $l$ . Как будут двигаться гантели после абсолютно упругого соударения?

### Решение

I. Задачу решаем в двух системах отсчета: лабораторной системе, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим так, как показано на рис. 17.8, и системе отсчета, связанной с центром масс системы тел, с осью  $X'$ , изображенной на рис. 17.9.

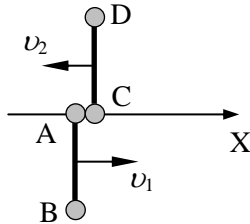


Рис. 17.8. Взаимная ориентация гантелей и системы координат относительно лабораторной системы отсчета.

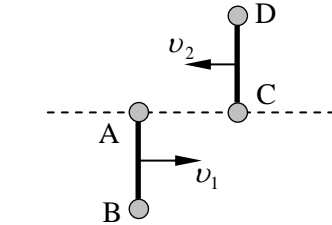


Рис. 17.7. Гантели, скользящие по гладкой горизонтальной поверхности.

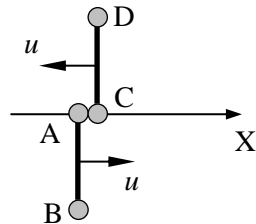


Рис. 17.9. Взаимная ориентация гантелей и системы координат относительно системы отсчета, связанной с центром масс системы тел.

По условию задачи гантели движутся по гладкой горизонтальной поверхности, следовательно, центр масс системы тел, состоящей из двух гантелей, движется с постоянной скоростью, и система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной.

Поскольку рассматриваемая система тел замкнута, а соударение абсолютно упругое, то выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса для этой системы в любой из выбранных систем отсчета.

II. По условию задачи в лабораторной системе отсчета гантели движутся поступательно со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , следовательно, проекция скорости центра масс на ось  $X$  лабораторной системы отсчета равна

$$v_{\text{цм}} = \frac{v_1 - v_2}{2},$$

а проекции скоростей центров масс гантелей  $u_1$  и  $u_2$  на ось  $X'$  относительно системы центра масс обеих гантелей определяются выражениями:

$$u_1 = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = u, \quad (17.49)$$

$$u_2 = -v_2 - v_{\text{цм}} = -\frac{v_1 + v_2}{2} = -u. \quad (17.50)$$

Запишем закон сохранения проекции импульса на ось  $X'$  для системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент их соударения, в выбранной системе центра масс:

$$mu_1 + mu_2 = mu'_1 + mu'_2, \quad (17.51)$$

где  $u'_1$  и  $u'_2$  – скорости центров масс гантелей после соударения.

В общем случае после соударения движение каждой гантели будет суперпозицией поступательного движения ее центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей (см. рис. 17.10).

Запишем закон сохранения механической энергии системы двух гантелей на интервале времени, включающем момент соударения, в системе их центра масс, при этом учтем, что при плоском движении твердого тела его кинетическая энергия выражается формулой (17.10):

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} = \frac{mu_1'^2}{2} + \frac{mu_2'^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}. \quad (17.52)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловые скорости вращения гантелей после соударения.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы двух гантелей относительно оси, проходящей через их центр масс

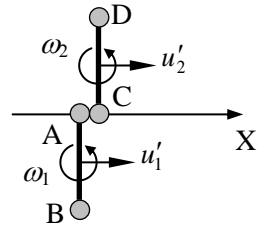


Рис. 17.10. Движение гантелей сразу после их соударения относительно системы отсчета, связанной с центром масс.

перпендикулярно поверхности, по которой происходит скольжение гантелей, на том же интервале времени:

$$\frac{l}{2}m\omega_1 + \frac{l}{2}m\omega_2 = \frac{l}{2}mu'_1 + J\omega_1 - \frac{l}{2}mu'_2 + J\omega_2. \quad (17.53)$$

В (17.53) учтено, что момент импульса гантели относительно выбранной оси в соответствии с формулой (15.5) из **Главы 15** равен сумме момента импульса центра масс гантели относительно этой оси в системе центра масс двух гантелей и момента импульса гантели относительно оси, проходящей через ее центр масс, в системе отсчета, связанной с этим центром масс.

Учитывая симметрию задачи в системе центра масс двух гантелей, запишем очевидные соотношения между угловыми скоростями вращения гантелей и скоростями их центров масс после соударения (см. рис. 17.11):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad (17.54)$$

$$u'_2 = -u'_1 = u'. \quad (17.55)$$

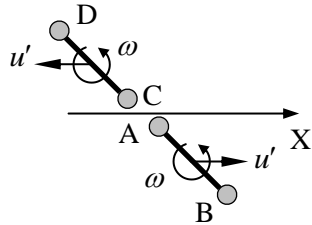


Рис. 17.11. Движение гантелей через некоторое время после их соударения относительно системы отсчета, связанной с центром масс.

III. Решим систему уравнений (7.59) – (17.65) относительно  $u'_1$ ,  $u'_2$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$u'_1 = -u'_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{ml^2 - 4J}{ml^2 + 4J} = u', \quad (17.56)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{4lm}{ml^2 + 4J} = \omega.$$

Заметим, что момент инерции гантели при заданной массе  $m$  максимален в случае, когда ее масса сосредоточена на концах гантели:

$$J \leq 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{4}.$$

Следовательно, в соответствии с (17.56)  $u' = u'_1 = -u'_2 \geq 0$  (см. рис. 17.11).

Скорости центров масс гантелей после соударения в лабораторной системе отсчета равны:

$$v'_1 = u' + v_{\text{цм}} = \frac{v_1 m l^2 - 4v_2 J}{m l^2 + 4J},$$

$$v'_2 = -u' + v_{\text{цм}} = -\frac{v_2 m l^2 - 4v_1 J}{m l^2 + 4J}.$$

Итак, в результате абсолютно упругого соударения, движение гантелей представляет собой суперпозицию поступательного движения их центров масс и вращательного движения с одинаковой угловой скоростью относительно осей, проходящих через их центры масс (см. рис. 17.12).

В случае, когда масса гантели сосредоточена на ее концах, момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, равен

$$J = \frac{m l^2}{4}.$$

При этом скорости центров масс гантелей после первого соударения в лабораторной системе отсчета и угловая скорость их вращения равны:

$$v'_1 = v'_2 = \frac{v_1 - v_2}{2},$$

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{l}.$$

В соответствии с (17.55) скорости центров масс гантелей после соударения в системе центра масс системы тел равны нулю. Следовательно, в рассматриваемом частном случае гантели, вращаясь с одинаковой угловой скоростью, испытают повторное соударение (см. решение задачи 8.3.8 в Главе 8).

**Ответ:** в лабораторной системе отсчета движение гантелей после абсолютно упругого соударения представляет собой суперпозицию поступательного движения их центров масс с одинаковы-

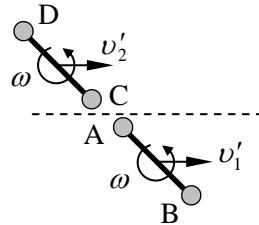


Рис. 17.12. Движение гантелей через некоторое время после их соударения относительно лабораторной системы отсчета.

ми скоростями  $v'_1 = v'_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$  и вращательного движения с одинаковой угловой скоростью  $\omega = \frac{v_1 + v_2}{l}$  относительно осей, проходящих через их центры масс. Гантели после соударения испытают повторное соударение.

**Задача 17.3.5.** (*Гироскопические силы*). Электродвигатель закреплен на подставке так, что его ось и общий центр масс находятся посередине между опорами подставки, расстояние между которыми равно  $l$ . Двигатель с подставкой поставили на гладкую горизонтальную поверхность. Найти силы давления опор подставки на поверхность, если после включения ротор двигателя раскручивается с угловым ускорением  $\beta$  вокруг его геометрической оси, а его момент инерции относительно этой оси равен  $J$ . Масса двигателя с подставкой равна  $m$ .

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета. Ось  $Z$  декартовой системы координат направим вертикально вверх. Ось, относительно которой записываем моменты сил и импульса тел, выберем совпадающей с геометрической осью ротора и направленной за плоскость чертежа (см. рис. 17.13).

При включении электродвигателя момент сил, действующих на ротор со стороны статора, закрепленного на подставке, изменяет момент импульса ротора. В соответствии с третьим законом Ньютона такой же по величине момент сил действует со стороны ротора на статор с подставкой. При этом на подставку действуют также моменты сил реакции со стороны поверхности, на которой она находится. Подставка с закрепленным на ней статором остается в покое, поэтому суммарный момент всех

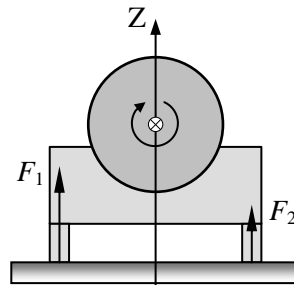


Рис. 17.13. Силы реакции со стороны поверхности, действующие на подставку электродвигателя, относительно лабораторной системы отсчета.

внешних сил, действующих на них относительно произвольно выбранной оси, равен нулю.

II. Для ротора двигателя запишем уравнение моментов относительно выбранной оси:

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (17.57)$$

где  $L$  – момент импульса ротора относительно оси его вращения.

Поскольку момент силы тяжести относительно оси ротора равен нулю, суммарный момент внешних сил  $M$  равен моменту сил, действующих на ротор со стороны статора с подставкой.

Условия равновесия для статора и подставки запишем в следующем виде:

$$-M + F_1 \frac{l}{2} - F_2 \frac{l}{2} = 0, \quad (17.58)$$

$$F_1 + F_2 - mg = 0. \quad (17.59)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  – силы, действующие на подставку со стороны поверхности (см. рис. 17.13).

Момент импульса ротора, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  относительно своей геометрической оси, равен

$$L = J\omega. \quad (17.60)$$

В соответствии с определением углового ускорения запишем:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \quad (17.61)$$

В результате получена полная система уравнений для нахождения сил, действующих на подставку со стороны поверхности. В соответствии с третьим законом Ньютона эти силы равны по величине искомым силам, действующим со стороны подставки на поверхность.

III. Решая полученную систему уравнений (17.57) – (17.61) относительно  $F_1$  и  $F_2$ , получаем:

$$F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{J\beta}{l},$$

$$F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{J\beta}{l}.$$

Заметим, что при угловом ускорении ротора  $\beta \geq \frac{mgl}{2J}$  правая опора подставки двигателя отрывается от поверхности.

$$\text{Ответ: } F_1 = \frac{mg}{2} + \frac{J\beta}{l}, F_2 = \frac{mg}{2} - \frac{J\beta}{l}.$$

**Задача 17.3.6.** (*Гироскопические силы*). Массивный цилиндрический каток (бегун) массой  $m$ , который может вращаться вокруг своей оси симметрии, приведен во вращение вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и катится без скольжения по горизонтальной опорной плите (см. рис. 17.14). Радиус катка  $r$ . Момент инерции катка относительно оси симметрии равен  $J_0$ . Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

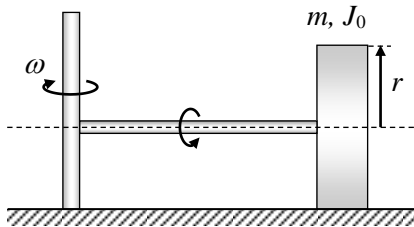


Рис. 17.14. Вращающийся массивный цилиндрический каток.

### Решение

I. Выберем оси декартовой системы координат так, как показано на рис. 17.15. Каток участвует в двух движениях – вращении вокруг вертикальной оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega$  и вокруг собственной геометрической оси  $AA'$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Направления угловых скоростей показаны на рис. 17.15. Неподвижной остается точка крепления катка к вертикальной оси – точка  $C$ .

На каток действуют сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $N$  и сила реакции со стороны вертикальной оси, приложенная в точке  $C$ . Будем считать стержень, с помощью которого каток крепится к вертикальной оси, невесомым. По

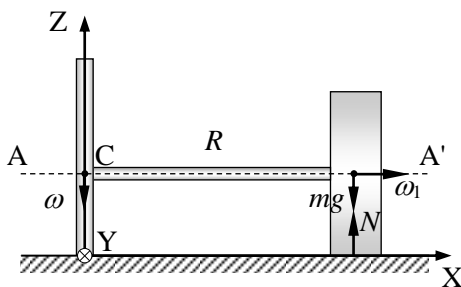


Рис. 17.15. Оси выбранной декартовой системы координат относительно цилиндрического катка.

условию задачи цилиндрический каток движется без проскальзывания, это означает, что толщина катка существенно меньше рас-



стояния  $R$  от катка до вертикальной оси вращения. Трением качения, возникающим при неупругих деформациях, пренебрегаем. По условию задачи требуется найти полную силу давления катка на опорную плиту, которая в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю силе нормальной реакции опорной плиты  $N$ , действующей на каток.

II. Отличные от нуля моменты относительно точки  $C$  имеют две силы – сила тяжести  $M_{mg}$  и сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности  $M_N$ . Запишем уравнение моментов для катка относительно точки  $C$  крепления катка к вертикальной оси:

$$\frac{dL}{dt} = M_N + M_{mg}. \quad (17.62)$$

При качении катка по горизонтальной поверхности происходит постоянное изменение направления его оси, что определяет изменение направления вектора момента импульса. Горизонтальная составляющая момента импульса  $L_{XY}$  (см. рис. 17.16) поворачивается вокруг оси  $Z$  (см. рис. 17.17), а вертикальная составляющая  $L_Z$  остается неизменной:

$$dL = dL_{XY} + dL_Z = dL_{XY}. \quad (17.63)$$

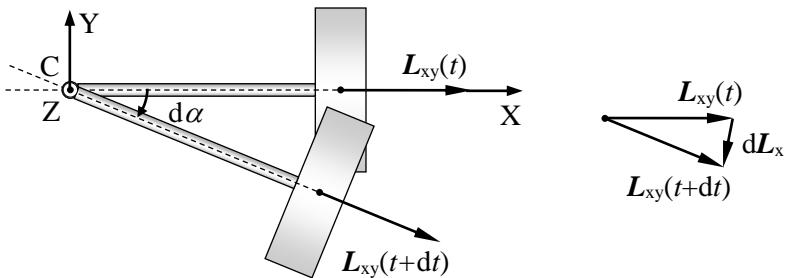


Рис. 17.17. Поворот горизонтальной составляющей момента импульса  $L_{XY}$  вокруг оси  $Z$  при качении катка.

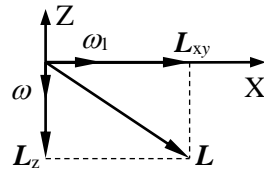


Рис. 17.16. Компоненты вектора момента импульса.

Моменты силы тяжести  $\mathbf{M}_{mg}$  и силы нормальной реакции опорной плиты  $\mathbf{M}_N$  относительно точки С направлены в противоположных направлениях вдоль оси Y (см. рис. 17.15). Следовательно, для величины скорости изменения горизонтальной составляющей момента импульса  $L_{XY}$  с учетом (17.62) и (17.63) можно записать:

$$\left| \frac{dL_{XY}}{dt} \right| = \left| \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_{mg} \right| = RN - Rmg. \quad (17.64)$$

Поскольку составляющая момента импульса  $L_{XY}$  направлена вдоль собственной геометрической оси катка AA', то:

$$L_{XY} = J_0 \omega_1. \quad (17.65)$$

В соответствии с условием задачи качение происходит без проскальзывания, следовательно, скорости точек катка, соприкасающихся с горизонтальной поверхностью, равны нулю. С другой стороны, в силу принципа суперпозиции движений, скорость этих точек складывается из скорости вращения вокруг вертикальной оси и скорости вращения вокруг собственной оси катка. Следовательно, угловые скорости  $\omega$  и  $\omega_1$  связаны соотношением:

$$\omega R - \omega_1 r = 0. \quad (17.66)$$

Найдем величину скорости изменения горизонтальной составляющей момента импульса  $L_{XY}$ . В соответствии с рис. 17.17. можно записать:

$$\left| \frac{dL_{XY}}{dt} \right| = \frac{L_{XY} d\alpha}{dt} = L_{XY} \omega_1. \quad (17.67)$$

В результате получена полная система уравнений (17.64) – (17.67) для нахождения  $N$ .

III. Решая систему уравнений (17.64) – (17.67) относительно величины силы нормальной реакции опорной плиты, получаем:

$$\left| \frac{dL_{XY}}{dt} \right| = J_0 \frac{R}{r} \omega^2 = R(N - mg),$$

$$N = \frac{J_0}{r} \omega^2 + mg. \quad (17.68)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона искомая полная сила давления катка на опорную плиту равна по модулю силе нормальной реакции опорной плиты  $N$ , действующей на каток (17.68).

Заметим, что величина  $\frac{J_0}{r} \omega^2$ , входящая в формулу (17.68), может быть порядка или даже больше силы тяжести, тем самым увеличивая силу давления катка, что используется в работе дисковых мельниц.

**Ответ:** 
$$N = \frac{J_0}{r} \omega^2 + mg .$$

**Задача 17.3.7.** (Гироскоп, гироскопические силы). Гироскоп представляет собой однородный диск радиусом  $R = 5$  см и массой  $m_0$ , закрепленный на невесомом горизонтальном стержне, ориентированном вдоль оси  $OO'$  (рис. 17.18). Гироскоп может вращаться вокруг осей  $OO'$  и  $CD$ . Диск гироскопа уравновешен на другом конце оси  $OO'$  телом с той же массой  $m_0$ . Гироскоп раскрутили вокруг собственной оси  $OO'$  так, что он делает  $n = 50$  об./с. Затем к телу массой  $m_0$  подвесили еще одно тело массой  $m = m_0/10$ . Найти период вращения гироскопа вокруг оси  $CD$ , если расстояние  $l$  от оси  $CD$  до точки подвеса тела массой  $m_0$  (см. рис. 17.18) равно 10 см.

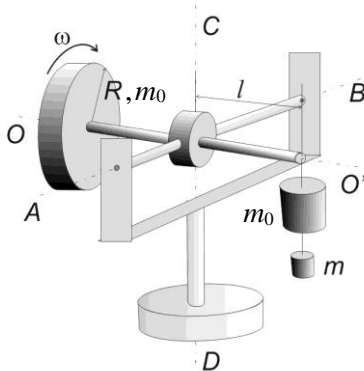


Рис. 17.18. Гироскоп, уравновешенный телом массой  $m$ .

### Решение

I. До подвешивания тела массой  $m$  гироскоп уравновешен, следовательно сумма моментов силы тяжести, действующей на диск гироскопа, и силы натяжения нити подвеса тела массой  $m_0$  относительно точки пересечения осей вращения  $OO'$  и  $CD$  гироскопа равна нулю. В условии равновесия гироскоп не совершает прецессии. После подвешивания тела массой  $m$  увеличивается момент силы натяжения нити подвеса, что приводит к изменению момента

импульса гироскопа. Поскольку момент импульса гироскопа значительно больше изменения момента силы натяжения нити подвеса, то происходит медленное изменение направления момента импульса гироскопа  $L$  – прецессия оси гироскопа.

II. Запишем уравнение прецессии гироскопа (см. (17.23)) относительно точки пересечения его осей вращения  $OO'$  и  $CD$  (см. рис. 17.18):

$$M = [\Omega L], \quad (17.69)$$

где  $M$  – сумма моментов внешних сил, действующих на гироскоп,  $\Omega$  – угловая скорость прецессии.

Дополним это уравнение выражением (17.18) для момента импульса гироскопа относительно его собственной оси  $OO'$ :

$$L = J_0 \omega. \quad (17.70)$$

Здесь момент инерции гироскопа, представляющего собой однородный диск, закрепленный на невесомом стержне, в соответствии с (6.44) равен

$$J_0 = \frac{m_0 R^2}{2}, \quad (17.71)$$

а угловая скорость вращения гироскопа  $\omega$  связана с числом его оборотов  $n$  вокруг собственной оси соотношением:

$$\omega = 2\pi n. \quad (17.72)$$

Подвешенные к стержню гироскопа тела массой  $m_0$  и  $m$  не перемещаются вдоль вертикальной оси  $CD$  в процессе движения гироскопа, поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона сила натяжения нити подвеса тел  $F$  равна

$$F = (m_0 + m)g. \quad (17.73)$$

Сумма моментов силы тяжести, действующей на диск гироскопа массой  $m_0$ , и силы натяжения нити подвеса тел массой  $m_0$  и  $m$  относительно точки пересечения осей вращения  $OO'$  и  $CD$  гироскопа направлена вдоль оси  $AB$  (см. рис. 7.19) и равна по модулю

$$M = -m_0 gl + (m_0 + m)gl = mgl. \quad (17.74)$$

Вследствие быстрого вращения гироскопа вокруг своей оси его момент импульса будем считать направленным вдоль оси вращения  $OO'$  (рис. 17.19). При этом угловая скорость прецессии  $\Omega$  в соответствии с (17.69) направлена вдоль оси  $CD$  (рис. 17.19).

Подставляя (17.70) – (17.74) в (17.69) с учетом направления векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{\Omega}$ , для модуля угловой скорости прецессии гироскопа  $\Omega$  получаем:

$$\Omega = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{L}|} = \frac{mgl}{\pi m_0 R^2}.$$

Искомый период вращения гироскопа вокруг оси CD в соответствии с (7.94) равен:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi^2 n \frac{m_0 R^2}{mgl}.$$

Подставляя численные значения физических величин, заданных в условии задачи, получим

$$T = 12,5 \text{ с.}$$

**Ответ:**  $T = 2\pi^2 n \frac{m_0 R^2}{mgl} = 12,5 \text{ с.}$

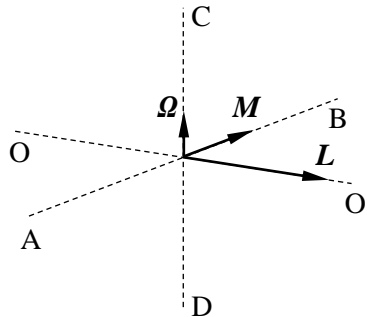


Рис. 17.19. Взаимная ориентация векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{\Omega}$ .

**Задача 17.3.8.** (Законы сохранения при сложном движении абсолютно твердого тела). Тонкий однородный стержень длиной  $l_0$  и массой  $m_0 = 10\text{г}$  вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку его подвеса, описывая при этом коническую поверхность (см. рис. 17.20). Жук, сидящий на стержне, начинает медленно ползти с верхнего закрепленного его конца к нижнему концу. Начальный угол отклонения стержня от вертикали составляет  $\alpha_0 = 60^\circ$ . При какой массе жука  $m$  угол отклонения стержня от вертикали составит  $\alpha_1 = 45^\circ$  после того, как жук достигнет нижнего конца стержня?

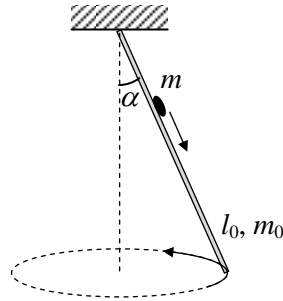


Рис. 17.20. Тонкий однородный стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси, и жук, ползущий по стержню.

### Решение

I. При движении жука вдоль стержня на систему тел «стержень + жук» действуют силы тяжести и силы реакции со стороны подвеса. Поскольку моменты этих сил относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, равны нулю, момент импульса рассматриваемой системы тел относительно этой оси в лабораторной инерциальной системе отсчета не изменяется. Поэтому при решении задачи будем использовать закон сохранения момента импульса относительно вертикальной оси для двух моментов времени: начала движения ( $l = 0, \alpha = \alpha_0$ ) и момента достижения жуком конца стержня ( $l = l_0, \alpha = \alpha_1$ ). Здесь введены обозначения:  $l$  – расстояние от жука до точки подвеса стержня и  $\alpha$  – угол отклонения стержня от вертикали.

В процессе движения жука расстояние  $l$ , угол  $\alpha$ , а также угловая скорость вращения стержня  $\omega$  изменяются. Для нахождения взаимосвязи между углом отклонения  $\alpha$  и угловой скоростью  $\omega$  удобно перейти к неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с вращающимся стержнем. В этой системе отсчета на систему тел «стержень + муфта» действуют силы тяжести, сила реакции подвеса в точке крепления стержня и силы инерции.

Поскольку жук в соответствии с условием задачи движется по стержню медленно, то угловая скорость вращения стержня  $\omega$  также медленно изменяется ( $\dot{\omega} \cong 0$ ), следовательно, переносная сила инерции (см. (10.16) в **Главе 10**) примерно равна центробежной силе инерции:  $F_{\text{пер}} \cong F_{\text{цб}}$ . Силой инерции Кориолиса (см. (10.17) в **Главе 10**), действующей на медленно движущегося жука, также пренебрегаем:  $F_{\text{Кор}} \cong 0$ .

Сумма моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук», равна нулю относительно любой оси, неподвижной относительно выбранной неинерциальной системы отсчета.

Заметим, что центробежная сила инерции, действующая на различные элементы стержня, зависит от расстояния между данным элементом и вертикальной осью вращения неинерциальной системы отсчета. Следовательно, для расчета суммарного момента сил инерции, действующих на стержень, необходимо просуммировать моменты сил инерции, действующих на каждый из элементов стержня. Заметим также, что момент силы реакции подвеса в точке

крепления стержня равен нулю относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Таким образом, для решения задачи воспользуемся законом сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета и условием равенства нулю суммарного момента сил, действующих на эту систему тел относительно оси, жестко связанной с вращающимся стержнем и проходящей через точку подвеса, в неинерциальной системе отсчета.

II. Момент импульса системы тел «стержень + жук»  $L$  складывается из моментов импульсов стержня  $L^{ct}$  и жука  $L^j$  в отдельности. Момент импульса элемента стержня  $L^{ct}$  зависит от расстояния между данным элементом и вертикальной осью вращения стержня. Следовательно, для расчета суммарного момента импульса стержня необходимо просуммировать моменты импульсов всех элементов стержня. Запишем момент импульса системы тел «стержень + жук» в лабораторной инерциальной системе отсчета относительно вертикальной оси вращения:

$$L = L^{ct} + L^j = \int_0^{l_0} x \sin \alpha \frac{m_0}{l_0} dx \omega x \sin \alpha + l \sin \alpha m \omega l \sin \alpha = \\ = \omega \sin^2 \alpha \left( \frac{1}{3} m_0 l_0^2 + ml^2 \right),$$

где  $x$  – координата элемента стержня длиной  $dx$  вдоль стержня относительно точки подвеса.

Запишем также закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» относительно вертикальной оси в лабораторной инерциальной системе отсчета на интервале времени от начала движения жука ( $l = 0, \alpha = \alpha_0$ ) до момента достижения им нижнего конца стержня ( $l = l_0, \alpha = \alpha_1$ ):

$$L_1 - L_0 = \frac{1}{3} \omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) l_0^2 - \frac{1}{3} \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 l_0^2 = 0, \quad (17.75)$$

где  $L_0$  и  $\omega_0$  – момент импульса системы тел и угловая скорость их вращения в начальный момент времени, а значения этих величин в конечный момент времени –  $L_1$  и  $\omega_1$ .

Запишем равенство нулю суммы моментов внешних сил, действующих на систему тел «стержень + жук», относительно гори-

горизонтальной оси, неподвижной в выбранной неинерциальной системе отсчета и проходящей через верхний конец стержня  $O$  (см. рис. 17.21):

$$M_{ГЖ}^{ст} + M_{ГЖ}^{жк} + M_{цб}^{ст} + M_{цб}^{жк} = 0. \quad (17.76)$$

Моменты сил тяжести, действующих на стержень  $M_{ГЖ}^{ст}$  и жука  $M_{ГЖ}^{жк}$ , равны:

$$M_{ГЖ}^{ст} = -\frac{1}{2} m_0 g l_0 \sin \alpha, \quad (17.77)$$

$$M_{ГЖ}^{жк} = -m g l \sin \alpha. \quad (17.78)$$

Момент центробежной силы инерции  $M_{цб}^{жк}$  (см. (10.16) в Главе 10), действующей на жука, определяется выражением:

$$M_{цб}^{жк} = m \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (17.79)$$

Для нахождения суммарного момента сил инерции, действующих на

стержень  $M_{цб}^{ст}$ , рассмотрим элемент стержня длиной  $dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от верхнего конца стержня. Центробежная сила инерции (см. (10.16)), действующая на этот элемент, равна

$$dF_{цб}^{ст} = \frac{m}{l_0} dx \omega^2 x \sin \alpha,$$

где  $x \sin \alpha$  – расстояние от элемента стержня до вертикальной оси вращения выбранной неинерциальной системы отсчета.

Момент силы инерции, действующей на элемент стержня, относительно горизонтальной оси, неподвижной в выбранной неинерциальной системе отсчета и проходящей через верхний конец стержня  $O$ , можно записать в виде (см. рис. 17.21):

$$dM_{цб}^{ст} = dF_{цб}^{ст} x \cos \alpha = \frac{m}{l_0} dx \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (17.80)$$

Интегрируя (17.80) по всей длине стержня, получим суммарный момент сил инерции, действующих на стержень:

$$M_{цб}^{ст} = \int_0^{l_0} \frac{m_0}{l_0} dx \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} m_0 \omega^2 l_0^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (17.81)$$

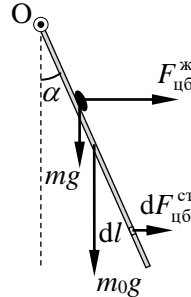


Рис. 17.21. Внешние силы, действующие на систему тел «стержень + жук», в выбранной неинерциальной системе отсчета.



III. Определим взаимосвязь между угловой скоростью вращения стержня (и жука) и угла отклонения стержня от вертикали в произвольный момент времени. Решая совместно уравнения (17.76) – (17.79) и (17.81), получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m_0 l_0 + 2ml)}{2(m_0 l_0^2 + 3ml^2) \cos \alpha}}. \quad (17.82)$$

В соответствии с (17.82) для начального ( $l = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ) и конечного ( $l = l_0$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ) моментов времени можно записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0 \cos \alpha_0}}, \quad (17.83)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g(m_0 + 2m)}{2l_0 \cos \alpha_1 (m_0 + 3m)}}. \quad (17.84)$$

Преобразуя закон сохранения момента импульса системы тел «стержень + жук» (17.75), получаем:

$$\omega_1 \sin^2 \alpha_1 (m_0 + 3m) - \omega_0 \sin^2 \alpha_0 m_0 = 0. \quad (17.85)$$

Подстановка (17.83) и (17.84) в (17.85) дает квадратное уравнение для определения искомой массы жука  $m$ :

$$6m^2 + 5m_0 m + m_0^2 \left( 1 - \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0} \right) = 0. \quad (17.86)$$

Решая уравнение (17.86), окончательно получим:

$$m = \frac{1}{12} \left( -5 + \sqrt{1 + 24 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\sin^4 \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0}} \right) m_0.$$

Воспользовавшись численными значениями физических величин, заданных в условии задачи, находим

$$m \approx 0,32 m_0 = 3,2 \text{ г}.$$

**Ответ:**  $m \approx 0,32 m_0 = 3,2 \text{ г}$ .

**Задача 17.3.9.** (Законы сохранения при сложном движении абсолютно твердого тела). Спутник массой  $m$  движется по эллиптической траектории вокруг планеты, находящейся в одном из ее фокусов (см. рис. 17.22). Известны наименьшее  $r_1$  и наибольшее  $r_2$  расстояния от спутника до центра планеты, а также модуль его скорости  $v_1$  в наиболее близкой к планете точке траектории. Найти

массу планеты  $M$ , а также радиусы кривизны траектории спутника и в наиболее близкой  $R_1$  и наиболее удаленной  $R_2$  от планеты точках его траектории.

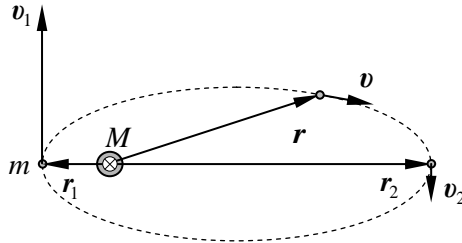


Рис. 17.22. Спутник, движущийся по эллиптической траектории вокруг планеты, находящейся в одном из ее фокусов.

### Решение

I. Лабораторную систему отсчета, связанную с планетой, будем считать инерциальной. При дальнейшем рассмотрении будем считать спутник материальной точкой, а планету – сферически симметричным телом. Движение спутника по эллиптической траектории происходит под действием одной силы – силы гравитационного взаимодействия (см. п. 4.1 в **Главе 4**) спутника и планеты. Поскольку эта сила является центральной (п. 7.1 в **Главе 7**), то момент импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траектории спутника, в соответствии с законом сохранения момента импульса механической системы относительно оси (см. п. 17.1. Теоретический материал) не меняется со временем.

Будем считать, что система тел «спутник + планета» является изолированной, а центральные силы взаимодействия тел системы – потенциальны (п. 7.1 в **Главе 7**). В этом случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии рассматриваемой системы (п. 17.1. Теоретический материал).

II. Запишем закон сохранения момента импульса спутника относительно оси, проходящей через центр планеты перпендикулярно плоскости траектории спутника (см. рис. 17.22), для моментов времени нахождения спутника на минимальном  $r_1$  и максимальном  $r_2$  расстоянии от планеты:

$$r_2 m v_2 - r_1 m v_1 = 0, \quad (17.87)$$

где  $v_2$  – модуль скорости спутника при максимальном удалении от планеты. При записи (17.87) было учтено, что скорость  $\mathbf{v}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$  спутника относительно центра планеты в рассматриваемые моменты времени взаимно перпендикулярны. Заметим, что в остальные моменты времени угол между скоростью  $\mathbf{v}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$  не равен  $\pi/2$  (рис. 17.22).

Запишем закон сохранения механической энергии системы тел «спутник + планета» для моментов времени нахождения спутника на минимальном  $r_1$  и максимальном  $r_2$  расстоянии от планеты:

$$\frac{m v_2^2}{2} + E_2^p - \frac{m v_1^2}{2} - E_1^p = 0. \quad (17.88)$$

Здесь  $E_1^p$  и  $E_2^p$  – потенциальные энергии системы тел «спутник + планета» в рассматриваемые моменты времени.

Определим потенциальную энергию системы при произвольном расстоянии  $r$  между спутником и центром планеты.

Выберем ноль отсчета потенциальной энергии, соответствующий положению спутника на физически бесконечно большом расстоянии от планеты. Тогда в соответствии с определением потенциальной энергии механической системы (см. п.7.1 в **Главе 7**) можно записать:

$$E^p = \int_r^{\infty} -G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r}. \quad (17.89)$$

Следовательно, потенциальная энергия системы тел «спутник + планета» в моменты нахождения спутника на минимальном  $r_1$  и максимальном  $r_2$  расстоянии от планеты равна:

$$E_1^p = -G \frac{mM}{r_1}, \quad (17.90)$$

$$E_2^p = -G \frac{mM}{r_2}. \quad (17.91)$$

Для определения радиуса кривизны траектории спутника запишем уравнение его движения в проекции на нормальную ось, направленную к центру кривизны траектории перпендикулярно скорости спутника, в рассматриваемые моменты времени:

$$m \frac{v_1^2}{R_1} = G \frac{mM}{r_1^2}, \quad (17.92)$$

$$m \frac{v_2^2}{R_2} = G \frac{mM}{r_2^2}. \quad (17.93)$$

III. Решая записанную в п. II систему уравнений (17.87) – (17.93) получаем искомое выражения для массы планеты

$$M = \frac{v_1^2}{2G} (r_2 + r_1) \left( \frac{r_1}{r_2} \right)$$

и радиусов кривизны траектории в рассматриваемые моменты времени

$$R_1 = R_2 = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Заметим, что обе искомые физические величины не зависят от массы спутника, что дает возможность нахождения массы планеты, исходя из измерений только кинематических характеристик спутника.

$$\text{Ответ: } M = \frac{v_1^2}{2G} (r_2 + r_1) \left( \frac{r_1}{r_2} \right), \quad R_1 = R_2 = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

#### 17.4. Задачи для самостоятельного решения

*Закон изменения и сохранения момента импульса*

**Задача 17.4.1** ([1], 3, с. 266). Тонкая палочка длиной  $l$  и массой  $m$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Пуля массой  $m_0 = m/8$ , летевшая перпендикулярно палочке и параллельно поверхности со скоростью  $v_0$ , попадает в палочку на расстоянии  $l_0 = l/4$  от ее конца и застревает в ней. Найти угловую скорость вращения системы тел после соударения.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{4}{13} \cdot \frac{v_0}{l}.$$

**Задача 17.4.2** ([1], 11, с. 266). Диск, вращающийся с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг вертикальной оси, проходящий через его центр масс, падает на другой диск, вращающийся на гладкой гори-

зонтальной поверхности с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг той же оси (см. рис. 17.23). Моменты инерции дисков относительно оси вращения равны  $J_1$  и  $J_2$ . После падения верхнего диска на нижний оба диска, благодаря трению между ними, через некоторое время стали вращаться как единое целое. Найти работу  $A$ , которую совершили при этом силы трения, действующие между дисками.

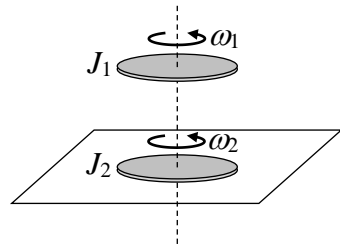


Рис. 17.23. Два вращающихся диска.

$$\text{Ответ: } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

**Задача 17.4.3** ([1], 2, с. 266). По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (см. рис. 17.24). В начальный момент времени шарик находится на высоте  $h_0$  и имеет скорость  $v_0$ , направленную горизонтально. На какую максимальную высоту  $h$  поднимется шарик в процессе движения? Чему равна его скорость  $v$  на этой высоте?

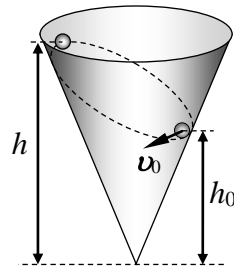


Рис. 17.24. Шарик, скользящий по внутренней поверхности конической воронки.

$$\text{Ответ: } h = \frac{v_0^2}{4g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}} \right); \text{ скорость шарика направлена}$$

горизонтально и ее модуль равен:  $v = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \frac{8gh_0}{v_0^2}}$ .

**Задача 17.4.4** ([1], 4, с. 267). На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , на расстоянии  $l_0$  от оси находится муфта массой  $m$  (см. рис. 17.25). В некоторый момент времени муфта

сообщают скорость  $v_0 = l_0 \omega$  вдоль стержня, направленную от оси вращения. Какой момент сил  $M$  должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Как меняется расстояние муфты от оси вращения в зависимости от времени?

Ответ:  $M(t) = 2ml_0^2 \omega^2 e^{2\alpha t}$ ,  
 $l(t) = l_0 e^{\alpha t}$ .

**Задача 17.4.5** ([1], 7, с. 268). Горизонтальный желоб состоит из двух взаимно перпендикулярных досок. Сплошной однородный цилиндр раскрутили до угловой скорости  $\omega$  и поместили в желоб так, как показано на рис. 17.26. Коэффициент трения между стенками желоба и цилиндром равен  $\mu$ . Найти время вращения цилиндра в желобе.

Ответ:  $T = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{R\omega}{g\mu}$ .

**Задача 17.4.6** ([1], 5, с. 267). Корабль движется со скоростью  $v = 40$  км/час по дуге окружности радиусом  $R = 300$  м. Найти момент гироскопических сил  $M_\Gamma$ , действующих на подшипники двигателя корабля со стороны ротора, который имеет момент инерции относительно оси вращения  $J_0 = 3,6 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup> и делает  $n = 150$  об./мин. Ось вращения расположена вдоль корабля.

Ответ:  $M_\Gamma = 2\pi n J_0 \frac{v}{R} = 2,1 \cdot 10^3$  н·м.

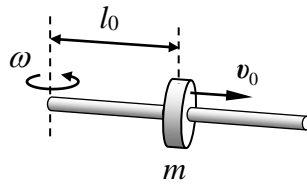


Рис. 17.25. Система тел — стержень, муфта.

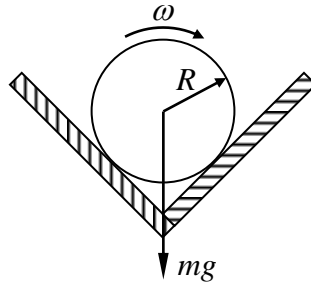


Рис. 17.26. Сплошной однородный цилиндр, помещенный в желоб.

**Задача 17.4.7** ([1], 9, с. 268). В точке А подвешены шарик на нити длиной  $l$  и однородный стержень длиной  $L$  (рис. 17.27). Стержень отклоняют в сторону на некоторый угол и отпускают без начальной скорости. В положении равновесия стержень упруго соударяется с шариком. При каком соотношении между массами стержня  $M$  и шарика  $m$  стержень после удара остановится?

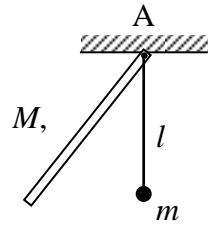


Рис. 17.27. Система тел – шарик на нити и однородный стержень.

Ответ: 
$$\frac{M}{m} = 3 \frac{l^2}{L^2}.$$

**Задача 17.4.8** ([1], 10, с. 269). Частица массой  $m$  движется по эллиптической траектории под действием центральной упругой силы  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ . Минимальная скорость частицы достигается при значении ее радиус-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  относительно силового центра, совпадающего с одним из фокусов эллипса. Найти модуль максимальной скорости частицы  $v_{\max}$ .

Ответ: 
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} r_0.$$

**Задача 17.4.9.** ([1], 11, с. 269). Две одинаковые шайбы скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , вращаясь с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. рис.17.28). В некоторый момент времени происходит их центральное абсолютно неупругое соударение, в результате которого шайбы начинают скользить по поверхности и вращаться вместе. Считая известными массу  $m$  и радиус  $R$  каждой из шайб, найти изменение кинетической энергии шайб  $\Delta E^k$  и угловую скорость их вращения  $\omega$  после соударения.

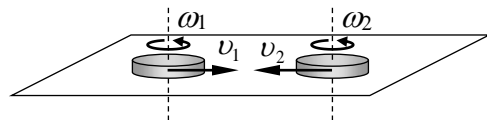


Рис. 17.28. Две шайбы, скользящие по горизонтальной поверхности.

$$\text{Ответ: } \Delta E^k = -\frac{m}{24} \left[ 6(v_1 + v_2)^2 + 6R^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - R^2(\omega_1 + \omega_2)^2 \right],$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{6}.$$

**Задача 17.4.10.** ([2], 340). На краю свободно вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус  $R$  и момент инерции  $J$ , стоит человек массой  $m$ . Диск совершает  $n$  об/мин. Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится при этом энергия системы? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

*Ответ:* Скорость вращения возрастет в  $1 + mR^2/J$  раз. Кинетическая энергия вращения возрастет во столько же раз. Увеличение энергии произойдет за счет работы, произведенной человеком при перемещении его по диску.

**Задача 17.4.11.** ([2], 432). Доказать, что момент количества движения планеты относительно Солнца может быть представлен в виде  $L = [rmv] = 2m\sigma = \text{const}$ ,

где  $m$  — масса, а  $\sigma$  — секториальная скорость планеты (Секториальной скоростью планеты называется площадь, описываемая радиусом-вектором планеты за единицу времени.)

**Задача 17.4.12** ([3], 1.305). Однородная тонкая квадратная пластинка со стороной  $l$  и массой  $M$  может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массой  $m$  со скоростью  $v$ . Найти:

- а) скорость шарика сразу после удара;
- б) горизонтальную составляющую результирующей силы, с которой ось действует на пластинку после удара.

$$\text{Ответ: а) } v' = \frac{3m - 4M}{3m + 4M} v; \text{ б) } F = \frac{8Mv^2}{l(1 + 4M/3m)^2}.$$



**Задача 17.4.13** ([3], 1.306). Вертикально расположенный однородный стержень массой  $M$  и длиной  $l$  может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой  $m$ , в результате чего стержень отклонился на угол  $\alpha$ . Считая  $m \ll M$ , найти:

- скорость летевшей пули;
- приращение импульса системы "пуля — стержень" за время удара; какова причина изменения этого импульса;
- на какое расстояние  $x$  от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы не изменился в процессе удара.

Ответ: а)  $v = (M/m)\sqrt{2gl/3} \sin(\alpha/2)$ ;

б)  $\Delta p = M\sqrt{gl/6} \sin(\alpha/2)$ ; в)  $x \approx 2l/3$ .

*Гироскоп, гироскопические силы*

**Задача 17.4.14** ([1], 6, с. 267). Гироскоп массой  $m = 0,5$  кг вращается с угловой скоростью  $\omega = 200$  рад/с. Момент инерции гироскопа  $J = 5 \cdot 10^{-4}$  кг м<sup>2</sup>. Угловая скорость прецессии в поле сил тяжести Земли  $\Omega = 0,5$  рад/с. Угол между вертикалью и осью гироскопа  $\alpha = 30^\circ$ . Определить расстояние  $l$  от точки опоры до центра масс и угловое ускорение гироскопа.

Ответ:  $l = \frac{\Omega J \omega}{mg} = 0,5$  см,  $\beta = \omega \Omega \sin \alpha = 50$  рад/с<sup>2</sup>.

**Задача 17.4.15** ([2], 423). Подсчитайте момент  $M$  гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера, если самолет при скорости  $u = 300$  км/ч делает поворот радиусом  $R = 100$  м. Пропеллер с моментом инерции  $J = 7$  кг·м<sup>2</sup> делает  $N = 1000$  об/мин.

Ответ:  $M = \frac{2\pi J N u}{R} = 612$  Н·м<sup>2</sup>.

**Задача 17.4.16** ([2], 426). Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа  $m = 5 \cdot 10^3$  г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры  $J = 8 \cdot 10^4$  г·см<sup>2</sup>, рас-

стояние между точкой подвеса и центром масс маховичка  $a = 0,25$  см. Гироскоп делает 20000 об/мин. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени  $\tau = 10$  с самолет двигался с горизонтальным ускорением  $\upsilon_0 = 1$  м/с<sup>2</sup>. Определить угол  $\alpha$ , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

*Ответ:*  $\alpha \approx \tau a \upsilon_0 / J \omega \approx 0,43^\circ \approx 25'$ .

**Задача 17.4.17** ([3], 1.343). Однородный шар массой  $m = 5,0$  кг и радиусом  $R = 6,0$  см вращается с  $\omega = 1250$  рад/с вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр и укрепленной в подшипниках подставки. Расстояние между подшипниками  $l = 15$  см. Подставку поворачивают вокруг вертикальной оси с  $\omega' = 5,0$  рад/с. Найти модуль и направление гироскопических сил.

*Ответ:*  $F' = 2mR^2\omega\omega'/5l = 0,30$  кН.

**Задача 17.4.18** ([3], 1.345). Корабль движется со скоростью  $\upsilon = 36$  км/ч по дуге окружности радиусом  $R = 200$  м. Найти момент гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны вала с маховиком, которые имеют момент инерции относительно оси вращения  $J = 3,8 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup> и делают  $n = 300$  об/мин. Ось вращения расположена вдоль корабля.

*Ответ:*  $N = 2\pi J \upsilon / R = 6$  кН·м<sup>2</sup>.

**МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ  
И ВОЛНЫ. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНЫХ СРЕД**

**4**

- СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ
- КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. МОДЫ КОЛЕБАНИЙ
- БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ СМЕЩЕНИЙ, СКОРОСТЕЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ. ПОТОК ЭНЕРГИИ В БЕГУЩЕЙ ВОЛНЕ
- ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ. ЭФФЕКТ ДОПЛера
- СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. МОДЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ
- МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД. ДЕФОРМАЦИИ
- СТАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

## ГЛАВА 18

СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

## 18.1. Теоретический материал

**Механические колебания** – это повторяющееся ограниченное движение тел механической системы относительно некоторого своего положения. При этом обобщенные координаты, определяющие положения тел системы в пространстве (см. п. 14.1 в **Главе 14**), ограничено изменяются около некоторого своего значения (см. рис. 18.1).

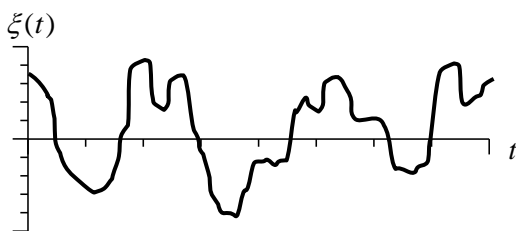


Рис. 18.1. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае колебаний.

**Периодический механический процесс** – движение тел механической системы, точно повторяющееся во времени. Для системы с одной степенью свободы этот колебательный процесс может быть описан одной физической величиной  $\xi(t)$ , периодически зависящей от времени (см. рис. 18.2).

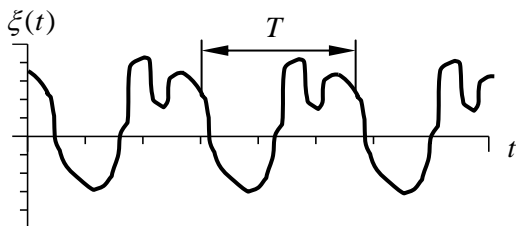


Рис. 18.2. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае периодического процесса.

**Период  $T$**  – минимальный интервал времени, через который процесс в точности повторяется (рис. 18.2).

**Гармонические колебания** – процесс, при котором физическая величина  $\xi(t)$  меняется по гармоническому закону (см. рис. 8.3).

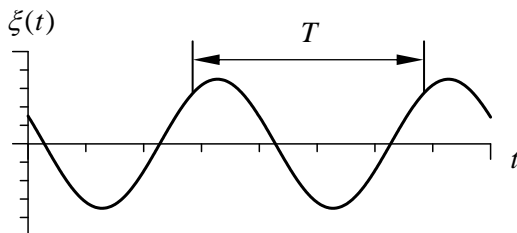


Рис. 18.3. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае гармонических колебаний.

**Свободные (собственные) колебания** – колебания системы, предоставленной самой себе (при постоянных внешних условиях).

**Уравнение собственных гармонических колебаний**, которое следует из уравнений движения механической системы, имеет вид:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (18.1)$$

где  $\xi$  – одна из **обобщенных координат** – независимых физических величин, определяющих положение тел системы;  $\omega_0$  – **угловая частота** и  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  – **период** собственных гармонических колебаний, определяемые характеристиками системы.

**Закон движения** при собственных гармонических колебаниях (зависимость обобщенной координаты от времени) – решение уравнения собственных гармонических колебаний (18.1):

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.2)$$

Здесь  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  – **фаза колебаний**;  $A$  – **амплитуда** и  $\varphi_0$  – **начальная фаза** собственных гармонических колебаний, определяемые **начальными условиями** – значениями физической величины  $\xi_0 \equiv \xi(t = t_0)$  и скоростью ее изменения  $\dot{\xi}_0 \equiv \dot{\xi}(t = t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$ :

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad (18.3)$$

$$\varphi_0 = -\omega_0 t_0 - \arctg\left(\frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0 \xi_0}\right). \quad (18.4)$$

**Скорость изменения обобщенной координаты  $\dot{\xi}$  (обобщенная скорость)** в случае гармонических колебаний:

$$\dot{\xi}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.5)$$

Как видим, в случае гармонических колебаний амплитуды обобщенной скорости и обобщенной координаты связаны множителем  $\omega_0$ , а фаза обобщенной скорости опережает фазу обобщенной координаты на  $\pi/2$ .

Необходимые условия существования собственных гармонических колебаний:

- 1) наличие положения устойчивого равновесия,
- 2) наличие возвращающей квазиупругой обобщенной силы.

В качестве примеров рассмотрим колебания пружинного, математического и физического маятников.

**Пружинный маятник** – это тело, прикрепленное к невесомой пружине (см. рис. 18.4).

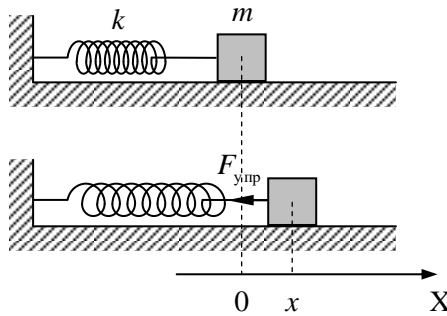


Рис. 18.4. Пружинный маятник.

Рассмотрим случай горизонтального расположения пружинно-маятника на гладкой горизонтальной поверхности. Ось  $X$  лабораторной инерциальной системы отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью, направим вдоль оси пружины, а ее начало отсчета совместим с центром масс тела в положении равновесия, соответствующего нерастянутой пружине (рис. 18.4).

На тело в процессе колебаний действует упругая сила  $F_{\text{упр}}$  со стороны пружины, удовлетворяющая закону Гука (см. п. 4.1. Теоретический материал в **Главе 4**). Уравнение движения тела в проекции на ось  $X$  выбранной системы отсчета имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (18.6)$$

где  $m$  – масса тела,  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

Преобразуем (18.6) к виду уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (18.7)$$

Сравнивая (18.7) с (18.1), для угловой частоты колебаний пружинного маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (18.8)$$

Заметим, что при вертикальном расположении пружинного маятника его частота не изменится. Действительно, уравнение движения маятника в этом случае записывается в виде (18.7) при выборе начала отсчета вертикальной координаты тела в положении его равновесия.

Законы движения тела, прикрепленного к пружине, и изменения его скорости аналогично (18.2) и (18.5) запишем в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (18.9)$$

$$\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.10)$$

Кинетическая энергия пружинного маятника равна кинетической энергии тела, прикрепленного к пружине:

$$\begin{aligned} E^k(t) &= \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (18.11)$$

Потенциальная энергия пружинного маятника, расположенного горизонтально, равна энергии упругой деформации пружины:

$$E^p(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.12)$$

Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника изменяются в противофазе по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$  и одинаковыми амплитудами (см. рис. 18.5). Механическая

энергия пружинного маятника, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной в процессе колебаний:

$$E = E^k(t) + E^p(t) = \frac{kA^2}{2}. \quad (18.13)$$

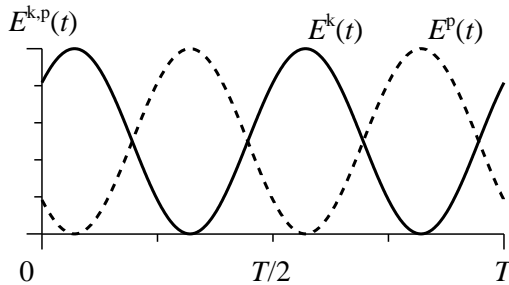


Рис. 18.5. Зависимости кинетической  $E^k$  и потенциальной  $E^p$  энергий маятника от времени в случае собственных гармонических колебаний.

**Математический маятник** — материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в поле сил тяжести (см. рис. 18.6).

Рассмотрим колебания математического маятника относительно горизонтальной оси, происходящие в одной плоскости.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с телом, к которому подвешен математический маятник. Запишем уравнение моментов для материальной точки относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника (см. рис. 18.6):

$$\frac{dL}{dt} = M_{mg}, \quad (18.14)$$

где  $L = l(ml\dot{\alpha}) = ml^2\dot{\alpha}$  — момент импульса материальной точки относительно выбранной оси,  $\alpha$  — угол отклонения маятника от положения равновесия,  $m$  и  $l$  — масса и длина математического маятника,  $M_{mg} = -mgl \sin \alpha$  — момент силы тяжести, действующей на материальную точку относительно той же оси.

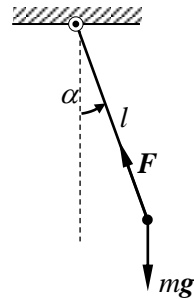


Рис. 18.6. Математический маятник.



При малых углах отклонения маятника уравнение (18.14) сводится к виду уравнения гармонических колебаний (18.1):

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha, \quad (18.15)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (18.16)$$

Сравнивая (18.16) с (18.1), для угловой частоты колебаний математического маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (18.17)$$

Законы движения математического маятника и изменения его угловой скорости аналогично (18.2) и (18.5) запишем в виде:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (18.18)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.19)$$

Кинетическая энергия математического маятника равна кинетической энергии материальной точки, подвешенной на нити:

$$E^k = \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{mglA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.20)$$

Потенциальная энергия математического маятника равна энергии материальной точки в поле силы тяжести Земли. Если за ноль отсчета потенциальной энергии принять положение равновесия маятника, то его потенциальная энергия при отклонении на угол  $\alpha$  равна:

$$E^p = mgl(1 - \cos \alpha) \cong \frac{mglA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.21)$$

Кинетическая и потенциальная энергии математического маятника, так же как и в случае пружинного маятника, изменяются в противофазе по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$  и одинаковыми амплитудами (см. рис. 18.5). Механическая энергия математического маятника не изменяется в процессе колебаний и равна:

$$E = E^k + E^p = \frac{mglA^2}{2}. \quad (18.22)$$

**Физический маятник** – абсолютно твердое тело, подвешенное в поле сил тяжести (см. рис. 18.7).

Рассмотрим колебания физического маятника относительно горизонтальной оси, в процессе которых все материальные точки физического маятника движутся в параллельных плоскостях.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, связанную с телом, к которому подвешен физический маятник. Запишем уравнение моментов для абсолютно твердого тела относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника (см. рис. 18.7):

$$J\ddot{\alpha} = M_{mg}. \quad (18.23)$$

Здесь  $\alpha$  – угол отклонения маятника от положения равновесия,  $J$  – момент инерции физического маятника относительно выбранной оси,  $M_{mg} = -mgl \sin \alpha$  – момент силы тяжести, действующей на маятник в центре его масс, относительно той же оси,  $m$  – масса физического маятника и  $l$  – расстояние от центра масс маятника до точки его подвеса.

