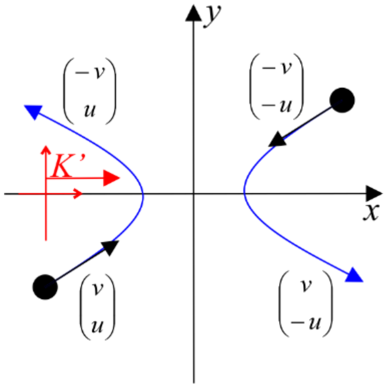
Релятивистский импульс

Напомним преобразования Лоренца для скоростей:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V u_x}{c^2}}; \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{V u_x}{c^2}\right)}; \qquad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2};$$

где V — скорость системы K', движущейся в положительном направлении оси x.



Рассмотрим такой нецентральный упругий удар частиц равных масс ($m_1 = m_2 = m$), что они обмениваются x-компонентами скорости:

$$\text{част}_1\!: \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \text{ и част}_2\!: \begin{pmatrix} -v \\ -u \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ част}_1\!: \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \text{ и част}_2\!: \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$$

В системе K', движущейся вдоль x со скоростью $V = v$, скорости частиц до и после удара равны:

$$\text{част}_1\!: \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma u \end{pmatrix} \text{ и част}_2\!: \begin{pmatrix} -2v\theta^2 \\ -u\theta^2/\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ част}_1\!: \begin{pmatrix} -2v\theta^2 \\ u\theta^2/\gamma \end{pmatrix} \text{ и част}_2\!: \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma u \end{pmatrix},$$

где введено обозначение $\theta^2 = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$. Пусть импульс определён как $p = m\vec{v}\,\alpha[|\vec{v}|^2]$, где $\alpha[\cdot]$ — неизвестная пока функция квадрата скорости (она не должна зависеть от направления скорости). Сохранение импульса вдоль x в системе K' очевидно. Потребовав, чтобы проекция суммарного импульса на ось y сохранялась, получим:

$$m\gamma u\,\alpha[(\gamma u)^2] = m\frac{u\theta^2}{\gamma}\,\alpha\left[\left(\frac{u\theta^2}{\gamma}\right)^2 + (2v\theta^2)^2\right],$$

Поскольку $\alpha[\cdot]$ зависит только от квадрата скорости, а γ и θ не зависят от u, можно взять производную по u

$$m\gamma\,\alpha[(\gamma u)^2] + 2m\gamma^3u^2\alpha'[(\gamma u)^2]$$
$$= m\frac{\theta^2}{\gamma}\,\alpha\left[\left(\frac{u\theta^2}{\gamma}\right)^2 + (2v\theta^2)^2\right] + 2mu^2\left(\frac{\theta^2}{\gamma}\right)^3\alpha'\left[\left(\frac{u\theta^2}{\gamma}\right)^2 + (2v\theta^2)^2\right],$$

и, подставив $u = 0$, получить выражение $\gamma^2\alpha[0] = \theta^2\alpha[(2v\theta^2)^2]