При малых углах отклонения маятника уравнение (18.23) сводится к виду уравнения гармонических колебаний (18.1):

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha. \quad (18.24)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (18.25)$$

Сравнивая (18.25) с (18.1), для угловой частоты колебаний физического маятника получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (18.26)$$

Используя теорему Гюйгенса – Штейнера, выразим угловую частоту колебаний физического маятника через его момент инерции  $J_0$  относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси вращения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_0 + ml^2}}. \quad (18.27)$$

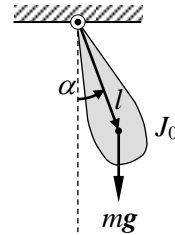


Рис. 18.7. Физический маятник.

Заметим, что в случае математического и физического маятника в качестве обобщенной координаты выступает угол отклонения маятника от положения равновесия  $\alpha$ .

Законы движения физического маятника и изменения его угловой скорости идентичны случаю математического маятника:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (18.28)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.29)$$

Кинетическая энергия физического маятника равна (см. п. 17.1. Теоретический материал **Главы 17**):

$$E^k = \frac{J \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{mglA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.30)$$

Если за ноль отсчета потенциальной энергии принять положение равновесия маятника, то его потенциальная энергия при отклонении на угол  $\alpha$  можно записать в виде:

$$E^p = mgl(1 - \cos \alpha) \cong \frac{mglA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.31)$$

Механическая энергия физического маятника равна:

$$E = E^k + E^p = \frac{mglA^2}{2}. \quad (18.32)$$

## 18.2. Основные типы задач и методы их решения

При решении задач данной главы возможны два метода решения – так называемые динамический и энергетический методы. Динамический метод предполагает использование уравнений движения, а энергетический – закона сохранения механической энергии колеблющейся системы тел.

Если задача сводится к колебаниям материальной точки, то основные этапы решения определяются общими схемами решения задач, описанными в **Главе 3** (динамический метод) и **Главе 7** (энергетический метод). При решении задачи о колебаниях абсолютно твердого тела используются схемы, описанные в **Главах 15, 16** (динамический метод) и **Главе 17** (энергетический метод). Как правило, при использовании обоих методов на последнем этапе решения получаются уравнение и закон движения рассматриваемой механической системы. В любом случае при решении

задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

### 18.3. Примеры решения задач

**Задача 18.3.1.** (*Динамический метод*). Сплошной однородный цилиндр массой  $m$  и радиусом  $R$ , шарнирно закрепленный в нижней точке, совершает малые колебания под действием двух горизонтальных одинаковых легких пружин, жесткость каждой из которых равна  $k$  (рис. 18.8). Пружины прикреплены к верхней точке цилиндра и нерастянуты в положении равновесия цилиндра. Определить угловую частоту малых колебаний цилиндра.

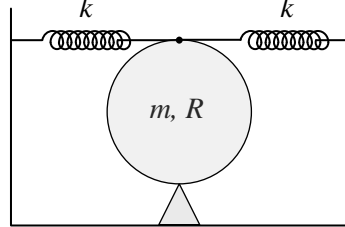


Рис. 18.8. Колебательная система, состоящая из цилиндра и двух закрепленных горизонтальных пружин.

#### Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с опорой цилиндра. Ось  $X$  декартовой системы координат направим горизонтально. Начало отсчета оси  $X$  соответствует положению точки шарнирного закрепления цилиндра. Цилиндр считаем абсолютно твердым телом. На него действуют четыре силы (см. рис. 18.9): сила тяжести  $mg$ , упругие силы со стороны двух пружин  $2F_{\text{упр}}$  и сила реакции опоры, не изображенной на рисунке. Силами трения пренебрегаем. Пружины считаем невесомыми, их деформации – малыми.

II. Запишем уравнение моментов для цилиндра относительно оси (рис. 18.9), проходящей через точку его шарнирного закрепления перпендикулярно плоскостям колебаний материальных точек цилиндра:

$$J\ddot{\alpha} = mgR \sin \alpha - 2kx(2R) \approx mgR\alpha - 4kxR. \quad (18.33)$$

Здесь  $J$  – момент инерции цилиндра относительно выбранной оси,  $\alpha$  – угол поворота цилиндра (рис. 18.9),  $x$  – координата точки крепления пружин к цилиндру. При записи уравнения (18.33) учтено, что момент силы реакции опоры относительно оси вращения равен нулю, и при малых углах поворота цилиндра плечо силы упругости равно  $2R$ , а  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Запишем уравнение кинематической связи – уравнение, связывающее координату точки крепления пружин к цилиндру и угол его поворота:

$$x = 2R\alpha. \quad (18.34)$$

Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через точку его шарнирного крепления, находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера:

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (18.35)$$

III. Подставляя выражения (18.34) и (18.35) в (18.33), получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{2}{3} \left( \frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right) \alpha = 0.$$

Следовательно, искомая угловая частота собственных незатухающих колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right)}.$$

Полученное выражение для частоты колебаний справедливо при  $\frac{8k}{m} > \frac{g}{R}$ . Если  $\frac{8k}{m} \leq \frac{g}{R}$ , то вертикальное равновесное состояние является неустойчивым и колебания в системе не возникают (см. в п. 18.1. необходимые условия существования собственных гармонических колебаний).

**Ответ:**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{8k}{m} - \frac{g}{R} \right)}.$

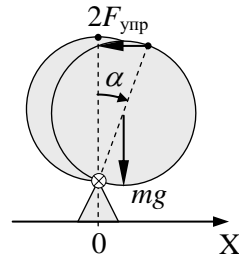


Рис. 18.9. Силы, действующие на цилиндр, при отклонении от положения равновесия.

**Задача 18.3.2.** (Динамический метод). Тонкая однородная палочка совершает малые колебания внутри гладкого полуцилиндра радиусом  $R$ , оставаясь в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 18.10). Длина палочки равна радиусу полуцилиндра. Найти закон движения центра масс палочки, считая, что в начальный момент времени она покоилась и была отклонена от положения равновесия на малый угол  $\alpha_0$ .

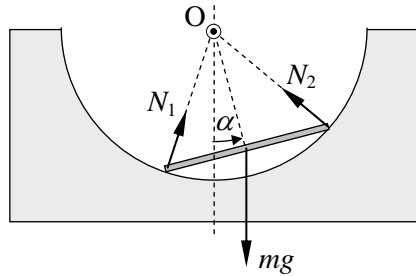


Рис. 18.10. Силы, действующие на палочку при отклонении от положения равновесия.

### Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с полуцилиндром. Палочку считаем абсолютно твердым телом. На нее действуют три силы – сила тяжести  $mg$  и силы нормальной реакции поверхности полуцилиндра  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 18.10). Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Запишем уравнение моментов для палочки относительно оси, совпадающей с осью полуцилиндра, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 18.10):

$$J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha, \quad (18.36)$$

где  $J$  – момент инерции палочки относительно указанной оси,  $\alpha$  – угол отклонения палочки от положения равновесия,  $l$  – расстояние от оси вращения до центра масс палочки. При записи (18.36) учтено, что моменты сил нормальной реакции поверхности полуцилиндра  $N_1$  и  $N_2$  относительно оси вращения равны нулю.

Поскольку длина палочки равна радиусу цилиндра, то расстояние от оси вращения до центра масс палочки равно:

$$l = R \sin(\pi/3) = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \quad (18.37)$$

Момент инерции палочки относительно указанной оси находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера:

$$J = J_0 + ml^2. \quad (18.38)$$

Момент инерции тонкой палочки относительно оси, проходящей через ее центр масс, равен:

$$J_0 = \frac{mR^2}{12}. \quad (18.39)$$

III. Преобразуя систему уравнений (18.36) – (18.39) с учетом малости угла отклонения палочки от положения равновесия ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ), получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\sqrt{3}g}{5R}\alpha = 0. \quad (18.40)$$

Как видим (ср. с (18.1)), частота собственных колебаний палочки определяется соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}},$$

а закон движения (решение уравнения движения (18.40)) имеет вид:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  в соответствии с условиями задачи определяются начальными значениями угла отклонения и скорости его изменения:

$$\alpha(0) = \alpha_0 = A \cos \varphi_0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0 = -A \sin \varphi_0. \quad (18.41)$$

Совместное решение уравнений (18.41) дает значения амплитуды и начальной фазы:

$$A = \alpha_0, \quad \varphi_0 = 0.$$

В результате искомый закон движения центра масс палочки принимает вид:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left( \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} t \right).$$

$$\text{Ответ: } \alpha(t) = \alpha_0 \cos \left( \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} t \right).$$

**Задача 18.3.3.** (*Динамический метод*). На тележке массой  $M$ , стоящей на горизонтальных рельсах, подвешен математический маятник длиной  $l$  и массой  $m$ . Тележка может катиться по рельсам

без трения. Тележке сообщили начальную скорость  $V_0$  так, что при этом нить маятника осталась вертикальной. Найти законы движения маятника и тележки относительно лабораторной системы отсчета при малых углах отклонения нити маятника от вертикали. Определить, при каких соотношениях масс маятника и тележки амплитуды их колебаний  $A_m$  и  $A_M$  будут максимальными.

### Решение

I. При решении задачи используем две системы отсчета: инерциальную лабораторную систему, связанную с рельсами, и неинерциальную, связанную с тележкой. Направим ось  $X$  инерциальной системы отсчета вдоль рельсов, по которым катится тележка (см. рис. 18.11), начало отсчета которой совпадает с положением маятника в начальный момент времени.

После сообщения начальной скорости  $V_0$  тележке маятник в неинерциальной системе отсчета будет колебаться относительно неподвижной оси, проходящей через точку подвеса  $O$ , в то время как в инерциальной системе отсчета его движение является суперпозицией поступательного движения вместе с тележкой и колебательного движения относительно тележки.

Задачу решаем динамическим методом. На маятник в неинерциальной системе отсчета действуют три силы (рис. 18.11) – сила тяжести  $mg$ , сила натяжения нити  $T$  и переносная сила инерции  $F_{\text{пер}}$ . Силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем.

II. Переносная сила инерции, действующая на маятник, равна:

$$F_{\text{пер}} = -m\ddot{x}_M,$$

где  $\ddot{x}_M$  – ускорение тележки (и жестко связанной с ней неинерциальной системы) относительно инерциальной системы отсчета.

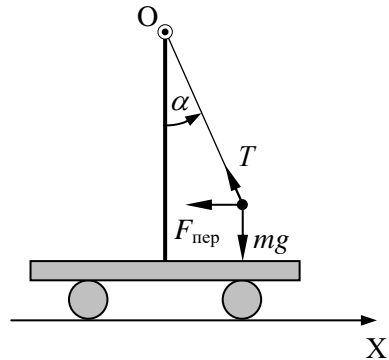


Рис. 18.11. Колебательная система, состоящая из маятника, закрепленного на тележке.



Запишем уравнение вращательного движения (уравнение моментов) маятника в неинерциальной системе отсчета относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 18.11):

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - m\ddot{x}_M l \cos \alpha, \quad (18.42)$$

где  $\alpha$  – угол отклонения маятника от вертикали (см. рис. 18.11). При записи уравнения (18.42) учтено, что относительно выбранной оси момент инерции маятника равен  $ml^2$ , а момент силы натяжения нити равен нулю.

В соответствии с принципом суперпозиции движений координата маятника  $x_m(t)$  относительно инерциальной системы отсчета равна:

$$x_m(t) = x_M(t) + l \sin \alpha(t), \quad (18.43)$$

где  $x_M(t)$  – координата точки подвеса маятника, жестко связанной с тележкой, относительно инерциальной системы отсчета.

Уравнение кинематической связи (уравнение, связывающее угловое ускорение маятника  $\ddot{\alpha}(t)$  и ускорение тележки  $\ddot{x}_M(t)$ ) можно получить, рассматривая движение центра масс системы тел «маятник + тележка» относительно инерциальной системы отсчета. Координата центра масс  $x_{цм}$  системы тел равна:

$$x_{цм} = \frac{mx_m + Mx_M}{m + M}. \quad (18.44)$$

По условию задачи на указанную систему тел не действуют внешние силы вдоль оси  $X$  (силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем), следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение центра масс равно нулю:

$$\ddot{x}_{цм} = 0. \quad (18.45)$$

При этом центр масс данной системы тел в зависимости от начальных условий будет двигаться вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью или покоиться.

Дифференцируя (18.44) дважды по времени с учетом (18.43) и (18.45), получаем следующее уравнение кинематической связи для ускорений:

$$(m + M)\ddot{x}_M + ml(-\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \ddot{\alpha} \cos \alpha) = 0. \quad (18.46)$$

При малых углах отклонения маятника ( $\sin \alpha \cong \alpha$ ) уравнения (18.42), (18.43) и (18.46) преобразуются к виду:

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\alpha - m\ddot{x}_M l, \quad (18.47)$$

$$x_m(t) = x_M(t) + l\alpha(t), \quad (18.48)$$

$$(m + M)\ddot{x}_M + ml\ddot{\alpha} = 0. \quad (18.49)$$

Полученная система уравнений (18.47) – (18.49) позволяет найти искомые законы движения маятника  $x_m(t)$  и тележки  $x_M(t)$  относительно лабораторной инерциальной системы отсчета.

III. Преобразуя систему уравнений (18.47) – (18.49), получаем уравнение гармонических колебаний (см. (18.1)) маятника относительно тележки:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}(1 + m/M)\alpha = 0. \quad (18.50)$$

Следовательно, частота собственных колебаний маятника  $\omega_0$  равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}(1 + m/M)}.$$

На рис. 18.12 изображена зависимость частоты колебаний маятника  $\omega_0$  от отношения масс  $m/M$  маятника и тележки. Отметим, что при увеличении массы маятника частота колебаний монотонно возрастает, а при достаточно малой массе маятника  $m \ll M$  частота его колебаний совпадает с частотой колебаний математического маятника с неподвижной

точкой подвеса (18.17) –  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Решением уравнения (10) является гармоническая функция:

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18.51)$$

Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  в (18.51) определяются начальными условиями, которые в соответствии с условиями задачи записываются в виде:

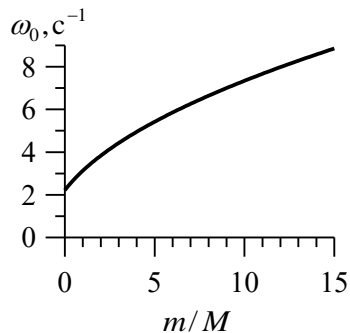


Рис. 18.12. Зависимость частоты колебаний маятника от отношения масс  $m/M$ .

$$\alpha(t=0) = 0, \quad \dot{\alpha}(t=0) = -\frac{V_0}{l}.$$

В результате для угла отклонения маятника имеем:

$$\alpha(t) = \frac{V_0}{l\omega_0} \cos(\omega_0 t + \pi/2) = -\frac{V_0}{l\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (18.52)$$

Дифференцируя (18.52) дважды по времени и подставляя  $\ddot{\alpha}$  в (18.50) получаем дифференциальное уравнение второго порядка для координаты тележки  $x_M$ :

$$\ddot{x}_M = -\frac{m/M}{1+m/M} V_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (18.53)$$

Интегрируя (18.53) с начальными условиями

$$x_M(t=0) = 0, \quad \dot{x}_M(t=0) = V_0,$$

находим искомый закон движения тележки относительно лабораторной инерциальной системы отсчета:

$$x_M(t) = \frac{1}{1+m/M} V_0 t + A_M \sin(\omega_0 t), \quad (18.54)$$

где

$$A_M = \frac{m/M}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0} = \frac{m}{M} \cdot \frac{V_0 \sqrt{l/g}}{(1+m/M)^{3/2}}. \quad (18.55)$$

На рис. 18.13 изображены зависимости координаты тележки  $x_M(t)$  от времени при различных значениях отношения масс  $m/M$  маятника и тележки.

Зависимости получены в соответствии с (18.54) при значениях начальной скорости тележки  $V_0 = 1 \text{ м/с}$  и длины маятника  $l = 2 \text{ м}$ . Как видим, поступательное движение тележки представляет собой суперпозицию движения с постоянной скоростью  $\frac{1}{1+m/M} V_0$  и гармонических колебаний с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_M$  (см. (18.54)). Заметим, что при достаточно малой массе маятника  $m \ll M$  колебательное движение тележки практически незаметно, поскольку происходит с малыми амплитудой  $A_M$  и частотой.

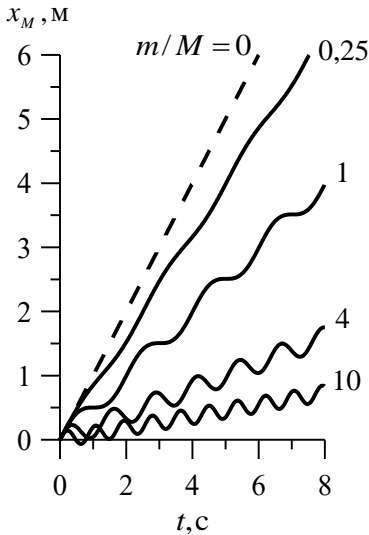


Рис. 18.13. Зависимость координаты тележки от времени.

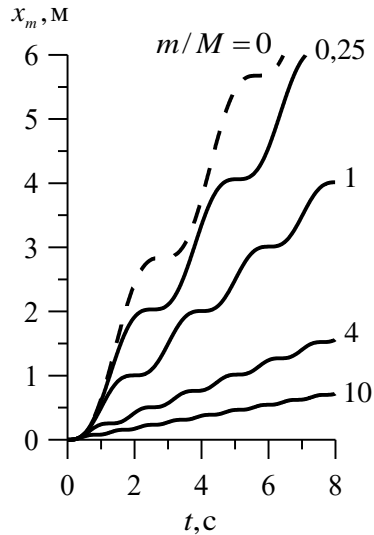


Рис. 18.14. Зависимости координаты маятника от времени.

Искомый закон движения маятника  $x_m(t)$  относительно лабораторной инерциальной системы отсчета находим, используя принцип суперпозиции движений (18.43) и полученные законы изменения угла отклонения  $\alpha(t)$  маятника (18.52) и движения  $x_M(t)$  тележки (18.54):

$$x_m(t) = \frac{1}{1+m/M} V_0 t - A_m \sin(\omega_0 t), \quad (18.56)$$

где

$$A_m = \frac{1}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0} = \frac{V_0 \sqrt{l/g}}{(1+m/M)^{3/2}}. \quad (18.57)$$

На рис. 18.14 изображены зависимости координаты маятника  $x_m(t)$  от времени при различных значениях отношения масс  $m/M$  маятника и тележки. Зависимости получены в соответствии с (18.56) при тех же значениях начальной скорости тележки и длины маятника, что и в случае расчета зависимостей координаты тележки (см. рис. 18.13). Как видим, движение маятника, как и в случае тележки, представляет собой суперпозицию движения с той же по-

стоянной скоростью  $\frac{1}{1+m/M}V_0$  и гармонических колебаний с той же частотой  $\omega_0$ , но другой амплитудой  $A_m$  (см. (18.57)). Заметим, что колебательное движение маятника практически незаметно при достаточно большой массе маятника  $m \gg M$ , поскольку происходит с малой амплитудой  $A_m$ .

На рис. 18.15 изображены зависимости амплитуд колебаний тележки  $A_M$  и маятника  $A_m$  от соотношения их масс при указанных выше значениях начальной скорости тележки и длины маятника. Как видим, амплитуда колебаний маятника  $A_m$  монотонно уменьшается с увеличением отношения масс  $m/M$ . При этом амплитуда колебаний тележки  $A_M$  сначала возрастает, достигая максимума, а затем монотонно убывает.

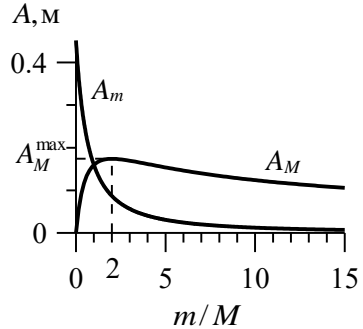


Рис. 18.15. Зависимость амплитуд колебаний тележки и маятника от отношения их масс.

Амплитуда колебаний маятника  $A_m$  в соответствии с (18.57) стремится к своему максимальному значению  $A_m^{\max} = V_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$  при неограниченном уменьшении отношения масс маятника и тележки  $m/M \rightarrow 0$ .

Амплитуда колебаний тележки  $A_M$  в соответствии с (18.55) максимальна при значении отношения масс маятника и тележки  $m/M = 2$  независимо от начальной скорости тележки и длины маятника и равна  $A_M^{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}V_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

**Ответ:** 
$$x_m(t) = \frac{1}{1+m/M}V_0 t - A_m \sin(\omega_0 t),$$

$$A_m = \frac{1}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}, \quad A_m^{\max} = V_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{при } m/M \rightarrow 0.$$

$$x_M(t) = \frac{1}{1+m/M} V_0 t + A_M \sin(\omega_0 t),$$

$$A_M = \frac{m/M}{1+m/M} \cdot \frac{V_0}{\omega_0}, \quad A_M^{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} V_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{при } m/M = 2.$$

**Задача 18.3.4.** (Энергетический метод). Тело вращения с максимальным радиусом  $r$ , моментом инерции  $J$  (относительно его оси симметрии) и массой  $m$  катается без проскальзывания по цилиндрической поверхности опоры радиусом  $R$ , совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 18.16). Найти частоту колебаний.

### Решение

I. На тело в процессе движения действуют сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$  в точке соприкосновения тела с цилиндрической поверхностью (см. рис. 18.16). Силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Тело вращения и опору считаем абсолютно твердыми телами, поэтому трение качения не учитываем.

Задачу решаем энергетическим методом. Механическая энергия тела, катающегося без проскальзывания по цилиндрической поверхности, сохраняется, поскольку суммарная работа всех непотенциальных сил, действующих на него, равна нулю (см. п. 7.1 в Главе 7).

II. Кинетическая энергия тела по теореме Кенига равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью, равной скорости центра масс  $V$ , и энергии вращательного движения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр масс:

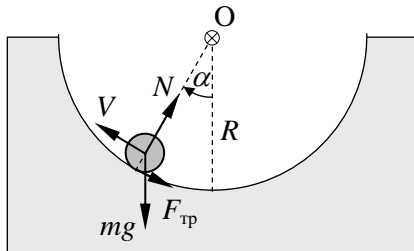


Рис. 18.16. Силы, действующие на тело при отклонении от положения равновесия.

$$E^k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (18.58)$$

Здесь  $J$  – момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс, а скорость центра масс тела в соответствии с рис. 18.16 равна

$$V = (R - r)\dot{\alpha}, \quad (18.59)$$

где  $\alpha$  – угол, задающий положение центра масс тела на цилиндрической поверхности.

Если принять потенциальную энергию тела в положении его равновесия равной нулю, то при отклонении центра масс на угол  $\alpha$  потенциальная энергия становится равной (см. рис. 18.16)

$$E^p = mg(R - r)(1 - \cos\alpha) \approx \frac{mg}{2}(R - r)\alpha^2. \quad (18.60)$$

Поскольку механическая энергия тела сохраняется, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^k + E^p) = 0. \quad (18.61)$$

Поскольку тело осуществляет плоское движение, рассмотрим это движение как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью  $\omega$ . По условию задачи качение происходит без проскальзывания, следовательно, мгновенная ось вращения проходит через точки соприкосновения тела с цилиндрической поверхностью и скорость центра масс тела равна:

$$V = \omega r. \quad (18.62)$$

Приравнявая правые части выражений (18.59) и (18.62) для скорости центра масс, получаем уравнение кинематической связи для угловой скорости вращения  $\omega$  тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и угловой скорости вращения  $\dot{\alpha}$  центра масс вокруг геометрической оси цилиндрической поверхности:

$$\omega = \frac{R - r}{r} \dot{\alpha}. \quad (18.63)$$

III. Решая совместно уравнения (18.58) – (18.61) и (18.63), получаем уравнение гармонических колебаний тела:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr^2}{(R - r)(mr^2 + J)} \alpha = 0. \quad (18.64)$$

Сравнивая (18.64) с (18.1), получаем искомое выражение для частоты собственных гармонических колебаний тела вращения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}}.$$

В частности, для сплошного цилиндра  $\left( J_{\text{цил}} = \frac{mr^2}{2} \right)$  и шара

$\left( J_{\text{шар}} = \frac{2}{5}mr^2 \right)$  полученное выражение принимает вид:

$$\omega_{0\text{цил}} = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}},$$

$$\omega_{0\text{шар}} = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

**Ответ:**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{(R-r)(mr^2 + J)}}.$

**Задача 18.3.5.** (*Энергетический метод*). Определить частоту  $\omega_0$  малых собственных гармонических колебаний жидкости в тонкой трубке U-образной формы с изменяющимся вдоль трубки поперечным сечением, помещенной в поле сил тяжести Земли. Считать заданной зависимость площади поперечного сечения трубки  $S$  от координаты  $s$  вдоль трубки, а также длину заполненной жидкостью части трубки  $L$ .

### Решение

I. Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, жидкость будем считать невязкой и несжимаемой. Задачу решаем энергетическим методом. Примем за ноль отсчета потенциальной энергии жидкости ее положение равновесия. По условию задачи сообщающиеся сосуды имеют неправильную форму, следовательно, смещение различных частиц жидкости при колебаниях будет различно, в отличие от колебаний в трубке с постоянным поперечным сечением. Введем обозначения:  $A_1$  – амплитуда малых гармонических колебаний жидкости в левом колене трубки,  $A_2$  – амплитуда малых гармонических колебаний в правом колене,  $\rho$  – плотность жидкости.



II. Пусть площадь поперечного сечения трубки есть известная функция координаты вдоль трубки  $S(s)$ . Масса всей жидкости равна

$$m = \int_0^L \rho S ds \quad (L - \text{длина заполненной жидкостью части трубки}).$$

Колебания считаем малыми, поэтому площадь поперечного сечения трубки на расстоянии двойной амплитуды колебаний можно считать неизменной. Следовательно, если  $S_1$  и  $S_2$  – площади сечения правой и левой свободных поверхностей несжимаемой жидкости в трубке соответственно, то

$$A_1 S_1 = A_2 S_2. \quad (18.65)$$

Будем отсчитывать координату  $s$  от левой свободной поверхности жидкости в положении равновесия. Координата правой свободной поверхности в положении равновесия равна длине столба жидкости  $s = L$ . Амплитуду колебаний  $A$  в сечении с произвольной координатой  $0 \leq s \leq L$  площадью  $S$  находим из условия  $A_1 S_1 = AS$ , аналогичного (18.65). Тогда в случае гармонических колебаний амплитуда  $V$  колебаний скорости частиц жидкости в сечении трубки с координатой  $s$  равна

$$V = \omega_0 A = \omega_0 A_1 \frac{S_1}{S}.$$

Запишем кинетическую энергию всей жидкости в момент прохождения ею положения равновесия:

$$E_{\max}^k = \int_0^L \frac{\rho S ds V^2}{2} = \frac{\rho \omega_0^2 A_1^2 S_1^2}{2} \int_0^L \frac{ds}{S}. \quad (18.66)$$

Через четверть периода вся энергия будет потенциальной и определяться работой сил тяжести по перемещению объема жидкости  $A_1 S_1 = A_2 S_2$  на высоту  $\frac{A_1 + A_2}{2}$ :

$$E_{\max}^p = \rho S_1 A_1 \frac{A_1 + A_2}{2} g = \frac{\rho S_1 A_1^2 g}{2} \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (18.67)$$

Поскольку силами вязкого трения и сопротивления воздуха пренебрегаем, механическая энергия жидкости сохраняется:

$$E_{\max}^k = E_{\max}^p. \quad (18.68)$$

III. Подставляя (18.66) и (18.67) в (18.68), получим уравнение для частоты собственных колебаний жидкости  $\omega_0$ :

$$\frac{\rho \omega_0^2 A_1^2 S_1^2}{2} \int_0^L \frac{ds}{S} = \frac{\rho S_1 A_1^2 g}{2} \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (18.69)$$

Из (18.69) непосредственно следует выражение для искомой частоты собственных колебаний жидкости в трубке:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 \int_0^L \frac{ds}{S}}}. \quad (18.70)$$

Полученное выражение (18.70) при  $S = \text{const}$  переходит в известную формулу для частоты собственных колебаний жидкости в U-образной трубке с постоянным поперечным сечением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

**Ответ:**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$

**Задача 18.3.6.** (*Энергетический метод*). Четыре легких стержня длиной  $l$  шарнирно соединены с тремя маленькими шариками массами  $m$ , как показано на рис. 18.17. Верхняя точка O шарнирного соединения стержней неподвижна. Система вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси OY. Шарик слегка выводит из положения равновесия и отпускают. Найти частоту малых колебаний системы при условии  $\Omega > \frac{2g}{l}$ .

### Решение

I. При решении задачи стержни будем считать невесомыми и нерастяжимыми, шарики – материальными точками. Трением в подвесе и точках шарнирных соединений, а также трением о воздух пренебрегаем.

Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ . Оси декартовой системы координат изображены на рис. 18.17. При вращении системы тел вокруг вертикальной оси стержни отклоняются от вертикального положения и составляют в положении равновесия некоторый угол с вертикальной осью. После небольшого отклонения от равновесного положения, возникающего, например, при смещении вниз нижнего шарика, в системе возникнут колебания.

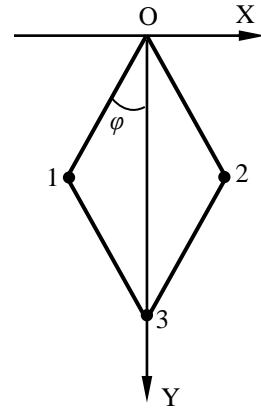


Рис. 18.17. Колебательная система, состоящая из трех шариков, шарнирно соединенных стержнями.

II, III. В выбранной системе координат координаты шариков определяются выражениями:

$$|x_1| = |x_2| = l \sin \varphi, \quad x_3 = 0, \quad (18.71)$$

$$y_1 = y_2 = l \cos \varphi, \quad y_3 = 2l \cos \varphi, \quad (18.72)$$

где  $\varphi$  – угол отклонения стержней от вертикальной оси OY. Индексы в обозначениях координат соответствуют нумерации шариков на рис. 18.17.

Дифференцируя координаты шариков (18.71), (18.72) по времени, получим проекции скоростей шариков на оси выбранной системы координат:

$$|v_{1x}| = |v_{2x}| = l \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad |v_{3x}| = 0, \quad (18.73)$$

$$|v_{1y}| = |v_{2y}| = l \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad |v_{3y}| = 2l \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (18.74)$$

Используя полученные выражения для проекций скоростей шариков (18.73) и (18.74), запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$E^k = 2 \frac{ml^2 (\cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2)}{2} + \frac{m(2l)^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2}{2} = ml^2 (1 + 2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \quad (18.75)$$

Потенциальная энергия системы тел в поле силы тяжести и поле сил инерции равна:

$$E^p = -ml^2 \left( \frac{4g}{l} \cos \varphi + \Omega^2 \sin^2 \varphi \right). \quad (18.76)$$

При записи выражения для потенциальной энергии (18.76) была введена следующая нормировка: ноль потенциальной энергии в поле силы тяжести соответствует точке подвеса стержней, а ноль потенциальной энергии в поле сил инерции выбран при вертикальном положении стержней.

Положение равновесия системы найдем из условия минимума потенциальной энергии  $\frac{dE^p}{d\varphi} = 0$ :

$$\frac{4g}{l} \sin \varphi_0 - \Omega^2 2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0. \quad (18.77)$$

Уравнение (18.77) имеет два решения:

1)  $\sin \varphi_0 = 0$ , соответствующее неустойчивому положению равновесия;

2)  $\cos \varphi_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$ , соответствующее устойчивому положению равновесия. Здесь введено обозначение  $\Omega_0^2 = \frac{2g}{l}$ .

Угол отклонения от положения равновесия  $\theta = \varphi - \varphi_0$ . Разложим кинетическую (18.75) и потенциальную энергию (18.76) в окрестности точки  $\varphi = \varphi_0$  в ряд по степеням  $\theta$  и ограничимся квадратичными членами:

$$E^k = ml^2 \dot{\theta}^2 \left( 3 - 2 \frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} \right),$$

$$E^p = ml^2 \left( \left( \Omega^2 - \frac{\Omega_0^4}{\Omega^2} \right) \theta^2 + \frac{\Omega_0^4}{\Omega^2} + \Omega^2 \right).$$

Подставляя  $E^k$  и  $E^p$  в закон сохранения механической энергии  $\frac{\partial}{\partial t} (E^k + E^p) = 0$ , получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \left( \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} \right) \theta = 0.$$

Следовательно, искомая круговая частота малых колебаний равна:

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}.$$

**Ответ:**  $\omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}$ , где  $\Omega_0^2 = \frac{2g}{l}$ .

**Задача 18.3.7.** (*Энергетический метод*). Горизонтальный пружинный маятник состоит из однородной пружины массой  $m_0$  с большим числом витков и небольшого груза массой  $m$ , прикрепленного к одному из концов пружины. Другой конец пружины неподвижно закреплен. Коэффициент жесткости пружины равен  $k$ . Пренебрегая трением, найти частоту малых гармонических колебаний такого маятника.

### Решение

I. Задачу решаем энергетическим методом. При гармонических колебаниях происходит периодическая перекачка кинетической энергии в потенциальную и обратно. При этом максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии. Особенность данной задачи заключается в том, что рассматривается весомая пружина, обладающая не только потенциальной энергией, но и кинетической, причем разные элементы пружины имеют различную скорость. Скорость витков пружины изменяется от нуля в точке ее неподвижного закрепления до скорости груза, прикрепленного к другому концу пружины.

II, III. Пусть пружина имеет длину  $L$ . Рассмотрим маятник в момент времени, когда груз проходит положение равновесия, имея максимальную скорость  $V$ . Так как пружина однородная, то элемент пружины длиной  $dx$  и массой  $dm = \frac{m_0}{L} dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от точки закрепления конца пружины, имеет в этот момент скорость  $v = \frac{V}{L}x$ . Поэтому кинетическая энергия этого элемента пружины равна

$$dE_{\text{пр}}^k = \frac{dm \cdot v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0}{L} dx \cdot \frac{V^2}{L^2} x^2. \quad (18.78)$$

Полную кинетическую энергию пружины находим, интегрируя (18.78) по всей длине пружины:

$$E_{\text{пр}}^k = \frac{m_0 V^2}{2L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{m_0 V^2}{6}.$$

Суммарная кинетическая энергия маятника равна:

$$E^k = E_{\text{пр}}^k + \frac{mV^2}{2} = \frac{m_0 V^2}{6} + \frac{mV^2}{2}. \quad (18.79)$$

При гармонических колебаниях максимальная скорость маятника связана с амплитудой колебаний  $A$  и круговой частотой  $\omega$  соотношением  $V_{\text{max}} = \omega A$ . Используя (18.79), нетрудно получить значение максимальной кинетической энергии колебательной системы:

$$E_{\text{max}}^k = \frac{\omega^2 A^2}{2} \left( \frac{m_0}{3} + m \right). \quad (18.80)$$

Максимальная потенциальная энергия упругой деформации пружины равна

$$E_{\text{max}}^p = \frac{kA^2}{2}. \quad (18.81)$$

При гармонических колебаниях максимальные значения кинетической и потенциальной энергии маятника равны:  $E_{\text{max}}^k = E_{\text{max}}^p$ . Приравняв правые части (18.80) и (18.81), находим искомую частоту гармонических колебаний груза на весовой пружине:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}}.$$

**Ответ:** 
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}}.$$

**Задача 18.3.8.** На гладкую невесомую нерастяжимую нить длиной  $l$  надета маленькая бусинка массой  $m$ . Концы нити прикреплены к потолку так, что глубина провисания нити оказалась равной  $h$  (см. рис. 18.19). Определить отношение периодов малых колебаний бусинки вдоль нити в плоскости чертежа и в перпендикулярной плоскости. Силами трения можно пренебречь.

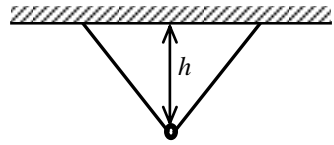


Рис. 18.18. Колебательная система, состоящая из бусинки, подвешенной на невесомой нити.

### Решение

Эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до фокусов имеет одинаковое значение. Поскольку нить нерастяжима, траектория движения бусинки при колебаниях в плоскости чертежа является полуэллипсом с положением фокусов в точках подвеса нитей (см. рис. 18.19). Уравнение эллипса в декартовых координатах, изображенных на рис. 18.19, имеет вид:

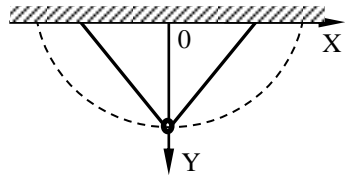


Рис. 18.19. Траектория бусинки и оси системы координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{18.82}$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса, связанные с глубиной провисания нити и ее длиной очевидными соотношениями:

$$b = h, \quad 2a = l. \tag{18.83}$$

При малых колебаниях в плоскости чертежа можно считать, что бусинка движется по дуге окружности с радиусом, равным радиусу кривизны эллипса в нижней точке.

Радиус кривизны плоской линии определяется выражением:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

где  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ .

При задании уравнения кривой в параметрической форме выражение для радиуса кривизны траектории принимает вид:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}, \text{ где } x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

В нижней точке эллипса с координатами  $x = 0$ ,  $y = b$  радиус кривизны равен:

$$R = \frac{a^2}{b} = \frac{l^2}{4h}.$$

Период колебаний бусинки в плоскости чертежа определяется формулой для периода колебаний математического маятника длиной  $R$ :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{4hg}} = \frac{\pi l}{\sqrt{gh}}. \quad (18.84)$$

Период колебаний бусинки в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, определяется формулой для периода колебаний математического маятника длиной  $h$ :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (18.85)$$

Искомое отношение периодов равно:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{2h}.$$

*Второй способ нахождения круговой частоты колебаний бусинки вдоль нити.*

Выразим вертикальную координату бусинки из уравнения эллипса (18.82) с учетом соотношения (18.83):

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = h \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}. \quad (18.86)$$



Разложим выражение (18.86) в ряд по степеням малого параметра  $\left(\frac{x}{l}\right)^2$  и ограничимся линейным членом:

$$y \approx h \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2}{l^2} \right) = h - \frac{2hx^2}{l^2}. \quad (18.87)$$

Потенциальную энергию бусинки примем равной нулю в нижнем положении. В момент времени, когда горизонтальная координата бусинки становится равной  $x$ , ее потенциальная энергия принимает значение

$$E^p = mg(h - y) = \frac{2mghx^2}{l^2}.$$

Кинетическая энергия бусинки в произвольный момент времени равна

$$E^k = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}.$$

При малых колебаниях вертикальная координата (в соответствии с формулой (18.87)) отличается от  $h$  на величину, пропорциональную квадрату горизонтальной координаты  $x$ . Поэтому, пренебрегая членами второго порядка малости кинетическую энергию можно считать равной

$$E^k = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Подставляя  $E^k$  и  $E^p$  в закон сохранения механической энергии  $\frac{\partial}{\partial t}(E^k + E^p) = 0$ , получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{4gh}{l^2}x = 0.$$

Следовательно, круговая частота колебаний бусинки вдоль нити равна

$$\omega_1^2 = \frac{4gh}{l^2}.$$

**Ответ:**  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{2h}$ .

**Задача 18.3.9.** Два одинаковых маленьких тела массой  $m$  прикреплены к концам невесомой нерастяжимой гладкой нити, продетой через отверстие в горизонтальной пластине (см. рис. 18.20). Верхнее тело скользит по поверхности пластины по круговой траектории с угловой скоростью  $\Omega$ , при этом нижнее тело остается неподвижным. В результате небольшого толчка нижнее тело начинает совершать малые вертикальные колебания. Определить частоту этих колебаний. Трением пренебречь.

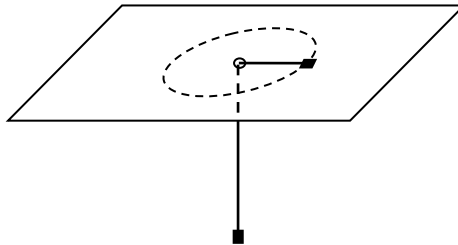


Рис. 18.20. Колебательная система, состоящая из двух тел, связанных нитью.

### Решение

I. Задачу о нахождении частоты колебаний решаем энергетическим методом, используя также уравнения динамики и закон сохранения момента импульса. Тела считаем материальными точками, нить – невесомой и нерастяжимой. Трением пренебрегаем. В состоянии равновесия нижнее тело покоится, а верхнее движется в горизонтальной плоскости по окружности.

II, III. В состоянии равновесия системы уравнения движения верхнего и нижнего тел имеют вид:

$$\begin{aligned} m\Omega^2 R &= T, \\ mg - T &= 0, \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус траектории верхнего тела,  $T$  – сила натяжения нити.

Следовательно, радиус круговой траектории верхнего тела равен:

$$R = \frac{g}{\Omega^2}. \quad (18.88)$$

На верхнее тело действуют три силы – сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила натяжения нити. При смещении нижнего тела вниз из положения равновесия на расстояние  $x$  происходит изменение траектории верхнего тела под действием изменившейся силы натяжения нити. Запишем закон сохранения момента импульса для верхнего тела при изменении радиуса окружности на  $x$ :

$$mR^2\Omega = m(R-x)^2\Omega'. \quad (18.89)$$

Здесь  $\Omega'$  – угловая скорость вращения верхнего тела при смещении нижнего тела на расстояние  $x$  вниз от положения равновесия.

Закон сохранения механической энергии для системы «два тела + нить» имеет вид:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{m(R-x)^2\Omega'^2}{2} - mgx = const, \quad (18.90)$$

где  $V$  – скорость нижнего тела, равная проекции скорости верхнего тела на направление нити.

Закон сохранения механической энергии (18.90) с учетом закона сохранения момента импульса (18.89) преобразуем к виду:

$$mV^2 + \frac{m\Omega^2 R^4}{2(R-x)^2} - mgx = const. \quad (18.91)$$

Дифференцируя (18.91) по времени, получаем:

$$2\ddot{x} + \frac{\Omega^2 R^4}{(R-x)^3} - g = 0. \quad (18.92)$$

Разложим второе слагаемое в левой части (18.92) в ряд в окрестности точки  $x = 0$  и ограничимся линейным членом разложения:

$$\frac{1}{(R-x)^3} \approx \frac{1}{R^3} + \frac{3x}{R^4}. \quad (18.93)$$

Подставляя (18.88) и (18.93) в (18.92), получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\Omega^2 x = 0. \quad (18.94)$$

Следовательно, искомая частота колебаний равна:

$$\omega_0 = \Omega\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

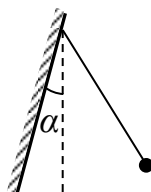
**Ответ:**  $\omega_0 = \Omega\sqrt{\frac{3}{2}}.$

### 18.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 18.4.1** ([3], 4.21). Вычислить период малых колебаний ареометра, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра  $m = 50$  г, радиус его трубки  $r = 3,2$  мм, плотность жидкости  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Силами вязкого трения пренебречь.

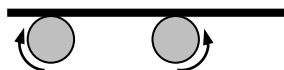
**Ответ:**  $T = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}} = 2,5$  с.

**Задача 18.4.2** ([3], 4.17). Шарик подвесили на нити длиной  $l$  к стенке, составляющей небольшой угол  $\alpha$  с вертикалью (см. рис.). Затем нить с шариком отклонили на небольшой угол  $\beta > \alpha$  и отпустили. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника.



**Ответ:**  $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)}.$

**Задача 18.4.3** ([3], 4.25). Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока (см. рис.). Расстояние между осями блоков  $l = 20$  см, коэффициент трения между стержнем и блоками  $k = 0,18$ . Найти период колебаний стержня.



**Ответ:**  $T = \pi\sqrt{\frac{2l}{kg}} = 1,5$  с.

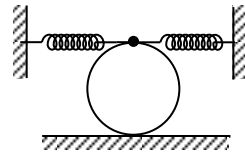
**Задача 18.4.4** ([3], 4.49). Однородный стержень массой  $m = 1,5$  кг, висающий на двух одинаковых нитях длиной  $l = 90$  см, повернули на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При этом нити отклонились на угол  $\alpha = 5^\circ$ . Затем стержень отпустили, и он начал совершать малые колебания. Найти период колебаний и энергию колебаний стержня.

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}} = 1,1 \text{ с}, \quad E = \frac{mgl\alpha^2}{2} = 0,05 \text{ Дж}.$$

**Задача 18.4.5** ([3], 4.64). Два кубика, массы которых равны  $m_1$  и  $m_2$ , соединили невесомой пружиной жесткостью  $k$  и положили на гладкую горизонтальную плоскость. Затем кубики немного сблизили и одновременно отпустили. Найти частоту малых колебаний системы.

$$\text{Ответ: } \omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

**Задача 18.4.6** ([3], 4.62). Сплошной однородный цилиндр массой  $m$  совершает малые колебания под действием двух горизонтальных пружин суммарной жесткостью  $k$  (см. рис.). Найти период этих колебаний в отсутствие проскальзывания цилиндра по плоскости.



$$\text{Ответ: } T = \pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

**Задача 18.4.7** ([3], 4.19). Жидкость, имеющая объем  $V$ , налита в U-образную трубку с площадью поперечного сечения  $S$ . Пренебрегая вязкостью, найти период малых колебаний жидкости.

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{2gS}}.$$

**Задача 18.4.8** ([2], 599). В какой точке следует подвесить однородный стержень длиной  $l$ , чтобы частота его колебаний, как физического маятника, была максимальна?

*Ответ:* расстояние от точки подвеса до середины стержня

$$S = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

**Задача 18.4.9** ([2], 587). Однородная палочка подвешена за оба конца на двух одинаковых нитях длиной  $L$ . В состоянии равновесия нити параллельны. Найти период малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через середину палочки.

*Ответ:*  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g}}$ .

**Задача 18.4.10** ([2], 588). Тело вращения радиуса  $a$  с моментом инерции  $J$  относительно геометрической оси и массой  $m$  катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиуса  $R$ , совершая малые колебания около положения равновесия. Найти период колебаний.

*Ответ:*  $T = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{J}{ma^2}\right) \frac{R-a}{g}}$ .

## ГЛАВА 19

### СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

#### 19.1. Теоретический материал

**Уравнение движения** в случае собственных затухающих колебаний имеет вид:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (19.1)$$

где  $\delta$  – **коэффициент затухания** (определяется характеристиками системы).

Решения уравнения (19.1) различны в зависимости от соотношения коэффициента затухания  $\delta$  и частоты собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$ .

Случай собственных затухающих колебаний – с затуханием меньше критического ( $\delta < \omega_0$ ).

**Закон движения** в этом случае имеет вид (см. рис. 19.1):

$$\xi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (19.2)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  и  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$  – **угловая частота и период затухающих колебаний**.

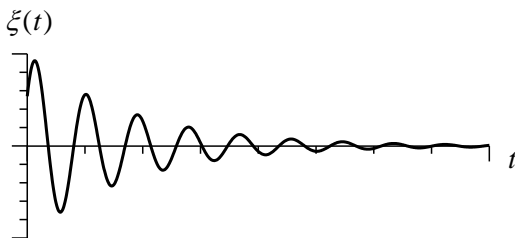


Рис. 19.1. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае затухающих колебаний.

**Логарифмический декремент затухания**  $\mathcal{D}$  – логарифм отношения значений обобщенной координаты в моменты времени  $t$  и  $t + T$ :

$$\mathcal{D} \equiv \ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+T)} = \delta T. \quad (19.3)$$

Заметим, что

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+NT)} = N\delta T = N\mathcal{G}. \quad (19.4)$$

Обратная величина логарифмического декремента затухания равна числу периодов, за которые амплитуда колебаний уменьшится в  $e \cong 2.7$  раз:

$$\ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+N_e T)} = N_e \mathcal{G} = 1, \quad \frac{1}{\mathcal{G}} = N_e. \quad (19.5)$$

Средняя механическая энергия  $\langle E \rangle_T$  за период  $T$  меняется со временем по экспоненциальному закону, поскольку потенциальная  $E^p$  и кинетическая  $E^k$  энергии механической системы квадратично зависят от обобщенных координат и скоростей:

$$\langle E \rangle_T = \langle E^k \rangle_T + \langle E^p \rangle_T = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (19.6)$$

При этом **средняя мощность потерь**  $\langle P \rangle_T$  равна:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = - \frac{d\langle E \rangle_T}{dt} = 2\delta E_0 e^{-2\delta t}. \quad (19.7)$$

**Добротность колебательной системы**  $Q$  определяется отношением средней за период механической энергии системы к средней мощности потерь:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle E \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{2\delta E_0 e^{-2\delta t} T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\mathcal{G}} = \frac{\omega}{2\delta}. \quad (19.8)$$

Случай апериодического движения – с затуханием больше критического ( $\delta > \omega_0$ ).

**Закон движения** в этом случае записывается в виде:

$$\xi(t) = A_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (19.9)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

В зависимости от начальных условий постоянные величины  $A_1$  и  $A_2$  могут быть как одного, так и разных знаков.

При  $\frac{A_1}{A_2} > 0$  обобщенная координата  $\xi(t)$  монотонно стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 19.2).



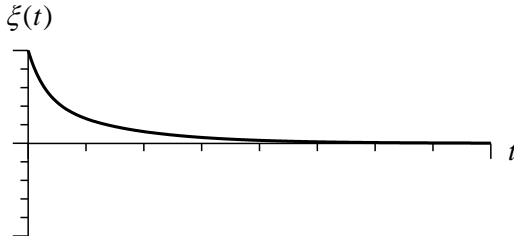


Рис. 19.2. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае аperiodического движения при  $\frac{A_1}{A_2} > 0$ .

При  $\frac{A_1}{A_2} < 0$  обобщенная координата  $\xi(t)$  в некоторый момент времени обращается в ноль, затем достигает локального экстремума и далее монотонно стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 19.3).

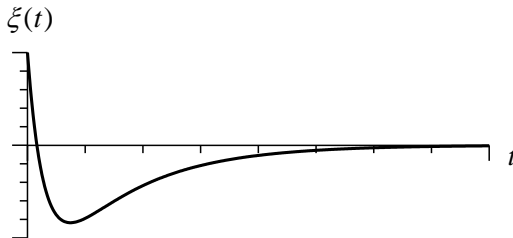


Рис. 19.3. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае аperiodического движения при  $\frac{A_1}{A_2} < 0$ .

Случай критического затухания ( $\delta = \omega_0$ ).

**Закон движения** в этом случае имеет вид:

$$\xi(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}, \quad (19.10)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные величины, определяемые начальными условиями.

Возможные виды зависимости обобщенной координаты от времени при различных начальных условиях изображены на рис. 19.4.

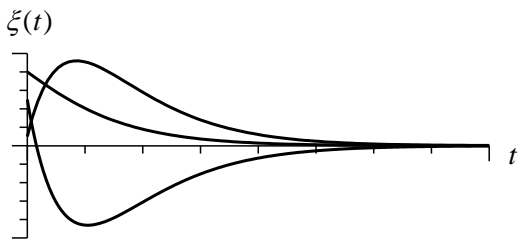


Рис. 19.4. Зависимость обобщенной координаты  $\xi(t)$  от времени в случае критического затухания.

Независимо от соотношения коэффициента затухания  $\delta$  и частоты собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$  обобщенная координата  $\xi(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

## 19.2. Основные типы задач и методы их решения.

При решении задач данной главы возможны два метода решения – так называемые динамический и энергетический методы. Динамический метод предполагает использование уравнений движения, а энергетический – закона сохранения механической энергии колеблющейся системы тел.

Если задача сводится к колебаниям материальной точки, то основные этапы решения определяются общими схемами решения задач, описанными в **Главе 3** (динамический метод) и **Главе 7** (энергетический метод). При решении задачи о колебаниях абсолютно твердого тела используются схемы, описанные в **Главах 15,16** (динамический метод) и **Главе 7** (энергетический метод). Как правило, при использовании обоих методов на последнем этапе решения получают уравнение и закон движения рассматриваемой механической системы. В любом случае при решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

### 19.3. Примеры решения задач

**Задача 19.3.1.** Ступенчатый цилиндрический блок может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, совпадающей с осью симметрии блока. Радиусы цилиндров блока –  $R$  и  $r$ . Момент инерции блока относительно указанной оси равен  $J$ . На цилиндры намотаны две невесомые нерастяжимые нити, начала которых закреплены на разных цилиндрах. На конце правой нити висит тело массой  $m$ . Конiec левой нити прикреплен к легкой пружине с коэффициентом жесткости  $k$ , нижний конец которой закреплен так, что ось пружины вертикальна (рис. 19.5). Тело совершает малые вертикальные колебания в жидкости с коэффициентом вязкого трения  $\eta$ . Определить закон движения тела, если в положении равновесия ему сообщили скорость  $V_0$ .

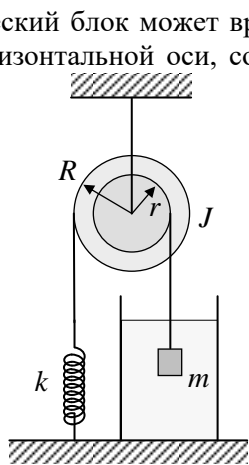


Рис. 19.5. Колебательная система.

#### Решение

I. Задачу решаем динамическим методом в лабораторной инерциальной системе отсчета. Направим ось  $X$  декартовой системы координат вертикально вниз (см. рис. 19.5). На тело массой  $\delta$  действуют четыре силы – сила тяжести  $mg$ , сила Архимеда  $F_{\text{Арх}}$ , сила натяжения нити  $T_1$  и сила вязкого трения, пропорциональная скорости тела  $F_{\text{тр}} = -\eta \dot{x}$ . Под действием указанных сил тело совершает вертикальные затухающие колебания.

II. Запишем уравнение движения тела в проекции на ось  $X$ :

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{Арх}} - T_1 - \eta \dot{x}. \quad (19.11)$$

Запишем также уравнение моментов для блока относительно закрепленной оси, совпадающей с осью симметрии блока и направленной за плоскость чертежа (рис. 19.6):

$$J\ddot{\alpha} = T_1 r - T_2 R. \quad (19.12)$$

Здесь  $\alpha$  – угол поворота блока,  $T_1$  и  $T_2$  – силы натяжения правой и левой нитей, действующие на блок.

Нить считаем невесомой, следовательно, сила натяжения левой нити равна силе упругости, с которой пружина действует на нить:

$$T_2 = k(x_{\text{пр}} - x_{\text{пр},0}), \quad (19.13)$$

где  $x_{\text{пр}}$  – координата точки крепления левой нити к пружине,  $x_{\text{пр},0}$  – координата той же точки при нерастянутой пружине.

Поскольку нити по условию задачи нерастяжимы, изменение угла поворота блока и изменение координат тела и точки крепления нити к пружине связаны соотношениями:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{r}, \quad (19.14)$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x_{\text{пр}}}{R}. \quad (19.15)$$

Дифференцируя (19.14) по времени, получаем уравнение кинематической связи углового ускорения блока и ускорения тела:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x}}{r}. \quad (19.16)$$

Исключая изменение угла поворота блока  $\Delta\alpha$  из (19.14) и (19.15), получаем уравнение кинематической связи изменений координат точки крепления левой нити к пружине и тела:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \Delta x \frac{R}{r}. \quad (19.17)$$

Воспользовавшись (19.17), преобразуем (19.13) к виду:

$$T_2 = k(x - x_0) \frac{R}{r}, \quad (19.18)$$

где  $x_0$  – координата тела в положении, когда пружина не растянута.

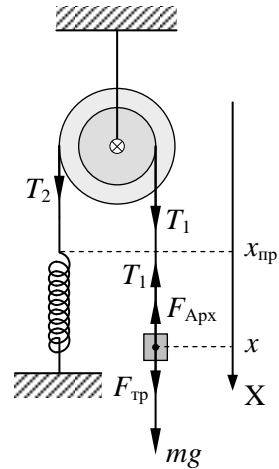


Рис. 19.6. Силы, действующие на тело и на блок в выбранной системе отсчета.

В результате записана полная система уравнений (19.11), (19.12), (19.16) и (19.18), которая с учетом начальных условий позволяет получить закон движения тела.

III. Исключая  $\alpha$ ,  $T_1$  и  $T_2$  из системы уравнений (19.11), (19.12), (19.16) и (19.18), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для координаты тела  $x$ :

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} + \eta\dot{x} - mg + F_{\text{Арх}} + k(x - x_0)\frac{R^2}{r^2} = 0. \quad (19.19)$$

Найдем координату тела  $x_{\text{равн}}$  в положении равновесия, при котором отсутствуют колебания ( $\dot{x} = 0$  и  $\ddot{x} = 0$ ):

$$x_{\text{равн}} = x_0 + (mg - F_{\text{Арх}})\frac{r^2}{kR^2}. \quad (19.20)$$

Сделаем замену переменных, означающую введение координаты тела  $\xi$ , отсчитываемой от положения равновесия:

$$\xi = x - x_{\text{равн}}. \quad (19.21)$$

В этом случае из (19.19) получим уравнение для координаты тела  $\xi$ :

$$\ddot{\xi} + \frac{\eta r^2}{mr^2 + J}\dot{\xi} + \frac{kR^2}{mr^2 + J}\xi = 0, \quad (19.22)$$

которое имеет вид уравнения затухающих колебаний.

Сравнивая полученное уравнение с (19.1), для коэффициента затухания  $\delta$  и частоты собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$  можно записать:

$$\delta = \frac{\eta r^2}{2(mr^2 + J)}, \quad (19.23)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2}{mr^2 + J}}. \quad (19.24)$$

Решением уравнения (19.22) является функция

$$\xi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.25)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – частота затухающих колебаний, определяемая параметрами рассматриваемой колебательной системы,  $A$  – амплитуда и  $\varphi_0$  – начальная фаза, определяемые начальными условиями.

При произвольном выборе начала отсчета лабораторной системы координат закон движения тела будет иметь вид:

$$x(t) = x_{\text{равн}} + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.26)$$

С учетом начальных условий, заданных в задаче,

$$x(t=0) = x_{\text{равн}}, \quad (19.27)$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 \quad (19.28)$$

находим амплитуду колебаний тела  $A$  и начальную фазу  $\varphi_0$ :

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (19.29)$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}. \quad (19.30)$$

Искомый в задаче закон движения тела описывает затухающие колебания относительно положения равновесия (см. рис. 19.7):

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t\right). \quad (19.31)$$

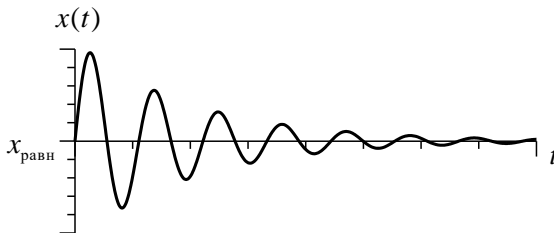


Рис. 19.7. Зависимость координаты тела от времени при затухании, меньшем критического.

Следует отметить, что полученное решение справедливо при малом затухании, когда  $\delta < \omega_0$ . Если неравенство не выполняется, то решением уравнения (19.19) является функция

$$x(t) = x_{\text{равн}} + A_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (19.32)$$

где коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  определяются начальными условиями (19.27) и (19.28):

$$A_1 = -A_2 = \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (19.33)$$

При этом закон движения тела принимает вид:

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left( e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right). \quad (19.34)$$

Выражение (19.34) описывает аperiodический процесс (см. рис. 19.8), при котором в системе не возникает колебаний, она экспоненциально приближается к положению равновесия.

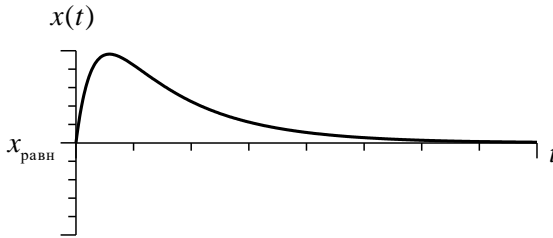


Рис. 19.8. Зависимость координаты тела от времени при затухании, большем критического.

**Ответ:**  $x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t)$  при  $\delta < \omega_0$ ;

$$x(t) = x_{\text{равн}} + \frac{V_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left( e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right) \text{ при } \delta \geq \omega_0.$$

**Задача 19.3.2.** Тонкий однородный диск массой  $m$  и радиусом  $R$ , подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, отклонили на угол  $\alpha_0$  от положения равновесия и отпустили с нулевой начальной угловой скоростью. Диск совершает крутильные колебания в вязкой жидкости (см. рис. 19.9). Сила вязкого трения, действующая на единицу площади поверхности диска со стороны жидкости, равна  $f_b = -\eta v$ , где  $\eta = \text{const}$ ,  $v$  – скорость данного элемента диска относительно жидкости. Момент упругих сил со стороны нити равен  $M_{\text{уп}} = D\alpha$ , где  $D$  – постоянный коэффициент,

$\alpha$  – угол поворота диска относительно положения равновесия. Найти закон движения диска.

### Решение

I. Используем динамический метод решения задачи. Диск будем считать абсолютно твердым телом. На него действуют три силы: сила тяжести, упругая сила со стороны нити и сила вязкого трения, действующая со стороны жидкости. Под действием указанных сил диск совершает затухающие крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска.

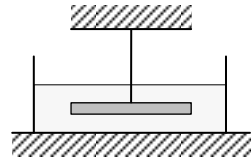


Рис. 19.9. Колебательная система.

II. Запишем уравнение моментов для диска относительно вертикальной оси, проходящей через его центр:

$$J\ddot{\alpha} = M_{\text{упр}} + M_{\text{в}}, \quad (19.35)$$

где  $J$  – момент инерции диска относительно оси вращения,  $M_{\text{в}}$  – момент сил вязкого трения. Момент силы тяжести относительно указанной оси равен нулю.

Момент инерции диска относительно его оси, совпадающей с осью вращения, равен

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (19.36)$$

Запишем момент  $dM_{\text{в}}$  силы трения, действующей на кольцеобразный элемент поверхности диска радиусом  $r$  и площадью  $dS = 2\pi r dr$ :

$$dM_{\text{в}} = -2\pi r dr \eta v r = -2\pi r^3 \eta dr \dot{\alpha}. \quad (19.37)$$

Учитывая, что сила вязкого трения действует на обе поверхности диска, найдем суммарный момент сил трения, интегрируя по обеим поверхностям диска:

$$M_{\text{в}} = -2 \cdot 2\pi \eta \dot{\alpha} \int_0^R r^3 dr = -\pi \eta R^4 \dot{\alpha}. \quad (19.38)$$

III. Уравнение движения диска получаем подстановкой (19.38) в (19.35) с учетом (19.36) и заданного в условии задачи выражения для момента упругих сил:



$$\ddot{\alpha} + \frac{2\pi\eta R^2}{m} \dot{\alpha} + \frac{2D}{mR^2} \alpha = 0. \quad (19.39)$$

Сравнивая (19.39) с уравнением затухающих колебаний (19.1), получим выражения для коэффициента затухания  $\delta$  и частоты собственных незатухающих колебаний диска  $\omega_0$ :

$$\delta = \frac{\pi\eta R^2}{m}, \quad (19.40)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{mR^2}}. \quad (19.41)$$

В случае слабого затухания ( $\delta < \omega_0$ ) решение уравнения (19.39) имеет вид:

$$\alpha = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.42)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – частота собственных затухающих колебаний диска,  $A$  – амплитуда,  $\varphi_0$  – начальная фаза.

С учетом начальных условий, заданных в задаче,

$$\alpha(t=0) = \alpha_0, \quad (19.43)$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = 0 \quad (19.44)$$

находим амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi_0$  колебаний диска:

$$A = \alpha_0, \quad (19.45)$$

$$\varphi_0 = 0. \quad (19.46)$$

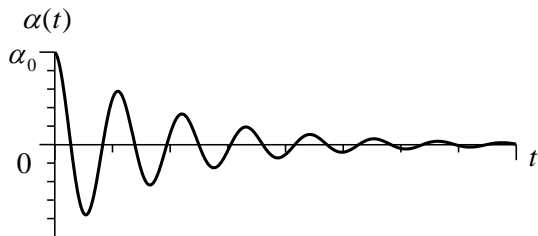


Рис. 19.10. Зависимость угла поворота диска от времени при затухании, меньшем критического.

Искомый в задаче закон движения диска описывает затухающие колебания относительно положения равновесия (см. рис. 19.10):

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t\right), \quad (19.47)$$

Полученное решение справедливо при малом затухании колебаний, когда  $\delta < \omega_0$ . Если неравенство не выполняется, то решение уравнения (19.39) является функция

$$\alpha(t) = A_1 e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}, \quad (19.48)$$

где коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  определяются начальными условиями (19.43) и (19.44):

$$A_1 = \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right). \quad (19.49)$$

$$A_2 = \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right). \quad (19.50)$$

При этом закон движения диска в жидкости принимает вид:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} - \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}. \quad (19.51)$$

Выражение (19.51) описывает аperiодический процесс (см. рис. 19.11), при котором в системе не возникает колебаний, она экспоненциально приближается к положению равновесия.

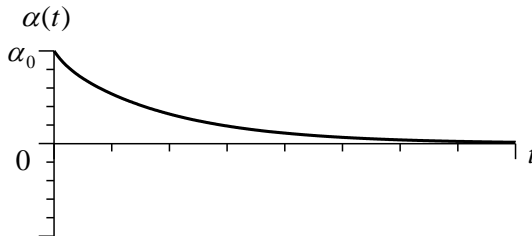


Рис. 19.11. Зависимость угла поворота диска от времени при затухании, большем критического.

**Ответ:**  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t)$  при  $\delta < \omega_0$ ;

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - \frac{\alpha_0}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \quad \text{при } \delta \geq \omega_0,$$

где  $\delta = \frac{\pi\eta R^2}{m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{mR^2}}$ .

**Задача 19.3.3.** Механическая энергия математического маятника за промежуток времени  $\tau$  уменьшилась в  $n$  раз. Найти отношение средней за период механической энергии колебательной системы к средней мощности потерь. Затухание в системе считать малым.

### Решение

I. Механическая энергия математического маятника равна сумме его кинетической энергии и потенциальной энергии в поле силы тяжести Земли. Задачу решаем в лабораторной инерциальной системе отсчета. Считаем потенциальную энергию маятника в положении равновесия равной нулю.

II. Средняя кинетическая энергия математического маятника определяется выражением:

$$\langle E^k \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} \right\rangle, \quad (19.52)$$

где  $m$  – масса маятника,  $v$  – его скорость,  $\alpha$  – угол отклонения нити от вертикали.

Для среднего значения потенциальной энергии маятника с учетом выбранной нормировки потенциальной энергии и малости угла отклонения можно записать:

$$\langle E^p \rangle = \langle mgl(1 - \cos\alpha) \rangle \approx \left\langle \frac{mgl\alpha^2}{2} \right\rangle. \quad (19.53)$$

Закон изменения угла отклонения маятника при наличии затухания имеет вид:

$$\alpha(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.54)$$

где  $\delta$  – коэффициент затухания,  $\omega$  – угловая частота затухающих колебаний. Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

Частота затухающих колебаний  $\omega$  связана с частотой собственных незатухающих колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (19.55)$$

Средняя мощность потерь определяется средним значением производной по времени от механической энергии:

$$\langle P \rangle = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle. \quad (19.56)$$

По условию задачи за промежуток времени  $\tau$  механическая энергия маятника уменьшилась в  $n$  раз:

$$\frac{E_0}{n} = E_0 e^{-2\delta\tau}. \quad (19.57)$$

Здесь  $E_0$  – начальное значение механической энергии маятника.

Записана полная система уравнений (19.52) – (19.57) для определения искомой величины.

III. Подставляя закон движения маятника (19.54) в выражения для средних значений кинетической (19.52) и потенциальной (19.53) энергий маятника, получаем:

$$\begin{aligned} \langle E^k \rangle = & \frac{ml^2 A^2 \delta^2}{2} \left\langle e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle + \\ & + ml^2 A^2 \delta \omega \left\langle e^{-2\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) \right\rangle + \\ & + \frac{ml^2 A^2 \omega^2}{2} \left\langle e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle \end{aligned} \quad (19.58)$$

$$\langle E^p \rangle = \frac{mglA^2}{2} \left\langle e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle. \quad (19.59)$$

При малом затухании величина  $e^{-2\delta t}$  слабо изменяется за период колебаний и ее можно вынести за знак усреднения. Оставшиеся при этом в выражениях (19.58) и (19.59) средние за период значения величин равны:

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)) dt = \frac{1}{2}, \quad (19.60)$$

$$\langle \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \sin 2(\omega t + \varphi_0) dt = 0, \quad (19.61)$$

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)) dt = \frac{1}{2}. \quad (19.62)$$

Подставляя выражения (19.60) – (19.62) в (19.58) и (19.59), получаем:

$$\langle E^k \rangle = \frac{ml^2 A^2 \omega_0^2}{4} e^{-2\delta t}, \quad (19.63)$$

$$\langle E^p \rangle = \frac{ml^2 A^2 \omega_0^2}{4} e^{-2\delta t}. \quad (19.64)$$

Как видим, средние за период значения кинетической и потенциальной энергий маятника равны. Средняя механическая энергия  $\langle E \rangle$  за период  $T$  меняется со временем по экспоненциальному закону:

$$\langle E \rangle = \langle E^k \rangle + \langle E^p \rangle = \frac{ml^2 A^2 \omega_0^2}{2} e^{-2\delta t}. \quad (19.65)$$

При этом средняя мощность потерь  $\langle P \rangle$  равна:

$$\langle P \rangle = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \frac{d\langle E \rangle}{dt} = ml^2 A^2 \omega_0^2 \delta e^{-2\delta t}. \quad (19.66)$$

Логарифмируя соотношение (19.57), находим коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{\ln n}{2\tau}. \quad (19.67)$$

Соотношения (19.65) – (19.67) позволяют определить искомое отношение средней за период механической энергии колебательной системы к средней мощности потерь:

$$\frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{1}{2\delta} = \frac{\tau}{\ln n}.$$

**Ответ:**  $\frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{\tau}{\ln n}.$

**Задача 19.3.4.** Однородный диск радиусом  $R$  может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Диск отклонили от положения равновесия на небольшой угол  $\alpha_0$  и отпустили с нулевой начальной скоростью. Найти закон движения диска, если логарифмический декремент затухания равен  $\mathcal{D}$ . Силу сопротивления считать пропорциональной угловой скорости маятника.

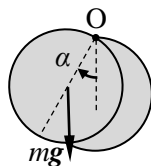


Рис. 19.12. Колебательная система.

### Решение

I. На диск в процессе колебаний действуют сила тяжести  $mg$ , сила реакции подвеса и сила сопротивления.

II. Запишем уравнение моментов для диска относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку подвеса:

$$J\ddot{\alpha} = -mgR\sin\alpha - \beta\dot{\alpha}. \quad (19.68)$$

Здесь  $J$  – момент инерции диска относительно указанной оси,  $\alpha$  – угол отклонения диска от положения равновесия (см. рис. 19.12),  $\beta$  – коэффициент пропорциональности между моментом силы сопротивления и угловой скоростью.

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через край диска параллельно его оси, равен

$$J = \frac{3}{2}mR^2. \quad (19.69)$$

Уравнение моментов (19.68) приведем к виду уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (19.70)$$

в котором введены следующие обозначения:

$$\delta = \frac{\beta}{3mR^2}, \quad (19.71)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}. \quad (19.72)$$

Логарифмический декремент затухания  $\mathcal{D}$  связан с коэффициентом затухания  $\delta$  и периодом затухающих колебаний  $T$  соотношением:

$$\vartheta = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}. \quad (19.73)$$

Частота затухающих колебаний  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (19.74)$$

Получена полная система уравнений (19.69)–(19.74) для нахождения закона движения диска.

III. Подставляя выражение для частоты затухающих колебаний (19.74) в (19.73) с учетом (19.72), находим связь коэффициента затухания  $\delta$  с логарифмическим декрементом затухания  $\vartheta$ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2g\vartheta^2}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}, \quad (19.75)$$

Исключая коэффициент затухания  $\delta$  из соотношений (19.73) и (19.75), выражаем частоту затухающих колебаний через величины, заданные в условии задачи:

$$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{2g}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}. \quad (19.76)$$

Решение уравнения затухающих колебаний (19.70) имеет вид:

$$\alpha(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (19.77)$$

В соответствии с условием задачи начальный угол отклонения диска равен  $\alpha_0$ , а начальная скорость равна нулю. Нетрудно показать, что в этом случае амплитуда колебаний  $A = \alpha_0$ , а начальная фаза колебаний  $\varphi_0 = 0$ .

Подставляя (19.75) и (19.76) в (19.77) с учетом значений амплитуды и начальной фазы, получаем искомый закон движения диска:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2g\vartheta^2}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}t\right) \cos\left(2\pi \sqrt{\frac{2g}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}t\right).$$

**Ответ:**

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2g\vartheta^2}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}t\right) \cos\left(2\pi \sqrt{\frac{2g}{3R(\vartheta^2 + 4\pi^2)}}t\right).$$

**Задача 19.3.5.** Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания

$\mathcal{G}_0 = 1,5$ . Каким будет значение логарифмического декремента затухания  $\mathcal{G}$ , если сопротивление среды увеличить в  $n = 2$  раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

### Решение

Логарифмический декремент затухания связан с коэффициентом затухания  $\delta$  и периодом затухающих колебаний  $T$  соотношением:

$$\mathcal{G}_0 = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}. \quad (19.78)$$

Выражение (19.79) содержит коэффициент затухания  $\delta$  в явном и неявном виде, поскольку частота затухающих колебаний  $\omega$  зависит от  $\delta$  следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (19.79)$$

Подставляя (19.79) в (19.78), получаем связь логарифмического декремента затухания с коэффициентом затухания

$$\mathcal{G}_0 = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1}}. \quad (19.80)$$

Аналогичное выражение запишем в случае увеличения сопротивления среды в  $n$  раз:

$$\mathcal{G} = \frac{2\pi n\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2\delta^2}} = \frac{2\pi n}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - n^2}}. \quad (19.81)$$

Исключая из соотношений (19.80) и (19.81) величину  $\frac{\omega_0^2}{\delta^2}$ , получаем искомое выражение для логарифмического декремента затухания:

$$\mathcal{G} = \frac{n\mathcal{G}_0}{\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)\mathcal{G}_0^2}{4\pi^2}}}. \quad (19.82)$$

Подставляя в (19.82) численные значения, заданные в условии задачи, получаем:



$$\mathcal{D} \approx 3,3.$$

Колебания становятся невозможными при коэффициенте затухания, равном собственной частоте незатухающих колебаний. Следовательно, при увеличении коэффициента затухания в  $n'$  раз выполняется соотношение:

$$n' \delta = \omega_0. \quad (19.83)$$

Подставляя (19.83) в (19.80) и используя численное значение  $\mathcal{D}_0$ , заданное в условии задачи, получаем

$$n' = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\mathcal{D}_0^2}} \approx 4,3.$$

В случае, когда коэффициент затухания превышает частоту собственных незатухающих колебаний, движение маятника становится аperiodическим.

$$\text{Ответ: } \mathcal{D} = \frac{n \mathcal{D}_0}{\sqrt{1 + \frac{(1-n^2)\mathcal{D}_0^2}{4\pi^2}}} \approx 3,3, \quad n' = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\mathcal{D}_0^2}} \approx 4,3.$$

**Задача 19.3.6.** Небольшой шарик массой  $m$ , радиусом  $r$ , подвешенный на легкой нерастяжимой нити, совершает колебания, опираясь на наклонную плоскость, составляющую угол  $\gamma$  с вертикалью (см. рис. 19.13, 19.14). Расстояние от точки подвеса до центра масс маятника равно  $l$ . Качение маятника по наклонной поверхности происходит без проскальзывания, при этом наклонная поверхность испытывает небольшие неупругие деформации. За  $n$  периодов колебаний угловая амплитуда маятника уменьшилась на величину  $\Delta\alpha$ . Определить коэффициент трения качения, пренебрегая силами вязкого трения о воздух и трением в подвесе маятника.

### Решение

I. В случае, когда колебания маятника сопровождаются качением по наклонной поверхности, движение шарика можно представить как суперпозицию колебательного движения центра масс относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$  перпендикулярно плоскости колебаний, и вращения вокруг оси  $OC$ , проходящей через центр масс шарика  $C$  и лежащей в плоскости колебаний маятника (рис. 19.13, 19.14).

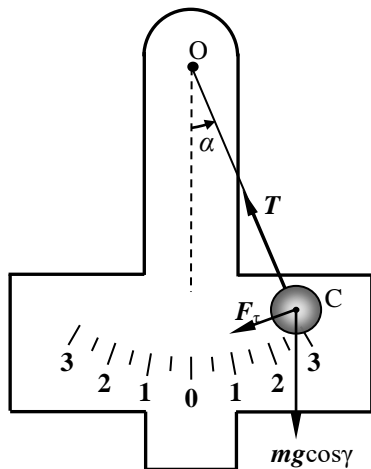


Рис. 19.13. Силы, действующие на шарик в плоскости колебаний маятника.

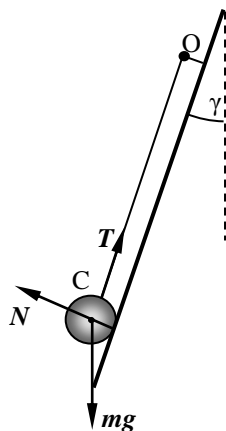


Рис. 19.14. Силы, действующие на шарик в вертикальной плоскости.

При качении шарика по наклонной поверхности возникают ее неупругие деформации. Следовательно, сила реакции поверхности  $F$ , приложенная к шарикау оказывается смещенной в сторону движения центра масс (рис. 19.15). Силу реакции  $F$  раскладываем на нормальную составляющую  $N$ , перпендикулярную недеформированной поверхности, и тангенциальную составляющую  $F_\tau$ . Силой вязкого трения о воздух в соответствии с условием задачи пренебрегаем. Наклонная плоскость составляет угол  $\gamma$  с вертикалью, следовательно, проекция силы тяжести на плоскость колебаний равна  $mg \cos \gamma$ .

II. Запишем уравнение моментов для шарика относительно оси, проходящей через точку подвеса:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mg \cos \gamma l \sin \alpha - F_\tau l. \quad (19.84)$$

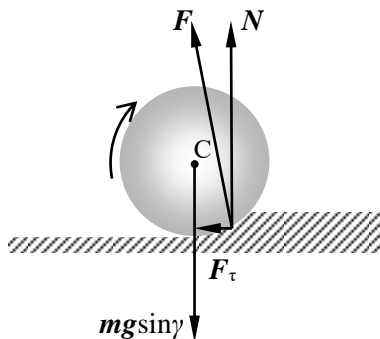


Рис. 19.15. Силы, действующие на шарик в плоскости, перпендикулярной плоскости колебаний маятника.

Запишем также второй закон Ньютона для центра масс шарика в проекции на направление, перпендикулярное плоскости колебаний:

$$0 = N - mg \sin \gamma. \quad (19.85)$$

Поворот шарика вокруг оси ОС при качении без проскальзывания будем описывать углом  $\varphi$ . Уравнение моментов для шарика относительно указанной оси запишем в виде:

$$J_0 \ddot{\varphi} = F_\tau r - Nk, \quad (19.86)$$

где  $r$  – радиус шарика,  $J_0 = \frac{2}{5} mr^2$  – момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр масс,  $k$  – плечо силы нормальной реакции опоры относительно оси ОС. В соответствии с определением,  $k$  является коэффициентом трения качения. При записи уравнения (19.86) учтено, что плечо тангенциальной составляющей силы реакции опоры  $F_\tau$  не сильно отличается от радиуса шарика при малых остаточных деформациях.

При движении шарика без проскальзывания скорость точки его соприкосновения с наклонной поверхностью равна нулю и, в силу принципа суперпозиции движений, складывается из скорости центра масс  $v_0 = \dot{\alpha} l$  и скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс  $v_{\text{вр}} = \dot{\varphi} r$ . Уравнение кинематической связи для угловых скоростей следуют из условия качения без проскальзывания:

$$\dot{\alpha} l = \dot{\varphi} r. \quad (19.87)$$

Дифференцируя (19.87) по времени, получаем уравнение кинематической связи для угловых ускорений:

$$\ddot{\alpha} l = \ddot{\varphi} r. \quad (19.88)$$

III. Исключая из системы уравнений (19.84) – (19.88) величины  $N$ ,  $F_\tau$ ,  $\alpha$ , и учитывая малость углов ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ ), получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла  $\varphi$ :

$$\frac{7}{5} mr^2 \ddot{\varphi} = -\frac{r^2}{l} mg \cos \gamma \varphi \pm M_{\text{тк}}. \quad (19.89)$$

Здесь  $M_{\text{тк}} = kmg \sin \gamma$  – момент сил трения качения, в качестве которого выступает момент смещенной силы нормальной реакции опоры при неупругих деформациях.

В правой части уравнения (19.89) знак момента силы нормальной реакции опоры (момента трения качения) меняет знак дважды за период одновременно с изменением направления скорости центра масс шара, при этом модуль момента силы трения качения остается неизменным.

Уравнение (19.89) является уравнением колебаний шарика, на который в процессе движения кроме момента силы, возвращающего в положение равновесия и линейно зависящего от угла отклонения, действует постоянный по модулю момент сил трения качения. Постоянная сила (момент сил), как известно, не изменяет частоты колебаний, а только смещает положение равновесия. Уравнение (19.89) аналогично уравнению колебаний при наличии силы трения скольжения. В этом случае затухание колебаний возникает за счет изменения положения равновесия, то есть начальное смещение маятника от положения равновесия к началу следующего полупериода (определяющее амплитуду колебаний на полпериода) становится меньше, чем в предыдущем.

На рис. 19.16, представлена временная зависимость углового смещения шарика от положения равновесия  $\varphi(t)$  при наличии момента сил трения качения.

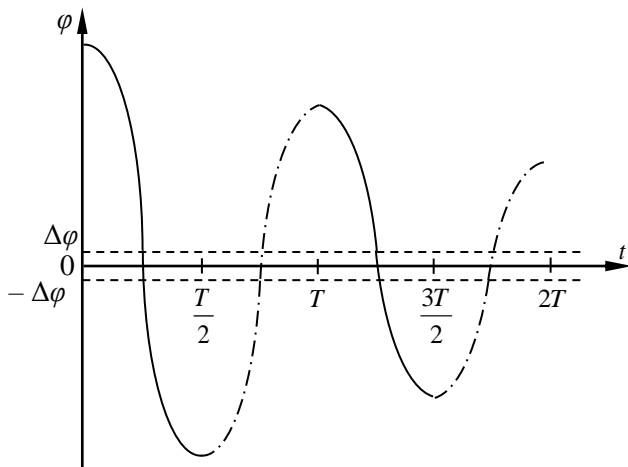


Рис. 19.16. Временная зависимость углового смещения шарика.

В начальный момент времени  $t = 0$  маятник был максимально отклонен от положения равновесия, смещенного на  $\Delta\varphi$  относи-

тельно нуля. Сплошной кривой изображен график  $\varphi(t)$  в течение первой половины периода. В момент времени  $t = \frac{T}{2}$  направление скорости шарика изменяет знак, а, следовательно, изменяется и знак момента сил трения качения, что приводит к смещению положения равновесия на  $-\Delta\varphi$ . Штрихпунктирная кривая на рис. 19.16 изображает график  $\varphi(t)$  в течение второй половины периода.

Уравнение (19.89) можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi \pm \Delta\varphi) = 0. \tag{19.90}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g \cos \gamma}{7l}}, \tag{19.91}$$

$$\Delta\varphi = \frac{kl}{r^2} \operatorname{tg} \gamma. \tag{19.92}$$

Величина  $\Delta\varphi$  определяет смещение положение равновесия дважды за период, при этом за период колебаний амплитуда уменьшается на  $4\Delta\varphi$  (см. рис. 19.16). Используя уравнение кинематической связи  $\alpha l = \varphi r$ , получаем выражение для изменения угловой амплитуды колебаний маятника за период:

$$\Delta\alpha = \frac{4k}{r} \operatorname{tg} \gamma.$$

Следовательно, искомый коэффициент трения качения равен:

$$k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctg} \gamma.$$

**Ответ:**  $k = \frac{\Delta\alpha_n r}{4n} \operatorname{ctg} \gamma.$

**Задача 19.3.7.** Легкая муфта (внутренний и внешний радиусы которой равны  $r$  и  $R$  соответственно), жестко скрепленная с тонким стержнем (масса стержня  $m$ , длина  $l$ ), надета на горизонтальный вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вал (см. рис. 19.17). Стержень с муфтой представляют собой физический маятник, совершаю-

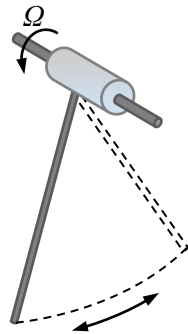


Рис. 19.17. Колебательная система.

щий колебания в вертикальной плоскости. В начальный момент времени стержень находился в вертикальном положении и имел нулевую скорость. Найти закон изменения угла отклонения маятника от вертикали  $\varphi(t)$  при малых колебаниях в случае, когда угловая скорость вращения вала превышает модуль максимальной угловой скорости маятника  $\Omega > \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$ . Считать, что сила трения скольжения между муфтой и валом постоянна и равна  $F_{\text{тр}} = \mu mg$ , где  $\mu$  – коэффициент трения, не зависящий от скорости скольжения.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи угловая скорость вращения вала превышает максимальную угловую скорость маятника  $\Omega > \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$ . Следовательно, момент силы трения относительно

оси вращения не изменяет знак, поскольку сила трения скольжения направлена противоположно скорости относительного движения соприкасающихся тел, а знак относительной скорости не изменяется при колебаниях маятника. На физический маятник, состоящий из стержня и жестко связанной с ним муфты, действуют сила тяжести и сила со стороны вращающегося вала. Ненулевой момент относительно оси вращения имеют сила тяжести и тангенциальная составляющая силы реакции вала – сила трения скольжения. Как будет доказано ниже, постоянный момент силы трения скольжения не изменяет частоты колебаний, не приводит к их затуханию, а лишь смещает положение равновесия.

II. Запишем уравнение моментов относительно оси вращения, направление которой совпадает с направлением угловой скорости вращения вала:

$$J\ddot{\alpha} = M_{\text{тр}} + M_{mg}. \quad (19.93)$$

Момент силы трения, входящий в уравнение моментов, направлен в сторону увеличения угла отклонения маятника и равен:

$$M_{\text{тр}} = \mu mgr. \quad (19.94)$$

Момент силы тяжести стремится уменьшить угол отклонения маятника. Его проекция на выбранную ось отрицательна и равна:

$$M_{mg} = -mg \left( \frac{l}{2} + R \right) \sin \alpha. \quad (19.95)$$

При записи момента силы тяжести (19.95) учтено, что по условию задачи муфта можно считать легкой, следовательно точка приложения силы тяжести маятника совпадает с центром стержня и находится на расстоянии  $\frac{l}{2} + R$  от оси вращения.

Момент инерции стержня относительно оси вращения находим в соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} + R \right)^2. \quad (19.96)$$

Запишем также условие равновесия маятника:

$$0 = -mg \left( \frac{l}{2} + R \right) \sin \alpha_{\text{равн}} + \mu mgr. \quad (19.97)$$

Для нахождения закона движения необходимо использовать начальные условия. В соответствии с условием задачи начальные условия для угла отклонения и угловой скорости маятника имеют вид:

$$\alpha(t=0) = 0, \quad (19.98)$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = 0. \quad (19.99)$$

Получена полная система уравнений (19.93) – (19.99) для нахождения искомого закона движения маятника.

III. В приближении малых углов отклонения маятника уравнение моментов (19.93) с учетом соотношений (19.94) – (19.96) преобразуем к виду:

$$\left( \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} + R \right)^2 \right) \ddot{\alpha} = -mg \left( \frac{l}{2} + R \right) \alpha + \mu mgr. \quad (19.100)$$

Условие равновесия (19.97) при этом приобретает вид:

$$0 = -mg \left( \frac{l}{2} + R \right) \alpha_{\text{равн}} + \mu mgr. \quad (19.101)$$

Вычитая из уравнения (19.100) условие равновесия (19.101), преобразуем уравнение движения к виду:

$$\frac{d^2(\alpha - \alpha_{\text{равн}})}{dt^2} + \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2}(\alpha - \alpha_{\text{равн}}) = 0. \quad (19.102)$$

Как видим, полученное уравнение (19.102) является уравнением незатухающих гармонических колебаний относительно положения равновесия с угловой частотой

$$\omega_0^2 = \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2}. \quad (19.103)$$

Следовательно, наличие силы трения скольжения не всегда приводит к затуханию колебаний. Постоянный момент силы трения в данной задаче не приводит к их затуханию, а лишь смещает положение равновесия. Смещение положения равновесия определяем из уравнения (19.101):

$$\alpha_{\text{равн}} = \frac{2\mu r}{l+2R}. \quad (19.104)$$

Решением уравнения гармонических колебаний (19.102) является функция

$$\alpha(t) - \alpha_{\text{равн}} = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (19.105)$$

Амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi_0$  определяем из начальных условий (19.98), (19.99):

$$A = \alpha_{\text{равн}}, \quad \varphi_0 = \pi. \quad (19.106)$$

Подставляя амплитуду, начальную фазу и равновесное значение угла отклонения в (19.105), получаем искомый закон движения маятника:

$$\alpha(t) = \frac{2\mu r}{l+2R}(1 - \cos \omega_0 t).$$

$$\text{Ответ: } \alpha(t) = \frac{2\mu r}{l+2R}(1 - \cos \omega_0 t), \text{ где } \omega_0^2 = \frac{6g(l+2R)}{l^2 + 3(l+2R)^2}.$$

**Задача 19.3.8.** Как изменится характер колебательного движения в условиях задачи 19.3.7, если сила трения муфты о вал будет зависеть от скорости?

### Решение

При колебаниях стержня с муфтой половину периода сила трения направлена по движению маятника (когда скорость маятника



и вала направлены в одну сторону), а вторую половину периода противоположно скорости движения маятника.

Если сила трения увеличивается со скоростью скольжения, то она больше ту половину периода, когда муфта и вал вращаются в противоположные стороны. Следовательно, работа силы трения, действующей на маятник со стороны вала, за весь период колебаний отрицательна, что приводит к затуханию колебаний.

Если сила трения уменьшается со скоростью скольжения, то, наоборот, она больше ту половину периода, когда муфта и вал вращаются в одну сторону. Следовательно, работа силы трения, действующей на маятник со стороны вала за весь период колебаний положительна. В этом случае вал сообщает энергию маятнику, и амплитуда колебаний будет увеличиваться.

#### 19.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 19.4.1** ([3], 3.76). Затухающие колебания материальной точки происходят по закону  $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Найти:

а) амплитуду смещения и скорость материальной точки в момент времени  $t = 0$ ;

б) моменты времени, когда материальная точка достигает крайних положений.

*Ответ:* а)  $a_0, a_0 \omega$ ;

$$\text{б) } t_n = \frac{\operatorname{arctg}(\omega / \beta) + \pi n}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 19.4.2** ([3], 4.71). Тело совершает крутильные колебания по закону  $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Найти:

а) угловую скорость  $\dot{\varphi}$  и угловое ускорение  $\ddot{\varphi}$  тела в момент времени  $t = 0$ ;

б) моменты времени, когда угловая скорость максимальна.

*Ответ:* а)  $\dot{\varphi}(0) = -\beta \varphi_0, \quad \ddot{\varphi}(0) = (\beta^2 - \omega^2) \varphi_0$ ;

$$\text{б) } t_n = \frac{1}{\omega} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega} \right) + \pi n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 19.4.3** ([3], 3.77а). Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой  $\omega$  и коэффициентом затухания  $\beta$  по закону  $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ . Найти начальную амплитуду  $a_0$  и начальную фазу  $\alpha$ , если в момент времени  $t = 0$  смещение материальной точки  $x_0 = 0$ , а проекция ее скорости  $\dot{x}_0 > 0$ .

$$\text{Ответ: } a_0 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

**Задача 19.4.4** ([3], 3.77б). Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой  $\omega$  и коэффициентом затухания  $\beta$  по закону  $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ . Найти начальную амплитуду  $a_0$  и начальную фазу  $\alpha$ , если в момент времени  $t = 0$  смещение материальной точки  $x_0 > 0$ , а проекция ее скорости  $\dot{x}_0 = 0$ .

$$\text{Ответ: } a_0 = x_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

**Задача 19.4.5** ([3], 3.79). Осциллятор со временем релаксации  $\tau = 20$  с в момент времени  $t = 0$  имеет начальное смещение  $x_0 = 10$  см. При каком значении начальной скорости  $\dot{x}_0$  это смещение окажется равным своей амплитуде?

$$\text{Ответ: } \dot{x}_0 = -\frac{x_0}{\tau} = -0,5 \text{ см/с}.$$

**Задача 19.4.6** ([3], 3.79). Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой  $\omega = 25$  рад/с. Найти коэффициент затухания  $\beta$ , если в начальный момент времени скорость материальной точки равна нулю, а ее смещение от положения равновесия в  $\eta = 1,02$  раза меньше амплитуды.

$$\text{Ответ: } \beta = \omega \sqrt{\eta^2 - 1} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 19.4.7** ([3], 3.81а). Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой  $\omega$  и коэффициентом затухания  $\beta$ . Найти амплитуду скорости материальной точки как функцию времени, если в момент времени  $t = 0$  амплитуда ее смещения равна  $a_0$ .

$$\text{Ответ: } v(t) = a_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t}.$$

**Задача 19.4.8** ([3], 3.816). Материальная точка совершает затухающие колебания с частотой  $\omega$  и коэффициентом затухания  $\beta$ . Найти амплитуду скорости материальной точки как функцию времени, если в момент времени  $t = 0$  смещение материальной точки  $x(t = 0) = 0$  и проекция ее скорости  $\dot{x}(t = 0) = v_0$ .

$$\text{Ответ: } v(t) = |v_0| \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} e^{-\beta t}.$$

**Задача 19.4.9** ([3], 3.83). К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на  $\Delta x = 9,8$  см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания  $\theta = 3,1$ .

$$\text{Ответ: } T = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \theta^2)\Delta x}{g}} = 0,7 \text{ с}.$$

**Задача 19.4.10** ([3], 3.85). Частицу сместили от положения равновесия на расстояние  $l = 1$  см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет, колеблясь, эта частица до полной остановки, если логарифмический декремент затухания равен  $\theta = 0,02$ ?

$$\text{Ответ: } S \approx \frac{l(1 + e^{-\theta/2})}{(1 - e^{-\theta/2})} = 2 \text{ м}.$$

## ГЛАВА 20

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ  
СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. РЕЗОНАНС

## 20.1. Теоретический материал

**Уравнение движения** в случае вынужденных колебаний под действием гармонической вынуждающей силы имеет вид:

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = B \cos(pt), \quad (20.1)$$

где  $B \cos(pt)$  – обобщенная вынуждающая сила,  $B$  и  $p$  – ее амплитуда и частота.

В частном случае пружинного маятника в качестве обобщенной вынуждающей силы выступает отношение вынуждающей силы, действующей на тело, прикрепленного к пружине, к массе этого тела.

Колебания под действием гармонической вынуждающей силы можно представить в виде суперпозиции собственных и вынужденных колебаний. **Закон изменения обобщенной координаты** в этом случае имеет вид:

$$\xi(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + \xi_{\text{вын}}(t) = \xi_{\text{соб}}(t) + A(p) \cos(pt + \varphi(p)). \quad (20.2)$$

Здесь  $\xi_{\text{соб}}(t)$  – закон изменения обобщенной координаты при собственных затухающих колебаниях в отсутствии вынуждающей силы,  $\xi_{\text{вын}}(t)$  – закон изменения обобщенной координаты после затухания собственных колебаний,  $A(p)$  – амплитуда и  $\varphi(p)$  – начальная фаза установившихся вынужденных колебаний  $\xi_{\text{вын}}(t)$ , которые зависят от частоты вынуждающей силы (см. сплошные линии на рис. 20.1 и 20.2):

$$A(p) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad (20.3)$$

$$\text{tg } \varphi(p) = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (20.4)$$

На рис. 20.1 и рис. 20.2 штриховыми линиями изображены зависимости амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний для двойного значения коэффициента затухания  $2\delta$ .

При  $t \gg 1/\delta$ , собственными затухающими колебаниями  $\xi_{\text{соб}}(t)$  можно пренебречь:

$$\xi(t) = \xi_{\text{вын}}(t) = A(p) \cos(pt + \varphi(p)). \quad (20.5)$$

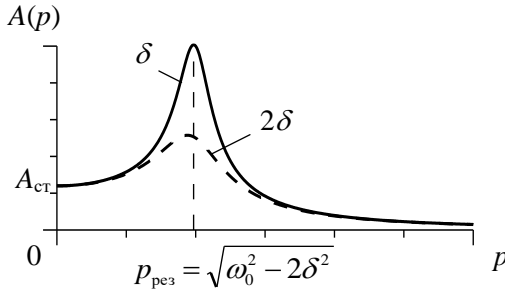


Рис. 20.1. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $A(p)$  от частоты  $p$  при различных коэффициентах затухания  $\delta$ .

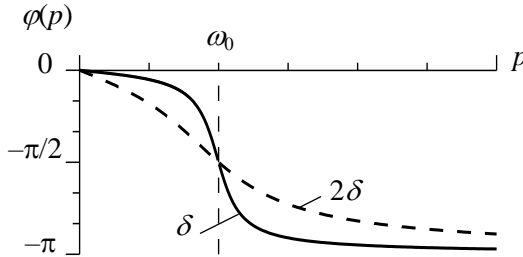


Рис. 20.2. Зависимость начальной фазы вынужденных колебаний  $\varphi(p)$  от частоты  $p$  при различных коэффициентах затухания  $\delta$ .

**Резонанс смещения** (обобщенной координаты) – явление резкого возрастания амплитуды  $A(p)$  вынужденных колебаний при изменении частоты вынуждающей силы (рис. 20.1).

В случае резонанса смещения **резонансная частота**  $p_{\text{рез}}$  вынуждающей силы находится из условия  $\frac{dA(p)}{dp} = 0$ :

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (20.6)$$

При резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (20.7)$$

При постоянной ( $p = 0$ ) обобщенной вынуждающей силе  $B$  обобщенная координата  $\xi$  будет также постоянна и равна:

$$A_{\text{ст}} = A(0) = \frac{B}{\omega_0^2}. \quad (20.8)$$

При стремлении частоты вынуждающей силы к бесконечности (при  $p \gg \omega_0$ ) амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю (рис. 20.1):

$$A(p) \sim \frac{B}{p^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (20.9)$$

Заметим, что добротность колебательной системы может быть выражена через  $A_{\text{рез}}$  и  $A_{\text{ст}}$ . В соответствии с (19.8), (20.7) и (20.8):

$$Q = \frac{\omega}{2\delta} \cong \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{ст}}} \quad (\text{при } \omega_0 \gg \delta). \quad (20.10)$$

Закон изменения со временем обобщенной скорости в случае вынужденных установившихся колебаний под действием гармонической вынуждающей силы имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \dot{\xi}_{\text{вын}}(t) = -A(p)p \sin(pt + \varphi(p)) = \\ &= A(p)p \cos(pt + \varphi(p) + \pi/2). \end{aligned} \quad (20.11)$$

Здесь  $A(p)p$  – амплитуда изменения обобщенной скорости (см. сплошную линию на рис. 20.3):

$$A(p)p = \frac{Bp}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (20.12)$$

Штриховой линией на рис. 20.3 изображена зависимость амплитуды изменения обобщенной скорости при вынужденных колебаниях в случае удвоенного значения коэффициента затухания  $2\delta$ .

**Резонанс скорости** – явление резкого возрастания амплитуды  $A(p)p$  изменения обобщенной скорости  $\dot{\xi}(t)$  при изменении частоты вынуждающей силы (рис. 20.3).

В случае резонанса скорости резонансная частота находится из условия  $\frac{d(A(p)p)}{dp} = 0$  и в соответствии с (20.12) равна:

$$p_{\text{рез}} = \omega_0. \tag{20.13}$$

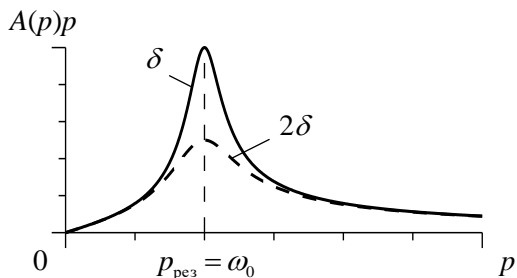


Рис. 20.3. Зависимость амплитуды изменения обобщенной скорости  $A(p)p$  при вынужденных колебаниях от частоты  $p$  для различных коэффициентов затухания  $\delta$ .

При постоянной ( $p = 0$ ) вынуждающей силе обобщенная скорость  $\dot{\xi}(t)$  будет равна нулю (рис. 20.3):

$$(Ap)_{\text{ст}} = 0. \tag{20.14}$$

При частоте вынуждающей силы много больше частоты собственных незатухающих колебаний ( $p \gg \omega_0$ ) амплитуда изменения обобщенной скорости близка к нулю:

$$A(p)p \sim \frac{B}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \tag{20.15}$$

## 20.2. Основные типы задач и методы их решения

При решении задач о вынужденных колебаниях необходимо, как правило, записать закон движения осциллятора или получить его в результате решения уравнения движения. Записать также выражения для логарифмического коэффициента затухания, добротности, частоты собственных и вынужденных колебаний. При необходимости дополнить полученную систему уравнений энергетическими соотношениями. В любом случае необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

### 20.3. Примеры решения задач

**Задача 20.3.1.** Тело массой  $m = 100$  г, подвешенное на легкой пружине жесткостью  $k = 40$  Н/м, совершает установившиеся колебания под действием вертикальной вынуждающей силы  $F = F_0 \cos pt$ , частота которой  $p = 25$  рад/с и амплитуда  $F_0 = 1$  Н. Смещение тела из положения равновесия отстает по фазе от вынуждающей силы на  $\varphi = \pi/4$ . Определить добротность колебательной системы  $Q$ , а также резонансную частоту  $p_{\text{рез}}$ , соответствующие резонансу смещения, и амплитуду смещения при резонансе  $A_{\text{рез}}$ .

#### Решение

I. На тело, подвешенное на пружине действуют четыре силы: сила тяжести, сила упругости со стороны пружины, сила сопротивления воздуха и вынуждающая сила  $F = F_0 \cos pt$ . Постоянная сила тяжести не влияет на частоту собственных колебаний, она лишь смещает положение равновесия. Поэтому решение задачи будет справедливо как при вертикальных, так и при горизонтальных колебаниях тела на пружине. По условию задачи пружина легкая, ее массой пренебрегаем, считая ее равной нулю.

II. Искомая добротность колебательной системы определяется выражением (19.8):

$$Q = \frac{\omega}{2\delta}. \quad (20.16)$$

Здесь  $\omega$  – частота собственных затухающих колебаний тела (см. (19.2)), равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (20.17)$$



Частота собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$  тела на невесомой пружине (см. (18.8)) определяется массой тела  $m$  и коэффициентом жесткости пружины  $k$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (20.18)$$

Коэффициент затухания  $\delta$ , входящий в формулы (20.16) и (20.17), определяет заданный в условии задачи фазовый сдвиг  $\varphi$  между смещением и вынуждающей силой в соответствии с выражением (20.4):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (20.19)$$

Искомая резонансная частота при резонансе смещения в соответствии с (20.6) определяется выражением:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (20.20)$$

При резонансной частоте искомая амплитуда вынужденных колебаний (см. (20.7)) равна:

$$A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (20.21)$$

Получена полная система уравнений (20.16) – (20.21) относительно неизвестных в задаче величин – добротности  $Q$ , резонансной частоты  $p_{\text{рез}}$  и амплитуды смещения при резонансе  $A_{\text{рез}}$ .

III. Совместное решение уравнений (20.16) – (20.19) дает выражение для добротности колебательной системы:

$$Q = \sqrt{\frac{\omega_0^2 p^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{kmp^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2} - \frac{1}{4}}. \quad (20.22)$$

Искомую резонансную частоту  $p_{\text{рез}}$  находим, решая систему уравнений (20.18) – (20.20):

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2}{2p^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{2m^2 p^2}}. \quad (20.23)$$

Амплитуду смещения при резонансе  $A_{\text{рез}}$  определяем, решая систему уравнений (20.18), (20.19) и (20.21):

$$\begin{aligned}
 A_{\text{рез}} = A(p_{\text{рез}}) &= \frac{F_0 p}{m(p^2 - \omega_0^2) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (p^2 - \omega_0^2)^2}{4p^2}}} = \\
 &= \frac{F_0 p}{(mp^2 - k) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{4m^2 p^2}}}. \quad (20.24)
 \end{aligned}$$

Подставляя численные значения заданных в условии задачи величин в полученные формулы (20.22) – (20.24), получаем:

$$Q \approx 2,17; \quad p_{\text{рез}} \approx 19,0 \text{ рад/с}; \quad A_{\text{рез}} \approx 5,7 \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } Q = \sqrt{\frac{kmp^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2} - \frac{1}{4}} \approx 2,17;$$

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{2m^2 p^2}} \approx 19,0 \text{ рад/с};$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0 p}{(mp^2 - k) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (mp^2 - k)^2}{4m^2 p^2}}} \approx 5,7 \text{ см.}$$

**Задача 20.3.2.** Горизонтальный пружинный маятник совершает вынужденные колебания под действием гармонической силы  $F(t) = F_0 \cos(pt)$ . Коэффициент затухания маятника равен  $\delta$ , а частота его собственных незатухающих колебаний –  $\omega_0$ . Найти отношение средней за период мощности вынуждающей силы  $F(t)$  при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы.

### Решение

I. Рассмотрим колебания маятника под действием гармонической вынуждающей силы  $F(t) = F_0 \cos(pt)$  в установившемся режиме, когда собственными затухающими колебаниями можно пренебречь.

II. В установившемся режиме координата и скорость маятника изменяются по законам:

$$x(t) = A \cos(p t + \varphi), \quad (20.25)$$

$$v(t) = -A p \sin(p t + \varphi). \quad (20.26)$$

Запишем элементарную работу  $dA$  вынуждающей силы  $F$ , совершаемую за физически бесконечно малый интервал времени:

$$dA = F(t)dx = F(t)v(t)dt. \quad (20.27)$$

Суммарную работу этой силы за период колебаний  $T$  находим интегрированием элементарной работы:

$$A = \int_0^T F(t)v(t)dt. \quad (20.28)$$

Средняя за период мощность вынуждающей силы определяется выражением:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)v(t)dt. \quad (20.29)$$

Записанная система уравнений позволяет получить зависимость средней мощности  $P_{\text{cp}}$  вынуждающей силы от частоты  $p$ . Для нахождения искомого в задаче отношения средней за период мощности силы  $F$  при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы необходимо найти максимум средней мощности, а также дополнить полученную систему уравнений выражениями (20.3), (20.4), (20.6) для амплитуды вынужденных колебаний  $A(p)$ , фазы  $\varphi(p)$  и резонансной частоты  $p_{\text{рез}}$  при резонансе смещения:

$$A(p) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad (20.30)$$

$$\text{tg } \varphi(p) = \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (20.31)$$

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (20.32)$$

III. Интегрируя (20.29) с учетом (20.26) и заданного в задаче закона изменения вынуждающей силы  $F(t)$ , получаем:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2} F_0 A(p) p \sin(\varphi(p)). \quad (20.33)$$

Найдем  $\sin(\varphi(p))$ , входящий в формулу (20.33), воспользовавшись (20.31):

$$\sin \varphi(p) = \frac{\operatorname{tg} \varphi(p)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi(p)}} = \frac{2\delta p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (20.34)$$

Подставляя (20.34) и (20.30) в (20.33), получаем зависимость средней мощности вынуждающей силы от частоты:

$$P_{\text{cp}}(p) = \frac{F_0^2 \delta p^2}{m((\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2)}. \quad (20.35)$$

Частоту вынуждающей силы  $p_{\text{max}}$ , при которой ее средняя мощность достигает максимума, находим из условия  $\frac{dP_{\text{cp}}(p)}{dp} = 0$ :

$$p_{\text{max}} = \omega_0. \quad (20.36)$$

Заметим, что частота  $p_{\text{max}}$  совпадает с частотой, соответствующей резонансу скорости (см. (20.13)).

Подстановка (20.36) в (20.35) дает выражение для максимальной средней мощности вынуждающей силы:

$$P_{\text{cp}}^{\text{max}} \equiv P_{\text{cp}}(p_{\text{max}}) = \frac{F_0^2}{4m\delta}. \quad (20.37)$$

Выражение для средней мощности вынуждающей силы при частоте, соответствующей резонансу смещения, находим подставляя (20.32) в (20.35):

$$P_{\text{cp}}^{\text{рез}} \equiv P_{\text{cp}}(p_{\text{рез}}) = \frac{F_0^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}{4m\delta(\omega_0^2 - \delta^2)}. \quad (20.38)$$

Искомое отношение средней за период мощности вынуждающей силы  $F(t)$  при частоте, соответствующей резонансу смещения, к максимальной средней мощности этой силы находим, воспользовавшись (20.37) и (20.38):

$$\frac{P_{\text{cp}}^{\text{рез}}}{P_{\text{cp}}^{\text{max}}} = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Заметим, что полученное соотношение мощностей справедливо при  $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ . При значениях коэффициента затухания  $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  в колебательной системе резонанс смещения не наблюдается (а резонанс скорости существует).

**Ответ:** 
$$\frac{P_{\text{ср}}^{\text{рез}}}{P_{\text{ср}}^{\text{max}}} = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

**Задача 20.3.3.** Амплитуды скорости осциллятора при частотах вынуждающей силы  $f_1 = 200$  Гц и  $f_2 = 300$  Гц равны между собой. Определить частоту, соответствующую резонансу скорости. Амплитуду вынуждающей силы считать неизменной, затухание – малым.

### Решение

I. Вынужденные колебания рассматриваем в установившемся режиме. В этом случае осциллятор совершает колебания с частотой вынуждающей силы. Будем считать, что вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, а ее амплитуда  $F_0$  не зависит от частоты. Считаем также, что на осциллятор в процессе колебаний действуют упругая сила и сила вязкого трения, пропорциональная скорости. В соответствии с условием задачи коэффициент затухания можно считать малым, много меньшим частоты собственных незатухающих колебаний  $\delta \ll \omega_0$ . Известно, что резонанс скорости происходит при частоте вынуждающей силы  $p$ , совпадающей с частотой  $\omega_0$  собственных незатухающих колебаний осциллятора. Следовательно, для определения резонансной частоты необходимо найти частоту собственных колебаний осциллятора.

II. Смещение осциллятора при вынужденных колебаниях происходит по закону:

$$x(t) = A \cos(pt + \varphi). \quad (20.39)$$

Здесь  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний, зависящая от частоты вынуждающей силы:

$$A(p) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (20.40)$$

Закон изменения скорости находим, дифференцируя (20.39) по времени:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -Ap \sin(pt + \varphi). \quad (20.41)$$

Амплитуда скорости, в соответствии с (20.40), (20.41), равна:

$$v_0(p) = \frac{pF_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (20.42)$$

По условию задачи амплитуды скорости при двух заданных частотах вынуждающей силы  $p_1$  и  $p_2$  равны между собой:

$$v_{01} = v_{02}. \quad (20.43)$$

Записана полная система уравнений, позволяющая определить резонансную частоту.

III. Приравнявая амплитуды скорости при двух частотах вынуждающей силы, получаем:

$$\frac{p_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_1^2)^2 + 4\delta^2 p_1^2}} = \frac{p_2}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_2^2)^2 + 4\delta^2 p_2^2}}. \quad (20.44)$$

Учитывая малость затухания ( $\delta \ll \omega_0$ ), преобразуем (20.44):

$$\frac{(\omega_0^2 - p_1^2)^2}{p_1^2} = \frac{(\omega_0^2 - p_2^2)^2}{p_2^2}. \quad (20.45)$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой частей уравнения (20.45), получаем:

$$\frac{\omega_0^2 - p_1^2}{p_1} = \pm \frac{\omega_0^2 - p_2^2}{p_2}. \quad (20.46)$$

Поскольку  $p_1 \neq p_2$ , то в правой части уравнения (20.46) следует оставить только знак «-». Преобразуя (20.46), получаем связь циклических частот:

$$\omega_0 = \sqrt{p_1 p_2}. \quad (20.47)$$

Следовательно, частота, соответствующая резонансу скорости, равна:

$$f_{\text{рез}} = \sqrt{f_1 f_2}. \quad (20.48)$$

Подставляя в (20.48) численные значения, заданные в условии задачи, определяем искомую резонансную частоту:

$$f_{\text{рез}} \approx 245 \text{ Гц.}$$

**Ответ:**  $f_{\text{рез}} = \sqrt{f_1 f_2} \approx 245 \text{ Гц.}$

**Задача 20.3.4.** Тонкостенный сферический сосуд радиусом  $R = 5$  см заполнен идеальной жидкостью и подвешен на легком стержне длиной  $l = 20$  см, жестко связанным с сосудом. Найти амплитуду установившихся колебаний маятника, если точка его подвеса колеблется в горизонтальном направлении по закону  $X(t) = A \sin \omega t$  с амплитудой  $A = 0,5$  см и периодом  $T = 1,1$  с. Трение не учитывать.

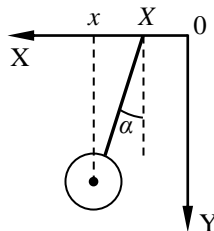


Рис. 20.4. Колебательная система, состоящая из сосуда с жидкостью, подвешенного на стержне.

### Решение

I. Сосуд с жидкостью колеблется подобно математическому маятнику длиной  $l + R$ , поскольку жидкость является идеальной и проскальзывает относительно сосуда. По условию задачи сосуд – тонкостенный, следовательно, можно пренебречь его моментом инерции, считая массу сосуда равной нулю. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с точкой подвеса маятника. На маятник при его движении действуют сила тяжести, сила реакции подвеса и переносная сила инерции. Направление осей системы координат показано на рис. 20.4.

II. Запишем уравнение моментов для маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний, в выбранной неинерциальной системе отсчета:

$$m(l + r)^2 \ddot{\alpha} = -mg(l + R) \sin \alpha - m\ddot{X}(l + R) \cos \alpha. \quad (20.49)$$

Здесь  $X$  – координата точки подвеса,  $\alpha$  – угол отклонения маятника. При записи (20.49) учтено, что момент силы реакции подвеса относительно указанной оси равен нулю.

Уравнение кинематической связи для координат имеет вид (см. рис. 20.4):

$$x(t) = X(t) + (l + R) \sin \alpha, \quad (20.50)$$

где  $x(t)$  – координата центра масс маятника относительно лабораторной инерциальной системы отсчета.

В соответствии с условием задачи координата точки подвеса относительно инерциальной системы отсчета изменяется по закону:

$$X(t) = A \sin \omega t. \quad (20.51)$$

III. Уравнения (20.49) и (20.51) позволяют получить уравнение колебаний маятника относительно неинерциальной системы отсчета. Будем решать задачу в предположении малости угла отклонения маятника ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ). С учетом принятых допущений преобразуем уравнение колебаний (20.49):

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l+R} \alpha = \frac{A\omega^2}{l+R} \sin \omega t. \quad (20.52)$$

В установившемся режиме ищем решение уравнения (20.52) в виде

$$\alpha(t) = B \sin(\omega t + \varphi), \quad (20.53)$$

где  $B$  – амплитуда колебаний относительно неинерциальной системы отсчета.

Подставляя (20.53) в уравнение колебаний (20.52), получаем:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A\omega^2}{l+R} \sin \omega t. \quad (20.54)$$

Раскрывая  $\sin(\omega t + \varphi)$ , преобразуем (20.54) к виду:

$$\begin{aligned} \left(\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \cos \varphi - \frac{A\omega^2}{l+R}\right) \sin \omega t + \\ + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \sin \varphi \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (20.55)$$

Поскольку уравнение (20.55) должно выполняться в любой момент времени, то коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  должны быть равны нулю:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \sin \varphi = 0, \quad (20.56)$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l+R}\right) B \cos \varphi - \frac{A\omega^2}{l+R} = 0. \quad (20.57)$$

Из соотношения (20.56) следует, что

$$\sin \varphi = 0. \quad (20.58)$$



С учетом найденного значения фазы (20.58) из уравнения (20.57) определяем амплитуду колебаний маятника относительно неинерциальной системы отсчета:

$$B = A \frac{\omega^2}{(l + R)(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (20.59)$$

Здесь введено обозначение  $\omega_0^2 = \frac{g}{l + R}$ .

Подстановка полученных соотношений (20.58) и (20.59) в выражение для координаты центра масс (20.50) приводит к окончательному выражению для закона движения маятника относительно инерциальной системы отсчета:

$$x(t) = A \sin \omega t + (l + R)B \sin \omega t = A \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (20.60)$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , находим искомую амплитуду колебаний маятника:

$$a = A \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = A \frac{T^2}{T^2 - 4\pi^2 \frac{l + R}{g}}, \quad (20.61)$$

Подставляя в (20.61) численные значения, заданные в условии задачи, получаем:

$$a \approx 2,9 \text{ см.}$$

Нетрудно убедиться, что при таких колебаниях угол отклонения маятника можно считать малым, и принятое допущение  $\sin \alpha \approx \alpha$  является правомерным.

$$\text{Ответ: } a = A \frac{T^2}{T^2 - 4\pi^2 \frac{l + R}{g}} \approx 2,9 \text{ см.}$$

**Задача 20.3.5.** В момент времени  $t = 0$  на частицу массой  $m$  начинают действовать две изменяющиеся во времени силы, направления которых совпадают с осями  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат:  $F_1(t) = e_x F_0 \sin(pt)$  и  $F_2(t) = e_y F_0 \cos(pt)$ . Определить уравнение траектории частицы и ее среднюю скорость за до-

статочно большой интервал времени, если в начальный момент времени частица покоилась в точке, совпадающей с началом координат.

### Решение

I. Задачу решаем в системе отсчета, орты системы координат которой  $e_x$  и  $e_y$  заданы в условии задачи. Систему отсчета считаем инерциальной, частицу – материальной точкой. Движение частицы происходит под действием двух ортогональных гармонических сил, действием каких-либо других сил пренебрегаем.

II, III. Запишем уравнение движения частицы в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(pt), \quad (20.62)$$

$$m\ddot{y} = F_0 \cos(pt). \quad (20.63)$$

Интегрируя (20.62) и (20.63) по времени, получаем законы изменения проекций скоростей частицы на оси выбранной системы координат:

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m} \int \sin(pt) dt = -\frac{F_0}{mp} \cos(pt) + C_1, \quad (20.64)$$

$$\dot{y} = \frac{F_0}{m} \int \cos(pt) dt = \frac{F_0}{mp} \sin(pt) + C_2, \quad (20.65)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, заданными в условии задачи

$$\dot{x}(t=0) = 0, \quad \dot{y}(t=0) = 0. \quad (20.66)$$

Подставляя начальные условия (20.66) в (20.64) и (20.65), получаем значения констант интегрирования:

$$C_1 = \frac{F_0}{mp}, \quad C_2 = 0. \quad (20.67)$$

С учетом полученных значений  $C_1$  и  $C_2$  законы изменения проекций скоростей (20.64) и (20.65) принимают вид:

$$v_x = \frac{F_0}{mp} (1 - \cos(pt)), \quad (20.68)$$

$$v_y = \frac{F_0}{mp} \sin(pt). \quad (20.69)$$

Интегрируя (20.68) и (20.69) по времени, получаем закон движения частицы в координатной форме:

$$x = \frac{F_0}{mp} \int (1 - \cos(pt)) dt = \frac{F_0}{mp} t - \frac{F_0}{mp^2} \sin(pt) + C_3, \quad (20.70)$$

$$y = \frac{F_0}{mp} \int \sin(pt) dt = \frac{F_0}{mp^2} \cos(pt) + C_4, \quad (20.71)$$

где  $C_3$  и  $C_4$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, заданными в условии задачи

$$x(t=0) = 0, \quad y(t=0) = 0. \quad (20.72)$$

Подставляя начальные условия (20.72) в (20.70) и (20.71), получаем значения констант интегрирования:

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{F_0}{mp^2}. \quad (20.73)$$

С учетом полученных значений  $C_3$  и  $C_4$  законы изменения координат частицы (20.70) и (20.71) принимают вид:

$$x(t) = \frac{F_0}{mp^2} (pt - \sin(pt)), \quad (20.74)$$

$$y(t) = \frac{F_0}{mp^2} (1 - \cos(pt)). \quad (20.75)$$

Как видим, траектория частицы является циклоидой. Получено уравнение циклоиды (20.74) – (20.75) в параметрической форме.

Для определения средней скорости частицы используем выражения (20.68) и (20.69):

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t} \int_0^t v_x dt = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_0}{mp} (1 - \cos(pt)) dt = \frac{F_0}{mp}. \quad (20.76)$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{t} \int_0^t v_y dt = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_0}{mp} \sin(pt) dt = 0. \quad (20.77)$$

В соответствии с условием задачи усреднение проводилось за достаточно большой промежуток времени, поэтому интервал времени  $t$  считали равным целому числу периодов.

Как видим, средняя скорость частицы направлена вдоль оси  $X$  и определяется выражением (20.76).

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{F_0}{mp^2}(pt - \sin(pt)), \quad y(t) = \frac{F_0}{mp^2}(1 - \cos(pt));$$

$$\bar{v}_x = \frac{F_0}{mp}, \quad \bar{v}_y = 0.$$

**Задача 20.3.6.** В момент времени  $t = 0$  на частицу массой  $m$  начинают действовать две изменяющиеся во времени силы, направления которых совпадают с осями  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат:  $F_1(t) = e_x F_0 \sin(pt)$  и  $F_2(t) = e_y F_0 \cos(pt)$ . При каких начальных условиях частица будет двигаться по окружности с центром в начале координат?

### Решение

I. Задачу решаем аналогично **Задаче 20.3.5**, используя систему отсчета, орты системы координат которой  $e_x$  и  $e_y$  заданы в условии задачи. Систему отсчета считаем инерциальной, частицу – материальной точкой. Считаем также, что движение частицы происходит под действием только двух ортогональных гармонических сил, действием каких-либо других сил пренебрегаем.

II, III. Запишем уравнение движения материальной точки в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(pt), \quad (20.78)$$

$$m\ddot{y} = F_0 \cos(pt). \quad (20.79)$$

Интегрируя уравнения (20.78), (20.79) по времени, получаем законы изменения проекций скоростей:

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m} \int \sin(pt) dt = -\frac{F_0}{mp} \cos(pt) + C_1, \quad (20.80)$$

$$\dot{y} = \frac{F_0}{m} \int \cos(pt) dt = \frac{F_0}{mp} \sin(pt) + C_2. \quad (20.81)$$

Закон движения материальной точки в координатной форме определяем в результате интегрирования по времени уравнений (20.80) и (20.81):

$$x = \int \left( -\frac{F_0}{mp} \cos(pt) + C_1 \right) dt = -\frac{F_0}{mp^2} \sin(pt) + C_1 t + C_3, \quad (20.82)$$

$$y = \int \left( \frac{F_0}{mp} \sin(pt) + C_3 \right) dt = -\frac{F_0}{mp^2} \cos(pt) + C_2 t + C_4. \quad (20.83)$$

В случае, когда константы интегрирования в выражениях (20.82) и (20.83) равны нулю,

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad (20.84)$$

зависимости координат материальной точки от времени (20.82) и (20.83) принимают вид:

$$x(t) = -\frac{F_0}{mp^2} \sin(pt), \quad (20.85)$$

$$y(t) = -\frac{F_0}{mp^2} \cos(pt). \quad (20.86)$$

Как видим, выражения (20.85) и (20.86) представляют собой уравнение окружности с центром в начале координат в параметрической форме. Для определения начальных условий подставим значения  $t = 0$  и  $C_1 = C_2 = 0$  в правые части выражений (20.80), (20.81), (20.85) и (20.86):

$$\dot{x}(t=0) = -\frac{F_0}{mp}, \quad \dot{y}(t=0) = 0,$$

$$x(t=0) = 0, \quad y(t=0) = -\frac{F_0}{mp^2}.$$

Как видим, для движения по окружности с центром в начале координат под действием двух ортогональных гармонических сил  $\mathbf{F}_1(t) = \mathbf{e}_x F_0 \sin(pt)$  и  $\mathbf{F}_2(t) = \mathbf{e}_y F_0 \cos(pt)$  материальной точке следует сообщить начальную скорость, направленную в отрицательном направлении оси  $X$  и равную  $\mathbf{v}_0 = -\frac{F_0}{mp} \mathbf{e}_x$ . Необходимо также, чтобы в начальный момент времени материальная точка имела координаты  $x_0 = 0$  и  $y_0 = -\frac{F_0}{mp^2}$ .

При воздействии на материальную точку внешних сил, изменяющихся во времени по гармоническому закону, закон движения материальной точки не всегда является гармоническим. Характер движения существенно зависит от начальных условий. В рассмот-

ренном в **Задаче 20.3.5** случае нулевых начальных условий траекторией материальной точки являлась циклоида. При сообщении материальной точке определенной начальной скорости, направленной противоположно одной из сил, траекторией является окружность.

$$\text{Ответ: } x_0 = 0, y_0 = -\frac{F_0}{mg}, v_0 = -\frac{F_0}{mg} e_x.$$

**Задача 20.3.7.** Шарик массой  $m$ , подвешенный к легкой пружинке, удлиняет ее на  $\Delta l$ . Под действием внешней вертикальной силы, изменяющейся по гармоническому закону, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен  $\mathcal{D}$ . Определить частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна.

### Решение

I. На шарик, подвешенный на пружине действуют четыре силы: сила тяжести, сила упругости со стороны пружины, сила сопротивления воздуха и гармоническая вынуждающая сила. По условию задачи пружина легкая, ее массой пренебрегаем, считая ее равной нулю. Шарик под действием указанных сил совершает установившиеся колебания.

II. Искомая резонансная частота  $p_{\text{рез}}$  связана с частотой собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$  и коэффициентом затухания  $\delta$  соотношением (см. (20.6)):

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (20.87)$$

Частота собственных незатухающих колебаний груза на пружине равна (см. (18.8)):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (20.88)$$

Здесь  $m$  – масса груза,  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

В положении равновесия пружина удлиняется на заданную в условии задачи величину  $\Delta l$ . В этом положении сила тяжести, действующая на тело, в соответствии со вторым законом Ньютона компенсирует силу упругости со стороны пружины:

$$mg = k\Delta l. \quad (20.89)$$

Заданный в условии задачи логарифмический декремент затухания  $\mathcal{D}$  определяется выражением (см. (19.3)):

$$\mathcal{D} = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}, \quad (20.90)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – частота затухающих колебаний.

Получена полная система уравнений (20.87) – (20.90) для нахождения резонансной частоты  $p_{\text{рез}}$ .

III. Преобразуя (20.90), выражаем коэффициент затухания через логарифмический коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{g^2}}}. \quad (20.91)$$

Подставляя (20.91) в (20.87), получаем:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \omega_0^2. \quad (20.92)$$

Используя (20.88) и (20.89) находим связь частоты собственных незатухающих колебаний  $\omega_0$  с растяжением пружины в положении равновесия  $\Delta l$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}. \quad (20.93)$$

Подставляя (20.93) в (20.92), получаем искомое выражение для резонансной частоты:

$$p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \frac{g}{\Delta l}.$$

$$\text{Ответ: } p_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1 - (\theta/2\pi)^2}{1 + (\theta/2\pi)^2}} \frac{g}{\Delta l}.$$

**Задача 20.3.8.** Оценить, через какое время установятся колебания в системе с добротностью  $Q = 100$  и собственной частотой колебаний  $\omega_0 = 10$  рад/с при воздействии на эту систему вынуждающей гармонической силы.

### Решение

I. При произвольных начальных условиях в колебательной системе возможна суперпозиция собственных и вынужденных колебаний. По условию задачи добротность системы является конечной величиной, следовательно, собственные колебания системы являются затухающими. Задачу решаем в предположении, что сила трения, приводящая к затуханию собственных колебаний, пропорциональна скорости осциллятора. В этом случае амплитуда собственных колебаний уменьшается по экспоненциальному закону. Будем считать временем установления вынужденных колебаний интервал времени, через которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

II. В общем случае закон движения имеет вид (20.2):

$$\xi(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A(p) \cos(pt + \varphi(p)), \quad (20.94)$$

где  $A_0 e^{-\delta t}$  – закон изменения амплитуды собственных колебаний,  $A_0$  – амплитуда собственных колебаний в начальный момент времени,  $\delta$  – коэффициент затухания.

Следовательно, интервал времени, через которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз, равен:

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (20.95)$$

Добротность колебательной системы и коэффициент затухания связаны соотношением (20.10):

$$Q = \frac{\omega}{2\delta}, \quad (20.96)$$

где  $\omega$  – частота собственных затухающих колебаний.

Частоты затухающих и собственных незатухающих колебаний связаны соотношением (см. (19.2)):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (20.97)$$

Получена полная система уравнений (20.95)–(20.97) для определения искомого времени установления вынужденных колебаний.

III. Подставляя (20.97) в (20.96), получаем связь добротности и коэффициента затухания колебательной системы:



$$\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{4Q^2 + 1}}. \quad (20.98)$$

Искомое время установления вынужденных колебаний определяем в результате подстановки выражения (20.98) в (20.95):

$$\tau = \frac{\sqrt{4Q^2 + 1}}{\omega_0}. \quad (20.99)$$

По условию задачи добротность колебательной системы равна  $Q = 100$ . Следовательно,  $4Q^2 \gg 1$  и соотношение (20.99) преобразуется к виду:

$$\tau \approx \frac{2Q}{\omega_0} = 20 \text{ с}.$$

**Ответ:**  $\tau \approx \frac{2Q}{\omega_0} = 20 \text{ с}.$

#### 20.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 24.4.1** ([3], 4.84). Шарик массой  $m$  может совершать незатухающие гармонические колебания около точки  $x = 0$  с собственной частотой  $\omega_0$ . В момент времени  $t = 0$ , когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу  $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$ , совпадающую по направлению с осью  $X$ . Найти закон вынужденных колебаний шарика  $x(t)$ .

**Ответ:**  $x(t) = \frac{F_0 (\cos(\omega_0 t) - \cos(pt))}{m(p^2 - \omega_0^2)}.$

**Задача 24.4.2** ([3], 4.85). Найти в условиях предыдущей задачи закон движения  $x(t)$ , если частота вынуждающей силы  $p$  равна собственной частоте  $\omega_0$  колебаний шарика.

**Ответ:**  $x(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t.$

**Задача 24.4.3** ([3], 4.86). Частица массой  $m$  может совершать незатухающие гармонические колебания под действием упругой

силы с коэффициентом  $k$ . Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу  $F$ , которая действовала в течение  $\tau$  секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия силы.

$$\text{Ответ: } A = \frac{2F}{k} \left| \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{t}{2} \right) \right|.$$

**Задача 24.4.4** ([3], 4.87). На осциллятор массой  $m$  без затухания с собственной частотой  $\omega_0$  действует вынуждающая сила  $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$ . При каких начальных условиях с самого начала будут происходить только вынужденные колебания?

$$\text{Ответ: } x(t=0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)}, \quad \dot{x}(t=0) = 0.$$

**Задача 24.4.5** ([3], 4.87). На осциллятор массой  $m$  без затухания с собственной частотой  $\omega_0$  действует вынуждающая сила  $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$ . Найти закон движения осциллятора в случае, если с самого начала он будет совершать только вынужденные колебания.

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)} \cos pt.$$

**Задача 24.4.6** ([3], 4.89). Найти разность фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний  $\omega_0 = 50 \text{ с}^{-1}$  и коэффициент затухания  $\delta = 5,2 \text{ с}^{-1}$ .

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left( \frac{\omega_0}{\delta} \right)^2 - 2}, \quad \varphi = 84^\circ.$$

**Задача 24.4.7** ([3], 4.98). Под действием вертикальной вынуждающей силы  $F_x(t) = F_0 \cos(pt)$  тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону  $x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi)$ . Найти работу силы  $F$  за период колебания.

*Ответ:*  $A = \pi a F_0 \sin \varphi$ .

**Задача 24.4.8** ([3], 4.99). Под действием момента сил  $M_z(t) = M_0 \cos(\varphi t)$  тело совершает вынужденные крутильные колебания по закону  $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\varphi t - \varphi)$ . Найти работу сил трения, действующих на тело, за период колебания.

*Ответ:*  $A = -\pi \alpha_0 M_0 \sin \varphi$ .

## ГЛАВА 21

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. МОДЫ КОЛЕБАНИЙ

#### 21.1. Теоретический материал

**Число степеней свободы** механической системы (в том числе колебательной) – число независимых физических величин, так называемых обобщенных координат, однозначно определяющих положение тел системы в пространстве.

**Нормальные колебания (моды)** – собственные гармонические колебания системы. Число мод равно числу степеней свободы. Специальным выбором начальных условий можно возбудить в системе только одно (любое) из всех, свойственных системе нормальных колебаний. При нормальном колебании системы все ее элементы колеблются с одной и той же частотой – нормальной частотой.

В общем случае колебания системы являются суперпозицией ее нормальных колебаний, которая определяется начальными условиями.

**Нормальные частоты** – частоты нормальных колебаний. Нормальные частоты колебательной системы определяются ее параметрами (для распределенной колебательной системы – свойствами среды и граничными условиями).

**Парциальная колебательная система** – колебательная система с одной степенью свободы, входящая в состав сложной колебательной системы с несколькими степенями свободы. Сложные колебательные системы могут рассматриваться как совокупность связанных между собой парциальных колебательных систем.

**Парциальная частота** – частота собственных гармонических колебаний парциальной колебательной системы при покоящихся остальных парциальных системах сложной колебательной системы.

#### 21.2. Основные типы задач и методы их решения

Возможны два метода решения задач о колебаниях систем с несколькими степенями свободы – так называемые динамический и энергетический методы. Динамический метод предполагает использование уравнений движения, а энергетический – закона

сохранения или изменения механической энергии колеблющейся системы тел. Как правило, при использовании обоих методов на последнем этапе решения получают уравнение и закон движения рассматриваемой механической системы. Особенностью задач о колебаниях систем с несколькими степенями свободы является получение в процессе решения системы связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Как правило, заменой переменных можно свести систему к независимым уравнениям, описывающим нормальные колебания системы.

В любом случае необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

### 21.3. Примеры решения задач

**Задача 21.3.1.** Два маленьких шарика массой  $m$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l$ , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью  $k$  (см. рис. 21.1). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  при малых колебаниях в общем случае задания произвольных начальных условий.

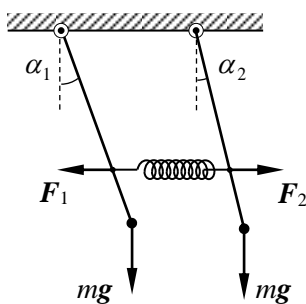


Рис. 21.1. Колебательная система, состоящая из двух маятников, связанных пружинкой.

### Решение

I. На каждый маятник действуют в процессе движения три силы: сила тяжести  $mg$ , сила упругости со стороны пружины  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) и сила реакции потолка, не изображенная на рис. 21.1. Силами трения о воздух и в подвесе пренебрегаем. В соответствии с начальными условиями, сформулированными в задаче, маятники колеблются в плоскости, совпадающей с плоскостью чертежа (рис. 21.1). Задачу решаем динамическим методом в инерциальной лабораторной системе отсчета, жестко связанной с потолком.

II, III. Запишем уравнение моментов для каждого из маятников относительно неподвижных осей, проходящих через точку их крепления к потолку перпендикулярно плоскости колебаний (см. рис. 21.1):

$$ml^2\ddot{\alpha}_1 = -mgl \sin \alpha_1 - F_1 a \cos \alpha_1, \quad (21.1)$$

$$ml^2\ddot{\alpha}_2 = -mgl \sin \alpha_2 + F_2 a \cos \alpha_2. \quad (21.2)$$

При малых углах отклонения маятников от вертикали пренебрегли отклонением пружины в процессе колебаний от ее горизонтальной ориентации в положении равновесия. При записи уравнений (21.1) и (21.2) учтено также, что моменты сил реакции потолка относительно выбранных осей равны нулю.

Сила упругости, действующая со стороны пружины на первый маятник, в соответствии с законом Гука равна:

$$F_1 = ka(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2). \quad (21.3)$$

Поскольку пружина невесома, то согласно второму закону Ньютона сумма сил, действующих со стороны стержней на пружину, равна нулю, а, следовательно, равны модули сил, действующих на стержни со стороны пружины (в соответствии с третьим законом Ньютона):

$$F_1 = F_2. \quad (21.4)$$

Подставляя (21.3), (21.4) в (21.1), (21.2) и учитывая малость углов  $\alpha_i$  отклонения стержней от вертикали ( $\sin \alpha_i \cong \alpha_i$ ,  $\cos \alpha_i \cong 1$ ), получаем систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{l} \alpha_1 + \frac{ka^2}{ml^2} (\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \quad (21.5)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{l} \alpha_2 + \frac{ka^2}{ml^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (21.6)$$

Делая замену переменных

$$\xi_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (21.7)$$

$$\xi_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (21.8)$$

получаем два независимых уравнения гармонических колебаний для новых переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l} \xi_1 = 0, \quad (21.9)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \left( \frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2} \right) \xi_2 = 0. \quad (21.10)$$

Следовательно, при колебаниях маятников переменные  $\xi_1$  и  $\xi_2$  изменяются по гармоническим законам:

$$\xi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (21.11)$$

$$\xi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (21.12)$$

где частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в соответствии с (21.9) и (21.10) определяются параметрами маятников и пружины:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (21.13)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}. \quad (21.14)$$

Амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  и начальные фазы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  колебаний переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяются начальными условиями.

Переходя к углам отклонения стержней от вертикали из (21.7), (21.8), (21.11) и (21.12) получаем искомые законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$ :

$$\alpha_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (21.15)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (21.16)$$

$$\text{Ответ: } \alpha_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

**Задача 21.3.2.** Два маленьких шарика массой  $m$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l$ , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью  $k$  (см. рис. 21.1). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  при малых колебаниях в двух случаях:

1) оба маятника отклонили в одну сторону на одинаковый угол  $\alpha_0$  от положения равновесия в момент времени  $t=0$  и отпустили с нулевой начальной скоростью;

2) в начальный момент времени  $t=0$  маятники отклонили в разные стороны на одинаковые углы  $\alpha_0$  от положения равновесия и отпустили с нулевой начальной скоростью.

### Решение

I. Воспользуемся общим решением задачи (21.15) и (21.16) при произвольных начальных условиях, полученным в **Задаче 21.3.1**.

II, III. Определим параметры колебаний  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  в двух различных случаях задания начальных условий. Для этого сначала найдем угловые скорости движения маятников, дифференцируя (21.15) и (21.16) по времени:

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{A_1 \omega_1}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2 \omega_2}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (21.17)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\frac{A_1 \omega_1}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2 \omega_2}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (21.18)$$

1) В соответствии с условием задачи в первом случае оба маятника отклонили в одну сторону на одинаковый угол  $\alpha_0$  от положения равновесия в момент времени  $t=0$  и отпустили с нулевой



начальной скоростью. Следовательно, начальные условия записываются в виде:

$$\alpha_1(t=0) = \alpha_0, \quad \alpha_2(t=0) = \alpha_0, \quad (21.19)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (21.20)$$

Воспользовавшись формулами (21.15) – (21.18) для параметров  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  получаем:

$$A_1 = 2\alpha_0, \quad A_2 = 0, \quad (21.21)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \quad (21.22)$$

При этом искомые законы движения маятников принимают вид:

$$\alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (21.23)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (21.24)$$

Как видим, маятники колеблются синфазно по гармоническому закону с одинаковой частотой  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , амплитудой  $\alpha_0$  и нулевой начальной фазой. Рассмотренный случай задания начальных условий соответствует возбуждению колебаний с первой нормальной частотой, которая равна частоте колебаний математического маятника длиной  $l$ . В этом случае пружина не оказывает влияния на колебания маятников.

2) В случае, когда маятники отклонили в разные стороны на одинаковые углы  $\alpha_0$  от положения равновесия в момент времени  $t=0$  и отпустили с нулевой начальной скоростью, начальные условия принимают вид:

$$\alpha_1(t=0) = \alpha_0, \quad \alpha_2(t=0) = -\alpha_0, \quad (21.25)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = 0, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (21.26)$$

Как и в первом случае задания начальных условий, воспользовавшись формулами (21.15) – (21.18) для параметров  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  получаем:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 2\alpha_0. \quad (21.27)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \quad (21.28)$$

При этом искомые законы движения маятников имеют вид:

$$\alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t, \quad (21.29)$$

$$\alpha_2(t) = -\alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t. \quad (21.30)$$

Во втором случае задания начальных условий маятники колеблются по гармоническому закону в противофазе с одинаковой частотой  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$  и амплитудой  $\alpha_0$ , что соответствует возбуждению колебаний со второй нормальной частотой. Заметим, что частота противофазных колебаний всегда больше частоты синфазных колебаний.

**Ответ:** 1)  $\alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ,  $\alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ;

2)  $\alpha_1(t) = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t$ ,  $\alpha_2(t) = -\alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t$ .

**Задача 21.3.3.** Два маленьких шарика массой  $m$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l$ , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью  $k$  (см. рис. 21.1). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить законы изменения углов отклонения маятников от положения равновесия  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  при малых колебаниях, если в начальный момент времени  $t=0$  одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость  $v_0$ , направленную от положения равновесия.

### Решение

I. Воспользуемся общим решением задачи (21.15) и (21.16) для произвольных начальных условий, полученным в **Задаче 21.3.1**.

II, III. В случае, когда в начальный момент времени  $t=0$  одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость  $v_0$ , направленную от положения равновесия, начальные условия записываются в виде:

$$\alpha_1(t=0) = 0, \quad \alpha_2(t=0) = 0, \quad (21.31)$$

$$\dot{\alpha}_1(t=0) = \frac{v_0}{l}, \quad \dot{\alpha}_2(t=0) = 0. \quad (21.32)$$

Как и в предыдущих случаях начальных условий (см. **Задачу 21.3.2**), воспользовавшись формулами (21.15) – (21.18) для параметров  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  получаем:

$$A_1 = \frac{v_0}{\sqrt{gl}}, \quad A_2 = \frac{v_0}{\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}}. \quad (21.33)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (21.34)$$

При этом искомые законы движения маятников принимают вид:

$$\alpha_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t, \quad (21.35)$$

$$\alpha_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t. \quad (21.36)$$

Движение маятников представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний с частотами  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  и  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$ .

Для анализа полученного решения законы движения маятников удобно записать в виде:

$$\alpha_1 = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t, \quad (21.37)$$

$$\alpha_2 = C_1 \sin \omega_1 t - C_2 \sin \omega_2 t, \quad (21.38)$$

где

$$C_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}, \quad C_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}}. \quad (21.39)$$

При слабой связи между маятниками  $\left(ka^2 \ll \frac{mgl}{2}\right)$  частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также величины  $C_1$  и  $C_2$  оказываются близкими (см. (21.13), (21.14) и (21.39))

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1, \quad C_1 - C_2 \ll C_1. \quad (21.40)$$

В случае слабой связи законы движения маятников (21.37) и (21.38) принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= C_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) + (C_2 - C_1) \sin \omega_2 t \cong \\ &\cong 2C_1 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2C_1 \cos\left(\frac{\omega_{\text{биен}}}{2} t\right) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (21.41)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= C_1(\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t) - (C_2 - C_1) \sin \omega_2 t \cong \\ &\cong 2C_1 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2C_1 \sin\left(\frac{\omega_{\text{биен}}}{2} t\right) \cos \omega t, \end{aligned} \quad (21.42)$$

где введены обозначения

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega_{\text{биен}} = \omega_2 - \omega_1. \quad (21.43)$$

Как видим, при слабой связи между маятниками движение маятников носит характер биений, и его можно представить как колебания с частотой  $\omega$  и медленно меняющейся амплитудой с периодом

$$T_{\text{биен}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{биен}}} \quad \text{и частотой } \nu_{\text{биен}} = \frac{\omega_{\text{биен}}}{2\pi}.$$

**Биения** – это периодическое изменение амплитуды колебаний, возникающее при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

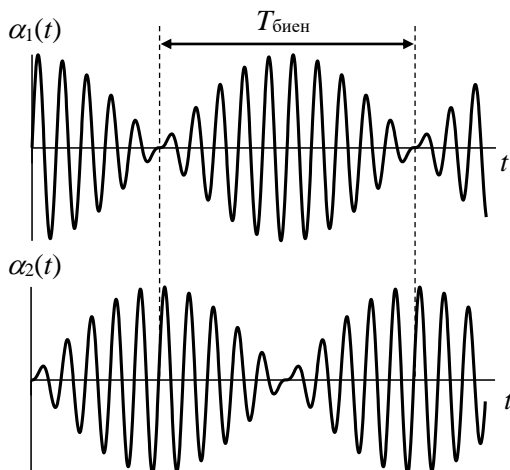


Рис. 21.2. Временные зависимости углов отклонения маятников при  $\omega_2 / \omega_1 = 1,1$ .

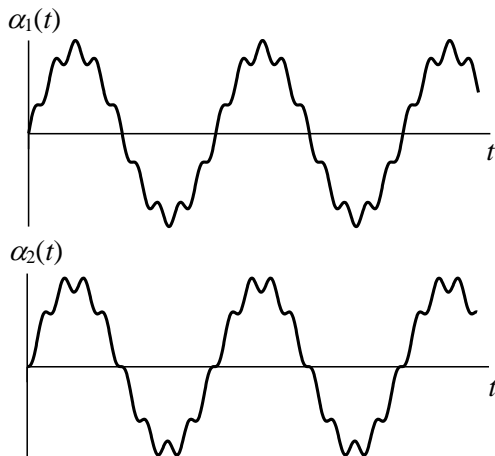


Рис. 21.3. Временные зависимости углов отклонения маятников при  $\omega_2 / \omega_1 = 9$ .

На рис. 21.2 в качестве примера таких колебаний изображены временные зависимости углов отклонения маятников при  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,1$ .

Для сравнения на рис. 21.3 представлены временные зависимости углов отклонения маятников при сильно различающихся частотах  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 9$ , что соответствует наличию сильной связи между маятниками.

Заметим, что при специальном выборе начальных условий (см. **Задачу 21.3.2**) все элементы системы колеблются по гармоническому закону с одной и той же частотой, при этом фаза и амплитуда колебаний различных элементов системы могут различаться. Такие колебания и их частоты называются нормальными. В общем случае при определенных начальных условиях возбуждаются все нормальные колебания.

$$\text{Ответ: } \alpha_1 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t,$$

$$\alpha_2 = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{v_0}{2\sqrt{gl + \frac{2ka^2}{m}}} \sin \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}} t.$$

**Задача 21.3.4.** Два шарика одинаковой массой  $m$ , соединенные нерастянутой пружинкой длиной  $l_0$  и жесткостью  $k$ , лежат на гладкой горизонтальной поверхности (см. рис. 21.4). На один из шариков начинает действовать постоянная сила  $F$ , направленная вдоль оси пружинки. Определить законы движения шариков, а также закон изменения длины пружинки  $l(t)$ .

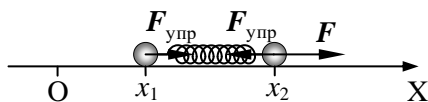


Рис. 21.4. Силы, действующие на шарики, соединенные пружиной.

### Решение

I. Приложим силу  $F$  к переднему по направлению действия силы шарик (рис. 21.4). Задачу решаем в лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью. Направим ось  $X$  декартовой системы координат вдоль направления действия силы и совместим начало отсчета с центром масс системы тел «два шарика + пружинка» в начальный момент времени (рис. 21.4).

На шарики в процессе движения действуют силы упругости со стороны пружинки, удовлетворяющие закону Гука. Будем считать пружинку невесомой и, следовательно, (в соответствии со вторым и третьим законами Ньютона) силы упругости, приложенные к разным шарикам, равными по модулю.

II, III. Уравнения движения шариков в проекции на ось  $X$  выбранной системы координат имеют вид:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (21.44)$$

$$m\ddot{x}_2 = F - k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (21.45)$$

где  $x_2$  и  $x_1$  – координаты переднего и заднего (по направлению действия силы) шариков.

Полученная система уравнений (21.44) – (21.45) является системой двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, которую легко свести к двум независимым уравнениям для длины пружинки  $l$  и координаты центра масс системы  $x_{\text{цм}}$ :

$$l(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad (21.46)$$

$$x_{\text{цм}}(t) = \frac{x_2(t) + x_1(t)}{2}. \quad (21.47)$$

Вычитая из (21.44) уравнение (21.45), получаем уравнение для длины пружинки

$$m\ddot{l} = F - 2k(l - l_0). \quad (21.48)$$

Сделаем замену переменной  $l(t)$  на  $z(t)$ :

$$l(t) = z(t) + l_0 + \frac{F}{2k}. \quad (21.49)$$

При этом уравнение (21.48) сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = 0. \quad (21.50)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$z = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (21.51)$$

где угловая частота  $\omega_0$  гармонических колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad (21.52)$$

а амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями, заданными в задаче:

$$x_1(t=0) = -\frac{l_0}{2}, \quad x_2(t=0) = \frac{l_0}{2}, \quad (21.53)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0. \quad (21.54)$$

В результате решения системы уравнений (21.46), (21.49), (21.53) и (21.54) получаем закон изменения длины пружинки:

$$l(t) = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_0 t) + l_0. \quad (21.55)$$

На рис. 21.5 изображена зависимость длины пружинки от времени  $l(t)$ . Как видим, пружинка в процессе движения шариков находится в растянутом состоянии, периодически меняя свою длину по гармоническому закону от  $l_0$  (длины нерастянутой пружинки) до значения

$$l_0 + \frac{F}{k}.$$

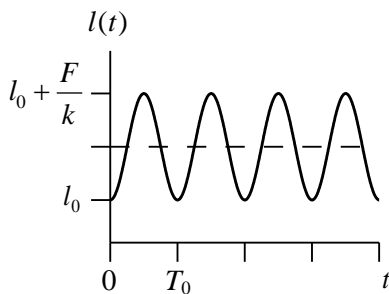


Рис. 21.5. Зависимость длины пружины от времени.

Сложение уравнений (21.44) и (21.45) с учетом выражения для координаты центра масс (21.47) дает уравнение для ускорения центра масс:

$$\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}. \quad (21.56)$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий (21.53), (21.54) имеет вид:



$$x_{\text{цм}}(t) = \frac{Ft^2}{4m}. \quad (21.57)$$

Переходя от переменных  $l(t)$  и  $x_{\text{цм}}(t)$  к координатам шариков с помощью (21.46) и (21.47) из (21.55) и (21.57) получаем законы движения шариков:

$$x_1(t) = x_{\text{цм}}(t) - \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m} (t^2 - 1 + \cos(\omega_0 t)) - \frac{l_0}{2}, \quad (21.58)$$

$$x_2(t) = x_{\text{цм}}(t) + \frac{l(t)}{2} = \frac{F}{4m} (t^2 + 1 - \cos(\omega_0 t)) + \frac{l_0}{2}. \quad (21.59)$$

На рис. 21.6 изображены зависимости координат шариков от времени. Как видим, движение шариков является суперпозицией равноускоренного движения с ускорением центра масс системы  $\ddot{x}_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}$  и колебательного движения с частотой  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ , при этом колебания шариков происходят в противофазе.

Заметим, что, если приложить силу  $F$  к заднему по отношению к ее направлению шарик, то пружинка в процессе движения шариков находится в сжатом состоянии, периодически меняя свою длину по гармоническому закону от  $l_0$  до значения  $l_0 - \frac{F}{k}$ .

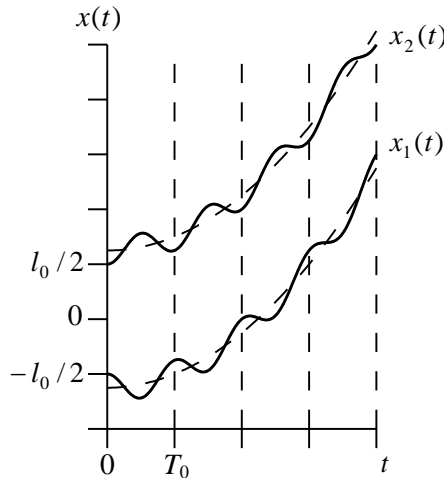


Рис. 21.6. Зависимости координат шариков от времени.

$$\text{Ответ: } x_1(t) = \frac{F}{4m}(t^2 - 1 + \cos(\omega_0 t)) - \frac{l_0}{2},$$

$$x_2(t) = \frac{F}{4m}(t^2 + 1 - \cos(\omega_0 t)) + \frac{l_0}{2}.$$

**Задача 21.3.5.** Найти закон движения атомов в молекуле  $\text{CO}_2$  при возбуждении в ней продольных колебаний. Считать, что сила взаимодействия соседних атомов в линейной молекуле  $\text{CO}_2$  является квазиупругой:  $F = -k\Delta x$  ( $\Delta x$  – изменение расстояния между атомами,  $k$  – постоянный коэффициент). Расстояние между соседними атомами в положении равновесия равно  $l$ . Проанализировать условия возбуждения каждого из нормальных колебаний.

### Решение

I. При решении задачи будем считать атомы, входящие в состав молекулы  $\text{CO}_2$ , материальными точками. На каждый атом кислорода в линейной молекуле  $\text{CO}_2$  в процессе колебаний действует сила со стороны атома углерода ( $F_1$  и  $F_2$  соответственно), а на атом углерода – две силы  $F_1$  и  $F_2$  со стороны атомов кислорода (см. рис. 21.7). Указанные силы по условию задачи являются квазиупругими и подчиняются закону Гука.

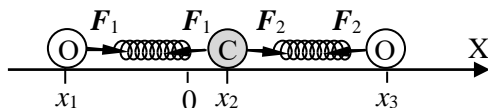


Рис. 21.7. Смещение атомов в молекуле  $\text{CO}_2$  при колебаниях под действием квазиупругих сил.

Молекулу  $\text{CO}_2$  считаем изолированной, следовательно, скорость ее центра масс не изменяется при колебаниях. Задачу решаем в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс молекулы. Ось  $X$  декартовой системы координат направим вдоль молекулы, а начало координат совместим с равновесным положением атома углерода.

II. Запишем уравнения движения атомов кислорода в молекуле  $\text{CO}_2$  относительно выбранной системы отсчета в проекции на ось  $X$ :

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l), \quad (21.60)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - l), \quad (21.61)$$

где  $x_1$ ,  $x_3$  – координаты атомов кислорода (см. рис. 21.7),  $m$  – масса одного атома кислорода,  $x_2$  – координата атома углерода.

Координата центра масс молекулы определяется выражением:

$$x_{\text{цм}} = \frac{mx_1 + Mx_2 + mx_3}{2m + M} = 0. \quad (21.62)$$

Здесь  $M$  – масса атома углерода.

Соотношение (21.62) определяет связь координат атомов в молекуле  $\text{CO}_2$  в системе центра масс:

$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3). \quad (21.63)$$

Подставляя (21.63) в (21.60) и (21.61), получаем систему двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка для координат атомов кислорода:

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_1 = -\frac{m}{M}x_1 - \frac{m}{M}x_3 - x_1 - l. \quad (21.64)$$

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_3 = -x_3 - \frac{m}{M}x_1 - \frac{m}{M}x_3 + l. \quad (21.65)$$

Систему уравнений (21.64), (21.65) легко решить с помощью следующей замены переменных:

$$\xi_1 = x_1 - x_3. \quad (21.66)$$

$$\xi_2 = x_1 + x_3. \quad (21.67)$$

Используя замену переменных (21.66), (21.67), приведем систему уравнений (21.64), (21.65) к виду:

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{k}{m}(y_1 + 2l) = 0, \quad (21.68)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \left(\frac{2m}{M} + 1\right)\frac{k}{m}y_2 = 0. \quad (21.69)$$

Получена система двух несвязанных дифференциальных уравнений относительно переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Уравнение (21.68) приводим к виду уравнения гармонических колебаний еще одной заменой переменной:

$$\xi = y_1 + 2l. \quad (21.70)$$

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m} z = 0. \quad (21.71)$$

Решением уравнений (21.69) и (21.71) являются гармонические функции. Следовательно, переменные  $\xi_1$  и  $\xi_2$  равны

$$\xi_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}), \quad (21.72)$$

$$\xi_2 = B \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) - 2l, \quad (21.73)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (21.74)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{2m}{M} + 1\right) \frac{k}{m}}. \quad (21.75)$$

Амплитуды  $A$  и  $B$ , а также начальные фазы  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  определяются начальными условиями. Заметим, что вторая нормальная частота  $\omega_2$  в  $\sqrt{\frac{2m}{M} + 1} = \sqrt{\frac{11}{3}} \approx 1,9$  раз больше первой нормальной частоты  $\omega_1$ .

Используя соотношения (21.66) и (21.67), перейдем к координатам атомов кислорода в системе центра масс:

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) - l. \quad (21.76)$$

$$x_3(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) + l. \quad (21.77)$$

Закон движения атома углерода находим, используя соотношение (21.63):

$$x_2(t) = -\frac{m}{M} B \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}). \quad (21.78)$$

В общем случае колебания атомов кислорода являются суперпозицией нормальных колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а атом углерода может колебаться только по гармоническому закону только с частотой  $\omega_2$ .

Для возбуждения нормальных колебаний надо подобрать такие начальные условия, чтобы либо  $A=0$ , либо  $B=0$ . В случае воз-

буждения первой моды ( $B=0$ ) законы движения атомов (21.76) – (21.78) принимают вид:

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) - l, \quad (21.79)$$

$$x_2 = 0, \quad (21.80)$$

$$x_3 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + l. \quad (21.81)$$

Колебания с первой нормальной частотой возбуждаются при отклонении атомов кислорода в разные стороны от положения равновесия на одинаковое расстояние  $x_0$ . Начальные условия при этом имеют вид:

$$x_1(t=0) = -l - x_0, \quad (21.82)$$

$$x_2(t=0) = 0, \quad (21.83)$$

$$x_3(t=0) = l + x_0, \quad (21.84)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad (21.85)$$

$$\dot{x}_2(t=0) = 0, \quad (21.86)$$

$$\dot{x}_3(t=0) = 0. \quad (21.87)$$

Подставляя начальные условия (21.82) – (21.87) в законы движения атомов (21.79) – (21.81), получаем после несложных преобразований значения амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_{01}$ :

$$A = -2x_0, \quad (21.88)$$

$$\varphi_{01} = 0. \quad (21.89)$$

Законы движения атомов при возбуждении первой моды колебаний получаем подстановкой (21.88), (21.89) в (21.79) – (21.81):

$$x_1 = -x_0 \cos(\omega_1 t) - l, \quad (21.90)$$

$$x_2 = 0, \quad (21.91)$$

$$x_3 = x_0 \cos(\omega_1 t) + l. \quad (21.92)$$

Как видим, при возбуждении в молекуле  $\text{CO}_2$  первой моды колебаний атом углерода не смещается от положения равновесия, а атомы кислорода колеблются в противофазе. Амплитуда колебаний атомов кислорода равна их начальному смещению от положения равновесия.

Для возбуждения второй моды необходимо сообщить такие начальные смещения атомам, чтобы было выполнено условие

$A = 0$ . В этом случае законы движения (21.76) – (21.78) принимают вид:

$$x_1 = \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) - l, \quad (21.93)$$

$$x_2 = -\frac{m}{M} B \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}), \quad (21.94)$$

$$x_3 = \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) + l. \quad (21.95)$$

Колебания с частотой  $\omega_2$  возбуждаются при начальном смещении атомов кислорода в одну сторону на одинаковое расстояние  $x_0$  от положения равновесия. Итак, начальные условия для возбуждения второй моды имеют вид:

$$x_1(t=0) = -l + x_0, \quad (21.96)$$

$$x_2(t=0) = -\frac{2m}{M} x_0, \quad (21.97)$$

$$x_3(t=0) = l + x_0, \quad (21.98)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad (21.99)$$

$$\dot{x}_2(t=0) = 0, \quad (21.100)$$

$$\dot{x}_3(t=0) = 0. \quad (21.101)$$

С учетом начальных условий (21.96) – (21.101) законы движения атомов (21.93) – (21.95) при возбуждении второй моды колебаний принимают вид:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_2 t) - l,$$

$$x_2 = -\frac{2m}{M} x_0 \cos(\omega_2 t),$$

$$x_3 = x_0 \cos(\omega_2 t) + l.$$

При возбуждении второй моды колебаний атомы кислорода в молекуле  $\text{CO}_2$  колеблются с одинаковой амплитудой и фазой, а атом углерода – в противофазе с ними. При этом амплитуда колебаний атома углерода в  $\frac{2m}{M} = \frac{8}{3}$  раз больше амплитуды колебаний атомов кислорода.

Рассмотренная в задаче молекула  $\text{CO}_2$  имеет три степени свободы при движении вдоль оси  $X$ . Третья мода соответствует посту-

пательному движению молекулы как целого, при этом не возникает колебаний, и можно считать, что частота такой моды равна нулю.

**Ответ:**

При возбуждении первой моды:

$$x_1 = -x_0 \cos(\omega_1 t) - l, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_0 \cos(\omega_1 t) + l, \quad \text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

При возбуждении второй моды:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_2 t) - l, \quad x_2 = -\frac{2m}{M} x_0 \cos(\omega_2 t), \quad x_3 = x_0 \cos(\omega_2 t) + l,$$

где 
$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{2m}{M} + 1\right) \frac{k}{m}}.$$

При возбуждении третьей моды колебаний не возникает.

**Задача 21.3.6.** Тонкий стержень длиной  $l$  и массой  $m$  подвешен на двух одинаковых пружинах жесткостью  $k$  к потолку (рис. 21.8). В положении равновесия стержень горизонтален. В начальный момент времени один из концов стержня сместили вниз на малое расстояние  $A$ , удерживая при этом второй конец. Определить закон смещения концов стержня относительно положения равновесия.

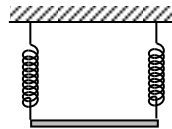


Рис. 21.8. Колебательная система, состоящая из стержня, подвешенного на двух пружинах.

**Решение**

I. Будем считать, что при колебаниях стержень и пружины не отклоняются от вертикальной плоскости, в которой находились в положении равновесия, а центр масс стержня остается на одной вертикальной прямой. При малых колебаниях искривлением пружин также пренебрегаем. Стержень имеет две степени свободы, поскольку его положение полностью задается вер-

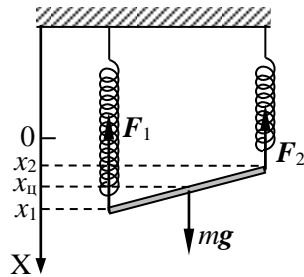


Рис. 21.9. Силы, действующие на стержень при отклонении от положения равновесия.

тикальной координатой центра масс и углом поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колебаний стержня.

На стержень действуют сила тяжести и силы упругости со стороны пружин. Направим ось  $X$  лабораторной системы отсчета вертикально вниз (см. рис. 21.9). Начало отсчета по оси  $X$  совместим с координатой центра масс стержня в положении равновесия.

II, III. Запишем уравнение движения центра масс стержня относительно лабораторной системы отсчета:

$$m\ddot{x}_c = mg - k(x_1 + x_{1\text{равн}}) - k(x_2 + x_{2\text{равн}}), \quad (21.102)$$

где  $x_c$  – координата центра масс стержня;  $x_1, x_2$  – смещения концов пружин от положения равновесия;  $x_{1\text{равн}}, x_{2\text{равн}}$  – деформации пружин в положении равновесия.

Запишем условие равновесия стержня:

$$0 = mg - kx_{1\text{равн}} - kx_{2\text{равн}}. \quad (21.103)$$

Вычитая из уравнения (21.102) соотношение (21.103), получаем:

$$m\ddot{x}_c = -kx_1 - kx_2. \quad (21.104)$$

Уравнение вращательного движения стержня вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колебаний (уравнение моментов) имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -kx_1 \frac{l}{2} + kx_2 \frac{l}{2}. \quad (21.105)$$

Здесь  $J$  – момент инерции стержня относительно указанной оси, равный

$$J = \frac{ml^2}{12}. \quad (21.106)$$

Система отсчета, связанная с центром масс, является неинерциальной. При записи уравнения (21.105) учтено, что моменты силы тяжести и переносной силы инерции относительно выбранной оси равны нулю.

Угол поворота стержня (см. рис. 21.9) связан с координатами концов стержня и координатой его центра масс соотношениями:

$$\alpha = \frac{x_1 - x_c}{l/2}, \quad (21.107)$$



$$\alpha = \frac{x_1 - x_2}{l/2}. \quad (21.108)$$

Подставляя (21.107), (21.108) и (21.106) в (21.105) и (21.104), получаем систему связанных дифференциальных уравнений относительно координат концов стержня:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}(x_1 + x_2), \quad (21.109)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{6k}{m}(x_2 - x_1). \quad (21.110)$$

Систему уравнений (21.109), (21.110) легко свести к системе независимых дифференциальных уравнений с помощью следующей замены переменных:

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad (21.111)$$

$$\xi_2 = x_1 - x_2. \quad (21.112)$$

При замене переменных система уравнений (21.109), (21.110) принимает вид:

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{2k}{m}z_1 = 0, \quad (21.113)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \frac{6k}{m}z_2 = 0. \quad (21.114)$$

Решением полученных уравнений гармонических колебаний являются функции

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (21.115)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (21.116)$$

Здесь  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  – амплитуды и начальные фазы, определяемые начальными условиями;  $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ .

Подставляя (21.115) и (21.116) в (21.111) и (21.112), получаем выражения для координат концов стержня при произвольных начальных условиях:

$$x_1 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (21.117)$$

$$x_2 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (21.118)$$

Запишем начальные условия, заданные в условии задачи:

$$x_1(t=0) = A, \quad (21.119)$$

$$x_2(t=0) = 0, \quad (21.120)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0, \quad (21.121)$$

$$\dot{x}_2(t=0) = 0. \quad (21.122)$$

Подстановка (21.119) – (21.122) в (21.117) – (21.118) дает:

$$A = \frac{A_1}{2} \cos \varphi_1 + \frac{A_2}{2} \cos \varphi_2. \quad (21.123)$$

$$0 = \frac{A_1}{2} \cos \varphi_1 - \frac{A_2}{2} \cos \varphi_2. \quad (21.124)$$

$$0 = \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \varphi_1 + \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \varphi_2. \quad (21.125)$$

$$0 = \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \varphi_1 - \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \varphi_2. \quad (21.126)$$

Решение полученной системы четырех уравнений (21.123) – (21.126) относительно амплитуд и начальных фаз имеет вид:

$$\sin \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = 0. \quad (21.127)$$

$$A_1 = A_2 = A. \quad (21.128)$$

Подставляя (21.127) – (21.128) в (21.117) – (21.118), получаем искомые выражения для смещений концов стержня от положения равновесия:

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right),$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right).$$

**Ответ:**  $x_1(t) = \frac{A}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right),$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}} t \right).$$

### 21.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 21.4.1.** Два маленьких шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l_1$  и  $l_2$ , образуя два математических маятника, связанных между собой легкой пружиной жесткостью  $k$  (рис. 21.10). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. Определить частоты нормальных колебаний системы.

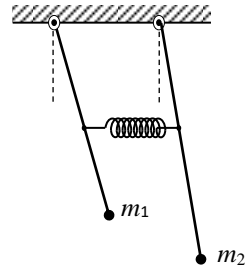


Рис. 21.10.

$$\text{Ответ: } \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}} \right),$$

$$\text{где } \omega_{0i} = \sqrt{\frac{g}{l_i} + \frac{ka^2}{m_i l_i^2}}.$$

**Задача 21.4.2.** Два маленьких шарика массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные между собой и со стеной пружинками жесткостью  $k$ , лежат на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 21.11). Определить частоты нормальных колебаний системы. Искривлением пружин при колебаниях пренебречь.

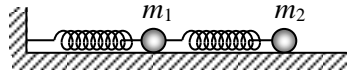


Рис. 21.11

$$\text{Ответ: } \omega_1 = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})k}{2m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})k}{2m}}.$$

**Задача 21.4.3.** Три маленьких шарика, соединенные двумя одинаковыми пружинками жесткостью  $k$ , расположены вдоль одной прямой и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 21.12). Массы крайних шариков равны  $m$ , а масса среднего шарика –  $2m$ . В системе возбуждают продольные колебания. Опреде-

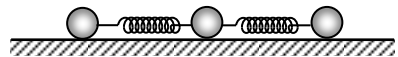


Рис. 21.12.

лить частоты нормальных колебаний.

$$\text{Ответ: } \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

**Задача 21.4.4.** Два маленьких шарика массой  $m$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l$ , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью  $k \ll \frac{mgl}{2a^2}$  (см. рис. 21.1). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. В начальный момент времени  $t=0$  одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость  $v_0$ , направленную от положения равновесия. Определить минимальное время, через которое смещение этого маятника от положения равновесия станет максимальным.

$$\text{Ответ: } t \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

**Задача 21.4.5.** Два маленьких шарика массой  $m$  подвешены к потолку на невесомых стержнях длиной  $l$ , образуя два математических маятника. Эти маятники связаны между собой легкой пружиной жесткостью  $k$  (см. рис. 21.1). В положении равновесия пружина не растянута, а точки ее крепления к стержням находятся на расстоянии  $a$  от точек шарнирного подвеса стержней к потолку. В начальный момент времени  $t=0$  одному из покоящихся в положении равновесия шариков сообщили начальную скорость  $v_0$ , направленную от положения равновесия. Определить минимальное время, через которое смещение второго маятника от положения равновесия станет максимальным.

$$\text{Ответ: } t \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g} \frac{mgl}{ka^2}}.$$

**Задача 21.4.6.** Тонкий стержень длиной  $l$  и массой  $m$  подвешен на двух одинаковых пружинах жесткостью  $k$  к потолку (рис. 21.13). В положении равновесия стержень горизонтален. В начальный момент времени один из концов стержня сместили вниз на малое расстояние, а второй – на такое же расстояние вверх. Определить частоту колебаний стержня.

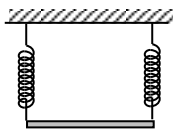


Рис. 21.13

Ответ:  $\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ .

## ГЛАВА 22

### БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ СМЕЩЕНИЙ, СКОРОСТЕЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ. ПОТОК ЭНЕРГИИ В БЕГУЩЕЙ ВОЛНЕ. ВЕКТОР УМОВА

#### 22.1. Теоретический материал

**Возмущение** – пространственно локальное, неравновесное для всей среды изменение ее состояния – изменение физической величины (скалярной –  $\xi(t, \mathbf{r})$  или векторной –  $\xi(t, \mathbf{r})$ ), описывающей это состояние.

**Волна** – процесс распространения возмущения в пространстве.

**Векторное волновое поле**  $\xi(t, \mathbf{r})$  – векторная функция времени  $t$  и радиус-вектора точки наблюдения  $\mathbf{r}$ , описывающая возмущение среды, в которой распространяется волна.

**Скалярное волновое поле**  $\xi(t, \mathbf{r})$  – скалярная функция времени  $t$  и радиус-вектора точки наблюдения  $\mathbf{r}$ , описывающая возмущение среды, в которой распространяется волна.

**Скорость волны** – скорость распространения возмущения в пространстве.

**Продольные и поперечные волны** – волны, в которых векторное волновое поле  $\xi(t, \mathbf{r})$  направлено соответственно вдоль или перпендикулярно направлению распространения волны.

**Упругая (акустическая) волна** – волна упругих деформаций (напряжений, давлений, смещений частиц, а также их скоростей и ускорений) в среде. Скорость упругой волны, как правило, значительно больше скорости движения частиц в среде.

#### Волновое уравнение.

**Векторное волновое уравнение** для линейной, изотропной и однородной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi(t, \mathbf{r}), \quad (22.1)$$

где  $\xi(t, \mathbf{r})$  – векторное волновое поле,  $c$  – скорость волны,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – дифференциальный оператор Лапласа.}$$

**Скалярное волновое уравнение** для линейной, изотропной и однородной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi(t, \mathbf{r}), \quad (22.2)$$

где  $\xi(t, \mathbf{r})$  – скалярное волновое поле (в том числе и проекция векторного волнового поля на ось декартовой системы координат).

**Закон распространения (уравнение) волны** – решение волнового уравнения (22.1) или (22.2).

**Принцип суперпозиции волновых полей** – волновое (векторное или скалярное) поле для совокупности волн равно сумме волновых полей для каждой волны в отдельности:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \sum_i \xi_i(t, \mathbf{r}), \quad \xi(t, \mathbf{r}) = \sum_i \xi_i(t, \mathbf{r}). \quad (22.3)$$

С математической точки зрения, если поля  $\xi_i(t, \mathbf{r})$  (или  $\xi_i(t, \mathbf{r})$ ) являются решениями линейного и однородного волнового уравнения (22.1) (или (22.2)), описывающего волновой процесс, то его решением является и их любая линейная комбинация.

Из принципа суперпозиции следует, что различные волны распространяются независимо друг от друга в линейной, изотропной и однородной среде. Другими словами – всякое возмущение, существующее в линейной, изотропной и однородной среде, не влияет на распространение другого возмущения.

**Волновой фронт (фронт возмущений)** – поверхность, образованная точками пространства с одинаковым возмущением (значением векторного  $\xi(t, \mathbf{r})$  или скалярного  $\xi(t, \mathbf{r})$  волнового поля).

### Плоские волны.

Пусть скалярное волновое поле  $\xi(t, \mathbf{r})$  зависит лишь от одной из декартовых координат, например, координаты  $x$  вдоль оси  $X$  –  $\xi(t, x)$ . При этом волновым фронтом является плоскость, – в среде распространяется **плоская волна**.

**Волновое уравнение плоской волны:**

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \ddot{\xi}(t, x) = c^2 \xi_x''(t, x), \quad (22.4)$$

где  $c$  – скорость волны.

Общим решением волнового уравнения (22.4) плоской волны является сумма двух произвольных (дважды дифференцируемых) функций:

$$\xi(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (22.5)$$

Функция  $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$  описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X, а функция  $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$  – волну, распространяющуюся в отрицательном направлении этой оси.

Пусть единичный вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль направления распространения волны (см. рис. 22.1).

Тогда для произвольной точки пространства, характеризуемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , для обеих волн с учетом направления их распространения можно записать  $\pm x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  и

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right). \quad (22.6)$$

Распространение волны происходит в направлении нормали к волновому фронту и может рассматриваться как движение волнового фронта.

### Плоская гармоническая волна.

Пусть скалярное волновое поле  $\xi(t, x)$  во всех точках плоскости YZ с координатой  $x = 0$  меняется по одному гармоническому закону (синфазно):

$$\xi(t, 0) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (22.7)$$

где  $\xi_0$  – амплитуда колебаний волнового поля в точках плоскости YZ с координатой  $x = 0$ ,  $\omega$  – угловая частота, связанная с частотой колебаний  $\nu$  и периодом  $T = \frac{1}{\nu}$  соотношениями  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\varphi_0$  –

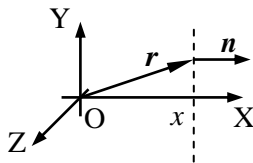


Рис. 22.1. Взаимная ориентация векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$  в случае плоской волны.



начальная фаза колебаний (в точке  $x = 0$  в начальный момент времени  $t = 0$ ).

В соответствии с общим решением волнового уравнения (22.5) в области  $x \geq 0$  будет распространяться плоская гармоническая волна.

**Закон распространения плоской гармонической волны:**

$$\begin{aligned}\xi(t, x) &= \xi_0 \cos(\omega(t - x/c) + \varphi_0) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t + \varphi(x)) = \xi_0 \cos(\Phi(t, x)).\end{aligned}\quad (22.8)$$

Здесь  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – **волновое число**,  $\lambda$  – **длина волны**,  $kx$  – **набег фазы** (или **фазовый сдвиг**) при прохождении волной расстояния  $x$ ,  $\Phi(t, x) = \omega t - kx + \varphi_0$  – **(полная) фаза**.

Для произвольной точки пространства, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , можно записать:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (22.9)$$

где  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  – **волновой вектор**, равный по модулю волновому числу  $k$  и направленный вдоль направления распространения волны (волнового фронта).

**Фазовый фронт** (волновой фронт для гармонической волны) – поверхность, во всех точках которой волновое возмущение  $\xi(t, \mathbf{r})$  имеет в данный момент времени одинаковую фазу  $\Phi$ .

В случае **экспоненциального затухания** плоской гармонической волны закон ее распространения запишется в виде:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi_0 e^{-\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (22.10)$$

где  $\delta$  – коэффициент затухания.

### Сферические волны.

Пусть скалярное волновое поле  $\xi(t, \mathbf{r})$  зависит лишь от одной пространственной переменной – расстояния от точки наблюдения до определенной точки пространства  $S$ . При этом волновым фронтом является сфера с центром в точке  $S$ , – в среде распространяется **сферическая волна**.

**Закон распространения сферической волны** (общее решение скалярного волнового уравнения (22.2) при соответствующих граничных условиях):

$$\xi(t, r) = \frac{\xi_1(t - r/c)}{r} + \frac{\xi_2(t + r/c)}{r}, \quad (22.11)$$

где  $\xi_1(t - r/c)$  и  $\xi_2(t + r/c)$  – производные дважды дифференцируемые скалярные функции,

$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – модуль радиус-вектора произвольной точки пространства  $\mathbf{r}$  относительно точки  $S$ , находящейся в начале выбранной системы координат (см. рис. 22.2).

Данное решение волнового уравнения описывает суперпозицию

двух волн. Первое из слагаемых  $\frac{\xi_1(t - r/c)}{r}$  – расходящаяся от начала координат сферическую волну, а второе  $\frac{\xi_2(t + r/c)}{r}$  – сферическую волну, сходящуюся к началу координат.

Пусть на сфере радиуса  $r_0$  задано граничное условие в виде гармонического возмущения, синфазного во всех точках сферы:

$$\xi(t, r_0) = \xi_0(r_0) \cos(\omega(t - r_0/c) + \varphi_0). \quad (22.12)$$

Тогда в области пространства вне сферы радиуса  $r_0$  будет распространяться расходящаяся сферическая гармоническая волна.

**Закон распространения расходящейся сферической гармонической волны:**

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega(t - r/c) + \varphi_0) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (22.13)$$

где  $A$  – величина, численно равная амплитуде волнового возмущения на единичном расстоянии от точки  $S$ .

В случае **экспоненциального затухания** (с коэффициентом затухания  $\delta$ ) сферической гармонической волны закон ее распространения запишется в виде:

$$\xi(t, r) = \xi_0(r) \cos(\omega t - kr + \varphi_0) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0). \quad (22.14)$$

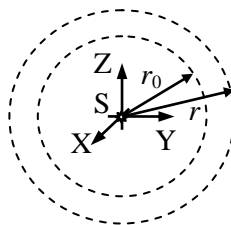


Рис. 22.2. Положение волновых фронтов с радиусами  $r_0$  и  $r$  в случае сферической волны.

### Скорости распространения упругих волн в различных средах.

#### А. Продольная упругая волна в твердом теле.

Скорость волны:

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (22.15)$$

где  $\rho$  – **объемная плотность** тела,  $E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}$  – **модуль Юнга** или модуль одностороннего растяжения (сжатия),  $\sigma$  – **продольное напряжение**,  $\varepsilon$  – **относительная деформация**.

Закон Гука для одностороннего растяжения (сжатия):

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (22.16)$$

Рассмотрим физически бесконечно малый слой  $dx$  твердого тела с координатой  $x$  вдоль направления распространения волны (см. рис. 22.3).

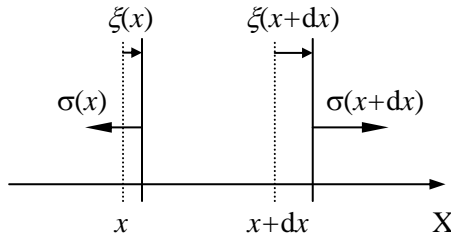


Рис. 22.3. Смещение границ  $\xi(x)$  рассматриваемого слоя твердого тела при распространении продольной упругой волны.

Тогда **относительная деформация**  $\varepsilon$  равна

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi'_x, \quad (22.17)$$

и закон Гука принимает вид

$$\sigma(x) = E\xi'_x. \quad (22.18)$$

Если  $S$  – площадь поперечного сечения рассматриваемого фрагмента тела, а  $\rho$  – его плотность в отсутствие волны, то уравнение движения рассматриваемого слоя тела массой  $dm = \rho S dx$  имеет вид:

$$\rho S dx \ddot{\xi} = S(\sigma(x+dx) - \sigma(x)). \quad (22.19)$$

Преобразуем (22.19) с учетом закона Гука (2.18) и малости толщины рассматриваемого слоя:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\xi} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sigma'_x, \\ \ddot{\xi} &= \frac{E}{\rho} \xi''_x. \end{aligned} \quad (22.20)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (22.4), получим приведенное выше выражение (22.15) для скорости продольной упругой волны в твердом теле.

### Б. Поперечная упругая волна в твердом теле.

Скорость волны:

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (22.21)$$

где  $G \equiv \frac{\tau}{\gamma}$  – модуль сдвига,  $\tau$  – поперечное (касательное)

напряжение,  $\gamma = \operatorname{tg} \alpha \cong \alpha$  – тангенс угла сдвига  $\alpha$ . Отметим, что в однородном изотропном твердом теле  $E > G$  и скорость продольной звуковой волны больше скорости поперечной волны  $c_{\parallel} > c_{\perp}$ .

Закон Гука для сдвига:

$$\tau = G \gamma. \quad (22.22)$$

Рассмотрим колеблющийся при распространении волнового возмущения достаточно малый фрагмент тела, заключенный между координатами  $x$  и  $x + dx$  вдоль направления распространения волны (см. рис. 22.4).

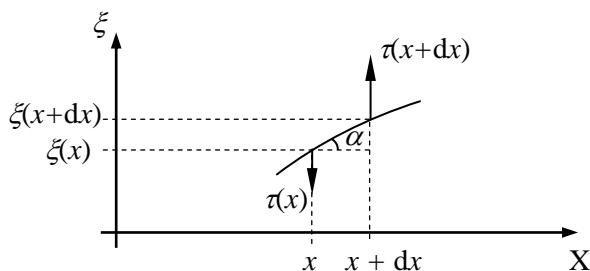


Рис. 22.4. Зависимость смещения частиц твердого тела  $\xi(x)$  при распространении поперечной упругой волны вдоль оси  $X$ .

Касательные напряжения у обоих концов рассматриваемого фрагмента в соответствии с законом Гука (22.22) и рис. 22.4 равны:

$$\tau(x) = G\gamma(x) = G \operatorname{tg}(\alpha(x)) = G \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_x, \quad (22.23)$$

$$\tau(x+dx) = G\gamma(x+dx) = G \operatorname{tg}(\alpha(x+dx)) = G \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x+dx}. \quad (22.24)$$

Уравнение движения рассматриваемого фрагмента твердого тела массой  $dm = \rho S dx$  имеет вид:

$$\rho S dx \ddot{\xi} = (\tau(x+dx) - \tau(x))S. \quad (22.25)$$

Преобразуем (9.25) с учетом выражений для касательных напряжений (9.23) и (9.24):

$$\ddot{\xi} = \frac{G}{\rho} \xi_x''. \quad (22.26)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (22.4), получим приведенное выше выражение (22.21) для скорости поперечной упругой волны в твердом теле.

### В. Поперечная упругая волна в струне.

Скорость волны:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \quad (22.27)$$

где  $T$  – сила натяжения струны,  $\rho_l$  – линейная плотность струны в отсутствие волны.

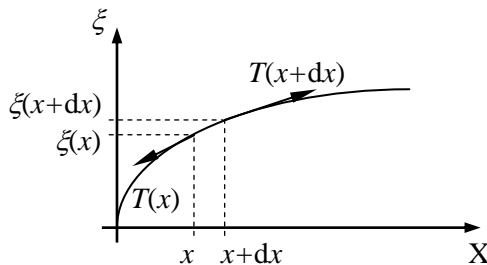


Рис. 22.5. Зависимость смещения частиц струны  $\xi(x)$  при распространении поперечной упругой волны вдоль струны.

Запишем уравнение движения физически бесконечно малого линейного элемента струны длиной  $dx$  и массой  $dm = \rho_l dx$  (см. рис. 22.5) при распространении поперечной упругой волны вдоль струны:

$$\rho_l dx \ddot{\xi} = T(x+dx) \frac{\partial \xi(x+dx)}{\partial x} - T(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x}. \quad (22.28)$$

Преобразуем (9.28) с учетом малости выбранного элемента струны при постоянной величине силы натяжения вдоль струны  $T(x) = const$ :

$$\begin{aligned} dx \rho_l \ddot{\xi} &= T \left( \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \right) - T \frac{\partial \xi(x)}{\partial x}, \\ \ddot{\xi} &= \frac{T}{\rho_l} \xi''_x. \end{aligned} \quad (22.29)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (22.4), получим приведенное выше выражение (22.27) для скорости поперечной упругой волны в струне.

### Г. Упругая волна в идеальных жидкости и газе.

Скорость упругой волны в идеальных жидкости и газе:

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}}, \quad (22.30)$$

где  $P$  – давление и  $\rho$  – плотность жидкости или газа,  $\rho_0$  – плотность в отсутствие волны.

Скорость упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического (без теплопередачи) процесса ее распространения:

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}, \quad (22.31)$$

где  $\gamma \equiv c_p / c_v$ ,  $c_p$  и  $c_v$  – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно,  $P_0$  – давление в отсутствие волны.

Рассмотрим слой  $dx$  идеальной (без вязкого трения) жидкости или газа с координатой  $x$  вдоль направления распространения плоской волны (см. рис. 22.6).

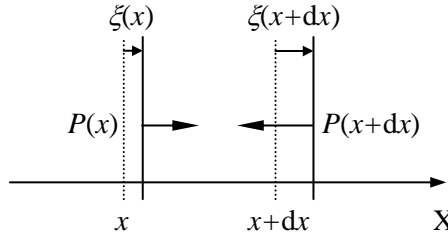


Рис. 22.6. Смещение границ  $\xi(x)$  рассматриваемого слоя идеальной жидкости или газа при распространении упругой волны.

Уравнение движения выбранного слоя жидкости или газа имеет вид:

$$\rho S dx \ddot{\xi} = S(P(x) - P(x+dx)) = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx,$$

$$\rho \ddot{\xi} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (22.32)$$

Воспользуемся материальным уравнением среды  $P = P(\rho)$ . При малых возмущениях плотности  $\Delta\rho$  и давления  $\Delta P$ , которые происходят вследствие распространения в ней упругой волны, запишем:

$$\Delta P = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \Delta \rho. \quad (22.33)$$

При этом для относительного изменения плотности  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  можно записать (см. рис. 22.6):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\xi'_x. \quad (22.34)$$

В результате уравнение движения выбранного слоя жидкости или газа примет вид:

$$\rho \ddot{\xi} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \cdot \rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \rho \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\ddot{\xi} = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \xi''_x. \quad (22.35)$$

Сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением (22.4), получим приведенное выше выражение (22.30) для скорости упругой волны в идеальной жидкости или газе.

Для случая адиабатического процесса распространения упругой волны в идеальном газе воспользуемся уравнением состояния рассматриваемого слоя газа объемом  $dV = Sdx$  и массой  $dm = \rho dV$ :

$$P(dV)^\gamma = \text{const} \equiv C, \quad P = C(dV)^{-\gamma} = C\left(\frac{dm}{\rho}\right)^{-\gamma} = C(dm)^{-\gamma} \rho^\gamma.$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} = C(dm)^{-\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (22.36)$$

В результате получим приведенное выше выражение (22.31) для скорости упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического процесса ее распространения.

### Энергетические соотношения.

При распространении плоской упругой продольной гармонической волны вдоль оси  $X$  в твердом теле смещение частиц среды из положения равновесия  $\xi(t, x)$ , их скорость  $\dot{\xi}(t, x)$  и относительная деформация тела  $\varepsilon(t, x)$  записываются в виде (см. пп. 22.1.2 и 22.1.4.A):

$$\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (22.37)$$

$$\dot{\xi}(t, x) = -\xi_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (22.38)$$

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (22.39)$$

При этом **объемная плотность кинетической энергии** частиц тела, участвующих в волновом движении, равна:

$$w^k(t, x) = \frac{\rho \dot{\xi}^2(t, x)}{2} = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (22.40)$$

**Объемная плотность потенциальной энергии** частиц тела, участвующих в волновом движении:

$$w^p(t, x) = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\xi_0^2 E k^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (22.41)$$



Поскольку скорость упругой продольной волны в твердом теле  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  (см. (9.15)) и волновое число  $k \equiv \frac{\omega}{c}$ , то:

$$\begin{aligned} w^p(t, x) &= \frac{\xi_0^2 E k^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = w^k(t, x). \end{aligned} \quad (22.42)$$

Как видим, для бегущей волны объемные плотности кинетической и потенциальной энергий совпадают.

**Объемная плотность энергии волны:**

$$w(t, x) = w^k(t, x) + w^p(t, x) = w_0 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (22.43)$$

где амплитуда изменения объемной плотности энергии волны

$$w_0 = \xi_0^2 \rho \omega^2 = \xi_0^2 E k^2. \quad (22.44)$$

**Среднее значение объемной плотности энергии гармонической волны** за период колебаний:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{w_0}{2} = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (22.45)$$

**Плотность потока энергии волны** – величина, численно равная энергии, переносимой волной в единицу времени через поверхность единичной площади, ориентированной перпендикулярно направлению распространения энергии волны. В случае изотропных сред направление распространения энергии совпадает с направлением распространения фронта волны:

$$S(x, t) \equiv \frac{w(x, t) c s dt}{s dt} = w(x, t) c, \quad (22.46)$$

где  $s$  – площадь поперечного сечения волны.

**Вектор Умова** – вектор, направление которого совпадает с направлением распространения энергии волны, а модуль равен плотности потока энергии. В случае изотропных сред:

$$S(t, x) = w(t, x) c. \quad (22.47)$$

**Интенсивность волны** – среднее значение плотности потока энергии гармонической волны за период колебаний:

$$I \equiv \langle S(x, t) \rangle_T = \langle w(x, t) \rangle_T c = \frac{w_0}{2} c. \quad (22.48)$$

Заметим, что амплитуда плотности энергии упругой волны  $w_0 = \xi_0^2 \rho \omega^2$  (22.44), через которую выражаются ее энергетические характеристики (22.45) – (22.48), зависит только от одной характеристики среды – ее плотности  $\rho$ . В случае распространения упругой волны в струне под плотностью энергии подразумевается ее линейная плотность, а плотность является линейной плотностью  $\rho_l$  струны.

## 22.2. Основные типы задач и методы их решения

При решении задач о распространении бегущих волн следует придерживаться следующей схемы:

### I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, если это необходимо для решения задачи.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел и характеристики волн.
4. Выбрать модели тел и их движения, модели волн и характер их распространения (если это не сделано в условии задачи).

### II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать законы распространения бегущих (стоячих):
  - а) волн смещения,
  - б) волн скорости,
  - в) волн напряжений,
  - г) волн деформации.
2. Записать начальные и граничные условия (если это необходимо при решении задачи).
3. Записать уравнения, связывающие различные характеристики волн.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

### III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.

2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

### 22.3. Примеры решения задач

**Задача 22.3.1.** Плоская гармоническая звуковая волна с амплитудой  $\xi_0 = 1$  мкм и частотой  $\nu = 1$  кГц распространяется в воздухе с плотностью  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup> со скоростью  $c = 340$  м/с в направлении, составляющем углы  $\alpha = 60^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$  с осями X и Y декартовой системы координат. Найти разность фаз колебаний частиц воздуха в точках с координатами  $x_1 = 1$  м,  $y_1 = 1$  м,  $z_1 = 1$  м и  $x_2 = 6$  м,  $y_2 = 6$  м,  $z_2 = 6$  м, а также энергию, переносимую звуковой волной за время  $\tau = 60$  с через элемент плоской поверхности площадью  $s = 10$  см<sup>2</sup>, ориентированной перпендикулярно оси Z.

#### Решение

I. В соответствии с условием задачи звуковая волна является плоской и гармонической, лабораторная система отсчета и связанная с ней декартова система координат X, Y, Z задана.

II. Запишем закон распространения плоской гармонической волны (см. (22.9)):

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0), \quad (22.49)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения. Поскольку направление волнового вектора  $\mathbf{k}$  совпадает с направлением вектора скорости распространения волны  $\mathbf{c}$ , то скалярное произведение этих векторов равно

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx \cos \alpha + ky \cos \beta + kz \cos \gamma, \quad (22.50)$$

где  $x, y, z$  – координаты точки наблюдения,  $k = \frac{\omega}{c}$  и

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (22.51)$$

Закон распространения плоской гармонической волны в направлении, составляющем углы  $\alpha, \beta, \gamma$  с осями X, Y, Z, принимает следующий вид:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx \cos \alpha - ky \cos \beta - kz \cos \gamma + \varphi_0). \quad (22.52)$$

Фазы колебаний в точках среды с координатами  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  равны соответственно:

$$\Phi_1 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 = \omega t - kx_1 \cos \alpha - ky_1 \cos \beta - kz_1 \cos \gamma + \varphi_0 \quad (22.53)$$

и

$$\Phi_2 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 = \omega t - kx_2 \cos \alpha - ky_2 \cos \beta - kz_2 \cos \gamma + \varphi_0. \quad (22.54)$$

В соответствии с определением вектора Умова искомая энергия, переносимая звуковой волной за время  $\tau$  через элемент плоской поверхности площадью  $s$ , ориентированной перпендикулярно оси  $Z$ , равна:

$$E = \langle S_z \rangle_T s \tau. \quad (22.55)$$

Для среднего значения проекции вектора Умова на ось  $Z$  можно записать:

$$\langle S_z \rangle_T = \langle \mathbf{S}(t, x) \cdot \mathbf{e}_z \rangle_T = \langle \mathbf{S}(t, x) \rangle_T \cdot \mathbf{e}_z = \langle S(t, x) \rangle_T \cos \gamma. \quad (22.56)$$

Выразим среднее значение модуля вектора Умова через среднее значение объемной плотности энергии волны, используя (22.47):

$$\langle \mathbf{S}(t, x) \rangle_T \equiv \langle w(t, x) \rangle_T c. \quad (22.57)$$

В свою очередь среднее значение объемной плотности энергии волны (см. (22.45)) равно:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (22.58)$$

В результате получены две системы уравнений (22.51), (22.53), (22.54) и (22.51), (22.55) – (22.58) для нахождения искомой разности фаз колебаний  $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  и переносимой энергии  $E$  соответственно.

III. Решая полученные системы уравнений, находим искомые в задаче величины:

$$\Delta \Phi = \frac{\omega}{c} \left( (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right). \quad (22.59)$$

$$E = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c s \tau}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (22.60)$$

Подстановка в (22.59), (22.60) численных значений, заданных в условии задачи величин, дает:

$$\Delta\Phi \cong \pi/2, \quad E = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$\text{Ответ: } \Delta\Phi = \frac{\omega}{c} \left( (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + \right. \\ \left. + (z_2 - z_1) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right) \cong \pi/2,$$

$$E = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c s \tau}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

**Задача 22.3.2.** В упругой среде с плотностью  $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  вдоль оси  $X$  распространяется плоская гармоническая звуковая волна с законом изменения скоростей частиц среды  $v(t, x) = v_0 \cos(\omega t - kx)$ . Амплитуда скорости частиц  $v_0 = 1 \text{ см/с}$ , а скорость волны  $c = 2 \text{ км/с}$ . Найти интенсивность волны, а также уравнения волн деформаций и смещений частиц среды, считая, что начальное смещение частиц  $\xi(t = 0, x = 0) = 0$ .

### Решение

I. В соответствии с условием задачи звуковая волна является плоской и гармонической, которая распространяется вдоль оси  $X$  декартовой системы координат лабораторной системы отсчета.

II. Запишем закон смещения частиц среды от положения равновесия:

$$\xi(t, x) = \int v(t, x) dt = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) + C(x), \quad (22.61)$$

Для нахождения константы интегрирования  $C(x)$  в (22.61) запишем начальное условие для смещения частицы среды в точке  $x = 0$ :

$$\xi(t = 0, x = 0) = 0. \quad (22.62)$$

Из (22.61) и (22.62) следует, что константа интегрирования  $C(x) = 0$ , и закон смещения частицы среды приобретает вид:

$$\xi(t, x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx) = \xi_0 \sin(\omega t - kx), \quad (22.63)$$

где  $\xi_0 = \frac{v_0}{\omega}$  – амплитуда смещений частиц среды.

Для волны деформаций в соответствии с (22.17) и (22.63) можно записать:

$$\varepsilon(t, x) = \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} = -\xi_0 k \cos(\omega t - kx) = -\varepsilon_0 \cos(\omega t - kx), \quad (22.64)$$

где  $\varepsilon_0 = \xi_0 k$  – амплитуда волны деформаций.

Выражение для искомой интенсивности упругой волны непосредственно следует из (22.48) и (22.44):

$$I = \frac{w_0}{2} c = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2 c}{2}. \quad (22.65)$$

III. Искомые законы распространения волн смещений и деформаций непосредственно следуют из (22.63) и (22.64) с учетом выражения для амплитуды смещений частиц среды  $\xi_0 = \frac{v_0}{\omega}$ :

$$\xi(t, x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx), \quad (22.66)$$

$$\varepsilon(t, x) = -\frac{v_0}{\omega} k \cos(\omega t - kx), \quad (22.67)$$

Искомая интенсивность волны, выраженная через заданные в задаче физические величины, непосредственно следует из (22.65):

$$I = \frac{v_0^2 \rho c}{2}. \quad (22.68)$$

Подставляя в (22.68) численные значения амплитуды скорости частиц, плотности среды и скорости волны, получаем значение интенсивности волны:

$$I = 200 \text{ Вт/м}^2.$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{v_0^2 \rho c}{2} = 200 \text{ Вт/м}^2.$$

**Задача 22.3.3.** Точечный изотропно излучающий источник испускает экспоненциально затухающую гармоническую звуковую волну с частотой  $\nu = 1,45$  кГц. На расстоянии  $r_0 = 5$  м от источника амплитуда смещения частиц среды  $\xi_0(r_0) = 50$  мкм, а в точке Р, находящейся на расстоянии  $r = 10$  м от источника, амплитуда сме-

нения  $\xi_0(r)$  в  $\eta = 3$  раза меньше  $\xi_0(r_0)$ . Найти коэффициент затухания волны  $\delta$  и амплитуду колебаний скорости частиц среды  $v_0(r)$  в точке Р.

### Решение

I. Для решения задачи используем сферическую систему координат, в начале которой расположен источник звуковых колебаний. Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, среду будем считать изотропной, тогда звуковая волна, излучаемая точечным источником, является сферической.

II. Запишем закон распространения экспоненциально затухающей сферической гармонической волны смещения (см. (22.14)):

$$\xi(t, r) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} \cos(2\pi\nu t - kr + \varphi_0). \quad (22.69)$$

В этом случае закон распространения волны скоростей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v(t, r) &= \frac{\partial \xi(t, r)}{\partial t} = -2\pi\nu \frac{A}{r} e^{-\delta r} \sin(2\pi\nu t - kr + \varphi_0) = \\ &= -v_0(r) \sin(2\pi\nu t - kr + \varphi_0), \end{aligned} \quad (22.70)$$

где амплитуда колебаний скорости частиц среды  $v_0(r)$  равна

$$v_0(r) = 2\pi\nu \frac{A}{r} e^{-\delta r}. \quad (22.71)$$

Амплитуда смещения частиц на расстоянии  $r_0$  от источника равна

$$\xi_0(r_0) = \frac{A}{r_0} e^{-\delta r_0}, \quad (22.72)$$

а в точке Р на расстоянии  $r$  в  $\eta$  раз меньше:

$$\xi_0(r) = \frac{A}{r} e^{-\delta r} = \xi_0 / \eta. \quad (22.73)$$

III. Решая систему уравнений (22.72) и (22.73), получим искомый коэффициент затухания волны  $\delta$ :

$$\delta = \ln \left( \eta \frac{r_0}{r} \right) / (r - r_0). \quad (22.74)$$

Определим амплитуду колебаний скорости частиц среды в точке Р, решая систему уравнений (22.70) и (22.71) с учетом найденного коэффициента затухания  $\delta$  (22.74):

$$v_0(r) = 2\pi\nu \frac{A}{r} e^{-\delta r} = 2\pi\nu \frac{\xi_0(r_0)}{\eta}. \quad (22.75)$$

Подставляя в (22.74) и (22.75) численные значения физических величин, заданные в задаче, окончательно получим:

$$\delta \cong 0,08 \text{ м}^{-1},$$

$$v_0(r) \cong 15 \text{ см/с}.$$

$$\text{Ответ: } \delta = \ln\left(\eta \frac{r_0}{r}\right) / (r - r_0) \cong 0,08 \text{ м}^{-1},$$

$$v_0(r) = 2\pi\nu \frac{\xi_0(r_0)}{\eta} \cong 15 \text{ см/с}.$$

**Задача 22.3.4.** В упругой однородной среде с плотностью  $\rho$  распространяются две плоские гармонические продольные волны смещений со скоростью  $c$ , одинаковыми амплитудами  $a$  и частотами  $\omega$ , одна – вдоль оси X, другая – вдоль оси Y некоторой декартовой системы координат. Найти среднее значение плотности потока энергии результирующего волнового поля вдоль прямой  $y = x$  в плоскости XY, считая одинаковыми начальные фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

### Решение

I. По условию задачи задана декартова система координат, вдоль осей X и Y которой распространяются две плоские продольные гармонические волны.

II. Запишем в соответствии с условием задачи законы распространения бегущих плоских продольных гармонических волн смещений (в соответствии с (22.8)):

$$\xi_1(t, x) = a e_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (22.76)$$

$$\xi_2(t, y) = a e_y \cos(\omega t - ky + \varphi_0), \quad (22.77)$$



где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – единичные векторы вдоль осей X и Y,  $k = \frac{\omega}{c}$  – волновое число для обеих волн,  $\varphi_0$  – начальные фазы колебаний частиц среды в начале координат, обусловленных каждой волной в отдельности.

Результирующее волновое поле смещений вдоль прямой  $y = x$  в плоскости XY описывается выражением:

$$\begin{aligned} \xi(t, x, y) &= \xi_1(t, x) + \xi_2(t, y) = \\ &= a\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + a\mathbf{e}_y \cos(\omega t - ky + \varphi_0) = \\ &= a\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + a\mathbf{e}_y \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \\ &= a(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \end{aligned} \quad (22.78)$$

Направим вспомогательную ось  $\Gamma$  вдоль прямой  $y = x$  в плоскости XY и обозначим единичный вектор вдоль этого направления как  $\mathbf{e}_\gamma$ . Поскольку  $\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y = \sqrt{2}\mathbf{e}_\gamma$ , то

$$\xi = a\sqrt{2}\mathbf{e}_\gamma \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A\mathbf{e}_\gamma \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (22.79)$$

где амплитуда волнового поля  $A$  вдоль оси  $\Gamma$  равна:

$$A = \sqrt{2}a. \quad (22.80)$$

Подставляя в выражение (22.79) для смещения частиц среды вдоль оси  $\Gamma$  соотношение координат вдоль осей X и  $\Gamma$  –  $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ , получаем:

$$\xi = A\mathbf{e}_\gamma \cos\left(\omega\left(t - \frac{\gamma}{\sqrt{2}c}\right) + \varphi_0\right). \quad (22.81)$$

Как видим, волновое поле вдоль оси  $\Gamma$  можно интерпретировать как бегущую продольную волну смещений с амплитудой  $A$  (22.80) и скоростью

$$c_\gamma = \sqrt{2}c. \quad (22.82)$$

Среднее значение плотности потока энергии волнового возмущения вдоль прямой  $y = x$  в соответствии с (22.48) можно записать в виде:

$$I = \langle S(x, t) \rangle_T = \frac{A^2 \rho \omega^2}{2} c_\gamma. \quad (22.83)$$

III. Подставив в (22.83) амплитуду колебаний  $A$  (22.80) и скорость распространения волны  $c_\gamma$  (22.82), получим искомое среднее значение плотности потока энергии результирующего волнового поля вдоль прямой  $y = x$  в плоскости XY:

$$I = \sqrt{2} a^2 \rho \omega^2 c.$$

**Ответ:**  $I = \sqrt{2} a^2 \rho \omega^2 c.$

**Задача 22.3.5.** Точечный изотропно излучающий источник звука  $S$  находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр  $P$  (см. рис. 22.7). Расстояние между точкой  $P$  и источником  $S$  равно  $L = 1$  м, радиус кольца –  $R = 0,5$  м. Найти средний поток энергии через плоскую поверхность, ограниченную кольцом, если в точке  $P$  интенсивность звуковой волны  $I_0 = 30$  мкВт/м<sup>2</sup>. Затуханием волн пренебречь.

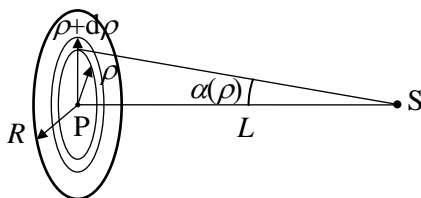


Рис. 22.7. Расположение точечного источника и кольца относительно выбранной системы координат.

### Решение

I. Для решения задачи используем полярную систему координат с центром в точке  $P$ , являющейся центром кольца.

Поскольку источник звука  $S$  является точечным и изотропно излучающим, то он возбуждает сферическую волну, амплитуда которой изменяется обратно пропорционально расстоянию от источ-

ника (см. (22.13)), а значит, интенсивность звуковой волны обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения.

II. Разобьем рассматриваемую поверхность на концентрические кольцевые зоны, заключенные между окружностями с радиусами  $\rho$  и  $\rho+d\rho$  ( $0 \leq \rho \leq R$ ) с центрами в точке P.

Поскольку интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения, то интенсивность волны, проходящей через кольцевую зону радиусом  $\rho$  (см. рис. 22.7), равна:

$$I(\rho) = I_0 \frac{L^2}{\rho^2 + L^2}. \quad (22.84)$$

Поток энергии  $dJ$  через выделенную физически бесконечно тонкую кольцевую зону (см. рис. 22.7) в соответствии с определением интенсивности волны (см. п. 22.1.5), равен:

$$dJ = I(\rho) \cos \alpha(\rho) 2\pi \rho d\rho = I(\rho) \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} 2\pi \rho d\rho. \quad (22.85)$$

III. Искомый поток энергии  $J$  через поверхность, ограниченную кольцом радиусом  $R$ , определим, интегрируя (22.85) с учетом (22.84):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^R I(\rho) \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} 2\pi \rho d\rho = \int_0^R I_0 \frac{\pi L^3}{(\rho^2 + L^2)^{3/2}} d(\rho^2) = \\ &= 2I_0 \pi L^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/L^2 + 1}} \right). \end{aligned} \quad (22.85)$$

Подставив в (22.85) численные значения расстояния  $L$  между точкой P и источником S, радиуса кольца  $R$  и интенсивности звуковой волны  $I_0$  в точке P, окончательно получим:

$$J = 20 \text{ мкВт.}$$

$$\text{Ответ: } J = 2I_0 \pi L^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/L^2 + 1}} \right) = 20 \text{ мкВт.}$$

**Задача 22.3.6.** Точечный изотропный источник звука мощностью  $P$  находится в центре полого цилиндра радиусом  $R$  и длиной  $L$ . Найти среднее значение потока энергии, падающей на боковую поверхность цилиндра, считая, что стенки цилиндра полностью поглощают звук.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи цилиндр полностью поглощает падающую на него звуковую волну, испущенную точечным источником, расположенным в центре цилиндра. Следовательно, отражением звука от поверхности цилиндра можно пренебречь.

Направим ось  $Z$  вдоль оси симметрии цилиндра (см. рис. 22.6). Начало отсчета по оси  $Z$  совместим с положением точечного источника звука.

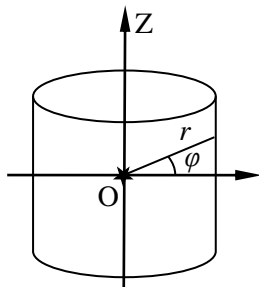


Рис. 22.6. Расположение точечного источника и цилиндра относительно осей выбранной системы координат.

II. На кольцевую полосу поверхности цилиндра бесконечно малой площади  $dS$  падает поток энергии звуковой волны, равный

$$d\Phi = j_n dS = j \cos\varphi dS, \quad (22.86)$$

где  $j$  – плотность потока энергии в волне,  $j_n$  – его нормальная к поверхности цилиндра составляющая,  $\varphi$  – угол между радиус-вектором, проведенным в некоторую точку выделенной кольцевой области цилиндра и плоскостью, перпендикулярной оси  $Z$  (см. рис. 22.6).

Плотность потока энергии в звуковой волне на расстоянии  $r$  от источника мощностью  $P$  равна:

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (22.87)$$

Площадь бесконечно малой кольцевой зоны поверхности цилиндра связана с радиусом цилиндра и координатой  $z$  соотношением:

$$dS = 2\pi R dz. \quad (22.88)$$

Расстояние от начала координат до выделенной области поверхности цилиндра (см. рис. 22.6) равно:

$$r = \frac{R}{\cos\varphi}. \quad (22.89)$$

Координата  $z$  и ее дифференциал определяются соотношениями:

$$z = R \operatorname{tg} \varphi, \quad (22.90)$$

$$dz = \frac{R d\varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (22.91)$$

III. Получена полная система уравнений (22.86) – (22.91) для определения потока энергии, падающей на боковую поверхность цилиндра. Преобразуя систему уравнений, получаем выражение для потока энергии звуковой волны через бесконечно малую кольцевую зону поверхности цилиндра:

$$d\Phi = \frac{P}{2} \cos\varphi d\varphi. \quad (22.92)$$

Интегрируя (22.92) по углу  $\varphi$  в пределах от  $(-\varphi_0)$  до  $\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}\right)$ , получаем искомое выражение для искомого потока энергии:

$$\Phi = \frac{Ph}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \Phi = \frac{Ph}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

**Задача 22.3.7.** Звуковая волна, испущенная точечным изотропным источником, распространяется в среде с коэффициентом затухания  $\gamma$ . Найти мощность источника, если на расстоянии  $r$  от него интенсивность звуковой волны равна  $I$ .

### Решение

Поток энергии  $\Phi$  через сферическую поверхность радиусом  $r$  связан с интенсивностью волны  $I$  соотношением:

$$\Phi = 4\pi r^2 I. \quad (22.93)$$

При распространении сферической затухающей звуковой волны ее амплитуда изменяется по закону (см. (22.14)):

$$A = \frac{a_0}{r} e^{-\gamma r}, \quad (22.94)$$

где  $a_0$  – величина, численно равная амплитуде волны на единичном расстоянии от источника в отсутствие затухания.

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны:

$$I = \alpha \frac{e^{-2\gamma r}}{r^2}. \quad (22.95)$$

Здесь  $\alpha$  – постоянный коэффициент, не зависящий от координаты  $r$ .

Подставляя (22.95) в (22.93), получаем:

$$\Phi = 4\pi\alpha e^{-2\gamma r} = \Phi_0 e^{-2\gamma r}, \quad (22.96)$$

где  $\Phi_0$  – поток энергии при  $r = 0$ , т.е. мощность источника звука  $P$ .

Приравнивая правые части (22.93) и (22.96), находим искомую мощность источника:

$$P = 4\pi r^2 I e^{2\gamma r}.$$

$$\text{Ответ: } P = 4\pi r^2 I e^{2\gamma r}.$$

**Задача 22.3.8.** Между двумя точками звуковой волны, колеблющимися в одинаковой фазе, укладывается  $N = 825$  длин волн. При повышении температуры на 1 К скорость распространения звука возрастает на 0,2%. Найти минимальное повышение температуры, при котором эти две точки будут совершать колебания в противофазе.

### Решение

Расстояние  $L$  между точками пространства, колебания звуковой волны в которых происходит с одинаковой фазой равно целому числу длин волн  $\lambda$ :

$$L = N\lambda = N \frac{v}{\nu}. \quad (22.97)$$

Здесь  $v$  – скорость распространения волны,  $\nu$  – ее частота.

При изменении температуры  $T$  изменяется скорость звуковой волны  $v$ . Введем температурный коэффициент относительного изменения скорости:

$$\alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T}. \quad (22.98)$$

В соответствии с условием задачи при повышении температуры на 1 К скорость распространения звука возрастает на 0,2%, то есть  $\alpha = 0,002 \text{ K}^{-1}$ . Поскольку в условии задачи не сказано иного, будем считать температурный коэффициент скорости постоянной величиной. В этом случае (22.98) преобразуется к виду:

$$\frac{\Delta v}{v} = \alpha \Delta T. \quad (22.99)$$

В задаче требуется определить минимальное изменение температуры, при котором колебания в точках на расстоянии  $L$  будут происходить в противофазе. Следовательно,

$$L = N\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{v + \Delta v}{v}. \quad (22.100)$$

Приравнивая правые части соотношений (22.97) и (22.100), получаем:

$$N = \left(N - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right). \quad (22.101)$$

Подставляя (22.99) в (22.100), находим искомое повышение температуры:

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha(2N - 1)}. \quad (22.102)$$

Подстановка в (22.102) численных значений величин, заданных в условии задачи, дает:

$$\Delta T \approx 0,3 \text{ K}.$$

**Ответ:**  $\Delta T = \frac{1}{\alpha(2N - 1)} \approx 0,3 \text{ K}.$

### 22.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 22.4.1** ([3], 4.171). Найти волновой вектор  $\mathbf{k}$  и скорость  $v$  волны, имеющей вид  $\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)$ .

*Ответ:*  $\mathbf{k} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z$ ,  $v = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ , где  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  — орты осей координат.

**Задача 22.4.2** ([3], 4.172). Плоская волна с частотой  $\omega$  распространяется так, что некоторая поверхность постоянной фазы перемещается вдоль осей X, Y, Z со скоростями  $v_1, v_2, v_3$ . Найти волновой вектор  $\mathbf{k}$ , если орты осей координат  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  заданы.

*Ответ:*  $\mathbf{k} = \omega \left( \frac{\mathbf{e}_x}{v_1} + \frac{\mathbf{e}_y}{v_2} + \frac{\mathbf{e}_z}{v_3} \right)$ .

**Задача 22.4.3** ([3], 4.173). Уравнение упругой волны в системе отсчета S имеет вид:  $\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$ . Найти уравнение этой волны в системе отсчета S', движущейся в положительном направлении оси X с постоянной скоростью V по отношению к системе S.

*Ответ:*  $\xi(t, x) = \xi_0 \cos \left( \left( 1 - \frac{V}{v} \right) \omega t - kx' \right)$ , где  $v = \frac{\omega}{k}$ .

**Задача 22.4.4** ([3], 4.175). Продольная упругая волна распространяется в положительном направлении оси X в стержне с плотностью  $\rho = 4 \text{ г/см}^3$  и модулем Юнга  $E = 100 \text{ ГПа}$ . Найти проекцию скорости  $u_x$  частиц среды в точках, где относительная деформация стержня равна  $\varepsilon = 0,01$ .

*Ответ:*  $u_x = -\varepsilon \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .



**Задача 22.4.5** ([3], 4.176). Уравнение плоской звуковой волны имеет вид  $\xi(t, x) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$ , где  $\xi$  измеряется в микрометрах,  $t$  – в секундах,  $x$  – в метрах. Найти:

а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

в) амплитуду колебаний относительной деформации среды и ее связь с амплитудой колебаний скорости частиц среды.

*Ответ:* а)  $\frac{\xi_m}{\lambda} = 5,1 \cdot 10^{-5}$ ; б)  $u_0 = 11 \text{ см/с}$ ,  $\frac{u_m}{v} = 3,2 \cdot 10^{-4}$ ;

$$в) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_m = 3,2 \cdot 10^{-4}, \quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_m = v \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_m,$$

где  $v = 0,34 \text{ км/с}$  – скорость волны.

**Задача 22.4.6** ([3], 4.178). В однородной упругой среде распространяется плоская волна  $\xi(t, x) = a e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$ , где  $a$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $k$  – постоянные. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на  $\eta = 1\%$ , если  $\gamma = 0,42 \text{ м}^{-1}$  и длина волны  $\lambda = 50 \text{ см}$ .

*Ответ:*  $\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\gamma\lambda} \ln(1 - \eta) \approx \frac{2\pi\eta}{\gamma\lambda} = 0,3 \text{ рад}$ .

**Задача 22.4.7** ([2], 717). Вдоль одного направления распространяются две синусоидальные плоские волны со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  и длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Найти скорость  $u$  перемещения в пространстве тех точек, где колебания, соответствующие каждой волне, имеют одинаковую фазу. Найти расстояние  $L$  между двумя подобными точками.

*Ответ:*  $u = \frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ ,  $L = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

**Задача 22.4.8** ([2], 715). Показать, что для бегущей акустической волны относительное изменение давления в данной точке

равно  $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{u}{c}$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $u$  – скорость частицы,  $c$  – скорость звука.

**Задача 22.4.9** ([3], 4.181). В упругой однородной среде распространяются две поперечные (направление колебаний одинаково) плоские волны, одна в направлении оси  $X$ , другая в направлении оси  $Y$ :  $\xi_1(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$ ,  $\xi_2(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - ky)$ . Найти направления в плоскости  $XY$ , в точках которых частицы среды колеблются с максимальной и минимальной амплитудами.

*Ответ:* Частицы среды в точках на прямых  $y = x \pm n\lambda$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  колеблются с максимальной амплитудой, на прямых

$y = x \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  – не колеблются вовсе.

## ГЛАВА 23

## ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ. СУПЕРПОЗИЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН. ИНТЕНСИВНОСТЬ ЗВУКОВЫХ ВОЛН. ДАВЛЕНИЕ В ЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

## 23.1. Теоретический материал

**Упругая (акустическая) волна** – упругое возмущение, распространяющееся в твердой, жидкой и газообразной среде.

**Формула продольного (классического) эффекта Доплера для упругих волн.** Пусть  $v_s$  и  $v_d$  – скорости движения источника звуковых гармонических волн и детектора, регистрирующего эти волны, относительно неподвижной среды,  $c$  – скорость распространения волны в среде, которая определяется свойствами среды и не зависит от скоростей источника и детектора (см. рис. 23.1).

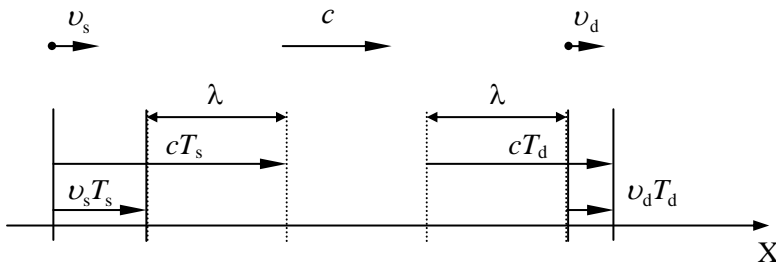


Рис. 23.1. Взаимное расположение волновых фронтов при испускании и регистрации звуковой гармонической волны.

На рис. 23.1 левая черта, перпендикулярная оси X, показывает положение фронта волны, испущенной движущимся источником, в некоторый момент времени  $t$ . К моменту времени  $t + T_s$  ( $T_s$  – период колебаний источника) фронт сместится на расстояние  $cT_s$ , а источник – на расстояние  $v_s T_s$ . Следовательно, длина волны в среде равна (рис. 23.1):

$$\lambda = cT_s - v_s T_s. \quad (23.1)$$

Пусть в некоторый момент времени  $t'$  приемник зарегистрировал фронт волны. Следующий фронт волны, находящийся от приемника на расстоянии  $\lambda$ , будет зарегистрирован в момент  $t' + T_d$  ( $T_d$  – период колебаний приемника). Поскольку за время  $T_d$  приемник

сместится на расстояние  $v_d T_d$ , а волновой фронт – на расстояние  $c T_d$ , то

$$\lambda + v_d T_d = c T_d. \quad (23.2)$$

Учитывая, что  $T_s = 1/v_s$  и  $T_d = 1/v_d$ , получаем из (23.1) и (23.2) связь частот колебаний для источника  $v_s$  и приемника  $v_d$ :

$$v_d = \frac{c - v_d}{c - v_s} v_s. \quad (23.3)$$

Скорости источника  $v_s$  и детектора  $v_D$  относительно неподвижной среды сонаправлены, при этом скорость распространения волны в среде  $v$  определяется свойствами среды и не зависит от скоростей источника и детектора. Тогда частоты колебаний в источнике  $v_s$  и в среде  $v$ , а также частота колебаний  $v_D$ , регистрируемая детектором, связаны соотношениями:

$$v = \frac{v}{v - v_s} v_s,$$

$$v_D = \frac{v - v_D}{v} v = \frac{v - v_D}{v - v_s} v_s,$$

где  $v_s$  и  $v_D$  – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны.

### 23.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач по теме "Элементы акустики. Суперпозиция звуковых волн. Интенсивность звуковых волн. Давление в звуковых волнах. Эффект Доплера" можно условно отнести к следующим типам или их комбинациям. Задачи на:

- 1) элементы акустики;
- 2) эффект Доплера.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, если это необходимо для решения задачи.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).

3. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел и характеристики волн.
4. Выбрать модели тел и их движения, модели волн и характер их распространения (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать законы распространения бегущих волн смещения:
2. Записать уравнения, связывающие различные характеристики волн.
3. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

В случае решения задач на эффект Доплера п. II.1 надо опустить.

Пункты II.1 – II.2 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).

3. Получить численный результат.

### 23.3. Примеры решения задач

**Задача 23.3.1.** (*Суперпозиция звуковых волн*). Вдоль оси  $X$  декартовой системы координат распространяются две плоские гармонические звуковые волны одинаковой частоты и амплитуды ( $A_1 = A_2 = A_0 = 5$  мм). Волны порождены двумя источниками, совершающими колебания в одинаковой фазе. Найти амплитуду  $A$  колебаний в точке среды, отстоящей от одного источника колебаний на расстоянии  $x_1 = 2,5$  м и от другого – на  $x_2 = 4,0$  м. Направлен-

ния колебаний в рассматриваемой точке совпадают. Длина волны  $\lambda = 0,65$  м.

### Решение

I. В соответствии с условием задачи звуковая волна является плоской и гармонической, лабораторная система отсчета и связанная с ней декартова система координат  $X, Y, Z$  задана.

II. Запишем закон распространения плоской гармонической звуковой волны в положительном направлении оси  $X$ :

$$\xi = A_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

где  $\xi$  – смещение точек среды из положения равновесия.

Суперпозиция двух волн в точке наблюдения имеет следующий вид;

$$\xi = A_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + A_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda}\right). \quad (23.4)$$

III. Преобразуя соотношение (23.4), получим:

$$\begin{aligned} \xi &= 2A_0 \sin\left(\frac{\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} - \omega t + \frac{2\pi x_2}{\lambda}}{2}\right) = \\ &= 2A_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi(x_1 + x_2)}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right) = \\ &= A \sin\left(\omega t - \frac{\pi(x_1 + x_2)}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда колебаний равна:

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right) \quad (23.5)$$

Подставив в (23.5) численные значения, получим

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right) \approx 9,8 \text{ мм.}$$

**Ответ:**  $A = 2A_0 \cos\left(\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right) \approx 9,8 \text{ мм.}$

**Задача 23.3.2.** (Суперпозиция звуковых волн). Два динамика расположены на расстоянии  $d = 2,0$  м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии  $L = 4,0$  м от центра динамиков. Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние  $b = 1,5$  м, то он фиксирует первый интерференционный максимум. Скорость звука  $v = 340$  м/с. Определить частоту звуковой волны.

### Решение

I. Будем считать, что звуковые волны являются плоскими и гармоническими. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, направим ось  $X$  декартовой системы координат вдоль линии, по которой перемещают приемник звуковых волн, как показано на рис. 23.2.

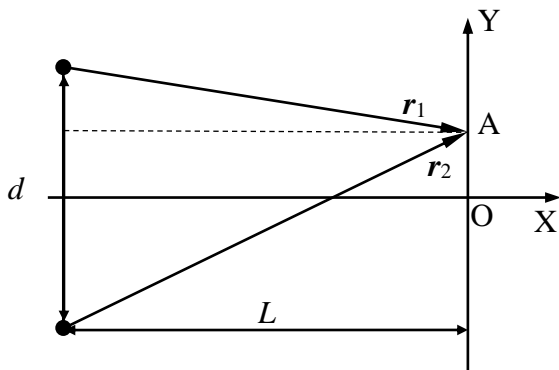


Рис. 23.2. Расположение динамиков и приемника относительно осей выбранной декартовой системы координат.

II, Расстояния от динамиков до точки наблюдения  $A$  соответственно равны (см. рис. 23.2):

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2}, \quad (23.6)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2}. \quad (23.7)$$

Условием наблюдения первого максимума интенсивности суммарной волны является равенство разности хода волн длине волны  $\lambda$ :

$$\Delta l = r_2 - r_1 = \lambda \quad (23.8)$$

Частоту волны определим из следующего соотношения:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \quad (23.9)$$

III. Решая систему уравнений (23.6) – (23.9), получим искомую частоту звуковой волны:

$$\nu = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2}} \approx 496 \text{ Гц.}$$

$$\text{Ответ: } \nu = \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + y\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + L^2}} \approx 496 \text{ Гц.}$$

**Задача 23.3.3.** (Определение среднего значения потока энергии). Амплитуда звуковой волны давлений  $\Delta P_0 = 10$  Па. Найти среднее значение потока энергии  $J$ , попадающего в ухо человека. Считать площадь уха, ориентированного перпендикулярно направлению распространения звуковой волны,  $s = 4 \text{ см}^2$ . Плотность воздуха в отсутствие волны  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука в воздухе  $c = 334 \text{ м/с}$ .

### Решение

I. Для решения задачи используем декартову систему координат. В качестве модели волны смещений выберем плоскую гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси  $X$  выбранной си-



стемы координат. Процесс распространения звуковой волны считаем адиабатическим.

II, III. Среднее значение потока энергии  $J$ , падающего перпендикулярно поверхности уха площадью  $s$ , равно (см. формулу (22.48) **Главы 22**)

$$J = s \langle w(t, x) \rangle_T c, \quad (23.10)$$

а объемная плотность энергии плоской гармонической волны определяется следующим соотношением:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (23.11)$$

Следовательно, для определения плотности потока энергии необходимо выразить амплитуду волны смещений  $\xi_0$  через амплитуду волны давлений  $\Delta P_0$ , заданную в условии задачи.

Запишем закон распространения волны смещений:

$$\xi(t, x) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Относительное изменение плотности воздуха, вызванное распространением звуковой волны, равно (см. формулу (22.34) **Главы 22**):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\xi'_x, \quad (23.12)$$

где

$$\xi'_x = \xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (23.13)$$

При адиабатическом процессе распространения звуковой волны в газе относительные изменения плотности среды и давления связаны следующим соотношением в соответствии с формулой (22.36) **Главы 22**:

$$\frac{\Delta P}{P} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (23.14)$$

где  $P$  и  $\rho$  – давление и плотность воздуха в отсутствие волны.

Для определения амплитуды звукового давления воспользуемся также формулой для скорости звуковой волны в воздухе:

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (23.15)$$

Решая систему уравнений (23.12) – (23.15), находим изменение давления воздуха, вызванное распространением в нем звуковой волны:

$$\Delta P = -c^2 \rho \xi_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Следовательно, амплитуда звукового давления равна:

$$\Delta P_0 = c^2 \rho \xi_0 k = c \rho \xi_0 \omega. \quad (23.16)$$

Среднее значение потока энергии  $J$ , падающего перпендикулярно поверхности уха площадью  $s$ , получаем подстановкой в (23.10) объемной плотности энергии волны (23.11) с учетом (23.16):

$$J = s \langle w(t, x) \rangle_T c = s \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2} c = s \frac{\Delta P_0^2 \rho \omega^2}{2(c\rho\omega)^2} c = s \frac{\Delta P_0^2}{2c\rho}. \quad (23.17)$$

Подставив в (23.17) численные значения физических величин, заданных в условии задачи, окончательно получим:

$$J = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

Заметим, что выражение (23.16) можно записать в следующем виде (акустический закон Ома):

$$U = IR,$$

где  $U = \Delta P_0$  – аналог напряжения,  $R = c\rho$  – аналог сопротивления,  $I = \xi_0 \omega$  – аналог силы тока.

$$\text{Ответ: } J = s \frac{\Delta P_0^2}{2c\rho} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

**Задача 23.3.4.** (Определение скорости колебания частиц в звуковой волне). Какова максимальная скорость  $\dot{\xi}_{\max}$  колебательного движения частиц кислорода, через который проходят звуковая волна? Амплитуда звукового давления равна  $\Delta p_0 = 0,2$  Па, температура кислорода –  $T = 300$  К, давление –  $p = 100$  кПа.

### Решение

I. Будем считать, что звуковая волна является плоской и гармонической. Выберем лабораторную инерциальную систему отсче-

та, направим ось  $X$  декартовой системы координат вдоль направления распространения звуковой волны.

II. Запишем закон распространения плоской гармонической звуковой волны в положительном направлении оси  $X$ :

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $\xi$  – смещение точек среды из положения равновесия. Скорость колебания частиц в волне,

$$\dot{\xi} = \xi_0 \omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (23.18)$$

Следовательно, максимальная скорость колебательного движения частиц в волне  $\dot{\xi}_{\max}$  равна:

$$\dot{\xi}_{\max} = \xi_0 \omega \quad (23.19)$$

Скорость упругой волны в идеальном газе в случае адиабатического (без теплопередачи) процесса ее распространения (см. формулу (22.31) Главы 22):

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (23.20)$$

где  $\gamma \equiv c_p / c_v$ ,  $c_p$  и  $c_v$  – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно,  $p$  – давление в отсутствие волны. Плотность газа  $\rho$  в отсутствие волны определяется из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad (23.21)$$

где  $\mu$  – молярная масса газа.

Согласно формуле (23.16) амплитуда звукового давления равна:

$$\Delta p_0 = c^2 \rho \xi_0 k = c \rho \xi_0 \omega. \quad (23.22)$$

III. Определим амплитуду звуковой волны из соотношений (23.20) и (23.21):

$$\xi_0 = \frac{\Delta p_0}{c \rho \omega} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \rho \omega} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{\gamma p \rho \omega}} \quad (23.23)$$

Подставив полученное соотношение (23.23) в (23.19) с учетом (23.20), получим:

$$\dot{\xi}_{\max} = \xi_0 \omega = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{\gamma p \rho}} = \frac{\Delta p_0 \sqrt{RT}}{p \sqrt{\mu \gamma}}. \quad (23.24)$$

Молярная масса кислорода  $O_2$  равна  $\mu = 0,032$  кг/моль. Поскольку газ является двухатомным, параметр  $\gamma = 1,4$ . Подставляя все численные значения в (23.24), получим:

$$\dot{\xi}_{\max} = 4,37 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

**Ответ:**  $\dot{\xi}_{\max} = \frac{\Delta P_0 \sqrt{RT}}{p \sqrt{\mu \gamma}} = 4,37 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$

**Задача 23.3.5.** (Определение мощности источника звуковой волны). На расстоянии  $r = 80$  м от точечного изотропного источника звука амплитуда звукового давления  $\Delta p_0 = 0,2$  Па. Определить мощность  $N$  источника, если величина удельного акустического сопротивления воздуха, определяемого произведением плотности воздуха в отсутствие волны  $\rho$  на скорость распространения волны  $v$  ( $Z_s = \rho c$ ), равно  $Z_s = 420$  Па·с/м. Поглощением звука в воздухе пренебречь.

### Решение

I. Для решения задачи используем сферическую систему координат, в начале которой расположен источник звуковых колебаний. Будем считать, что звуковая волна, распространяющаяся от точечного источника, является сферической и гармонической.

II. Согласно формуле (23.16) амплитуда звукового давления равна

$$\Delta P_0 = c \rho \xi_0 \omega. \quad (23.25)$$

Среднее значение объемной плотности энергии гармонической волны за период колебаний равно (см. формулу (22.45) **Главы 22**):

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{\xi_0^2 \rho \omega^2}{2}. \quad (23.26)$$

Интенсивность волны в соответствие с формулой (22.48) **Главы 22** равна:

$$I \equiv \langle w(x, t) \rangle_T c. \quad (23.27)$$

Мощность источника определим с помощью следующего соотношения:

$$N = 4\pi r^2 I \quad (23.28)$$

III. Используя соотношения (23.25) и (23.26), выразим среднее значение объемной плотности энергии через удельное акустическое сопротивление и амплитуду звукового давления:

$$\langle w(t, x) \rangle_T = \frac{\Delta P_0^2}{2\rho c^2} = \frac{\Delta P_0^2}{2Z_S c}$$

Тогда искомая мощность источника согласно (23.27) и (23.28) равна:

$$N = 4\pi r^2 \frac{\Delta P_0^2 c}{2Z_S c} = 2\pi r^2 \frac{\Delta P_0^2}{Z_S} = 2\pi \cdot \frac{80^2 \cdot 0,2^2}{420} \approx 3,83 \text{ Вт}$$

$$\text{Ответ: } N = 2\pi r^2 \frac{\Delta P_0^2}{Z_S} \approx 3,83 \text{ Вт}$$

**Задача 23.3.6.** (Определение уровня интенсивности звуковой волны в децибелах). Уровень интенсивности  $L_0$  шума двигателя равен 50 дБ. Каков будет уровень интенсивности шума  $L$ , если одновременно будут работать  $N=5$  двигателей?

### Решение

I. Для решения задачи выберем лабораторную систему отсчета, используем сферическую систему координат. В качестве модели волны смещений выберем сферическую гармоническую волну. Процесс распространения звуковой волны считаем адиабатическим.

II. Для решения задачи воспользуемся определением интенсивности звука в децибелах:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

где  $I$  – интенсивность звуковой волны,  $I_0$  – интенсивность звуковой волны, принятая за базис (опорная).

В нашем случае

$$L_0 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0}, \quad (23.29)$$

В том случае, когда работают  $N$  двигателей, интенсивность звука будет равна

$$I_2 = NI_1, \quad (23.30)$$

а уровень интенсивности –

$$L = 10 \lg \frac{I_2}{I_0}. \quad (23.31)$$

III. Из соотношений (23.29) – (23.31) получим:

$$I_1 = I_0 10^{0,1L_0},$$

$$L = 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \frac{NI_1}{I_0} = 10 \lg \frac{NI_0 10^{0,1L_0}}{I_0} = 10 \lg N 10^{0,1L_0}$$

$$= 10(\lg N + 0,1L_0) = 10 \lg N + L_0 = 10 \lg 5 + 50 \approx 57.$$

**Ответ:**  $L = 10 \lg N + L_0 \approx 57$ .

**Задача 23.3.7.** (Эффект Доплера). С движущегося катера посылается ультразвуковой сигнал частотой  $\nu_1 = 50$  кГц, который распространяется в воде. Этот сигнал отражается от второго катера, который идет встречным курсом со скоростью  $\nu_2 = 10$  м/с, и принимается первым катером. Частота принятого после отражения сигнала равна  $\nu_2 = 52$  кГц. Определите скорость движения первого катера  $\nu_1$ , считая скорость звуковой волны в воде равной  $c = 1,54$  км/с.

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета. При решении задачи рассмотрим два различных этапа распространения импульса звуковой волны. На первом этапе импульс распространяется в горизонтальном направлении по воде от первого катера ко второму. Направим в этом случае ось  $X_1$  декартовой системы координат в этом же направлении от источника к приемнику. На втором этапе импульс распространяется в обратном направлении. Направим в этом случае ось  $X_2$  декартовой системы координат от источника (второго катера) к приемнику (первому катеру). Будем считать, что среда, в которой распространяется импульс звуковой волны, неподвижна относительно лабораторной системы отсчета.

II. При решении задачи воспользуемся формулой (23.3), связывающей частоты колебаний движущихся источника и приемника звуковой волны:

$$\nu_D = \frac{c - v_D}{c - v_S} \nu_S,$$

где  $v_S$  и  $v_D$  – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны,  $c$  – скорость распространения волны в среде,  $\nu_S$  – частота излучаемой источником звуковой волны,  $\nu_D$  – частота волны, которую регистрирует детектор. Все скорости направлены в одну сторону.

В первом случае источник (первый катер) движется в положительном направлении оси  $X_1$ , а детектор (второй катер) – в отрицательном направлении ( $v_S = v_1$ ,  $v_D = -v_2$ ), поэтому частота  $\nu'_1$ , которую фиксирует детектор, равна:

$$\nu'_1 = \frac{c + v_2}{c - v_1} \nu_1. \quad (23.32)$$

Во втором случае источником является второй катер, который движется в положительном направлении оси  $X_2$ , а детектор (первый катер) в отрицательном направлении этой оси ( $v_S = v_2$ ,  $v_D = -v_1$ ), поэтому частота  $\nu_2$ , которую фиксирует детектор, равна:

$$\nu_2 = \frac{c + v_1}{c - v_2} \nu'_1. \quad (23.33)$$

III. Из уравнений (23.32) и (23.33), определим получим:

$$\nu_2 = \frac{c + v_1}{c - v_2} \nu' = \frac{c + v_1}{c - v_2} \cdot \frac{c + v_2}{c - v_1} \nu_1 = \frac{c + v_1}{c - v_1} \cdot \frac{c + v_2}{c - v_2} \nu_1.$$

Введем переменную  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\nu_2 (c - v_2)}{\nu_1 (c + v_2)}. \quad (23.34)$$

Тогда искомая скорость первого катера равна:

$$v_1 = \frac{c(\alpha - 1)}{\alpha + 1}. \quad (23.35)$$

Подставив численные значения в (23.34) и (23.35), получим численный ответ:

$$v_1 \approx 20,2 \text{ м/с.}$$

**Ответ:**  $v_1 = \frac{c(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \approx 20,2 \text{ м/с}$ , где  $\alpha = \frac{v_2(c - v_2)}{v_1(c + v_2)}$ .

**Задача 23.3.8.** (Эффект Доплера). На оси  $X$  находятся приемник  $D$  и источник  $S$  звуковых гармонических волн с частотой  $\nu_s = 2000$  Гц. Источник установлен на тележке, совершающей гармонические колебания вдоль этой оси с угловой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A = 50$  см. Скорость звука  $c = 340$  м/с. При каком значении  $\omega$  ширина частотного интервала звука, воспринимаемого неподвижным приемником, будет составлять  $\Delta\nu = 20$  Гц?

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой направлена от источника к приемнику (см. рис. 23.3). Поскольку в условии задачи не оговаривается иное, будем считать, что среда, в которой распространяется звуковая волна, неподвижна относительно лабораторной системы отсчета.

Изменения частоты звуковой волны, воспринимаемой неподвижным приемником, обусловлено эффектом Доплера.

II. Ширина частотного интервала  $\Delta\nu$  звуковых волн, воспринимаемых приемником, определяется разностью максимальной и минимальной частот этих волн.

При решении задачи воспользуемся формулой, связывающей частоты колебаний движущихся источника и приемника звуковой волны (см. 23.1, пункт 2):

$$\nu_D = \frac{c - v_D}{c - v_S} \nu_S,$$

где  $v_s$  и  $v_D$  – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны,  $c$  – скорость распространения волны в среде,  $\nu_s$  – частота излучаемой источником звуковой волны,  $\nu_d$  – частота волны, которую регистрирует детектор.

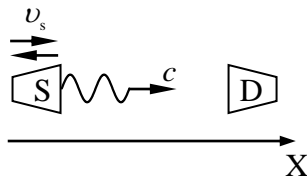


Рис. 23.3. Приемник  $D$  и источник  $S$  звуковых гармонических волн.



В случае, когда источник приближается к приемнику, максимальная частота  $\nu_{\max}$  регистрируемой неподвижным приемником волны равна

$$\nu_{\max} = \frac{c \nu_s}{c - \nu_{s0}}, \quad (23.36)$$

где  $\nu_{s0}$  – амплитуда скорости движения источника относительно среды,  $c$  – скорость распространения волны в среде.

При движении тележки по гармоническому закону амплитуда ее скорости, а, следовательно, и амплитуда скорости источника, равна:

$$\nu_{s0} = A \omega. \quad (23.37)$$

В случае удаления источника от приемника частота  $\nu_{\min}$ , воспринимаемая приемником, будет минимальной и равной

$$\nu_{\min} = \frac{c \nu_s}{c + \nu_{s0}}. \quad (23.38)$$

III. Искомая ширина частотного интервала звука  $\Delta \nu$ , воспринимаемого неподвижным приемником, согласно (23.36) и (23.38) равна:

$$\Delta \nu = \nu_{\max} - \nu_{\min} = 2\nu_s \frac{c \nu_{s0}}{c^2 - \nu_{s0}^2}.$$

Используя взаимосвязь амплитуды скорости источника с амплитудой его колебаний вместе с тележкой (23.37), получаем:

$$\Delta \nu = 2\nu_s \frac{c A \omega}{c^2 - A^2 \omega^2}. \quad (23.39)$$

Решая уравнение (23.39) относительно  $\omega$ , находим ее величину:

$$\omega = \frac{-\nu_s c \pm c \sqrt{\nu_s^2 + (\Delta \nu)^2}}{A \Delta \nu}.$$

Поскольку частота колебаний является положительной величиной, то для частоты колебаний тележки окончательно получаем:

$$\omega = \frac{\nu_s c}{A \Delta \nu} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta \nu}{\nu_s} \right)^2} - 1 \right). \quad (23.40)$$

В соответствии с условием задачи  $\Delta v \ll v_s$ , следовательно, соотношение (23.40) можно упростить, ограничиваясь в разложении квадратного корня в ряд по степеням малого параметра  $\left(\frac{\Delta v}{v_s}\right)^2$

линейным членом ряда:

$$\omega \cong \frac{c\Delta v}{2Av_s}.$$

Подстановка численных значений физических величин, заданных в задаче, дает:

$$\omega \cong 3,4 \text{ рад/с}.$$

**Ответ:**  $\omega \cong \frac{c\Delta v}{2Av_s} \cong 3,4 \text{ рад/с}.$

**Задача 23.3.9.** (Эффект Доплера). Источник звуковых колебаний S с частотой  $\nu_0 = 1700$  Гц находится между плоским отражателем и приемником D (см. рис. 23.4). Источник и приемник неподвижны и расположены на одной и той же нормали к отражателю, который удаляется от источника со скоростью  $u = 6$  см/с. Скорость звука  $c = 340$  м/с. Найти частоту биений, регистрируемых приемником.

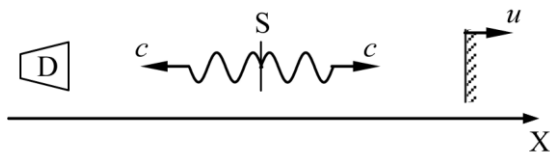


Рис. 23.4. Расположение источника S и приемника D относительно отражателя и оси выбранной декартовой системы координат.

### Решение

Выберем направление оси X декартовой системы координат совпадающим с направлением движения отражателя, как показано на рис. 23.4. Приемник регистрирует суперпозицию двух звуковых волн: испущенной источником и отраженной от движущегося отражателя.

При решении задачи воспользуемся формулой, связывающей частоты колебаний движущихся источника и приемника звуковой волны (см. 23.1, пункт 2):

$$\nu_D = \frac{c - v_D}{c - v_S} \nu_S, \quad (23.41)$$

где  $v_S$  и  $v_D$  – проекции скоростей источника и приемника на направление распространения регистрируемой приемником волны,  $c$  – скорость распространения волны в среде,  $\nu_S$  – частота излучаемой источником звуковой волны,  $\nu_D$  – частота волны, которую регистрирует детектор. Все скорости направлены в одну сторону.

Частота волны, которую зафиксировал бы детектор, находящийся на движущемся отражателе, определяется в соответствии с (23.41) выражением:

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c - v_D}{c} = \nu_0 \frac{c - u}{c}. \quad (23.42)$$

Считая, что отражатель не меняет частоту волны при отражении, запишем выражение для частоты волны, отраженной от отражателя и зарегистрированной неподвижным приемником согласно (23.41) и (23.42):

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{c}{c + v_S} = \nu_0 \frac{c - u}{c + u}. \quad (23.43)$$

Знак плюс в знаменателе формулы (23.43) обусловлен тем, что в этом случае скорость отражателя (источника отраженной волны) и скорость отраженной волны направлены в противоположные стороны.

Для частоты биений, возникающих в результате суперпозиции волны с частотой  $\nu_0$ , испущенной неподвижным источником, и волны с частотой  $\nu_2$ , отраженной от движущегося отражателя, запишем:

$$\nu_{\text{биен}} = |\nu_0 - \nu_2|. \quad (23.44)$$

Подставляя (23.43) в (23.44), находим искомую величину частоты биений:

$$\nu_{\text{биен}} = \nu_0 - \nu_0 \frac{c - u}{c + u} = \nu_0 \frac{2u}{c + u}. \quad (23.45)$$

Подставляя в (23.45) заданные в условии задачи численные значения физических величин, получим значение частоты биений, зарегистрированных приемником:

$$\nu_{\text{биен}} = 0,6 \text{ Гц}.$$

$$\text{Ответ: } \nu_{\text{биен}} = \nu_0 \frac{2u}{c+u} = 0,6 \text{ Гц}.$$

### 23.4. Задачи для самостоятельного решения

#### *Элементы акустики*

**Задача 23.4.1** ([1], с. 359, задача 3). Изотропно излучающий точечный источник звука, мощность которого  $N = 0,1$  Вт, находится в центре полого кругового цилиндра радиусом  $R = 1$  м и высотой  $h = 2$  м. Полагая, что стенки цилиндра полностью поглощают звук, найти среднее значение потока энергии  $J$  звуковой волны, падающей на боковую поверхность цилиндра.

$$\text{Ответ: } J = N / \sqrt{1 + (2R/h)^2} = 0,07 \text{ Вт}.$$

**Задача 23.4.2** ([1], с. 359, задача 4). Человек с хорошим слухом может слышать звук с колебанием давления до  $\Delta P = 10^{-4}$  Па при частоте  $\nu = 2$  кГц. Найти амплитуду смещения частиц воздуха  $\xi_0$  в такой волне. Атмосферное давление считать равным  $P = 10^5$  Па, плотность воздуха  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup> и показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

$$\text{Ответ: } \xi_0 = \frac{\Delta P}{2\pi\nu\sqrt{\gamma P\rho}} \cong 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

**Задача 23.4.3** ([2], 719). Амплитуда колебаний давления звуковой волны  $\Delta p = 100$  дин/см<sup>2</sup> (громкий звук). Найти поток энергии  $J$ , попадающей за 1 с в ухо человека. Считать площадь  $S$  уха равной 4 см<sup>2</sup> и ухо перпендикулярным к направлению распространения волны. Плотность воздуха  $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, скорость звука 334 м/с.

$$\text{Ответ: } \xi_0 = \frac{\Delta p^2}{2} \frac{S}{\rho c} \cong 460 \text{ эрг/с} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$$

**Задача 23.4.4.** ([3], 3.230). Точка А находится на  $r = 1,5$  м от точечного изотропного источника звука частоты  $\nu = 600$  Гц. Мощность источника  $P = 0,80$  Вт. Пренебрегая затуханием волн и считая скорость звука  $u = 340$  м/с, найти для точки А:

а) амплитуду колебаний давления  $(\Delta p)_m$  и ее отношение к давлению воздуха;

б) амплитуду колебаний частиц среды; сравнить ее с длиной волны звука.

$$\text{Ответ: а) } (\Delta p)_m = \sqrt{\rho \nu P / 2\pi r^2} = 5 \text{ Па, } (\Delta p)_m / p = 5 \cdot 10^{-5};$$

$$\text{б) } a = (\Delta p)_m / 2\pi \nu \rho \nu = 3 \text{ мкм, } a / \lambda = 5 \cdot 10^{-6}.$$

**Задача 23.4.5** ([3], 3.225). Плоская звуковая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Коэффициент затухания волны  $\gamma = 0,0280$  м<sup>-1</sup>. В точке  $x = 0$  уровень громкости  $L = 60$  дБ. Найти:

а) уровень громкости в точке с координатой  $x = 50$  м;

б) координату  $x$  точки, в которой звук уже не слышен.

$$\text{Ответ: а) } L' = L - 20\gamma x \lg e = 50 \text{ дБ; б) } x = 0,30 \text{ км.}$$

### *Эффект Доплера*

**Задача 23.4.6** ([2], 698). Паровоз подходит к наблюдателю со скоростью 20 м/с. Какую частоту основного тона гудка он услышит, если машинист слышит тон в 300 Гц? Насколько изменится частота гармоник гудка?

*Ответ:* Высота тона повышается приблизительно на 18 Гц, высота гармоник – на  $n \cdot 18$  Гц, где  $n$  – номер гармоники.

**Задача 23.4.7** ([2], 699). Два камертона дают 20 биений за 10 с. Частота колебаний одного камертона 256. Чему равна частота колебаний другого?

*Ответ:* 254 или 258.

**Задача 23.4.8** ([2], 700). Камертон, излучающий звук частотой  $\nu_0$  приближается к удаленной стене со скоростью  $u$  по нормали к ней. Неподвижный приемник звука помещается на линии движения камертона. Пусть: 1) камертон находится между стеной и приемником; 2) приемник находится между камертоном и стеной. Будет ли приемник звука регистрировать акустические биения, если

скорость  $u$  много меньше скорости звука  $c$ ? Какова будет частота этих биений?

*Ответ:* Биения с частотой  $(2\nu_0 u)/c$  будут зарегистрированы приемником только в первом случае.

**Задача 23.4.9** ([3], 3.214). Локомотив, который движется со скоростью  $u = 120$  км/ч, дает гудок длительностью  $\tau_0 = 5,0$  с. Найти длительность гудка для неподвижного наблюдателя, если локомотив: а) приближается; б) удаляется. Скорость звука в воздухе  $\nu = 340$  м/с.

$$\text{Ответ: } \tau = (1 \mp u/\nu)\tau_0 = \begin{cases} 4,5 \text{ с,} & \text{если приближается} \\ 5,5 \text{ с,} & \text{если удаляется} \end{cases}$$

**Задача 23.4.10** ([3], 3.216). Звуковая волна распространяется со скоростью  $\nu$  в положительном направлении оси  $x$ . В ту же сторону движутся наблюдатели 1 и 2 со скоростями  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Найти отношение частот, которые зафиксируют наблюдатели.

$$\text{Ответ: } \omega_2/\omega_1 = (\nu - \nu_2)/(\nu - \nu_1).$$

**Задача 23.4.11** ([3], 3.217). Источник звука частоты  $\nu_0 = 1000$  Гц движется по нормали к стенке со скоростью  $u = 17$  см/с. На этой же нормали расположены два неподвижных приемника  $P_1$  и  $P_2$ , причем последовательность расположения этих приемников и источника  $S$  такая:  $P_1 - S - P_2 - \text{стенка}$ . Какой приемник регистрирует биения и какова их частота? Скорость звука  $\nu = 340$  м/с.

$$\text{Ответ: } \nu_1 = 2\nu_0 u u / (\nu^2 - u^2) \approx 2\nu_0 u / \nu = 1,0 \text{ Гц.}$$

**Задача 23.4.12** ([3], 3.219). На оси  $x$  находятся приемник и источник звука частоты  $\nu_0 = 2000$  Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $a = 50$  см. При каком значении  $\omega$  ширина частотного интервала, воспринимаемого неподвижным приемником,  $\Delta\nu = 200$  Гц? Скорость звука  $\nu = 340$  м/с.

$$\text{Ответ: } \omega = \left( \sqrt{1 + (\nu/\nu_0)^2} - 1 \right) \nu \nu_0 / a \Delta\nu = 34 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 23.4.13** ([3], 3.220). Источник звука частотой  $\nu_0 = 1700$  Гц и приемник находятся в одной точке. В некоторый момент источник начинает удаляться от приемника с ускорением  $a = 10,0$  м/с<sup>2</sup>. Найти частоту колебаний, воспринимаемых неподвижным приемником через  $t = 10,0$  с после начала движения источника. Скорость звука  $v = 340$  м/с.

*Ответ:*  $\nu = \nu_0 / \sqrt{1 + 2at/v} = 1,35$  кГц.

## ГЛАВА 24

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. МОДЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ****24.1. Теоретический материал****24.1.1. Собственные колебания распределенных систем**

**Собственные (свободные) колебания** – колебания системы, предоставленной самой себе (при постоянных внешних условиях).

**Распределенная система** – колебательная система с большим числом степеней свободы, характерные размеры которой

$$L > c\tau, \quad (24.1)$$

где  $c$  – скорость распространения волнового возмущения,  $\tau$  – характерное время его заметного изменения.

**Нормальные колебания (моды)** – собственные гармонические колебания системы. Специальным выбором начальных условий можно возбудить в системе только одно (любое) из всех, свойственных системе, нормальных колебаний. При нормальном колебании системы все ее элементы колеблются с одной и той же частотой – нормальной частотой.

**Нормальные частоты** – частоты нормальных колебаний. Нормальные частоты колебательной системы определяются ее параметрами (для распределенной колебательной системы – свойствами среды и граничными условиями).

В общем случае колебания системы являются суперпозицией ее нормальных колебаний, которая определяется начальными условиями.

**Стоячая волна** – периодическое во времени синфазное колебание распределенной системы с характерным пространственным распределением амплитуды этих колебаний – чередованием узлов и пучностей.

**Пучности стоячей волны** – пространственные области, в которых частицы распределенной системы колеблются с максимальной амплитудой.

**Узлы стоячей волны** – пространственные области, в которых частицы распределенной системы остаются неподвижными.



В случае стоячих волн **основной модой (тоном)** называется мода с максимальной длиной волны и минимальной частотой. Остальные моды называются **обертонами**.

Стоячая волна в соответствии с принципом суперпозиции волновых полей (9.3) может быть представлена как результат суперпозиции двух бегущих гармонических волн с одинаковыми частотой  $\omega$ , скоростью распространения  $c$  и амплитудой  $\xi_0$ , распространяющихся навстречу друг другу (например, падающая и отраженная волны):

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \xi_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + \xi_2 \left( t + \frac{x}{c} \right) = \\ &= \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + \xi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}) = \\ &= 2\xi_0 \cos\left( kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2} \right) \cos\left( \omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} \right) \equiv \\ &\equiv C \cos(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \tag{24.2}$$

где  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  – начальные (при  $t = 0$ ) фазы в точке с координатой  $x = 0$ ,  $C = 2\xi_0$ ,  $\psi_0 = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}$  и  $\varphi_0 = \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}$ , а  $C \cos(kx + \psi_0)$  – амплитуда стоячей волны.

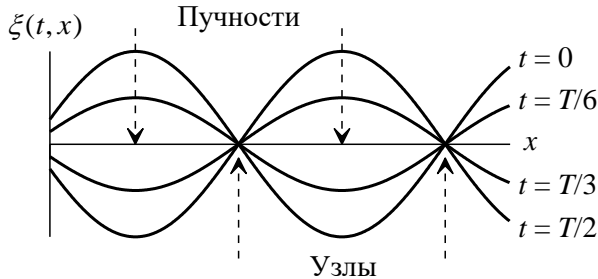


Рис. 24.1. Узлы и пучности стоячей волны.

Пучности в волне в соответствии с (24.2) будут наблюдаться, в точках (см. рис. 24.1), координаты которых удовлетворяют условию:

$$kx + \psi_0 = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{24.3}$$

При этом координаты узлов (рис. 24.1) определяются соотношениями:

$$kx + \psi_0 = \frac{2n+1}{2} \pi. \quad (24.4)$$

Заметим, что между соседними узлами частицы среды колеблются в фазе, при переходе через узел фаза колебания скачкообразно изменяется на  $\pi$ .

Если  $\xi(t, x)$  – смещение частиц среды из положения равновесия при наличии стоячей волны, то для скорости частиц среды  $v$  и относительной деформации  $\varepsilon$  можно записать:

$$\begin{aligned} v &= \dot{\xi}(t, x) = -C\omega \cos(kx + \psi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= v_0 \cos(kx + \psi_0) \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (24.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \xi'_x = -Ck \sin(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \varepsilon_0 \sin(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (24.6)$$

Как видим (сравни (24.5) и (24.26) с (24.2)), узлы и пучности для скорости и смещения совпадают, а для деформаций пучности совпадают с узлами смещений, а узлы – с пучностями смещений. Узлы и пучности в волне деформаций смещены относительно узлов и пучностей в стоячей волне смещений на  $\lambda/4$ .

В результате суперпозиции будет наблюдаться пространственное перераспределение средней энергии волн – **интерференция**.

Для упругих продольных волн в твердом теле объемные плотности кинетической  $w^k(t, x)$  и потенциальной  $w^p(t, x)$  энергий частиц тела, участвующих в волновом движении, и их средние значения  $\langle w^k \rangle_T$  и  $\langle w^p \rangle_T$  равны:

$$\begin{aligned} w^k(t, x) &= \frac{\rho v^2(t, x)}{2} = \frac{1}{2} C^2 \rho \omega^2 \cos^2(kx + \psi_0) \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\ &= w_0^k \cos^2(kx + \psi_0) \sin^2(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (24.7)$$

$$\langle w^k \rangle_T = \frac{w_0^k}{2} \cos^2(kx + \psi_0) = \frac{1}{4} C^2 \rho \omega^2 \cos^2(kx + \psi_0), \quad (24.8)$$

$$w^p(t, x) = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} C^2 E k^2 \sin^2(kx + \psi_0) \cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= w_0^p \sin^2(kx + \psi_0) \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (24.9)$$

$$\langle w^p \rangle_T = \frac{w_0^p}{2} \sin^2(kx + \psi_0) = \frac{1}{4} C^2 E k^2 \sin^2(kx + \psi_0), \quad (24.10)$$

где

$$w_0^k = w_0^p = \frac{1}{2} C^2 \rho \omega^2 = \frac{1}{2} C^2 E k^2. \quad (24.11)$$

При этом средняя объемная плотность полной энергии стоячей волны однородно распределена в пространстве и равна:

$$\langle w \rangle_T = \langle w^k \rangle_T + \langle w^p \rangle_T = \frac{1}{4} C^2 \rho \omega^2 = \frac{1}{4} C^2 E k^2. \quad (24.12)$$

Пучность кинетической энергии (24.7) совпадает с узлом потенциальной (24.9) и наоборот. В отличие от бегущей волны, в стоячей волне не происходит пространственного переноса энергии, а осуществляется лишь перекачка потенциальной энергии частиц, расположенных в области узла, в кинетическую энергию частиц, расположенных в области пучности, и наоборот.

В зависимости от граничных условий в среде (в стержне, струне, столбе газа или жидкости) можно возбудить стоячие волны с определенными частотами.

Если **граница закреплена** (на границе нет движения частиц среды), то на ней смещение частиц среды  $\xi$ , а также их скорости  $v$  и объемная плотность кинетической энергии  $w^k$  равны нулю. При этом относительная деформация  $\varepsilon$ , напряжение  $\sigma$ , изменение давления  $\delta p$  и объемная плотность потенциальной энергии  $w^p$  принимают максимальное значение.

Если **граница свободна** (на границе нет внешних сил, действующих на частицы среды), то на ней относительная деформация  $\varepsilon$ , напряжение  $\sigma$ , изменение давления  $\Delta p$  и объемная плотность потенциальной энергии  $w^p$  равны нулю. При этом смещение частиц среды  $\xi$ , а также их скорости  $v$  и объемная плотность кинетической энергии  $w^k$  принимают максимальное значение.

Из граничных условий можно получить длины волн  $\lambda_n$  нормальных колебаний (мод), и, зная скорость распространения упругих волн  $c$ , найти частоты этих мод:  $\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n}$ .

В качестве примера рассмотрим случай закрепления обоих концов стержня длиной  $L$  при возбуждении в нем продольных или поперечных упругих волн.

Смещение частиц рассматриваемой среды при наличии стоячей упругой волны происходит по закону (24.2). Поскольку оба конца стержня закреплены, смещение частиц на границах среды равно нулю:

$$\xi(t, x = 0) = C \cos(\psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0, \quad (24.13)$$

$$\xi(t, x = L) = C \cos(kL + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0, \quad (24.14)$$

Условия (24.13) и (24.14) должны выполняться в любой момент времени  $t$ , следовательно:

$$\cos(\psi_0) = 0; \quad (24.15)$$

$$\cos(kL + \psi_0) = 0. \quad (24.16)$$

Раскрывая косинус суммы двух углов в (24.16) с учетом (24.4), получим:

$$\cos(kL + \psi_0) = \cos(kL)\cos(\psi_0) - \sin(kL)\sin(\psi_0) = \pm \sin(kL) = 0.$$

Из полученного соотношения непосредственно следует взаимосвязь частот собственных колебаний стержня с его длиной:

$$k_n L = n\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi, \quad \frac{2\pi v_n}{c} L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, длины стоячих волн и частоты нормальных колебаний (мод) для стержня с закрепленными концами равны:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (24.17)$$

$$v_n = n \frac{c}{2L}. \quad (24.18)$$

Заметим, что в случае стоячей упругой волны в стержне с двумя закрепленными концами на длине стержня "укладывается" целое число длин полуволн:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}. \quad (24.19)$$

Аналогичное рассмотрение других случаев закрепления концов стержня при возбуждении в нем продольных или поперечных стоячих упругих волн приводит к следующим соотношениям между длиной стержня и частотами (длинами волн) нормальных колебаний.

Табл. 24.1. Длины волн и частоты нормальных колебаний в упругом стержне для различных граничных условий

Оба конца закреплены	Продольная	$L = n \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$\nu_n = n \frac{c}{2L}$
	Поперечная			
Один конец закреплен	Продольная	$L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4}$	$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1}$	$\nu_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}$
	Поперечная			
Оба конца свободны	Продольная	$L = n \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$\nu_n = n \frac{c}{2L}$
	Поперечная	$L = n \lambda_n$	$\lambda_n = \frac{L}{n}$	$\nu_n = n \frac{c}{L}$
Закрепление в центре	Продольная	$L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{2n + 1}$	$\nu_n = (2n + 1) \frac{c}{2L}$
	Поперечная			

## 24.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач по теме "Граничные условия. Отражение и прохождение волн на границе раздела двух сред. Стоячие волны. Моды и нормальные частоты" можно условно отнести к следующим типам или их комбинациям:

- 1) граничные условия, отражение и прохождение волн на границе раздела двух сред;
- 2) стоячие волны, моды и нормальные частоты.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, если это необходимо для решения задачи.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить характеристики волн.
4. Выбрать модели волн и характер их распространения (если это не сделано в условии задачи).

**II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать законы распространения:
  - а) волн смещения,
  - б) волн скорости,
  - в) волн ускорения,
  - г) волн деформации.
2. Записать начальные и граничные условия.
3. Записать уравнения, связывающие различные характеристики волн.
4. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечание.

Пункты II.1 – II.3 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от типа задачи.

### 24.3. Примеры решения задач

**Задача 24.3.1.** Стальная струна длиной  $L = 110$  см, плотностью  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup> и диаметром  $d = 1$  мм натянута между полюсами электромагнита. При пропускании по струне переменного тока частотой  $\nu = 256$  Гц в ней возбуждается упругая поперечная волна, при-

чем на длине струны "укладывается"  $n = 5$  полуволн. Найти силу натяжения струны.

### Решение

I. Будем считать, что относительное изменение силы натяжения струны, вызванное упругой поперечной волной, пренебрежимо мало. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим вдоль струны (см. рис. 24.2).

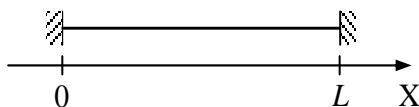


Рис. 24.2. Струна, закрепленная с двух концов.

II. Запишем взаимосвязь скорости распространения упругих поперечных волн в струне и силы натяжения струны

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}, \quad (24.20)$$

где площадь поперечного сечения струны  $S$  равна:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (24.21)$$

Для нахождения искомой силы натяжения струны необходимо определить скорость распространения упругих поперечных волн в струне (см. (24.20)).

По условию задачи на длине струны "укладывается"  $n$  полуволн:

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (24.22)$$

Частота колебаний и длина волны связаны соотношением:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (24.23)$$

III. Решая систему уравнений (24.20) – (24.23), получим искомую силу натяжения струны:

$$T = \frac{\pi d^2 L^2 v^2 \rho}{n^2}. \quad (24.24)$$

Подставляя численные значения заданных в условии задачи физических величин, входящих в (24.24), окончательно получим:

$$T \cong 77,7 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $T = \frac{\pi d^2 L^2 v^2 \rho}{n^2} \cong 77,7 \text{ Н}.$

**Задача 24.3.2.** Найти частоты  $\nu_n$ , на которых будет резонировать труба длиной  $L = 1,7$  м, закрытая с одного конца, если скорость звука в воздухе равна  $c = 340$  м/с.

### Решение

I. Частоты, на которых будет резонировать труба, совпадают с частотами нормальных колебаний частиц воздуха в трубе, образующих стоячие волны.

Выберем декартову систему координат лабораторной системы отсчета, связанной с трубой, ось  $X$  которой направим вдоль трубы (см. рис. 24.3).

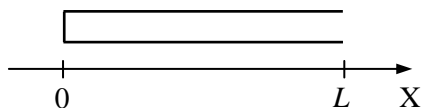


Рис. 24.3. Труба, закрытая с одного конца.

II. Запишем уравнение стоячей волны (см. (24.2)):

$$\xi(t, x) = C \cos(kx + \psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0). \quad (24.25)$$

Поскольку у закрытого конца трубы частицы не испытывают смещения из положения равновесия, то в любой момент времени:

$$\xi(t, 0) = C \cos(\psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = 0. \quad (24.26)$$

Частицы, находящиеся вблизи открытого конца трубы, испытывают одинаковое максимальное смещение из положения равновесия. При этом не происходит изменение плотности воздуха. Следовательно, можно записать:



$$\left. \frac{\Delta \rho}{\rho} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (24.27)$$

Подставляя результат дифференцирования (24.25) по  $x$  в (24.27), получим:

$$\left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = kC \sin(kL + \psi_0) \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = 0. \quad (24.28)$$

III. Решая совместно систему уравнений (24.26) и (24.28) для любого момента времени, получим:

$$\cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}L\right) = 0. \quad (24.29)$$

Следовательно, искомые частоты нормальных колебаний частиц воздуха в трубе, на которых резонирует труба, равны:

$$\nu_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24.30)$$

Заметим, что такими же собственными частотами обладает стержень, закрепленный с одного конца (см. табл. 24.1).

Для длин стоячих волн, соответствующих этим нормальным колебаниям, можно записать:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1} \quad \text{или} \quad L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4}. \quad (24.31)$$

Полученное соотношение (24.31) означает, что при образовании стоячей волны в трубе, закрытой с одного конца, на длине трубы должно "укладываться" нечетное число четвертей длин волн.

Подставляя численные значения заданных в условии задачи физических величин, входящих в (24.30), получим искомые значения частот, на которых будет резонировать труба:

$$\nu_n = (50 + 100n) \text{ Гц}.$$

**Ответ:**  $\nu_n = (50 + 100n) \text{ Гц}$ .

**Задача 24.3.3.** (Почему рыбы нас слышат, а мы их – нет?) На плоскую границу раздела двух сред нормально падает плоская звуковая волна. Найти амплитуды прошедшей и отраженной волн смещений и напряжений (давлений) при заданной амплитуде смещения падающей волны  $\xi_{i0}$ . Как отличаются фазы указанных волн

на границе раздела? Считать известными скорости звуковых волн в двух средах  $c_1$  и  $c_2$ , а также плотности этих сред  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Произвести численные оценки в двух случаях: при переходе волны из воздуха в воду и из воды в воздух. Плотность воды и воздуха принять равными  $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$  и  $\rho_2 = 1,3 \text{ кг/м}^3$ . Скорость звука в воде равна  $c_1 = 1500 \text{ м/с}$ , в воздухе –  $c_2 = 340 \text{ м/с}$ .

### Решение

I. При падении звуковой волны на границу раздела двух сред возникает волна, прошедшая во вторую среду, и волна, отраженная от границы раздела. Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой совпадает с направлением волнового вектора падающей волны  $\mathbf{k}_1$ . Начало отсчета по оси  $X$  выберем на границе раздела. Частоты всех трех указанных волн совпадают  $\omega_i = \omega_r = \omega_d = \omega$ , а длины волн различаются вследствие различия скоростей звуковых волн в разных средах. Здесь и далее индекс  $i$  относится к падающей волне (*incident*),  $r$  – к отраженной (*reflected*),  $d$  – к прошедшей (*diffracted*). Волновой вектор отраженной волны противоположен волновому вектору падающей волны при нормальном падении, а направления волновых векторов прошедшей  $\mathbf{k}_2$  и падающей волн  $\mathbf{k}_1$  в этом случае совпадают. Модули волновых векторов падающей и отраженной волн равны между собой и отличаются от модуля прошедшей во вторую среду волны. Индексы 1 и 2 в обозначениях физических величин относятся к первой и второй среде соответственно.

II. Запишем закон изменения смещений частиц среды при распространении плоских волн:

$$\xi_i(t, x) = \xi_{i0} \cos(\omega t - k_1 x), \quad (24.32)$$

$$\xi_r(t, x) = \xi_{r0} \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1), \quad (24.33)$$

$$\xi_d(t, x) = \xi_{d0} \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2). \quad (24.34)$$

Здесь  $\varphi_1$  – разность фаз падающей и отраженной волн на границе раздела сред,  $\varphi_2$  – разность фаз падающей и прошедшей волн на границе раздела;  $\xi_{r0}$  и  $\xi_{d0}$  – амплитуды смещений в отраженной и прошедшей волнах.

Запишем условие непрерывности волны смещений на границе раздела двух сред:

$$\xi_i(t, x = 0) + \xi_r(t, x = 0) = \xi_d(t, x = 0). \quad (24.35)$$

Сначала будем считать, что продольная звуковая волна падает на границу раздела двух твердых тел. Запишем условие равенства напряжений на границе раздела:

$$\sigma_i(t, x = 0) + \sigma_r(t, x = 0) = \sigma_d(t, x = 0). \quad (24.36)$$

Напряжение, возникающее в твердом теле при распространении упругой волны, связано законом Гука с относительной деформацией:

$$\sigma(t, x) = E \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x}. \quad (24.37)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга.

Скорость продольной упругой волны в твердом теле определяется выражением:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (24.38)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

III. Подставляя (24.32) – (24.34) в (24.35), получаем связь амплитуд смещений частиц среды при распространении падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\xi_{i0} \cos(\omega t) + \xi_{r0} \cos(\omega t + \varphi_1) = \xi_{d0} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (24.39)$$

Дифференцируя (1) – (3) по пространственной координате, получаем выражения для волн деформаций:

$$\frac{\partial \xi_i(t, x)}{\partial x} = k_1 \xi_{i0} \sin(\omega t - k_1 x) = \frac{\omega}{c_1} \xi_{i0} \sin(\omega t - k_1 x), \quad (24.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_r(t, x)}{\partial x} &= -k_1 \xi_{r0} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_1) = \\ &= -\frac{\omega}{c_1} \xi_{r0} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_1), \end{aligned} \quad (24.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_d(t, x)}{\partial x} &= k_2 \xi_{d0} \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2) = \\ &= \frac{\omega}{c_2} \xi_{d0} \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2), \end{aligned} \quad (24.42)$$

Подставляя полученные выражения (24.40) – (24.42) в закон Гука (24.37), легко преобразовать уравнение (24.36) к виду:

$$\frac{E_1}{c_1} (\xi_{i0} \sin(\omega t) - \xi_{r0} \sin(\omega t + \varphi_1)) = \frac{E_2}{c_2} \xi_{d0} \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (24.43)$$

Соотношения (24.39) и (24.43) должны выполняться в любой момент времени, следовательно, коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  в этих выражениях должны быть равны нулю. Раскрывая в (24.39) и (24.43) косинусы и синусы суммы двух углов и, приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , получаем четыре уравнения:

$$\xi_{i0} + \xi_{r0} \cos \varphi_1 = \xi_{d0} \cos \varphi_2, \quad (24.44)$$

$$\xi_{r0} \sin \varphi_1 = \xi_{d0} \sin \varphi_2, \quad (24.45)$$

$$-\xi_{i0} + \xi_{r0} \cos \varphi_1 = -\frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} \xi_{d0} \cos \varphi_2, \quad (24.46)$$

$$\xi_{r0} \sin \varphi_1 = -\frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} \xi_{d0} \sin \varphi_2. \quad (24.47)$$

Поскольку амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн отличны от нуля, то из уравнений (24.45) и (24.47) следует, что

$$\sin \varphi_1 = 0 \text{ и } \sin \varphi_2 = 0. \quad (24.48)$$

Вычитая из уравнения (24.44) уравнение (24.46), получаем:

$$2\xi_{i0} = \left(1 + \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2}\right) \xi_{d0} \cos \varphi_2. \quad (24.49)$$

Поскольку амплитуды волн являются положительными величинами, а  $\sin \varphi_2 = 0$  (в соответствии с (24.48)), то из (24.49) следует, что:

$$\cos \varphi_2 = +1. \quad (24.50)$$

Следовательно, разность фаз  $\varphi_2$  падающей и прошедшей волн на границе раздела двух сред равна нулю.

Подставляя (24.50) в (24.49), получаем выражение для амплитуды прошедшей во вторую среду волны:

$$\xi_{d0} = \frac{2}{1 + \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2}} \xi_{i0} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}, \quad (24.51)$$

При записи (24.51) было учтено выражение (24.38) для скорости продольной звуковой волны в твердом теле. Произведение скорости звука на плотность среды  $c\rho$  называется *акустическим волновым сопротивлением*.

Подставляя выражение (24.51) для амплитуды прошедшей волны в (24.44), получаем:

$$\xi_{i0} + \xi_{r0} \cos \varphi_1 = \frac{2\xi_{i0}}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}}. \quad (24.52)$$

Преобразуем выражение (24.52):

$$\xi_{r0} \cos \varphi_1 = \frac{1 - \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}. \quad (24.53)$$

В соответствии с (24.48)  $\cos \varphi_1 = \pm 1$ . Следовательно, если  $\frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} < 1$ , то  $\cos \varphi_1 = 1$  и  $\varphi_1 = 0$ , а если  $\frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} > 1$ , то  $\cos \varphi_1 = -1$  и  $\varphi_1 = \pi$ . Таким образом, если акустическое волновое сопротивление второй среды меньше, чем первой, то отраженная волна сохраняет фазу падающей на границу раздела волны. Если акустическое волновое сопротивление второй среды больше, чем первой, то фаза отраженной волны отличается на границе раздела от фазы падающей волны на  $\pi$ .

Окончательно, для искомой амплитуды отраженной волны получаем выражение:

$$\xi_{r0} = \left| \frac{c_1 \rho_1 - c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2} \right| \xi_{i0}. \quad (24.54)$$

Как видим, если звуковая волна падает на границу раздела сред с одинаковым акустическим волновым сопротивлением, то отраженной волны не будет.

Амплитуды волн деформаций отличаются от амплитуд волн смещений множителем  $\frac{E\omega}{c}$  (см. (24.37), (24.40) – (24.42)). Следовательно, отношение амплитуд смещений в отраженной и падающей волне равно отношению амплитуд напряжений, так как эти волны распространяются в одной среде. Используя выражение (24.51), получим отношение амплитуд напряжений в прошедшей и падающей волне:

$$\frac{\sigma_{d0}}{\sigma_{i0}} = \frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \frac{E_2 c_1}{E_1 c_2} = \frac{2}{1 + \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}}. \quad (24.55)$$

Задача решена в случае падения звуковой волны на границу раздела двух твердых тел. Если волна падает на границу раздела жидких или газообразных сред, в решении задачи следует заменить условие равенства напряжений на границе раздела (24.36) условием равенства давлений, а также использовать соответствующие формулы для скоростей звука в жидкостях и газах.

В случае падения плоской звуковой волны на границу раздела жидкость – газ амплитуда смещения в прошедшей волне определяется выражением, полностью совпадающим с (24.51):

$$\frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}}, \quad (24.56)$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем, что при распространении звуковой волны из воды в воздух  $c_1 \rho_1 \approx 14,2 \cdot 10^4 \text{ Г}/(\text{см}^2 \text{с})$ ,  $c_2 \rho_2 \approx 43 \text{ Г}/(\text{см}^2 \text{с})$  отношение амплитуд смещений равно

$$\left( \frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{вода} \rightarrow \text{воздух}} \approx 2,$$

а при распространении из воздуха в воду

$$\left( \frac{\xi_{d0}}{\xi_{i0}} \right)_{\text{воздух} \rightarrow \text{вода}} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

В случае падения плоской звуковой волны на границу раздела жидкость – газ отношение амплитуд давления в прошедшей волне

к амплитуде давления в падающей волне определяется выражением, полностью совпадающим с (24.55):

$$\frac{P_{d0}}{P_{i0}} = \frac{2}{1 + \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}}. \quad (24.57)$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем, что при падении звуковой волны на границу раздела вода – воздух отношение амплитуд давлений равно:

$$\left( \frac{P_{d0}}{P_{i0}} \right)_{\text{вода} \rightarrow \text{воздух}} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

При падении звуковой волны на границу раздела воздух – вода отношение амплитуд давлений равно:

$$\left( \frac{P_{d0}}{P_{i0}} \right)_{\text{воздух} \rightarrow \text{вода}} \approx 2.$$

Правы рыбаки, когда не разрешают шуметь около своей удочки: амплитуда давления в прошедшей из воздуха в воду волне в два раза больше амплитуды давления в падающей волне.

Заметим также, что амплитуда давления в прошедшей из воздуха в воду волне на четыре порядка превосходит амплитуду давления в волне, прошедшей из воды в воздух при одинаковых амплитудах падающих волн.

$$\text{Ответ: } \xi_{d0} = \frac{2}{1 + \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}} \xi_{i0}, \quad \xi_{r0} = \left| \frac{c_1 \rho_1 - c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2} \right| \xi_{i0},$$

$$\sigma_{d0} = \frac{2}{1 + \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}} \sigma_{i0}.$$

**Задача 24.3.4.** В однородном стержне плотностью  $\rho$  и площадью сечения  $S$  установилась стоячая волна  $\xi(t, x) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$ . Найти полную механическую энергию, заключенную между сечениями, через которые проходят соседние узлы смещения. Считать

заданными амплитуду волны  $A$ , круговую частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ .

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим вдоль стержня, а начало координат совместим с одним из его концов.

II. В соответствии с условием задачи смещение частиц среды при наличии стоячей волны происходит по закону:

$$\xi(t, x) = A \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (24.58)$$

Объемная плотность кинетической энергии частиц тела, участвующих в волновом движении, равна:

$$w^k(t, x) = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2. \quad (24.59)$$

Здесь  $v$  – скорость частиц среды.

Объемную плотность потенциальной энергии запишем в виде:

$$w^p(t, x) = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad (24.60)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация,  $E$  – модуль Юнга.

Скорость продольной упругой волны в твердом теле определяется выражением:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (24.61)$$

Как видим из (24.58), в точке с координатой  $x = 0$  находится узел смещения. Следовательно, соседний узел смещения расположен в точке с координатой  $x = \lambda/2$  ( $\lambda$  – длина волны). Искомую полную механическую энергию, заключенную между сечениями, через которые проходят соседние узлы смещения, определим, интегрируя выражения (24.59) и (24.60) по объему:

$$W = \int_0^{\lambda/2} (w^k(t, x) + w^p(t, x)) S dx, \quad (24.62)$$

где  $\lambda$  – длина волны.

III. Определим скорость частиц среды, дифференцируя по времени выражение (24.58) для смещения:



$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \sin(kx)\sin(\omega t). \quad (24.63)$$

Относительную деформацию найдем, дифференцируя (24.58) по пространственной координате  $x$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ak \cos(kx)\cos(\omega t). \quad (24.64)$$

Подставляя (24.63) и (24.64) в (24.59) и (24.60), получим выражения для объемных плотностей кинетической и потенциальной энергий:

$$w^k(t, x) = \frac{\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t)}{2}, \quad (24.65)$$

$$w^p(t, x) = \frac{EA^2 k^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t)}{2}. \quad (24.66)$$

Подставляя (24.65) и (24.66) в (24.62) и интегрируя по пространственной координате  $x$  в пределах от одного узла смещения до соседнего (от  $x = 0$  до  $x = \lambda/2$ ), получаем искомое выражение для полной механической энергии:

$$\begin{aligned} W &= \frac{A^2}{2} \int_0^{\lambda/2} (\rho \omega^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t) + Ek^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t)) S dx = \\ &= \frac{A^2 S}{4} \int_0^{\lambda/2} (\rho \omega^2 (1 - \cos 2kx)\sin^2(\omega t) + Ek^2 (1 + \cos 2kx)\cos^2(\omega t)) dx = \\ &= \frac{A^2 S}{8} (\rho \omega^2 \lambda \sin^2(\omega t) + Ek^2 \lambda \cos^2(\omega t)) = \frac{\pi A^2 S \rho \omega^2}{4k}. \end{aligned} \quad (24.67)$$

При выводе (24.67) учтено выражение для скорости звука (24.61).

Как видим, полная механическая энергия, заключенная между сечениями, через которые проходят соседние узлы смещения, не зависит от времени, что означает отсутствие потока энергии через узлы смещения в стоячей волне.

**Ответ:**  $W = \frac{\pi A^2 S \rho \omega^2}{4k}.$

**Задача 24.3.5.** В трубе, открытой с одного конца, возбудили колебания воздуха на основном тоне с круговой частотой  $\omega$  и максимальной амплитудой смещения  $A_{\max}$ . Найти максимальное и среднее за период значения кинетической энергии воздуха в трубе.

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим вдоль трубы. Начало отсчета совместим с закрытым концом трубы.

II, III. Запишем уравнение стоячей волны (24.2):

$$\xi(t, x) = A_{\max} \cos(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.68)$$

Здесь  $k$  – волновое число,  $\omega$  – угловая частота.

Для нахождения  $\psi_0$  воспользуемся граничными условиями. Поскольку у закрытого конца трубы частицы не испытывают смещения из положения равновесия, то в любой момент времени:

$$\xi(t, 0) = A_{\max} \cos(\psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (24.69)$$

Частицы, находящиеся вблизи открытого конца трубы, испытывают одинаковое максимальное смещение из положения равновесия. При этом не происходит скачкообразного изменения плотности воздуха:

$$\left. \frac{\Delta \rho}{\rho} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (24.70)$$

Подставляя результат дифференцирования (24.68) по  $x$  в (24.70), получим:

$$\left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = -k A_{\max} \sin(kL + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (24.71)$$

Условие (24.69) должно выполняться в любой момент времени  $t$ , следовательно:

$$\cos(\psi_0) = 0. \quad (24.72)$$

Решая совместно систему уравнений (24.71) и (24.72) для любого момента времени, получим:

$$\cos(kL) = 0. \quad (24.73)$$

Преобразуем уравнение стоячей волны (24.68) с учетом (24.72):

$$\xi(t, x) = A_{\max} \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.74)$$

Кинетическая энергия бесконечно малого объема воздуха в трубе равна

$$dW_k = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 S dx, \quad (24.75)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха.

Кинетическую энергию всех частиц воздуха в трубе можно найти, интегрируя (24.75) по длине трубы:

$$W_k = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 S dx. \quad (24.76)$$

Дифференцируя (24.74) по времени, получаем выражение для скорости частиц при возбуждении стоячей волны:

$$\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} = -A_{\max} \omega \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (24.77)$$

Подставляя (24.77) в (24.76) и интегрируя полученное соотношение, окончательно получаем выражение для кинетической энергии воздуха в трубе:

$$W_k = \frac{1}{4} m \omega^2 A_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (24.78)$$

Как видим, искомое значение максимальной кинетической энергии частиц воздуха в трубе равно:

$$W_k^{\max} = \frac{1}{4} m \omega^2 A_{\max}^2. \quad (24.79)$$

Усредняя (24.78) за период, получаем среднее значение кинетической энергии:

$$\langle W_k \rangle = \frac{1}{8} m \omega^2 A_{\max}^2.$$

$$\text{Ответ: } W_k^{\max} = \frac{1}{4} m \omega^2 A_{\max}^2, \quad \langle W_k \rangle = \frac{1}{8} m \omega^2 A_{\max}^2.$$

**Задача 24.3.6.** Плоская звуковая волна падает под углом  $\alpha = 2^\circ$  на плоскую границу раздела сред воздух – стекло. Определить направление распространения преломленной волны. Модуль Юнга

для стекла принять равным  $E = 6,9 \cdot 10^{10}$  Па, плотность стекла равна  $\rho = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, температура воздуха  $t = 20^\circ\text{C}$ .

### Решение

I. Задача может быть решена в рамках геометрической акустики – упрощенной теории распространения звука, пренебрегающей дифракционными явлениями. Геометрическая акустика применима, если размеры препятствий существенно превосходят длину волны звука. В этом случае преломление звука можно рассматривать как преломление звуковых лучей, для которых справедлив закон Снеллиуса. По аналогии с геометрической оптикой можно ввести относительный показатель преломления двух сред, равный отношению скоростей звука в этих средах.

II. Скорость продольной упругой волны в стекле определяется выражением (22.15) Главы 22:

$$c_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (24.80)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $E$  – модуль Юнга.

Скорость упругой волны в воздухе в случае адиабатического процесса распространения волны запишем в соответствии с формулой (22.31) Главы 22:

$$c_{\text{в}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}, \quad (24.81)$$

где  $\gamma \equiv c_p / c_v$  – показатель адиабаты,  $c_p$  и  $c_v$  – теплоемкости при постоянных давлении и объеме газа соответственно,  $P_0$  – давление в отсутствие волны.

Считая воздух идеальным двухатомным газом и используя уравнение Клапейрона – Менделеева (уравнение состояния идеального газа), преобразуем (24.81) к виду:

$$c_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (24.82)$$

Здесь  $\mu$  – молярная масса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная термодинамическая температура.

В соответствии с законом преломления (законом Снеллиуса) угол преломления  $\beta$  связан с углом падения соотношением:

$$\frac{\sin \alpha}{c_{\text{в}}} = \frac{\sin \beta}{c_{\text{ст}}}. \quad (24.83)$$

Получена полная система уравнений (24.80), (24.82) и (24.84) для определения искомого угла преломления звуковой волны.

III. Подставляя (24.80) и (24.82) в (24.83), находим выражение для синуса угла преломления:

$$\sin \beta = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R T \rho}} = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R (t + 273) \rho}}. \quad (24.84)$$

Подставляя в (24.84) численные значения величин, заданные в условии задачи, а также молярную массу воздуха  $\mu = 29$  г/моль и показатель адиабаты для двухатомного газа  $\gamma = 1,4$ , получаем:

$$\beta \approx 31^\circ.$$

Как видим, угол преломления значительно больше угла падения звуковой волны, поскольку скорость звука в стекле существенно превосходит скорость звука в воздухе.

$$\text{Ответ: } \sin \beta = \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu E}{\gamma R (t + 273) \rho}} \approx 31^\circ.$$

**Задача 24.3.7.** Определить предельный угол полного внутреннего отражения звуковой волны на границе раздела двух сред: стекло – воздух. Модуль Юнга для стекла принять равным  $E = 6,9 \cdot 10^{10}$  Па, плотность стекла равна  $\rho = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, температура воздуха  $t = 20^\circ\text{C}$ .

### Решение

I. Задачу решаем в рамках геометрической акустики аналогично **Задаче 24.3.6**. Как было показано, ввиду существенного различия скоростей звуковых волн в воздухе и стекле, угол преломления значительно превосходит угол падения при распространении звуковой волны из воздуха в стекло. Существует предельный угол, при падении под которым преломленный луч оказывается скользящим вдоль границы раздела сред. При падении волны под углом, бóльшим предельного, происходит явление полного внутреннего отражения. Звуковая волна при этом не проходит во вторую среду.

II. В соответствии с законом преломления угол преломления  $\beta$  связан с углом падения соотношением:

$$\frac{\sin \alpha}{c_{\text{в}}} = \frac{\sin \beta}{c_{\text{ст}}}. \quad (24.85)$$

Скорость продольной звуковой волны в стекле определяется выражением (22.15) Главы 22:

$$c_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (24.86)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $E$  – модуль Юнга.

Скорость акустической волны в воздухе в случае адиабатического процесса распространения волны (см. 24.82) равна:

$$c_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (24.87)$$

Здесь  $\mu$  – молярная масса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная термодинамическая температура.

При падении звуковой волны под предельным углом преломленный луч оказывается скольльзящим:

$$\sin \beta = 1, \quad \beta = \frac{\pi}{2}. \quad (24.88)$$

Получена полная система уравнений (24.85) – (24.88) для определения угла полного внутреннего отражения.

III. Подставляя соотношения (24.86) – (24.88) в закон преломления (24.85), получаем выражение для предельного угла падения:

$$\alpha_{\text{пред}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma RT \rho}{\mu E}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma R(t + 273) \rho}{\mu E}}. \quad (24.89)$$

Подставляя в (24.89) численные значения величин, заданные в условии задачи, а также молярную массу воздуха  $\mu = 29$  г/моль и показатель адиабаты для двухатомного газа  $\gamma = 1,4$ , получаем:

$$\alpha_{\text{пред}} \approx 3,84^\circ.$$

$$\text{Ответ: } \alpha_{\text{пред}} = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma R(t + 273) \rho}{\mu E}} \approx 3,84^\circ.$$

**Задача 24.3.8.** В стержне с одним закрепленным концом возбуждали стоячую волну. Нарисовать графики зависимостей смещений, скоростей и деформаций от пространственной координаты для основного тона и первого обертона в моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = T/4$  ( $T$  – период волны).

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета, ось  $X$  декартовой системы координат которой направим вдоль стержня, а начало координат совместим с его закрепленным концом.

II, III. Запишем уравнение стоячей волны (24.2):

$$\xi(t, x) = A_{\max} \cos(kx + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.90)$$

Здесь  $k$  – волновое число,  $\omega$  – угловая частота.

Для нахождения  $\psi_0$  воспользуемся граничными условиями. Поскольку у закрепленного конца частицы стержня не испытывают смещения из положения равновесия, то в любой момент времени:

$$\xi(t, 0) = A_{\max} \cos(\psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (24.91)$$

Условие (24.91) должно выполняться в любой момент времени  $t$ , следовательно:

$$\cos(\psi_0) = 0. \quad (24.92)$$

Частицы, находящиеся вблизи незакрепленного конца, испытывают одинаковое максимальное смещение из положения равновесия:

$$\left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (24.93)$$

Подставляя результат дифференцирования (24.90) по  $x$  в (24.93), получим:

$$\left. \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \right|_{x=L} = -k A_{\max} \sin(kL + \psi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (24.94)$$

Условие (24.94) должно выполняться в любой момент времени  $t$ , следовательно:

$$\sin(kL + \psi_0) = 0. \quad (24.95)$$

Преобразуя соотношения (24.92) и (24.95) для любого момента времени, получим:

$$\cos(kL) = 0. \quad (24.96)$$

Следовательно, частоты нормальных колебаний частиц стержня с одним закрепленным концом, равны:

$$\nu_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24.97)$$

Для длин стоячих волн, соответствующих этим нормальным колебаниям, можно записать:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1} \quad \text{или} \quad L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4}. \quad (24.98)$$

Полученное соотношение (24.97) означает, что при образовании стоячей волны в стержне с одним закрепленным концом, на его длине должно "укладываться" нечетное число четвертей длин волн.

Уравнение стоячей волны (24.90) с учетом (24.92) принимает вид:

$$\xi(t, x) = A_{\max} \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.99)$$

Пусть в момент времени  $t_1 = 0$  фаза  $\varphi_0 = 0$ . Это допущение не нарушает общности дальнейших рассуждений, но упрощает построение графиков. Окончательно закон смещения частиц стержня от положения равновесия в случае закрепления одного из его концов принимает вид:

$$\xi(t, x) = A_{\max} \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (24.100)$$

Дифференцируя (24.100) по времени, получаем выражение для волны скоростей:

$$\nu(t, x) = -A_{\max} \omega \sin(kx) \sin(\omega t). \quad (24.101)$$

Дифференцируя (24.100) по пространственной координате, получаем выражение для волны деформаций:

$$\varepsilon(t, x) = A_{\max} k \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (24.102)$$

В момент времени  $t_1 = 0$  скорость всех частиц стержня становится равной нулю (см. (24.101)), а зависимости  $\zeta(x)$  и  $\varepsilon(x)$  для основного тона ( $n = 0$  в формуле (24.98)) первого обертона ( $n = 1$  в формуле (24.98)) изображены на рис. 24.4 и рис. 24.5 соответственно.

В момент времени  $t_2 = T/4$  смещение всех частиц стержня и деформация обращаются в ноль (см. (24.100) и (24.102)), а зависимость скорости частиц  $\nu(x)$  для основного тона и первого обертона изображены на рис. 24.6 и рис. 24.7 соответственно.



**Ответ:**

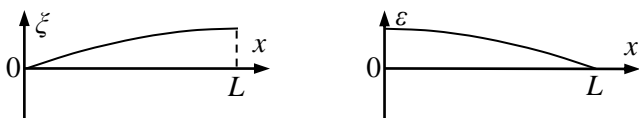


Рис. 24.4. Зависимости  $\zeta(x)$  и  $\varepsilon(x)$  для основного тона в момент времени  $t = 0$ .

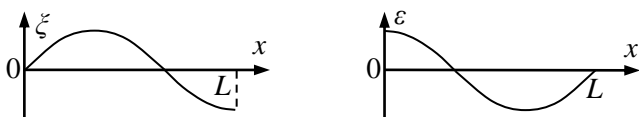


Рис. 24.5. Зависимости  $\zeta(x)$  и  $\varepsilon(x)$  для первого обертона в момент времени  $t = 0$ .

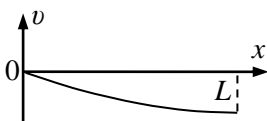


Рис. 24.6. Зависимость скорости частиц стержня  $v(x)$  для основного тона в момент времени  $t = T/4$ .

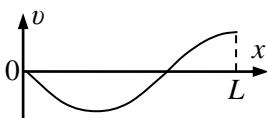


Рис. 24.7. Зависимость скорости частиц стержня  $v(x)$  для первого обертона в момент времени  $t = T/4$ .

#### 24.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 24.4.1** ([2], 705). Какова длина струны  $L$ , если при укорочении ее на 10 см частота колебаний повышается в полтора раза? Натяжение струны остается неизменным.

*Ответ:*  $L = 30$  см.

**Задача 24.4.2** ([2], 709). Стержень с закрепленными концами имеет длину  $l = 1$  м. При трении стержень издает звук, основная частота которого  $\nu_0 = 700$  Гц. Какова скорость звука в стержне? Какие обертоны может иметь звук, издаваемый стержнем?

*Ответ:*  $c = 2\nu_0 l = 1400$  м/с. Обертоны  $\nu = k\nu_0$ ,  $k = 2, 3, \dots$

**Задача 24.4.3** ([2], 710). Две струны имеют одинаковую длину и натяжение. Как относятся периоды их собственных колебаний, если диаметр одной струны в два раза больше диаметра другой? Струны сделаны из одного материала.

*Ответ:* Период колебаний тонкой струны в два раза меньше.

**Задача 24.4.4** ([2], 711). Как следует изменить натяжение струны, чтобы она давала тон в три раза более низкий?

*Ответ:* Уменьшить в девять раз.

**Задача 24.4.5** ([2], 714). Струна звучит с частотой 400 Гц. В каком месте и как следует зажать струну, чтобы она звучала с частотой: а) 800 Гц; б) 1200 Гц? Можно ли, зажимая струну понизить частоту ее звучания?

*Ответ:* а) зажать струну на очень коротком участке в середине; б) зажать на расстоянии  $1/3$  от конца. Понизить тон звучания таким способом невозможно.

**Задача 24.4.6** ([3], 4.193). На струне длиной  $l = 120$  см образовалась стоячая волна, причем все точки струны с амплитудой смещения 3,5 см отстоят друг от друга на 15 см. Найти максимальную амплитуду смещения  $a_{\max}$ . Какому обертоны соответствуют эти колебания?

*Ответ:*  $a_{\max} = 5$  мм; третьему обертоны.

**Задача 24.4.7** ([3], 4.194). Найти отношение частот основного тона двух одинаковых струн после того, как одну из них упруго растянули на  $\eta_1 = 2\%$ , а другую на  $\eta_2 = 4\%$ .

$$\text{Ответ: } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\eta_2(1+\eta_1)}{\eta_1(1+\eta_2)}} = 1,4.$$

**Задача 24.4.8.** В стержне с двумя закрепленными концами возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений  $\zeta(t)$ , скоростей  $v(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$  от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние  $\lambda/2$ .

**Задача 24.4.9.** В стержне с одним закрепленным концом возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений  $\zeta(t)$ , скоростей  $v(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$  от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние  $\lambda/2$ .

**Задача 24.4.10.** В трубе, открытой с двух концов, возбудили стоячую волну. Изобразить графики зависимостей смещений  $\zeta(t)$ , скоростей  $v(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$  от времени в двух точках, отстоящих друг от друга на расстояние  $\lambda/2$ .

## ГЛАВА 25

## МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД. ДЕФОРМАЦИИ

## 25.1. Теоретический материал

**Деформация** – изменение взаимного расположения материальных точек тела, вызванное внешним воздействием, которое приводит к искажению формы и размеров тела и вызывает изменение сил взаимодействия между материальными точками, т.е. появление напряжений.

Деформацию любого элементарного объема тела можно свести к растяжению (сжатию) и сдвигу.

**Упругая деформация** – деформация, которая возникает и исчезает одновременно с внешним воздействием и не сопровождается рассеянием энергии.

**Деформация растяжения, относительное удлинение.** При внешнем воздействии вдоль стержня (бруска, пружины, резинового шнура) возникает его растяжение (сжатие) (см. рис. 25.1). В этом случае деформацию описывают относительным удлинением (сжатием) стержня:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (25.1)$$

где  $\Delta l = l - l_0$  – удлинение стержня,  $l$  и  $l_0$  – длина стержня в деформированном и недеформированном состояниях. При этом растяжению стержня соответствует  $\varepsilon > 0$ , а сжатию –  $\varepsilon < 0$ .

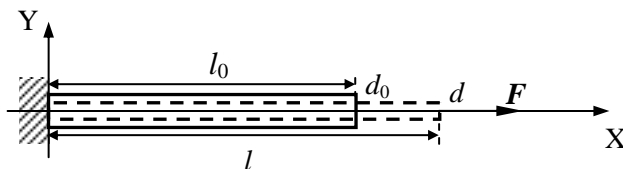


Рис. 25.1. Деформация растяжения.

**Деформация поперечного сжатия, коэффициент Пуассона.** В случае растяжения (сжатия) стержня наблюдается поперечная деформация – уменьшение (увеличение) его поперечных размеров. При этом отношение относительного поперечного сжатия стержня

к его относительному удлинению зависит только от материала стержня и называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (25.2)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_{\perp} = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$  – относительное изменение поперечных размеров стержня,  $d$  и  $d_0$  – поперечный линейный размер стержня в деформированном и недеформированном состояниях (см. рис. 25.1).

**Деформация сдвига.** При внешнем воздействии поверхностных касательных сил возникает деформация сдвига (см. рис. 25.2), которая описывается величиной

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha, \quad (25.3)$$

где  $\alpha$  – угол сдвига.

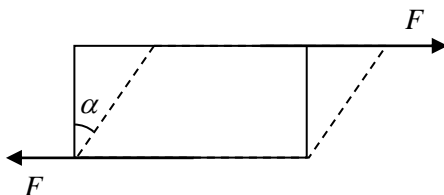


Рис. 25.2. Деформация сдвига.

**Абсолютно упругое тело** – тело, которое после снятия внешнего воздействия полностью восстанавливает свою форму и объем.

**Нормальное напряжение** – физическая величина, равная отношению нормальной проекции силы  $F_n$ , действующей на поверхность, к ее площади  $S$ :

$$\sigma = \frac{F_n}{S}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (25.4)$$

**Закон Гука. Коэффициент и модуль упругости.** При малых упругих деформациях растяжения величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее силы  $F$  (нормального напряжения  $\sigma$ ).

Для деформации растяжения (сжатия):

$$\Delta l = \frac{1}{k} F, \quad (25.5)$$

где  $k$  – коэффициент упругости (жесткости) стержня;  $[k] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Для деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma . \quad (25.6)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости (Юнга) материала стержня;  $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

**Касательное напряжение** – физическая величина, равная отношению тангенциальной проекции силы  $F_\tau$ , действующей на поверхность, к ее площади  $S$ :

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}, \quad [\sigma_\tau] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (25.7)$$

**Закон Гука и модуль сдвига.** При малых упругих деформациях сдвига величина деформации пропорциональна величине вызывающей ее касательной силы  $F_\tau$  (касательного напряжения  $\sigma_\tau$ ):

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F_\tau}{S} = \frac{1}{G} \sigma_\tau, \quad (25.8)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала тела;  $[G] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

**Взаимосвязь относительного изменения объема и деформации удлинения.** При малых деформациях:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon(1 - 2\mu), \quad (25.9)$$

где  $\Delta V = V - V_0$  – изменение объема тела,  $V$  и  $V_0$  – объем тела до и после всестороннего сжатия,

**Взаимосвязь угла сдвига и деформации удлинения.** При малых деформациях:

$$\alpha = \varepsilon(1 + \mu). \quad (25.10)$$

**Взаимосвязь модуля сдвига с модулем Юнга.**

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (25.11)$$

**Закон Гука и модуль всестороннего сжатия.** При малом одинаковом всестороннем упругом сжатии величина относительного изменения объема тела пропорциональна величине нормального напряжения  $\sigma$ :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{K} \sigma, \quad (25.12)$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия тела;  $[K] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

**Взаимосвязь модуля всестороннего сжатия с модулем Юнга.**

$$K = \frac{E}{3(1-\mu)}. \quad (25.13)$$

**Стрела прогиба**  $\lambda$  – смещение точки приложения силы, вызывающей изгиб балки. Единица измерения –  $[\lambda] = \text{м}$ .

**Закон Гука и модуль кручения.** При малых деформациях сдвига при кручении вала (стержня) угол кручения  $\varphi$ , на который повернется одно из оснований вала относительно другого, пропорционально моменту внешних сил  $M$ , вызвавших это кручение:

$$\varphi = \frac{1}{B} M. \quad (25.14)$$

Здесь  $B = \frac{\pi R^4}{2l} G$  – модуль кручения,  $[B] = \text{Н} \cdot \text{м}$ ;  $R$  и  $l$  – радиус и длина вала.

**Работа, затрачиваемая на деформацию тела при растяжении.** При малых деформациях сжатия (растяжения) элемента тела объемом  $V$ :

$$A_\varepsilon = V \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (25.15)$$

**Работа, затрачиваемая на деформацию тела при сдвиге.** При малых деформациях сдвига в элементе тела объемом  $V$ :

$$A_\tau = V \int_0^\gamma \sigma_\tau(\gamma) d\gamma. \quad (25.16)$$

**Объемная плотность энергии при деформации растяжения:**

$$w_\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (25.17)$$

**Объемная плотность энергии при деформации сдвига:**

$$w_\tau = \frac{1}{2} G \gamma^2. \quad (25.18)$$

## 25.2. Основные типы задач и методы их решения

Большинство задач по теме "Механика сплошных сред. Деформации" можно условно отнести к следующим типам или их комбинациям. Задачи на:

- 1) определение продольных деформаций;
- 2) определение относительного изменения объема, обусловленного деформациями;
- 3) расчет объемной плотности энергии упругой деформации;
- 4) расчет стрелы прогиба.

При решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

### **I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.
2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат, а также точку (ось), относительно которой будет рассматриваться вращение тела (из соображений удобства).
3. Изобразить и обозначить силы, механические напряжения, деформации.
4. Провести анализ действующих на тела системы сил и их моментов относительно выбранной точки (оси) вращения.
5. Провести анализ вида деформаций, возникающих в рассматриваемых телах.

### **II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат для тела или выбранного элемента тела.
2. Использовать закон Гука.
3. Использовать взаимосвязь между различными физическими величинами, описывающими деформации.
4. Рассчитать энергетические характеристики деформированного тела (если это необходимо по условию задачи).
5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

### **III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**



1. Решить систему полученных уравнений.
2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).
3. Получить численный результат.

Примечания.

Пункты П.1 – П.5 можно выполнять в той или иной последовательности в зависимости от решаемой задачи.

### 25.3. Примеры решения задач

**Задача 25.3.1.** (Расчет объемной плотности энергии упругой деформации при растяжении стержня). Под действием внешней силы стальной стержень массой  $m = 4,5$  кг растянули таким образом, что его относительное удлинение  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Определите, какова при этом энергия упругой деформации стержня? Модуль Юнга стали равен  $E = 210$  ГПа, плотность  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>.

#### Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью  $X$ , направленной вдоль стержня, как показано на рис. 25.1. Под действием внешней силы в стержне возникают внутренние упругие силы и продольные деформации. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил подчиняющимися закону Гука.

II. Объемная плотность энергии при деформации растяжения (см. теоретический материал, формулу 25.17):

$$w_\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (25.19)$$

Энергия упругой деформации стержня равна:

$$W = w_\varepsilon \cdot V, \quad (25.20)$$

где  $V = \frac{m}{\rho}$  – объем стержня.

III. Из соотношений (25.19) и (25.20) получим искомую энергию упругой деформации стержня:

$$W = w_\varepsilon \cdot V = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot V = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot \frac{m}{\rho} = \frac{m E \varepsilon^2}{2\rho} \approx 60 \text{ Дж.}$$

**Ответ:**  $W = \frac{m E \varepsilon^2}{2\rho} \approx 60 \text{ Дж.}$

**Задача 25.3.2.** (Расчет максимальной нагрузки при растяжении стержня). Предел прочности стали, из которой сделана проволока диаметром  $d = 1,5$  мм, равен  $\sigma_n = 420$  МПа. Какое количество таких проволок  $N$  необходимо взять, для того, чтобы сделать из них трос, рассчитанный на подъем груза массой  $m = 1$  т?

### Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью  $X$ , направленной вдоль проволоки, как показано на рис. 25.1. Под действием внешней силы в проволоке возникают внутренние упругие силы и продольные деформации. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил подчиняющимися закону Гука.

II. Предел прочности материала проволоки определяется как пороговая величина постоянного нормального механического напряжения  $\sigma_n$ , превышение которого приведет к разрушению проволоки из данного материала.

Нормальная проекция силы  $F_n$ , действующая на поверхность площадью  $S$ , определяется следующим образом (см. теоретический материал, формулу (25.4)):

$$F_n = \sigma_n S. \quad (25.21)$$

Площадь поперечного сечения проволоки равна:

$$S = \pi \frac{d^2}{4}. \quad (25.22)$$

III. Поскольку максимальная нагрузка равна силе тяжести  $mg$ , для  $N$  проволок выполняется следующее соотношение:

$$mg = N \sigma_n \pi \frac{d^2}{4}.$$

Отсюда количество проволок, которое необходимо взять, для того, чтобы сделать из них трос равно:

$$N = \frac{4mg}{\sigma_{\pi}\pi d^2} \approx 14$$

$$\text{Ответ: } N = \frac{4mg}{\sigma_{\pi}\pi d^2} \approx 14.$$

**Задача 25.3.3.** (Использование закона Гука для расчета изменения объема стержня при его растяжении). Сплошной медный цилиндрический стержень длиной  $l_0 = 65$  см, закрепленный с одной стороны, растягивают с помощью постоянной силы  $F = 1000$  Н, приложенной с другой стороны, и равномерно распределенной по торцу стержня. Насколько изменился при этом объем стержня? Модуль Юнга и коэффициент Пуассона для меди равны, соответственно,  $E = 12,3 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0,35$ .

### Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью X, направленной вдоль стержня (см. рис. 25.1). Под действием внешней силы в проволоке возникают внутренние упругие силы и продольные деформации. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил подчиняющимися закону Гука.

II. Будем считать, что длина стержня в недеформированном состоянии равна  $l_0$ , а его диаметр –  $d_0$ . В результате деформации (в данном случае удлинения) длина стержня  $l$  будет равна:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right). \quad (25.23)$$

При этом диаметр стержня уменьшится ( $\Delta d < 0$ ) и станет равным:

$$d = d_0 + \Delta d = d_0 \left( 1 + \frac{\Delta d}{d_0} \right). \quad (25.24)$$

Изменение объема стержня в результате деформации равно:

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\pi d^2}{4} l - \frac{\pi d_0^2}{4} l_0. \quad (25.25)$$

III. Коэффициент Пуассона согласно (25.2) определяется следующим соотношением:

$$\mu = -\frac{\Delta d}{d_0} \bigg/ \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (25.26)$$

Выразим диаметр стержня после деформации через коэффициент Пуассона, используя соотношения (25.24):

$$d = d_0 - \frac{\mu d_0 \Delta l}{l_0} = d_0 \left( 1 - \frac{\mu \Delta l}{l_0} \right). \quad (25.27)$$

Используя соотношения (25.25) и (25.27), а также пренебрегая членами  $\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2$  и  $\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^3$ , получим искомую величину изменения объема:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\pi}{4} (d^2 l - d_0^2 l_0) = \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 \left( \left( 1 - \frac{\mu \Delta l}{l_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) - 1 \right) \approx \\ &\approx \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 \frac{\Delta l}{l_0} (1 - 2\mu). \end{aligned} \quad (25.28)$$

В соответствие с законом Гука (см. формулу (25.6))

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{SE}, \quad (25.29)$$

где  $S = \frac{\pi}{4} d_0^2$ .

Подставив соотношение (25.29) в (25.28), получим:

$$\Delta V \approx \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 \frac{F}{SE} (1 - 2\mu) = l_0 \frac{F}{E} (1 - 2\mu). \quad (25.30)$$

Определим величину изменения объема, подставив численные значения в (25.30):

$$\Delta V \approx l_0 \frac{F}{E} (1 - 2\mu) = \frac{0,65 \cdot 10^3}{12,3 \cdot 10^{10}} (1 - 0,7) \approx 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3 = 1,6 \text{ см}^3.$$

**Ответ:**  $\Delta V \approx l_0 \frac{F}{E} (1 - 2\mu) = 1,6 \text{ см}^3$ .

**Задача 25.3.4.** (Использование закона Гука для определения продольных деформаций под действием массовой силы). Вертикально подвешенный стержень массой  $m$  имеет площадь попереч-

ного сечения  $S$ . Модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, равен  $E$ . Определить относительное удлинение стержня под действием силы тяжести.

### Решение

I. Выберем декартову систему координат с осью  $X$  (см. рис. 25.3), направленной вверх вдоль стержня с началом отсчета  $x = 0$  в нижней незакрепленной точке стержня.

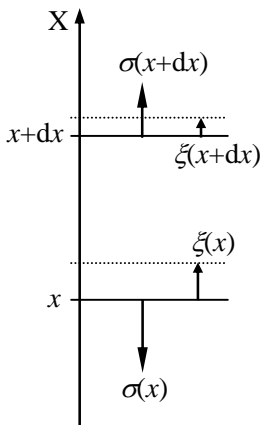


Рис. 25.3. Деформация элемента стержня относительно оси выбранной декартовой системы координат.

Под действием силы тяжести в стержне возникают внутренние упругие силы и продольные деформации, различные в разных сечениях. Деформации, возникающие в стержне, будем считать малыми, а напряжения возникающих при этом упругих сил подчиняющимся закону Гука. Будем считать, что площади поперечных сечений стержня сечения  $S$  одинаковы во всех сечениях стержня.

II, III. Рассмотрим слой  $dx$  недеформированного стержня с координатой  $x$  вдоль него (см. рис. 25.3). Масса  $dm$  выделенного элемента стержня не изменяется при деформации и остается

равной

$$dm = \frac{m}{l_0} dx,$$

где  $m$  – масса всего стержня.

Поскольку стержень находится в равновесии, то уравнение движения рассматриваемого элемента стержня в проекции на ось  $X$  под действием напряжений упругих сил запишем в виде:

$$0 = gdm - (S\sigma(x+dx + \xi(x+dx)) - S\sigma(x + \xi(x))). \quad (25.31)$$

Здесь  $\xi(x)$  и  $\xi(x+dx)$  – смещения границ выделенного фрагмента при деформации (см. рис. 25.3). Преобразуя равенство (25.31) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим:

$$g dm - S \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \approx 0. \quad (25.32)$$

Дифференциальное уравнение (25.32) дополним граничным условием для напряжения упругих сил:

$$\sigma(x=0) = 0. \quad (25.33)$$

Напряжения упругих сил связаны с продольными деформациями законом Гука:

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x). \quad (25.34)$$

Объединяя уравнения (25.32), (25.33) и (25.34), получаем дифференциальное уравнение для продольных деформаций:

$$g \frac{m}{l_0} dx = SE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx. \quad (25.35)$$

Интегрируя (25.35) методом разделения переменных с учетом граничных условий (25.34) получаем:

$$\frac{mgx}{l_0} = SE \varepsilon(x).$$

Тогда  $\varepsilon(x)$  имеет вид:

$$\varepsilon(x) = \frac{mgx}{l_0 SE}. \quad (25.36)$$

Поскольку

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

то полное продольное удлинение стержня находим, интегрируя (25.36):

$$\Delta l = \xi(l_0) = \int_0^{l_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \int_0^{l_0} \varepsilon(x) dx = \frac{mg l_0}{2SE}.$$

Искомое относительное удлинение стержня равно:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2SE}.$$

**Ответ:**  $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{mg}{2SE}.$

**Задача 28.2.5.** (Определение относительного изменения объема, обусловленного деформациями). Определить относительное изменение объема полого шара радиуса  $R$ , в который накачан воздух под давлением  $p$ . Толщина сферической оболочки равна  $d$  ( $d \ll R$ ). Модуль Юнга материала, из которого сделан шар, равен  $E$ , коэффициент Пуассона –  $\mu$ .

### Решение

I. Выберем произвольную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с элементом оболочки шара. Изобразим на рис. 25.4 тангенциальную и нормальную оси, заданные ортами  $\tau$  и  $n$ , направленными вдоль поверхности шара, а также ось  $Z$ , направленную перпендикулярно поверхности шара.

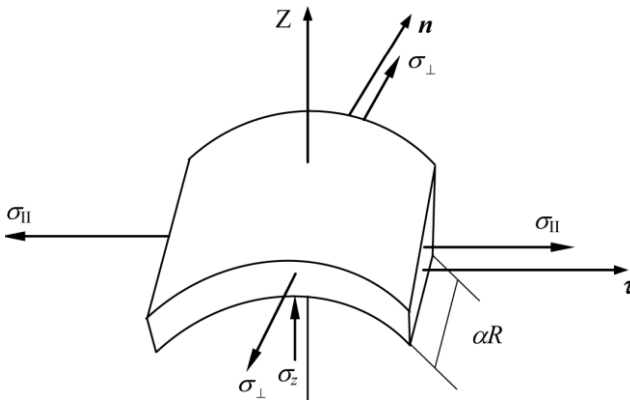


Рис. 25.4. Элемент оболочки шара относительно осей выбранной системы координат; механические напряжения, вызванными силами натяжения.

II, III. Под влиянием давления  $p$ , которое оказывает воздух на оболочку шара, на элемент оболочки шара действуют силы натяжения вдоль поверхности шара. Будем считать, что деформации, возникающие под действием этих сил малы, что позволяет воспользоваться принципом суперпозиции малых деформаций. По определению механическое напряжение, действующее вдоль оси  $Z$ , равно давлению воздуха на оболочку шара:

$$p = \sigma_z.$$

Кроме того, будем также считать из соображений симметрии, что механические напряжения, вызванными силами натяжения, направленными вдоль поверхности шара, равны:

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \sigma. \quad (25.37)$$

Рассмотрим относительное удлинение  $\varepsilon$  элемента оболочки шара вдоль оси  $\tau$ . Исходя из принципа суперпозиции малых деформаций, можно записать:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\parallel}}{E} - \mu \frac{\sigma_{\perp}}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (25.38)$$

Если под действием давления воздуха оболочка расширилась на  $\Delta R$ , то относительное удлинение  $\varepsilon$  можно рассчитать также следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R}.$$

Увеличение радиуса шара приводит к увеличению его объема, относительное изменение которого равно:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi R^2 \Delta R}{(4/3)\pi R^3} = 3 \frac{\Delta R}{R}. \quad (25.39)$$

Для того, чтобы установить связь между давлением  $p$  и напряжением  $\sigma_z$ , рассмотрим сечение элемента оболочки шара толщины  $d$  (рис. 25.5), длина и ширина которого равны  $\alpha R$ . Свяжем силы натяжения  $F$ , действующие на элемент оболочки шара, с механическими напряжениями  $\sigma$ .

$$F = \sigma d(\alpha R). \quad (25.40)$$

Поскольку оболочка шара находится в равновесии, то сила давления со стороны воздуха компенсируется упругими силами натяжения:

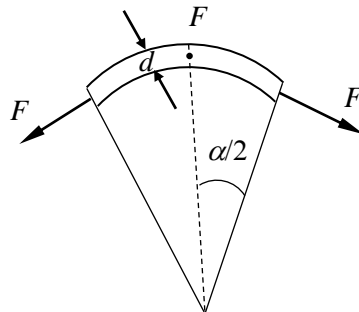


Рис. 25.5. Силы натяжения, действующие на элемент оболочки шара.



$$4F \cdot \frac{\alpha}{2} = p((R-d)\alpha)^2, \quad (25.41)$$

Преобразуем соотношение (25.38), используя (25.37):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1-\mu) - \mu \frac{\sigma_z}{E} \quad (25.42)$$

Объединяя уравнения (25.40) и (25.41), получим:

$$\sigma = \frac{p(R-d)^2}{2dR}. \quad (25.43)$$

Используя (25.42) и (25.43) с учетом  $p = \sigma_z$ , преобразуем выражение (25.39) к виду:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon = 3 \left( \frac{\sigma}{E}(1-\mu) - \mu \frac{\sigma_z}{E} \right) = 3 \left( \frac{p(R-d)^2}{2dRE}(1-\mu) - \mu \frac{p}{E} \right). \quad (25.44)$$

Поскольку по условию задачи толщина сферической оболочки равна  $d \ll R$ , то соотношение (25.44), позволяющие определить относительное изменение объема шара под давлением  $p$ , может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{pR}{Ed}(1-\mu).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{pR}{Ed}(1-\mu).$$

**Задача 25.3.6.** (Определение относительного изменения объема, обусловленного деформациями). Определить относительное изменение объема шара радиуса  $R$ , а также упругую энергию, запасенную в шаре, имеющем модуль всестороннего сжатия  $K$  и подвергнутом всестороннему давлению  $p$ .

### Решение

I. Для решения задачи рассмотрим сначала однородное изотропное твердое тело в виде прямоугольного параллелепипеда. Будем считать, что перпендикулярно граням этого параллелепипеда приложены силы  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$ , которым соответствуют напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Выберем произвольную инерциальную систему отсчета, жестко связанную с параллелепипедом, и декартову систему коор-

динат (см. рис. 28.10). Пусть длины ребер этого параллелепипеда равны  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ , а модули их изменения под действием сжатия соответственно равны  $\Delta l_x$ ,  $\Delta l_y$ ,  $\Delta l_z$ .

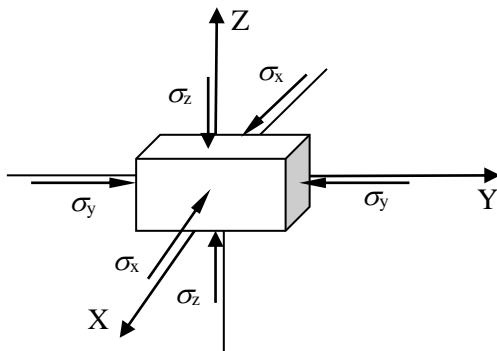


Рис. 25.6. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , действующие на грани твердого тела в виде прямоугольного параллелепипеда.

II, III. Считая деформации малыми, воспользуется принципом суперпозиции:

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\Delta l_x}{l_x} = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (25.45)$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\Delta l_y}{l_y} = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (25.46)$$

$$\varepsilon_z \equiv \frac{\Delta l_z}{l_z} = -\frac{\sigma_z}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (25.47)$$

где  $E$  – модуль Юнга, а  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Известно, что при квазистатическом растяжении (сжатии) параллелепипеда плотность упругой энергии определяется следующим образом:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z). \quad (25.48)$$

При малых деформациях относительное изменение объема параллелепипеда равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta l_z}{l_z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (25.49)$$

В случае, когда твердое тело подвергается всестороннему сжатию, все механические напряжения можно считать равными всестороннему давлению  $p$ :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p. \quad (25.50)$$

Преобразуем соотношения (25.45), (25.46) и (25.47), используя условие (25.50), к виду:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E}(1-2\mu). \quad (25.51)$$

Объединяя соотношения (25.49), (25.50) и (25.51), получим:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3p}{E}(1-2\mu).$$

Введя величину  $K$  – модуль всестороннего сжатия

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

получим:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}.$$

Для того, чтобы определить плотность упругой энергии, преобразуем формулу (25.48), используя соотношения (25.50), (25.51) и выражения для модуля всестороннего сжатия  $K$ , к виду:

$$w = \frac{3(1-2\mu)}{2E} p^2 = \frac{p^2}{2K}.$$

Тогда упругая энергия, запасенная в шаре, определяется следующим образом:

$$W = w \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2p^2 \pi R^3}{3K}.$$

**Ответ:**  $W = \frac{2p^2 \pi R^3}{3K}.$

**Задача 25.3.7.** (Расчет стрелы прогиба и радиуса кривизны изгиба равнопрочной балки). Определить стрелу прогиба  $\lambda$  равнопрочной балки (балка с переменным поперечным сечением, площадь которого линейно уменьшается при удалении от ее закрепленного конца) длиной  $L$ , жестко закрепленной в стене одним из своих концов, а также радиус кривизны изгиба балки  $R$  (рис.25.7). На другой незакрепленный конец балки действует сосредоточенная сила  $F$ . Линейные размеры поперечного сечения закрепленного конца –  $a_0$  и  $b$ ,  $L$  – длина балки. Модуль Юнга материала, из которого сделан стержень, равен  $E$ . Считать балку легкой ( $m \ll F/g$ ).

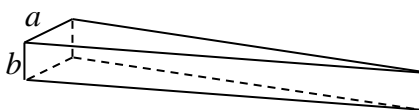


Рис. 25.7. Равнопрочная балка.

### Решение

I. На рис. 25.8 изображены силы, действующие на правую часть нагруженной балки. При изгибе балки возникают нормальные напряжения, вызванные сжатием слоев, находящихся ниже нейтрального слоя, и растяжением слоев, расположенных выше нейтрального. Эти напряжения  $dT$  различны в разных слоях и возрастают с удалением от нейтрального слоя, изображенного пунктиром на рис. 25.8. Кроме указанных напряжений возникают еще касательные напряжения, обусловленные деформацией сдвига. На рис. 25.8. изображена также касательная сила  $F_{\text{сдвиг}}$ , которая уравнивает силу  $F$ , приложенную к концу балки, и силу тяжести  $m_0 g$ , действующую на выделенную правую часть балки.

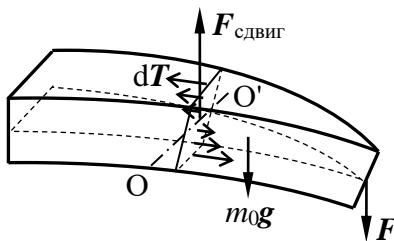


Рис. 25.8. Силы, действующие на правую часть балки при изгибе.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную со стеной, к которой прикреплена балка. Оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат изображены на рис. 25.9. Под действием силы  $F$  незакрепленный конец балки опустится. При таком изгибе верхние слои балки будут растягиваться, а нижние – сжиматься, средний (нейтральный) слой сохраняет свою длину и только претерпевает искривление.

В случае прямоугольного поперечного сечения балки нейтральный слой расположен посередине балки. Для удобства решения задачи введем еще и криволинейную систему координат, направив ось  $l$  вдоль нейтральной линии. Для решения задачи будем использовать гипотезу Бернулли о том, что при изгибе все поперечные сечения балки остаются плоскими.

Линейный поперечный размер равнопрочной балки изменяется по закону:

$$a = a_0 \left( 1 - \frac{x}{L} \right).$$

Смещение оси балки в результате действия силы  $F$  будем описывать функцией  $u(x)$ . Будем считать деформации достаточно малыми, то есть стрела прогиба  $\lambda = u(L) \ll L$ .

II, III. Для определения стрелы прогиба выделим малый фрагмент балки длиной  $dl$  (рис. 25.10).

При малых деформациях нормальное напряжение  $\sigma$  в каждом слое выделенного участка пропорционально величине изменения его длины, а, следовательно, напряжение  $\sigma(l, \xi)$  будет линейно меняться при удалении от нейтрального слоя:

$$\sigma(l, \xi) = \sigma_0(l) \frac{\xi}{b/2}. \quad (25.52)$$

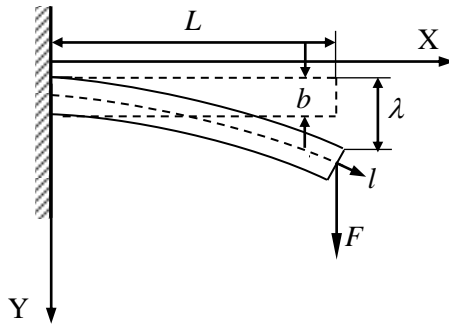


Рис. 25.9. Изгиб центрального сечения балки под действием силы  $F$  относительно осей выбранной декартовой системы координат.

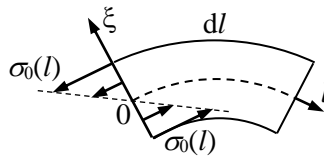


Рис. 25.10. Линейное изменение напряжения  $\sigma$  при удалении от нейтрального слоя для малого элемента длиной  $dl$ .

Здесь  $\xi$  – координата слоя,  $l$  – координата элемента балки длиной  $dl$ ,  $\sigma_0(l)$  – напряжение в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии  $\frac{b}{2}$  от нейтрального.

На каждый элемент слоя, имеющий границы с координатами  $(\xi, \xi + d\xi)$  действует со стороны соприкасающейся части балки сила, равная

$$dT(\xi) = \sigma dS = \sigma ad\xi, \quad (25.53)$$

где  $dS = ad\xi = a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi$  – площадь поперечного сечения выделенного малого фрагмента балки.

Определим линию прогиба  $u(x)$  балки, прикрепленной одним концом к вертикальной стене, под действием силы  $F$ . При малой деформации балки угол между направлением касательной к нейтральному слою в точке  $x$  равен (рис. 25.11).

$$\varphi = \frac{du}{dx},$$

а изменение направления касательной при переходе от точки  $x$  к точке  $x+dx$  равно:

$$d\varphi = \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{d^2 u}{dx^2} dx. \quad (25.54)$$

Поскольку при деформации элемент длиной  $dl$  удлинится на величину  $\frac{b}{2} d\varphi$ , то относительное удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального, как видно на рис. 25.11, равно:

$$\varepsilon(l) = \frac{d\varphi}{dl} \cdot \frac{b}{2}. \quad (25.55)$$

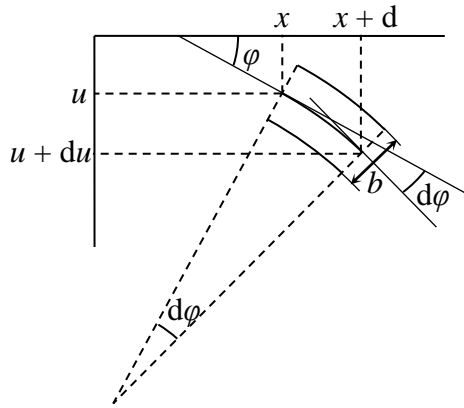


Рис. 25.11. К вопросу об определении линии прогиба  $u(x)$  стержня, закрепленного одним концом в стенке, под действием силы  $F$ .

Поскольку угол  $\varphi$  – мал, то величины  $dl$  и  $dx$  связаны следующим соотношением:

$$dx = dl \cos \varphi \approx dl. \quad (25.56)$$

В соответствии с выражениями (25.55) и (25.56) относительная деформация равна:

$$\varepsilon(x) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{b}{2}. \quad (25.57)$$

Так как  $\sigma_0(l) = \sigma_0(x)$ , используя закон Гука, получим выражение для напряжения в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии  $\frac{b}{2}$  от нейтрального:

$$\sigma_0(l) = \sigma_0(x) = E\varepsilon(x). \quad (25.58)$$

Поскольку балка находится в равновесии, то суммарный момент внешних сил, действующих на любой выделенный фрагмент балки, относительно любой оси равен нулю. Рассмотрим условие равновесия правой части нагруженной балки, изображенной на рис. 25.8.

Выберем горизонтальную ось  $OO'$  в точке с координатой  $l$ , принадлежащей нейтральному слою. Проекция этой точки на ось  $X$  имеет координату  $x$ . Ось  $OO'$  перпендикулярна плоскости центрального вертикального сечения балки (см. рис. 25.8 и 25.9).

Определим момент упругих сил растяжения – сжатия, действующих на элемент балки со стороны другой его части относительно указанной оси:

$$M_T = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi dT(\xi). \quad (25.59)$$

Момент упругих сил  $M_T$  находим, интегрируя (25.59) с учетом (25.53) и (25.52):

$$\begin{aligned} M_T &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi \sigma a d\xi = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\xi^2 \sigma_0(l)}{b/2} a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi = \\ &= \frac{\sigma_0(l) a_0 b^2}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \end{aligned} \quad (25.60)$$

Момент силы  $F$  относительно выбранной оси равен:

$$M_F = F(L-x). \quad (25.61)$$

Масса выделенного фрагмента балки равна:

$$m_0 = \rho \frac{1}{2}(L-x)a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)b = \frac{\rho(L-x)^2 a_0 b}{2L} = m \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad (25.62)$$

где  $\rho$  – плотность материала балки,  $m$  – масса всей балки.

Координату центра масс выделенной части балки найдем в соответствии с определением центра масс:

$$\begin{aligned} z_{\text{цм}} &= \frac{1}{m_0} \int_0^{L-x} \rho a(x) \left(1 - \frac{z}{L-x}\right) b z dz = \frac{\rho a(x)b}{m_0} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3(L-x)} \right) \Big|_0^{L-x} = \\ &= \frac{L-x}{3}, \end{aligned} \quad (25.63)$$

где  $z_{\text{цм}}$  – координата центра масс правой части балки, отсчитанная от точки с координатой  $x$ .

Плечо силы тяжести  $m_0 g$  относительно выбранной оси  $OO'$  равно координате центра масс  $z_{\text{цм}}$ .

С учетом выражений (25.62) и (25.63) находим момент силы тяжести, действующей на правую часть балки, относительно оси  $OO'$ :

$$M_{m_0 g} = \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}. \quad (25.64)$$

Запишем условие равновесия элемента балки, левая граница которого имеет координату  $x$ , а правая совпадает с незакрепленным концом и имеет координату  $x = L$ :

$$M_F + M_{m_0 g} = M_T. \quad (25.65)$$

При записи условия равновесия балки (25.65), учтено, что момент силы  $F_{\text{сдвиг}}$  относительно оси  $OO'$  равен нулю.

Выражение (25.65) с учетом соотношений (25.60), (25.61) и (25.64) принимает вид:

$$\frac{\sigma_0(l)a_0 b^2}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = F(L-x) + \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}.$$

Следовательно, нормальные напряжения в слое, наиболее удаленном от нейтрального, в точке с координатой  $x$  равны:



$$\sigma_0(x) = \frac{6L}{a_0 b^2} \left( F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right). \quad (25.66)$$

Как видим, в случае легкой балки ( $m \ll F/g$ ) напряжение  $\sigma_0$  не зависит от координаты  $x$ , следовательно, оно постоянно во всех сечениях балки, что и отражено в названии «равнопрочная балка». Решая систему уравнений (25.54), (25.57) и (25.58), получим

$$\sigma_0(x) = \frac{Eb}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (25.67)$$

Подставляя соотношение (25.67) в (25.66), находим:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{12L}{Ea_0 b^3} \left( F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right). \quad (25.68)$$

Дифференциальное уравнение (25.68) интегрируем в пределах от  $x=0$  до  $x=x'$  с учетом граничного условия  $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{x'} &= \int_0^{x'} \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^{x'} \frac{12L}{Ea_0 b^3} \left( F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right) dx = \\ &= \frac{12L}{Ea_0 b^3} \left( x' \left( F + \frac{mg}{3} \right) - \frac{mgx'^2}{3L} + \frac{mgx'^3}{9L^2} \right). \end{aligned} \quad (25.69)$$

Интегрируя (25.69) по  $x'$  от 0 до  $x$  с учетом граничного условия  $u(x=0) = 0$ , определим стрелу прогиба для балки в точке с координатой  $x$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \frac{12L}{Ea_0 b^3} \left( x' \left( F + \frac{mg}{3} \right) - \frac{mgx'^2}{3L} + \frac{mgx'^3}{9L^2} \right) dx' = \\ &= \frac{6L}{Ea_0 b^3} \left( \left( F + \frac{mg}{3} \right) x^2 - \frac{2mgx^3}{9L} + \frac{mgx^4}{18L^2} \right). \end{aligned} \quad (25.70)$$

В случае легкой балки выражение (25.70) упрощается и принимает вид:

$$u(x)|_{m=0} = \frac{6LFx^2}{Ea_0 b^3}.$$

Стрелу прогиба в правом конце балки находим подстановкой  $x=L$  в соотношение (25.70):

$$\lambda = u(L) = \frac{6L^3}{Ea_0b^3} \left( F + \frac{mg}{6} \right).$$

Радиус кривизны изгиба балки  $R$  определяется соотношением:

$$dl = R d\varphi. \quad (25.71)$$

В соответствии с соотношениями (25.54) – (25.57), (25.68) и (25.71) радиус кривизны равен

$$R = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}} = \frac{Ea_0b^3L}{4(3FL^2 + mg(L-x)^2)}.$$

Как видим, в случае легкой балки радиус кривизны  $R$  является постоянной величиной, не зависящей от выбранной точки балки. Следовательно, балка изгибается в форме дуги окружности с радиусом

$$R|_{m=0} = \frac{Ea_0b^3}{12FL}.$$

В этом случае легко геометрически получить связь радиуса кривизны балки со стрелой прогиба в точке с координатой  $x$  (рис. 25.12):

$$R^2 = (R - u(x))^2 + x^2. \quad (25.72)$$

Учитывая малость стрелы прогиба по сравнению с радиусом кривизны, преобразуем (25.72) к виду:

$$u(x) \approx \frac{1}{2R} x^2.$$

**Ответ:**  $\lambda = \frac{6L^3}{Ea_0b^3} \left( F + \frac{mg}{6} \right), R| = \frac{Ea_0b^3}{12FL}.$

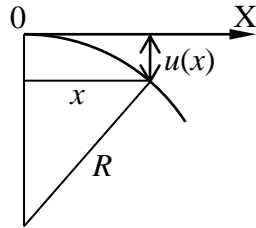


Рис. 25.12. Связь радиуса кривизны изгиба легкой балки со стрелой прогиба.

**Задача 25.3.8.** (Использование закона Гука для определения продольных деформаций под действием массовой силы). Из двух кусков стальной проволоки разного диаметра  $d_1$  и  $d_2 = 2d_1$ , но одинаковой длины, свили две пружины. Диаметр витков первой пружины равен  $D_1$ , а второй  $D_2 = 3D_1$ . Относительное удлинение первой пружины под действием подвешенного к ней груза оказалось

равным  $\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{1}{9}$ , где  $l_1$  – длина первой пружины в нерастянутом состоянии. Определите относительное удлинение второй пружины под действием того же груза. Считайте, что у нерастянутой пружины витки плотно соприкасаются друг с другом.

### Решение

I. Будем считать, что деформация материала, из которого изготовлены пружины, однородная. Кроме того, считаем, что проволоки имеют цилиндрическую форму. В качестве оси вращения выберем ось цилиндра. Деформация пружины при ее растяжении приводит к деформации сдвига в каждом элементарном объеме материала пружины. Для решения задачи следует использовать закон Гука для деформации сдвига элементарного объема, а затем для деформации кручения всего стержня, определив при этом модуль кручения. Затем можно определить коэффициент жесткости пружины. Зная соотношение между коэффициентами жесткости двух пружин, можно получить ответ на вопрос задачи.

II, III. Запишем систему уравнений, позволяющую выразить коэффициент жесткости пружины через ее длину, радиус проволоки и радиус витка.

Для того, чтобы найти модуль упругости для деформации кручения, рассмотрим деформацию кручения в однородном стержне длиной  $L$ , радиусом  $r$ , (см. рис. 25.13).

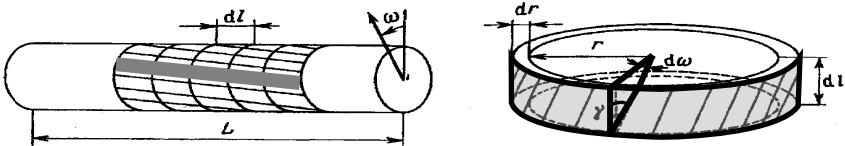


Рис. 25.13. Деформация кручения в однородном стержне.

Рассмотрим отдельный цилиндрический слой радиусом  $r'$ , толщиной  $dr'$  и длиной  $dl$ . Так как деформация однородная, то

$$d\omega = \frac{\omega}{L} dl. \quad (25.73)$$

На рисунке видно (см. рис. 25.13), что

$$d\omega \cdot r' = \gamma dl. \quad (25.74)$$

Используя закон Гука для деформации сдвига, получим

$$\tau = G\gamma, \quad (25.75)$$

где  $\tau$  – касательное напряжение,  $G$  – модуль сдвига.

Сила, касательная к торцевой поверхности выбранного слоя:

$$dF_k = \tau \cdot ds = \tau \cdot 2\pi r' dr'. \quad (25.76)$$

Момент этой силы, относительно оси цилиндра равен:

$$dM = dF_k r'. \quad (25.77)$$

Момент силы, действующий на все поперечное сечение.

$$M = \int_0^r dM. \quad (25.78)$$

Используя соотношения (25.73) – (25.78), получим:

$$\begin{aligned} dF_k &= \tau \cdot 2\pi r' dr' = G\gamma \cdot 2\pi r' dr' = G \frac{d\omega}{dl} r' \cdot 2\pi r' dr' = \\ &= G \frac{\omega}{L} \cdot 2\pi (r')^2 dr', \end{aligned} \quad (25.79)$$

$$dM = dF_k r' = G \frac{\omega}{L} \cdot 2\pi (r')^3 dr', \quad (25.80)$$

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r G \frac{\omega}{L} \cdot 2\pi (r')^3 dr' = G \frac{\omega}{L} \cdot 2\pi \frac{1}{4} r^4 = G \frac{\pi \cdot r^4}{2L} \cdot \omega. \quad (25.81)$$

Закон Гука для деформации кручения можно записать в виде:

$$M = B\omega. \quad (25.82)$$

Учитывая (25.81) и (25.82), получим выражение для модуля кручения:

$$B = G \frac{\pi \cdot r^4}{2L} \quad (25.83)$$

Если груз подвешен на оси пружины, то

$$M = F \frac{D}{2} \quad (25.84)$$

Определим теперь коэффициент жесткости пружины  $k$ . В соответствии с законом Гука:

$$F = k\Delta l, \quad (25.85)$$

где  $\Delta l$  – растяжение пружины.

Потенциальную энергию растянутой пружины можно определить двумя способами: как работу момента силы, результатом которой становится закручивание материала пружины на угол  $\omega$ , так и через известное соотношение для потенциальной энергии растянутой пружины:

$$\frac{M\omega}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}. \quad (25.86)$$

Из (25.83) – (25.86) получаем выражение для коэффициента жесткости пружины

$$k = \frac{B}{R^2} = G \frac{\pi \cdot r^4}{2LR^2}. \quad (25.87)$$

Отметим, что коэффициент жесткости в технической литературе записывают через диаметр проволоки  $d$ , диаметр витков  $D$  и число витков  $N$  следующим образом:

$$k = G \frac{d^4}{8ND^3}. \quad (25.88)$$

Выражение (25.88) совпадает с (25.87), если учесть, что  $L = N \cdot 2\pi R$ .

В условии задачи заданы диаметры проволок и витков. Поэтому для первой проволоки:

$$k_1 = \frac{B}{R^2} = G \frac{\pi \cdot r_1^4}{2LR_1^2} = G \frac{\pi \cdot d_1^4}{8LD_1^2}.$$

Для второй:

$$k_2 = G \frac{\pi \cdot (nd_1)^4}{8L(mD_1)^2} = \left(\frac{n}{m}\right)^4 k_1, \quad (n = 2, m = 3).$$

Относительное удлинение первой пружины в соответствии с (25.85) равно

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{F}{k_1 l_1}.$$

Длина первой нерастянутой пружины равна  $\frac{Ld_1}{\pi D_1}$ , а второй нерастянутой пружины  $\frac{Ld_2}{\pi D_2} = \frac{Lnd_1}{\pi m D_1}$ , то есть вторая пружина будет в  $m/n$  раз короче. Поэтому

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{Fm^2}{n^4 k_1} \frac{(m/n)}{l_1} = \frac{m^3}{n^5} \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{3}{32}.$$

**Ответ:**  $\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{3}{32}.$

### 23.4. Задачи для самостоятельного решения

#### *Деформации растяжения и сжатия*

**Задача 28.4.1** ([3], 520). Коэффициент линейного теплового расширения стали равен  $12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ . Какое давление  $p$  необходимо приложить к торцам стального цилиндра, чтобы длина его оставалась неизменной при повышении температуры на  $100 \text{ } ^\circ\text{C}$ ?

**Ответ:**  $p = 2450 \text{ кгс/см}^2$ .

**Задача 28.4.2** ([2], 523). Стальной канат, могущий выдержать вес неподвижной кабины лифта, имеет диаметр 9 мм. Какой диаметр должен иметь канат, если кабина лифта может иметь ускорение до  $8g$ ?

Ответ:  $D = 27$  мм.

**Задача 28.4.3** ([2], 524). Насколько изменится объем упругого однородного стержня длины  $l$  под влиянием силы  $P$ , сжимающей или растягивающей стержень по его длине?

Ответ:  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} l p$ , где  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.  $\Delta V < 0$  при сжатии,  $\Delta V > 0$  при растяжении.

**Задача 28.4.4** ([2], 525). Какую равномерно распределенную нагрузку  $Q$  может выдержать гранитная плита, представляющая собой правильный шестиугольник со стороной  $a = 10$  см, если допустимое напряжение на сжатие гранита равно  $p = 45$  кгс/см<sup>2</sup>?

Ответ:  $Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 p \approx 11,7 \cdot 10^3$  кгс.

**Задача 28.4.5** ([2], 528). Резиновый цилиндр с высотой  $h$ , весом  $P$  и площадью основания  $S$  поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

Ответ:  $U = P^2 h / (6ES)$ . Упругая энергия увеличится в 7 раз.

**Задача 28.4.6** ([2], 530). Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси  $X$ , так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не

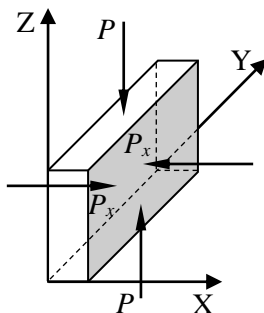


Рис. 25.14. Пластинка, зажата между вертикальными плоскостями.

могут. В направлении оси  $Z$  пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению  $P$ . Определить давление  $P_x$ , которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти выражение для плотности упругой энергии  $u$ , а также относительное сжатие пластинки в направлении оси  $Z$  и относительное расширение в направлении оси  $Y$ .

$$\text{Ответ: } P_x = \mu P, \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E}(1 + \mu), \quad \frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E}(1 - \mu^2),$$

$$u = \frac{P^2}{2E}(1 - \mu^2).$$

**Задача 28.4.7** ([2], 553). Упругий стержень массы  $m$ , длины  $l$  и площади поперечного сечения  $S$  движется в продольном направлении с ускорением  $a$  (одинаковым для всех точек стержня). Найти упругую энергию деформации, возникающую вследствие ускоренного движения.

$$\text{Ответ: } U = ma^2 / (6ES).$$

**Задача 28.4.8** ([2], 556). Тонкий однородный упругий стержень, длина которого  $L$ , масса  $M$  и модуль Юнга  $E$ , равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Найти распределение усилий  $T$  в стержне и полное его удлинение  $\Delta L$ . При подсчете линейной деформации и усилий считать поперечное сечение неизменным и удлинение малым.

$$\text{Ответ: } T = \frac{M\omega^3}{2L}(L^2 - x^2), \quad \Delta L = \frac{M\omega^2}{3ES}L^2, \text{ где } x - \text{расстояние}$$

рассматриваемого сечения от оси вращения.

**Задача 28.4.9** ([3], 1.356). Брусок из материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  подвергли всестороннему сжатию давлением  $p$ . Найти:

- а) относительное уменьшение его объема;
- б) связь между коэффициентом сжимаемости  $\beta$  и упругими постоянными  $E$  и  $\mu$ .

Показать, что коэффициент Пуассона  $\mu$  не может превышать  $1/2$ .



$$\text{Ответ: а) } \frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1-2\mu)p}{E}; \text{ б) } \beta = \frac{3(1-2\mu)p}{E}.$$

**Задача 28.4.10** ([3], 1.361). Найти энергию упругой деформации стального стержня массы  $m = 3,1$  кг, который растянут так, что его относительное удлинение  $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-3}$ .

$$\text{Ответ: } U = mE\varepsilon^2/2\rho = 40 \text{ Дж.}$$

*Деформации сдвига и кручения:*

**Задача 28.4.11** ([2], 543). Стержень круглого сечения расположен вертикально и закреплен верхним концом. К нижнему концу прикреплен горизонтально блок радиуса  $R = 50$  мм. Ось стержня проходит через центр блока. От концов диаметра блока идут по касательной две нити, на которые действуют равные силы  $P = 5$  кгс, закручивающие блок в одном направлении. На какой угол  $\varphi$  закрутится стержень? Модуль сдвига материала стержня  $N = 8000$  кгс/мм<sup>2</sup>, радиус стержня  $r = 5$  мм, длина его  $l = 1$  м.

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{4PRl}{\pi N r^4}, \quad \varphi = \frac{1}{5\pi} \approx 3,6^\circ.$$

**Задача 28.4.12** ([2], 546). Рамку чувствительного гальванометра, вращающуюся между полюсами магнита, подвешивают на тонкой платиновой нити. Найти максимальный допустимый вес рамки гальванометра, если предел прочности платины  $\approx 30$  кгс/мм<sup>2</sup>, а для подвеса использована нить диаметром в 4 мкм.

$$\text{Ответ: } 0,4 \text{ гс.}$$

**Задача 28.4.13** ([3], 1.357). Установить связь между крутящим моментом  $N$  и углом закручивания  $\Delta\varphi$  для:

а) трубы, у которой толщина стенок  $\Delta r$  значительно меньше радиуса трубы;

б) сплошного стержня круглого сечения.

Их длина  $l$ , радиус  $r$  и модуль сдвига  $G$  известны.

$$\text{Ответ: : а) } \varphi = \frac{lN}{2\pi r^3 \Delta r G}, \text{ б) } \varphi = \frac{2lN}{\pi r^4 G}.$$

**Задача 28.4.14** ([3], 1.358). Вычислить момент сил  $N$ , которые вызывают закручивание стальной трубы длины  $l = 3,0$  м на угол  $\varphi = 2,0^\circ$  вокруг ее оси, если внутренний и внешний диаметры трубы равны  $d_1 = 30$  мм и  $d_2 = 50$  мм.

$$\text{Ответ: } N = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)G\varphi}{32l} = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

**Задача 28.4.15** ([3], 1.360) Однородное кольцо массы  $m$ , имеющее внешний радиус  $r_2$ , плотно насажено на вал радиуса  $r_1$ . Вал вращают с постоянным угловым ускорением  $\beta$  вокруг его оси. Найти момент упругих сил деформации сдвига в кольце в зависимости от расстояния  $r$  до оси вращения.

$$\text{Ответ: } N = \frac{\beta m(r_2^4 - r_1^4)}{2(r_2^2 - r_1^2)}.$$

#### *Деформации изгиба*

**Задача 28.4.16** ([2], 538). Коромысло весов имеет прямоугольное сечение со сторонами  $a = 8$  мм (горизонтальная) и  $b = 10$  мм (вертикальная). Длина коромысла  $l = 250$  мм. Какова наибольшая стрела прогиба коромысла  $\lambda$ , если весы рассчитаны на максимальную нагрузку  $P = 500$  гс, а модуль Юнга материала коромысла равен  $15000$  кгс/мм<sup>2</sup>?

$$\text{Ответ: } \lambda = \frac{Pl^3}{2ab^3E} \approx 0,03 \text{ мм}.$$

**Задача 28.4.17** ([2], 539). Деревянная балка длины  $l = 4$  м и квадратного сечения со стороной  $a = 40$  см покоится своими концами на двух опорах и несет посередине груз  $P = 2$  тс. Как велика стрела прогиба  $\lambda$ , если модуль Юнга данного сорта дерева равен  $1000$  кгс/мм<sup>2</sup>?

$$\text{Ответ: } \lambda = \frac{Pl^3}{4a^4E} \approx 1,25 \text{ мм}.$$

**Задача 28.4.18** ([2], 540). Медная трубка, внешний и внутренний диаметры которой  $D = 20$  мм и  $d = 10$  мм, концами опирается на подставки, расстояние между которыми  $l = 400$  мм. Посередине

трубка несет груз  $P = 90$  кгс. Модуль Юнга для меди  $E = 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>. Определить стрелу прогиба  $\lambda$  трубки посередине между опорами.

*Ответ:* Так как момент инерции сечения трубки

$$I = \pi(D^4 - d^4)/64, \text{ то } \lambda = \frac{4Pl^3}{3\pi(D^4 - d^4)E} \approx 1,6 \text{ мм.}$$

**Задача 28.4.19** ([2], 541). Круглый металлический стержень радиуса  $R = 10$  мм закреплен одним концом в горизонтальном положении, а на другом его конце висит груз  $P = 1$  кгс. Длина стержня  $l = 1$  м. Стержень под влиянием груза прогибается, стрела прогиба  $\lambda = 4$  мм. Чему равен модуль Юнга  $E$  материала стержня?

*Ответ:*  $\lambda = \frac{4Pl^3}{3\pi R^4 E} \approx 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup> (см. момент инерции в ответе предыдущей задачи).

## ГЛАВА 26

## СТАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

## 26.1. Теоретический материал

**Давление** в любой точке **покоящейся жидкости или газа**  $p$  – физическая величина, равная отношению модуля силы  $dF$ , перпендикулярно действующей на физически бесконечно малый элемент поверхности со стороны окружающей жидкости или газа, к площади  $dS$  этого элемента поверхности:

$$p = \frac{dF}{dS}, [p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

**Закон Паскаля** – давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и одинаково передается по всему объему покоящейся жидкости.

**Давление в жидкости и газе в поле внешних потенциальных сил** с объемной плотностью  $f(\mathbf{r})$ :

$$\text{grad } p(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r}),$$

$$p(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Здесь  $U(\mathbf{r})$  – потенциальная энергия единицы объема жидкости (газа) во внешнем поле (потенциал поля  $f(\mathbf{r})$ ),  $\text{const}$  – постоянная величина, определяемая из условия нормировки потенциальной энергии.

**Сила Архимеда** – результирующая всех сил давления, действующих на поверхность тела, погруженного в жидкость (газ).

**Закон Архимеда** – сила Архимеда, действующая на тело, погруженное в жидкость (газ), равна весу вытесненной телом жидкости (газа).

**Условия устойчивого плавания тел:**

– центр тяжести тела, полностью погруженного в жидкость должен быть ниже центра масс вытесненной телом жидкости.

– центр тяжести тела, плавающего на поверхности жидкости (корабля), должен быть ниже его метацентра. Метацентр корабля – центр кривизны кривой, проходящей через центры объемов погруженных частей корпуса корабля.

**Силы вязкого трения** – силы трения, действующие между движущимися слоями жидкости (газа).

**Закон вязкого трения Ньютона** – поверхностная плотность  $\sigma_\eta$  сил вязкого трения, действующих на движущийся слой жидкости (газа), пропорциональна величине градиента скорости  $u(\mathbf{r})$  относительного движения слоев и направлена в противоположную сторону скорости движения слоя относительно соседних слоев:

$$\sigma_\eta = -\eta(\mathbf{n} \operatorname{grad} u(\mathbf{r})) = -\eta \frac{du(\mathbf{r})}{dn}.$$

Здесь  $\eta$  – коэффициент вязкого трения (вязкости),  $[\eta] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$ ;  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности слоя.

**Идеальная жидкость** – несжимаемая жидкость, в которой отсутствует вязкое трение.

**Стационарным** называется течение жидкости (газа), при котором поле скоростей ее частиц постоянно:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

**Линии тока** – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости движения частицы жидкости (газа).

**Трубка тока** – трубка, боковая поверхность которой образована линиями тока.

Линии и трубки тока нигде не пересекаются, поскольку в произвольной точке пространства существует лишь одна скорость движения частицы жидкости (газа).

**Условие стационарного течения жидкости и газа** – масса  $Q$  жидкости (газа), проходящая в единицу времени через поперечное сечение трубки тока, одинакова для всех сечений:

$$Q = \rho S v = \text{const},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения трубки тока,  $v$  – скорость частиц жидкости в сечении трубки.

**Условие несжимаемости** – плотность жидкости постоянна во всех ее точках:

$$\rho(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

**Условие стационарного течения несжимаемой жидкости** – объем  $V$  несжимаемой жидкости, проходящей в единицу времени через поперечное сечение трубки тока, одинаков для всех сечений:

$$V = S v = \text{const}.$$

Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения трубки тока,  $v$  – скорость частиц жидкости в сечении трубки.

**Уравнение Бернулли** – в случае стационарного течения невязкой несжимаемой (идеальной) жидкости вдоль произвольной трубки тока:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $p$  – (статическое) давление жидкости,  $v$  – скорость частиц жидкости,  $h$  – высота сечения трубки тока.

**Динамическое давление жидкости (газа)** равно

$$P_d = \frac{\rho v^2}{2}.$$

## 26.2. Основные типы задач и методы их решения

Гидростатические задачи решаются с использованием законов динамики (законы Ньютона, уравнение моментов), закона Архимеда, а также законов сохранения и изменения механической энергии. При решении задачи динамическим методом следует придерживаться схемы решения задач, изложенной в Гл. 2 и Гл. 15. При использовании в процессе решения задачи законов сохранения или изменения механической энергии рекомендуется следовать схеме решения задач, предложенной в Гл. 7. При решении гидродинамических задач систему уравнений необходимо дополнить уравнением Бернулли.

В любом случае при решении задачи необходимо последовательно реализовать следующие три основных этапа.

**I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

**II. Записать полную систему уравнений для искомым величин.**

**III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

### 26.3. Примеры решения задач

**Задача 26.3.1.** Сосуд кубической формы, наполовину заполненный жидкостью плотностью  $\rho$ , движется с горизонтальным ускорением  $a$ , направленным вдоль ребра куба (см. рис. 26.1). Определить силу  $F$ , действующую заднюю грань куба и точку ее приложения. Длина ребра куба равна  $l$ . Атмосферным давлением пренебречь.

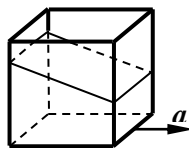


Рис. 26.1. Сосуд с жидкостью, движущийся с ускорением.

#### Решение

I. Задачу решаем в инерциальной лабораторной системе отсчета, оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат которой направим горизонтально и вертикально вверх соответственно (см. рис. 26.2). Начало отсчета по оси  $Y$  совместим с уровнем дна сосуда. Для определения формы поверхности жидкости и зависимости давления от глубины выделим элемент объема жидкости в виде наклонного параллелепипеда с длиной вертикального ребра  $h$  и верхним основанием, совпадающим со свободной поверхностью жидкости (рис. 26.2). Жидкость считаем несжимаемой, силами вязкого трения пренебрегаем. При движении сосуда на любой элемент объема жидкости массой  $\Delta m$  действуют сила тяжести  $\Delta mg$  и сила нормального давления со стороны жидкости  $f$  (см. рис. 26.2).

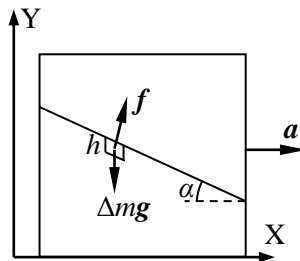


Рис. 26.2. Силы, действующие на элемент объема жидкости.

II. Запишем уравнение движения выделенного объема жидкости в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  выбранной системы координат:

$$\Delta m a = f \sin \alpha, \quad (26.1)$$

$$0 = f \cos \alpha - \Delta m g, \quad (26.2)$$

где  $\alpha$  – угол между поверхностью жидкости и осью  $X$ .

Масса выделенного объема жидкости равна:

$$\Delta m = \rho h s \cos \alpha. \quad (26.3)$$

Сила нормального давления жидкости определяет давление на глубине  $h$ :

$$f = ps. \quad (26.4)$$

Система уравнений (26.1) – (26.4) определяет угол наклона свободной поверхности жидкости и давление на глубине  $h$  от поверхности:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}, \quad (26.5)$$

$$p = \rho gh. \quad (26.6)$$

Давление как функция координаты  $y$  в соответствии с (26.6) определяется выражением:

$$p(y) = \rho g(H - y). \quad (26.7)$$

Здесь  $H$  – высота уровня жидкости вблизи задней стенки сосуда, равная

$$H = \frac{l}{2}(1 + \operatorname{tg} \alpha). \quad (26.8)$$

Сила, действующая со стороны жидкости на участок задней стенки сосуда площадью  $l dy$  равна

$$dF = p(y)l dy. \quad (26.9)$$

Момент силы  $dF$  относительно горизонтальной оси с координатой  $y = y_0$  равен:

$$dM = (y - y_0)dF. \quad (26.10)$$

Суммарный момент сил давления жидкости на заднюю стенку относительно указанной оси найдем, интегрируя выражение (26.10):

$$M = \int_0^H (y - y_0)dF. \quad (26.11)$$

Точку приложения равнодействующей сил давления жидкости на заднюю стенку найдем из условия равенства нулю суммы моментов этих сил относительно любой оси, проходящей через данную точку:

$$M = 0. \quad (26.12)$$

III. Интегрируя уравнение (26.9) с учетом (26.5) – (26.8), получаем искомую силу давления жидкости на заднюю грань куба при его движении с горизонтальным ускорением:

$$F = \int_0^H \rho g(H - y)l dy = \frac{1}{2} \rho glH^2 = \frac{1}{8} \rho gl^3 \left(1 + \frac{a}{g}\right)^2. \quad (26.13)$$



Система уравнений (26.7) – (26.12) легко преобразуется к уравнению относительно  $y_0$ :

$$\int_0^H (y - y_0) \rho g (H - y) dy = 0. \quad (26.14)$$

Интегрируя (26.14) с учетом (26.8), получаем искомую координату точки приложения равнодействующей сил давления жидкости на заднюю грань куба:

$$y_0 = \frac{H}{3} = \frac{l}{6} \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

$$\text{Ответ: } F = \frac{1}{8} \rho g l^3 \left( 1 + \frac{a}{g} \right)^2, \quad y_0 = \frac{l}{6} \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

**Задача 26.3.2.** Верхний конец однородного тонкого стержня массой  $m$  и плотностью  $\rho$  закреплен на шарнире, а другой погружен в жидкость плотностью  $\rho_0$ , при этом стержень отклоняется на некоторый угол от вертикали. Найти силу, с которой стержень действует на шарнир в положении равновесия.

### Решение

I. На стержень в положении равновесия действуют три силы: сила тяжести  $mg$ , сила Архимеда  $F_A$  и сила реакции шарнира  $N$  (см. рис. 26.3). Поскольку первые две силы – вертикальные, то и сила реакции со стороны шарнирного подвеса  $N$  тоже должна быть вертикальной. Искомая сила, с которой стержень действует на шарнир, связана с силой  $N$  третьим законом Ньютона. Будем считать стержень однородным абсолютно твердым телом. Силой трения в подвесе и силой сопротивления воздуха пренебрегаем. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета.

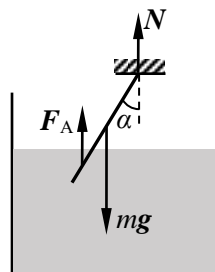


Рис. 26.3. Силы, действующие на стержень.

II. В положении равновесия сумма внешних сил, действующих на стержень, равна нулю:

$$F_A + N - mg = 0. \quad (26.15)$$

Сила Архимеда  $F_A$  определяется выражением:

$$F_A = \rho_0 S L_{\text{погр}} g, \quad (26.16)$$

где  $L_{\text{погр}}$  – длина погруженной части стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,  $L$  – его длина.

Запишем уравнение моментов для стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 26.3):

$$F_A \left( L - \frac{L_{\text{погр}}}{2} \right) \sin \alpha - mg \frac{L}{2} \sin \alpha = 0. \quad (26.17)$$

Здесь  $\alpha$  – угол отклонения стержня от вертикали в положении равновесия.

Дополним записанную систему уравнений выражением для площади поперечного сечения стержня:

$$S = \frac{m}{\rho L}. \quad (26.18)$$

III. Подстановка формулы (26.18) в (26.16), дает следующее выражение для силы Архимеда:

$$F_A = mg \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{L_{\text{погр}}}{L}. \quad (26.19)$$

Подставляя (26.19) в (26.17), получаем квадратное уравнение для отношения длины погруженной части стержня к его полной длине:

$$\left( \frac{L_{\text{погр}}}{L} \right)^2 - 2 \frac{L_{\text{погр}}}{L} + \frac{\rho}{\rho_0} = 0. \quad (26.20)$$

Решение уравнения (26.19) имеет вид:

$$\frac{L_{\text{погр}}}{L} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (26.21)$$

Преобразуя систему уравнений (26.17), (26.19) и (26.21), получаем искомое выражение для силы реакции шарнира:

$$N = mg \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \right).$$

$$\text{Ответ: } N = mg \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \right).$$

**Задача 26.3.3.** Тонкую деревянную палочку длиной  $L$  и площадь сечения  $S$  подвесили за один из концов на нити, а другой конец опустили в воду. При этом палочка оказалась наклоненной к горизонтали под углом  $\alpha$ , а длина ее части, погруженной в воду, составила половину длины палочки. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить палочку из воды? Плотность воды  $\rho_0$ .

### Решение

I. В соответствии с условием задачи необходимо определить минимальную работу, которую совершит сила натяжения нити по подъему палочки. Будем считать, что подъем осуществляется медленно, и можно пренебречь кинетической энергией палочки в процессе подъема. На палочку, частично погруженную в жидкость, действуют сила тяжести  $mg$ , сила Архимеда  $F_A$  и сила натяжения нити  $T$ . В начальном положении палочка наклонена под некоторым углом к горизонтали. В процессе подъема угол будет изменяться и в некоторый момент времени палочка примет вертикальное положение. Палочку считаем однородным абсолютно твердым стержнем, силами трения пренебрегаем.

II, III. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через верхний конец палочки перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 26.4.):

$$F_A \left( L - \frac{L_{\text{погр}}}{2} \right) \cos \alpha - mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 0. \quad (26.22)$$

Здесь  $L_{\text{погр}}$  – длина погруженной части палочки.

Сила Архимеда определяется выражением:

$$F_A = \rho_0 S L_{\text{погр}} g. \quad (26.23)$$

Подставляя (26.23) в (26.22), получаем:

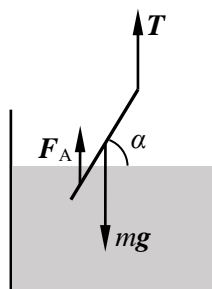


Рис. 26.4. Силы, действующие на палочку.

$$m \frac{L}{2} \cos \alpha - \rho_0 L_{\text{погр}} S g \left( L - \frac{L_{\text{погр}}}{2} \right) \cos \alpha = 0. \quad (26.24)$$

В случае если  $\cos \alpha \neq 0$ , в результате несложных преобразований (26.24) получаем квадратное уравнение для длины погруженной части палочки:

$$L_{\text{погр}}^2 - 2LL_{\text{погр}} + \frac{m}{\rho_0 S} L = 0. \quad (26.25)$$

Из полученного уравнения следует, что длина погруженной части палочки  $L_{\text{погр}}$  не зависит от угла  $\alpha$  и не изменяется до тех пор, пока он не станет равным  $\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, сила Архимеда

постоянна, пока палочка не примет вертикальное положение. Значение силы Архимеда на первом этапе определяется условием задачи  $L_{\text{погр}} = \frac{L}{2}$ :

$$F_A = \rho_0 g S \frac{L}{2}. \quad (26.26)$$

Подставляя заданную в условии задачи длину погруженной части  $L_{\text{погр}} = \frac{L}{2}$  в выражение (26.25), получаем значение массы палочки:

$$m = \frac{3}{4} \rho_0 S L. \quad (26.27)$$

Поскольку подъем осуществляется медленно, можно считать, что сумма сил, приложенных к палочке, равна нулю:

$$T + F_A - mg = 0. \quad (26.28)$$

Подставляя (26.26) и (26.27) в (26.28), получаем значение силы натяжения нити на первом этапе подъема палочки:

$$T_1 = \frac{1}{4} \rho_0 g S L.$$

Работа силы натяжения нити на этапе от начала подъема до момента, когда палочка примет вертикальное положение равна:

$$A_1 = T \frac{L}{2} (1 - \sin \alpha) = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (1 - \sin \alpha). \quad (26.29)$$

При записи (26.29) учтено, что точка приложения силы натяжения нити переместилась на первом этапе подъема на высоту  $\frac{L}{2}(1 - \sin \alpha)$ .

При дальнейшем подъеме сила Архимеда будет уменьшаться, а сила натяжения нити – возрастать. Подставляя (26.26) и (26.27) в (26.28), получаем значение силы натяжения нити на втором этапе подъема палочки:

$$T_2(x) = \frac{3}{4} \rho_0 g S L - \rho_0 g S (L - x), \quad (26.30)$$

где  $x$  – длина выступающей над поверхностью жидкости части палочки, изменяющаяся от  $\frac{L}{2}$  до  $L$ .

Работа силы натяжения нити на втором этапе подъема палочки равна:

$$A_2 = \int_{L/2}^L T_2(x) dx. \quad (26.31)$$

Подставляя выражение для силы натяжения нити (26.30) в (26.31), получаем:

$$A_2 = \int_{L/2}^L \left( \frac{3}{4} \rho_0 g S L - \rho_0 g S (L - x) \right) dx = \frac{1}{4} \rho_0 g S L^2. \quad (26.32)$$

Полную работу по подъему палочки находим, суммируя (26.29) и (26.32):

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (3 - \sin \alpha).$$

**Ответ:**  $A = \frac{1}{8} \rho_0 g S L^2 (3 - \sin \alpha)$ .

**Задача 26.3.4.** На шероховатом горизонтальном дне бочки, наполненной водой, лежит диск толщиной  $d$ , радиусом  $R$ , изготовленный из материала с плотностью  $\rho$ . В бочку вертикально опустили тонкостенную трубку радиусом  $r$ , в которую вставили поршень. Нижняя плоскость поршня совпадает с нижним торцом трубки. Трубку плотно прижали к верхней плоскости диска так, что ее ось оказалась смещенной относительно оси диска на расстояние  $l$ . Затем поршень подняли вверх, зафиксировали и стали медленно под-

нимать трубку. На какой минимальной глубине  $h$  будет находиться верхняя плоскость диска, когда он оторвется от трубки, если до момента отрыва вода не просачивалась в трубку? Атмосферное давление считать равным  $p_0$ .

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета. Считаем, что подъем диска осуществляется настолько медленно, что в любой момент времени диск находится в равновесии. Пренебрегаем силами сопротивления со стороны жидкости, которую считаем вязкой и несжимаемой. В процессе подъема на диск действуют сила тяжести  $mg$ , равнодействующая сил давления жидкости  $F$  и сила реакции трубки  $N$ .

В момент отрыва диска трубка перестает соприкасаться с диском вдоль всей своей нижней поверхности. Сила реакции трубки будет приложена в точке А, наиболее удаленной от центра тяжести диска (см. рис. 26.5).

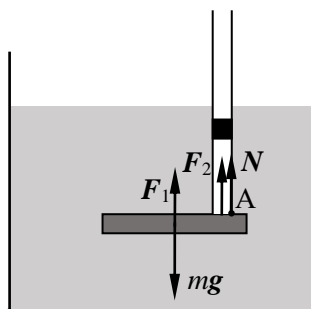


Рис. 26.5. Силы, действующие на диск.

II, III. В соответствии с условием задачи равнодействующая сил давления не удовлетворяет закону Архимеда, поскольку на часть верхней поверхности диска, находящуюся внутри трубки не действует сила со стороны жидкости. Сила, действующая на диск со стороны жидкости, равна разности сил, действующих на нижнюю и верхнюю поверхности диска. Запишем выражение для сил давления жидкости в момент времени, когда верхняя поверхность диска находилась на глубине  $h$ :

$$F = (p_0 + \rho_0 g(h + d))\pi R^2 - (p_0 + \rho_0 gh)(\pi R^2 - \pi r^2). \quad (26.33)$$

Преобразуя выражение (26.33), получаем:

$$F = \rho_0 g d \pi R^2 + (p_0 + \rho_0 g h) \pi r^2.$$

Силу  $F$  можно представить, как сумму двух слагаемых:

$$F_1 = \rho_0 g d \pi R^2, \quad (26.34)$$

$$F_2 = (p_0 + \rho_0 g h) \pi r^2. \quad (26.35)$$

Сила  $F_1$  представляет собой обычную силу Архимеда с точкой приложения в центре диска. Сила  $F_2$  обусловлена отсутствием сил давления жидкости на участок верхней поверхности диска, ограниченный трубкой. В силу симметрии линия действия этой силы совпадает с осью трубки. Запишем уравнение моментов (в момент отрыва диска от трубки) относительно оси, проходящей через точку А (см. рис. 26.5) перпендикулярно плоскости чертежа:

$$-mg(l+r) + F_1(l+r) + F_2r = 0. \quad (26.36)$$

При записи уравнения (26.36) учтено, что момент силы реакции трубки относительно указанной оси равен нулю.

Выразим массу диска через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \rho d \pi R^2. \quad (26.37)$$

Подставляя (26.34), (26.35) и (26.37) в (26.36), получаем искомое расстояние от верхней поверхности диска до поверхности жидкости в момент отрыва трубки:

$$h = \left(1 + \frac{l}{r}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \frac{R^2 d}{r^2} - \frac{p_0}{\rho_0 g}.$$

$$\text{Ответ: } h = \left(1 + \frac{l}{r}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \frac{R^2 d}{r^2} - \frac{p_0}{\rho_0 g}.$$

**Задача 26.3.5.** В дне горизонтально расположенного широкого цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью имеется небольшое круглое отверстие радиусом  $R_1$ , а над ним, на расстоянии  $b$ , соосно закреплен круглый закрытый цилиндр радиусом  $R_2 > R_1$  (рис. 26.6). Зазор между цилиндром и дном сосуда очень мал. Найти скорость, с которой жидкость вытекает из сосуда и давление жидкости в зазоре как функцию расстояния  $r$  от оси отверстия и цилиндра, если высота уровня жидкости равна  $h$ , а ее плотность —  $\rho$ .

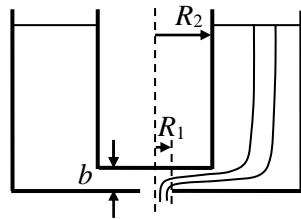


Рис. 26.6. Геометрические параметры системы и изображение трубки тока.

### Решение

I. Жидкость считаем невязкой и несжимаемой. На любой элемент объема жидкости действуют силы давления соседних слоев жидкости и сила тяжести. В рассматриваемом случае, при значительной разнице в размерах верхней свободной поверхности жидкости и отверстия, будем считать скорость движения верхней границы жидкости равной нулю. Течение жидкости считаем стационарным, при котором скорость жидкости в фиксированной точке пространства не изменяется с течением времени. Для анализа течения жидкости удобно представить ее как совокупность трубок тока, стенки которых образованы линиями тока, то есть кривыми, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частиц жидкости  $v$  в этих точках (см. рис. 26.6).

II, III. Запишем уравнение движения элемента трубки тока с границами, перпендикулярными оси трубки, находящимися на малом расстоянии  $dl$ , под действием силы тяжести и сил давления жидкости  $F_1$  и  $F_2$ , действующих в верхнем и нижнем сечениях рассматриваемого элемента:

$$m \frac{dv}{dt} = F_1 + F_2 + mg, \quad (26.38)$$

где  $m$  – масса выделенного элемента жидкости.

В проекции на ось трубки тока уравнение (26.38) принимает вид:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dl} + \rho g \cos \alpha, \quad (26.39)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\alpha$  – угол между осью трубки тока и вертикалью.

При записи (26.39) учтено, что разность сил давления равна:

$$F_1 - F_2 = Sp - S \left( p + \frac{dp}{dl} dl \right). \quad (26.40)$$

Здесь  $S$  – площадь сечений трубки тока, ограничивающих выделенный элемент.

При стационарном течении жидкости все величины, характеризующие поток, являются функциями только координаты  $l$  вдоль оси трубки тока:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dl} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (26.41)$$



Изменение вертикальной координаты рассматриваемого элемента при его смещении на  $dl$  вдоль оси трубки тока равно:

$$\frac{dh}{dl} = -\cos\alpha. \quad (26.42)$$

Подставляя (26.39) и (26.40) в (26.38), с учетом (26.42), получаем:

$$\frac{d}{dl} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gh \right) = 0. \quad (26.43)$$

Следовательно, величина, заключенная в скобки в выражении (26.43) сохраняется при смещении выделенного элемента жидкости вдоль трубки тока:

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const}. \quad (26.44)$$

Выражение (26.44) называется уравнением Бернулли.

Для стационарного потока масса несжимаемой жидкости, проходящая в единицу времени через поперечное сечение трубки тока, одинакова для всех сечений:

$$Q = \rho S v = \text{const}. \quad (26.45)$$

Уравнение Бернулли (26.44) и условие постоянства потока (26.45), записанные для трех сечений трубок тока (сечения в плоскости верхней свободной поверхности, сечения в зазоре и в плоскости отверстия в дне сосуда) позволяют решить поставленную задачу.

Запишем уравнение Бернулли (26.44) для сечения трубки тока, совпадающего со свободной поверхностью жидкости, находящейся на высоте  $h$  от дна сосуда, и сечения в плоскости отверстия:

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + p_0 + \rho gh = \rho \frac{v^2(R_1)}{2} + p_0. \quad (26.46)$$

Здесь  $p_0$  – атмосферное давление;  $v_0$  – скорость жидкости на уровне верхней свободной поверхности.

Запишем также условие постоянства потока несжимаемой жидкости (26.45) для указанных сечений трубки тока:

$$S_0 v_0 = S(R_1) v(R_1). \quad (26.47)$$

Здесь  $S_0$  – сечение трубки тока на уровне верхней свободной поверхности жидкости,  $S(R_1)$  – сечение трубки тока в плоскости отверстия в дне сосуда.

Подставляя  $v_0$  из (26.47) в (26.46), получаем выражение для скорости жидкости, вытекающей через отверстие в дне:

$$v^2(R_1) = \frac{2gh}{1 - \left(\frac{S(R_1)}{S_0}\right)^2} \approx 2gh. \quad (26.48)$$

Для нахождения давления жидкости в зазоре как функции расстояния  $r$  от оси отверстия и цилиндра запишем уравнение Бернулли для нижнего сечения трубки тока (на уровне отверстия в дне сосуда) и произвольного сечения в зазоре:

$$\rho \frac{v^2(R_1)}{2} + p_0 = \rho \frac{v^2(r)}{2} + p(r). \quad (26.49)$$

Объединяя все трубки тока в одну, получаем трубку тока, сечение которой при  $R_1 < r < R_2$  является боковой поверхностью цилиндра с площадью

$$S(r) = 2\pi r b, \quad (26.50)$$

где  $b$  – вертикальный размер зазора.

Запишем также уравнение (26.45) для указанных сечений:

$$S(r)v(r) = S(R_1)v(R_1). \quad (26.51)$$

Решая совместно систему уравнений (26.48) – (26.51), получаем искомую зависимость давления жидкости в зазоре как функцию расстояния  $r$  от оси отверстия и цилиндра:

$$p(r) = p_0 + \rho gh \left( 1 - \frac{R_1^4}{4r^2 b^2} \right).$$

Заметим, что полученное выражение для давления жидкости в зазоре справедливо при стационарном ламинарном течении жидкости. В данной задаче это допущение справедливо при  $R_1 \ll r \ll R_2$ . Вблизи границ с резким изменением формы сосуда задача не имеет простого аналитического решения.

**Ответ:**  $v(R_1) \approx \sqrt{2gh}$ ,  $p(r) = p_0 + \rho gh \left( 1 - \frac{R_1^4}{4r^2 b^2} \right)$ .

**Задача 26.3.6.** По трубке радиусом  $R$  течет стационарный поток жидкости плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\eta$ . Скорость течения жидкости зависит от расстояния  $r$  до оси трубки по закону  $v(r) = v_0(1 - r^2/R^2)$ . Найти объем жидкости, протекающей через

сечение трубки в единицу времени и разность давлений жидкости в точках, находящихся на расстоянии  $l$  вдоль оси трубки.

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной инерциальной системе отсчета. Жидкость считаем несжимаемой, силу вязкого трения, действующую на единицу площади поверхности, пропорциональной градиенту относительной скорости.

II. Рассмотрим бесконечно малый кольцевой элемент поперечного сечения потока жидкости, находящийся на расстоянии  $r$  от оси трубки. Площадь указанного элемента равна

$$dS = 2\pi r dr. \quad (26.52)$$

Объем жидкости, протекающий через кольцевой элемент сечения в единицу времени равен:

$$dQ = \frac{v(r) dt dS}{dt}. \quad (26.53)$$

Искомый объем жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени, находим, интегрируя (26.53) по сечению трубки.

По условию задачи скорость жидкости зависит от расстояния  $r$  от оси трубки по закону:

$$v(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (26.54)$$

Рассмотрим цилиндрический объем жидкости радиусом  $R$ , длиной  $l$ . Жидкость движется вдоль трубки под действием разности сил давления  $p_1 S$  и  $p_2 S$  на концах выбранного элемента и сил вязкого трения  $F_{\text{тр}}$ . При стационарном течении жидкости сумма внешних сил, действующих на выбранный элемент объема жидкости, равна нулю:

$$(p_1 - p_2)S - F_{\text{тр}} = 0. \quad (26.55)$$

Сила вязкого трения, действующая на единицу площади, пропорциональна градиенту относительной скорости:

$$F_{\text{тр}} = -2\pi R l \eta \frac{dv}{dr}. \quad (26.56)$$

III. Решая записанную систему уравнений (26.52) – (26.56), получаем искомые выражения для объема жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени,

$$Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{1}{2} v_0 S$$

и разности давлений на концах трубки

$$p_1 - p_2 = \frac{4l\eta v_0}{R^2}.$$

**Ответ:**  $Q = \frac{1}{2} v_0 S$ ,  $p_1 - p_2 = \frac{4l\eta v_0}{R^2}$ .

**Задача 26.3.7.** Вертикально расположенный цилиндрический сосуд радиусом  $R$ , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда с внутренней стороны на шарнире прикреплена тонкая однородная палочка длиной  $l$ . Во время вращения палочка полностью погружена в жидкость и образует со стенкой сосуда угол  $\alpha$  (см. рис. 26.7). Найдите угловую скорость вращения сосуда.

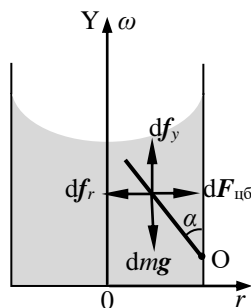


Рис. 26.7. Силы, действующие на бесконечно малый фрагмент палочки.

### Решение

I. Задачу решаем в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся цилиндром. В этой системе отсчета на палочку действуют силы тяжести, давления жидкости, реакции шарнира и центробежная сила инерции. Направление оси  $r$  цилиндрической системы координат показано на рис. 26.7. Палочка покоится в выбранной неинерциальной системе отсчета под действием указанных сил. Палочку считаем однородным абсолютно твердым телом, жидкость – невязкой и несжимаемой. Силами трения пренебрегаем.

II, III. Запишем уравнение моментов для палочки относительно оси, проходящей через точку шарнирного крепления перпендикулярно плоскости чертежа (точка  $O$  на рис. 26.7).

$$M_{цб} + M_{f_y} + M_{f_r} + M_{mg} = 0. \quad (26.57)$$

Здесь  $M_{цб}$  – момент центробежной силы инерции относительно рассматриваемой оси,  $M_{f_y}$  – момент вертикальной составляющей силы давления жидкости,  $M_{f_r}$  – момент ее горизонтальной составляющей,  $M_{mg}$  – момент силы тяжести. Момент силы реакции шарнира относительно указанной оси равен нулю.

Точки приложения силы тяжести и вертикальной составляющей силы давления жидкости совпадают с центром палочки. Следовательно, моменты указанных сил равны:

$$M_{f_y} = -\rho g V \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad (26.58)$$

$$M_{mg} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \rho_0 V g \frac{l}{2} \sin \alpha. \quad (26.59)$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости  $\rho_0$  – плотность материала палочки,  $m$  – масса палочки,  $V$  – ее объем.

Для вычисления моментов центробежной силы инерции и горизонтальной составляющей силы давления жидкости рассмотрим физически бесконечно малый фрагмент палочки длиной  $dl$ , находящийся на расстоянии  $x$  от оси вращения. Центробежная сила инерции, действующая на этот фрагмент, равна:

$$dF_{цб} = dm \omega^2 r = \frac{m}{l} dl \omega^2 r = \frac{m}{l} \cdot \frac{dr}{\sin \alpha} \omega^2 r, \quad (26.60)$$

а ее момент относительно оси, проходящей через точку  $O$ , определяется выражением:

$$dM_{цб} = -(R-r) \operatorname{ctg} \alpha dF_{цб} = -(R-r) \operatorname{ctg} \alpha \frac{m}{l} \cdot \frac{dr}{\sin \alpha} \omega^2 r. \quad (26.61)$$

Полный момент центробежной силы инерции получаем, интегрируя выражение (26.61):

$$M_{цб} = - \int_{R-l \sin \alpha}^R (R-r) \operatorname{ctg} \alpha \frac{m}{l} \cdot \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} dr. \quad (26.62)$$

Определим горизонтальную составляющую силы давления жидкости. Относительно инерциальной лабораторной системы отсчета любой элемент объема жидкости в установившемся режиме вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси цилиндра под действием горизонтальной составляющей сил давления жидкости. Эта сила сообщает этому элементу центростремительное ускорение.

Следовательно, горизонтальная составляющая сил давления жидкости на расстоянии  $r$  от оси вращения равна:

$$df_r = \rho \omega^2 r S dl = \rho \omega^2 r S \frac{dr}{\sin \alpha}. \quad (26.63)$$

Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения палочки.

Полный момент этой силы получаем, интегрируя выражение (26.63):

$$M_{f_r} = \int_{R-l \sin \alpha}^R (R-r) \operatorname{ctg} \alpha S \rho \frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} dr. \quad (26.64)$$

Подставляя (26.64), (26.62), (26.59) и (26.58) в (26.57), получаем после несложных преобразований следующее выражение:

$$\int_{R-l \sin \alpha}^R (R-r) r \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} (\rho_0 - \rho) S \omega^2 dr = \frac{(\rho_0 - \rho) S l^2}{2} g \sin \alpha. \quad (26.65)$$

Из выражения (26.65) получаем искомое значение угловой скорости:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\operatorname{ctg} \alpha (3R - 2l \sin \alpha)}}.$$

Заметим, что поставленная задача имеет решение только при

$$l < \frac{3R}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{3g}{\operatorname{ctg} \alpha (3R - 2l \sin \alpha)}} \text{ при } l < \frac{3R}{2 \sin \alpha}.$$

**Задача 26.8.** Цилиндрический бак с диаметром основания, равным  $D = 25$  см, и высотой  $H = 4$  м, стоящий на горизонтальной поверхности, наполнили доверху водой. Вблизи дна бака имеется отверстие, перекрытое краном, в которое вставлена короткая гладкая трубка с внутренним диаметром  $d = 2,5$  см. Трубка ориентирована вверх под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонтальной поверхности. Определить, скорость, с которой движется мокрое пятно, образующееся на поверхности, через  $\tau = 10$  с после открытия крана. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

### Решение

I. Задачу решаем в лабораторной системе отсчета. Воду считаем невязкой несжимаемой жидкостью. Пренебрегаем силой сопротивления воздуха. Искомая скорость движения мокрого пятна определяется скоростью изменения дальности полета капель жидкости. Изменение их дальности полета капель жидкости определяется их различной начальной скоростью при истекании воды из бака.

II. Для определения начальной скорости капль запишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (26.66)$$

Здесь  $v_0$  – скорость верхнего слоя жидкости в баке,  $v_1$  – скорость, с которой вытекает жидкость из бака,  $h$  – высота уровня жидкости в баке,  $\rho$  – плотность жидкости.

Условие несжимаемости жидкости имеет вид:

$$v_0 s_0 dt = v_1 s_1 dt, \quad (26.67)$$

где  $s_0$  – площадь дна сосуда,  $s_1$  – площадь внутреннего сечения трубки.

Скорость верхнего слоя жидкости в баке связана с высотой уровня жидкости следующим соотношением:

$$\frac{dh}{dt} = -v_0. \quad (26.68)$$

Время полета  $t_{\text{пол}}$  и дальность полета  $L_{\text{пол}}$  капли жидкости определяются с помощью известных кинематических соотношений:

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_1 \sin \alpha}{g}, \quad (26.69)$$

$$L_{\text{пол}} = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (26.70)$$

Обозначим момент времени приземления капли:

$$\theta = t + t_{\text{пол}}. \quad (26.71)$$

Тогда искомая скорость пятна равна:

$$v = \frac{dL_{\text{пол}}}{d\theta} = \frac{2 \sin 2\alpha}{g} v_1 \frac{dv_1}{d\theta}. \quad (26.72)$$

III. Получена полная система уравнений (26.66) – (26.72) для определения скорости движения мокрого пятна.

Исключая из уравнений (26.66) и (26.67) скорость движения верхнего слоя жидкости, получим выражение для скорости истекания жидкости из бака:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2}}. \quad (26.73)$$

Из соотношений (26.67), (26.68) и (26.73) получим выражение для изменения высоты уровня жидкости в баке за бесконечно малый промежуток времени:

$$dh = -\frac{s_1}{s_0} \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2}} dt. \quad (26.74)$$

Решаем дифференциальное уравнение (26.74) методом разделения переменных:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s_1}{s_0} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2}} dt. \quad (26.75)$$

Интегрируя уравнение (26.75) с учетом начальных условий, получим:

$$\sqrt{h} = \sqrt{H_0} - \frac{s_1}{2s_0} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2}} t = \sqrt{H_0} - kt, \quad (26.76)$$

где константа  $k$  равна:

$$k = \frac{s_1}{2s_0} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2}}, \quad (26.77)$$

Подставляя (26.76) в (26.73), получим зависимость скорости истекания воды из бака от времени:



$$v_1 = \frac{2s_0}{s_1} (k\sqrt{H_0} - k^2 t). \quad (26.78)$$

Время полета капли получим в результате подстановки выражения (26.78) в (26.69):

$$t_{\text{пол}} = \frac{2\sin\alpha}{g} \cdot \frac{2s_0}{s_1} (k\sqrt{H_0} - k^2 t). \quad (26.79)$$

В соответствии с (26.71) момент приземления капли определяется выражением:

$$\begin{aligned} \theta &= t + \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} (k\sqrt{H_0} - k^2 t) = \\ &= t \left( 1 - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2 \right) + \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k\sqrt{H_0}. \end{aligned} \quad (26.80)$$

Следовательно

$$t = \frac{\theta - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k\sqrt{H_0}}{1 - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2}. \quad (26.81)$$

Используя соотношения (26.70) и (26.72), определим скорость пятна:

$$v = \frac{\sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{dv_1^2}{d\theta} = \frac{2\sin 2\alpha}{g} v_1 \frac{dv_1}{d\theta}. \quad (26.82)$$

Подставив соотношение (26.81) в (26.78), определим скорость  $v_1$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2s_0}{s_1} \left( k\sqrt{H_0} - k^2 \frac{\theta - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k\sqrt{H_0}}{1 - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2} \right) = \\ &= \frac{2s_0}{s_1} \left( \frac{k\sqrt{H_0} - k^2 \theta}{1 - \frac{4\sin\alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2} \right). \end{aligned} \quad (26.83)$$

Определим производную  $\frac{dv_1}{d\theta}$ :

$$\frac{dv_1}{d\theta} = -\frac{2s_0}{s_1} \cdot \frac{k^2}{1 - \frac{4 \sin \alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2}. \quad (26.84)$$

Тогда искомая скорость пятна равна:

$$v = -\frac{8 \sin 2\alpha}{g} \left( \frac{s_0}{s_1} \right)^2 \cdot \frac{k^2 (k\sqrt{H_0} - k^2\theta)}{\left( 1 - \frac{4 \sin \alpha}{g} \cdot \frac{s_0}{s_1} k^2 \right)^2}. \quad (26.85)$$

Для упрощения записи полученных соотношений введем обозначение

$$\frac{s_1}{s_0} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 = n. \quad (26.86)$$

С учетом (26.86) выражение (26.77) принимает вид:

$$k = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}}, \quad (26.87)$$

Подставляя (26.87) в соотношение (26.85) получим выражение для искомой скорости пятна в момент времени  $\theta = \tau$ :

$$v = -\frac{2n \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \sin 2\alpha}{(1-n^2)} \cdot \frac{\left( \sqrt{H_0} - \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \tau \right)}{\left( 1 - \frac{2n \sin \alpha}{1-n^2} \right)^2}.$$

Подставляя численные значения, заданные в условии задачи, получаем:

$$v \approx -0.159 \text{ м/с.}$$

**Ответ:**

$$v = -\frac{2n \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \sin 2\alpha}{(1-n^2)} \cdot \frac{\left( \sqrt{H_0} - \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}} \tau \right)}{\left( 1 - \frac{2n \sin \alpha}{1-n^2} \right)^2} \approx -0.159 \text{ м/с.}$$

### 26.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 26.4.1** ([2], 663). На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня  $H$  (относительно поверхности стола). На какой высоте  $h$  (относительно поверхности стола) надо сделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды достигала поверхности стола на максимальном расстоянии от сосуда? Определить это расстояние.

*Ответ:*  $h = H/2$ ,  $x_{\text{max}} = H$ .

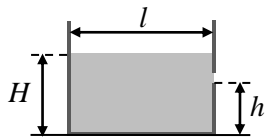
**Задача 26.4.2** ([2], 673). На тележке стоит цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью плотностью  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . Высота уровня поверхности жидкости в сосуде  $h = 1 \text{ м}$ . В сосуде с противоположных сторон по ходу тележки сделано два крана с отверстиями площадью  $s = 10 \text{ см}^2$  каждое, одно на высоте  $h_1 = 25 \text{ см}$  над дном сосуда, а другое на высоте  $h_2 = 50 \text{ см}$ . Какую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к тележке, чтобы она оставалась в покое при открытых кранах?

*Ответ:* Нужно приложить силу  $F = 2s\rho g(h_2 - h_1) = 5 \text{ Н}$ , действующую на тележку со стороны отверстия, расположенного выше.

**Задача 26.4.3** ([2], 687). Цилиндрический сосуд радиусом  $R$  с налитой в него идеальной жидкостью вращается вокруг своей вертикальной геометрической оси с угловой скоростью  $\omega$ . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости.

*Ответ:*  $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$ .

**Задача 26.4.4** ([2], 689). В боковой стенке сосуда имеется отверстие, нижний край которого находится на высоте  $h$ . При каком горизонтальном ускорении сосуда налитая в него жидкость не будет выливаться из отверстия, если в покоем сосуде (при закрытом отверстии) жидкость была налита до высоты  $H$ ? Горизонтальный размер сосуда равен  $l$ .

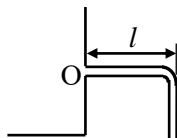


$$\text{Ответ: } a \leq \frac{2g(H-h)}{l}.$$

**Задача 26.4.5** ([3], 1.344). Какую работу нужно совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень, выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время  $t$ ? Объем воды в цилиндре равен  $V$ , плотность воды –  $\rho$ , площадь сечения отверстия –  $s$ , причем  $s$  значительно меньше площади поршня. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

$$\text{Ответ: } A = \frac{\rho V^2}{2s^2 t^2}.$$

**Задача 26.4.6** ([3], 1.351). Вода вытекает из большого бака по изогнутой под прямым углом трубке, внутренний радиус которой равен  $r = 0,5$  см. Длина горизонтальной части трубки  $l = 22$  см. Расход воды  $Q = 0,5$  л/с. Найти момент сил реакции воды на стенки этой трубки относительно точки  $O$  (см. рис.), обусловленный течением воды.



$$\text{Ответ: } M = \frac{\rho l Q^2}{\pi r^2}.$$

**Задача 26.4.7** ([3], 1.352). В боковой стенке широкого открытого бака вмонтирована суживающая трубка, через которую вытекает вода. Площадь сечения трубки уменьшается от  $S = 3$  см<sup>2</sup> до  $s = 1$  см<sup>2</sup>. Уровень воды в баке на  $h = 4,6$  м выше уровня в трубке. Пренебрегая вязкостью воды, найти горизонтальную составляющую силы, вырывающей трубку из бака.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\rho g h (S - s)^2}{S} = 6 \text{ Н}.$$

**Задача 26.4.8** ([3], 1.354). Тонкий горизонтальный диск радиусом  $R = 10$  см расположен в цилиндрической полости с маслом, вязкость которого  $\eta = 8$  мПа·с. Зазоры между диском и горизонтальными торцами полости одинаковы и равны  $h = 1$  мм. Найти мощность, которую развивают силы вязкости, действующие на

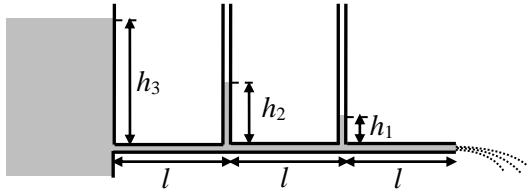
диск при вращении его с угловой скоростью  $\omega = 60$  рад/с. Краевыми эффектами пренебречь.

$$\text{Ответ: } P = \frac{\pi\eta\omega^2 R^4}{h} = 9 \text{ Вт}.$$

**Задача 26.4.9** ([3], 1.355). Длинный цилиндр радиусом  $R_1$  перемешают вдоль его оси со скоростью  $v_0$  внутри коаксиального цилиндра радиусом  $R_2$ . Пространство между цилиндрами заполнено вязкой жидкостью. Найти скорость жидкости в зависимости от расстояния  $r$  до оси цилиндров. Течение ламинарное.

$$\text{Ответ: } v = v_0 \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

**Задача 26.4.10** ([3], 1.358). Из широкого сосуда по трубке вытекает вязкая жидкость, плотность которой равна  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Найти скорость вытекающей жидкости, если  $h_1 = 10$  см,  $h_2 = 20$  см и  $h_3 = 35$  см (см. рис). Расстояния  $l$  одинаковы.



$$\text{Ответ: } v = \sqrt{2g((h_3 - h_2) - (h_2 - h_1))} = 1 \text{ м/с}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. М.: Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2010. – 368 с.
2. Сборник задач по общему курсу физики. В пяти книгах. Кн. I. Механика / Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А.; Под ред. И.А. Яковлева. – М.: ФИЗМАТЛИТ; «Лань», 2006. – 240 с.
3. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. – СПб.: «Лань», 2006. – 416 с.
4. В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. Механика (Университетский курс общей физики). АCADEMIA. М. 2004. 480 с. (ФИЗМАТЛИТ. М. 2011 480 с.).
5. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М. Изд. дом «ОНИКС 21 век». 2003. 432 с.
6. С.Э. Хайкин. Физические основы механики. СПб.: «Лань», 2008.
7. С.П. Стрелков. Механика. СПб.: «Лань», 2005. – 560 с.
8. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т.1. Механика. СПб.: «Лань», 2006. 560 с.

Учебное издание

*БУШИНА Татьяна*  
*НИКАНОРОВА Елена Александровна*  
*РУСАКОВ Вячеслав Серафимович*  
*СЛЕПКОВ Александр Иванович*  
*ЧИСТЯКОВА Наталия Игоревна*

**МЕХАНИКА. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Изд. 2-е, переработанное, дополненное

Подписано в печать 15.11.2017 г.  
Формат 60х90.16. Объем 45 п. л. Тираж 300 экз.  
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
119991, ГСП1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2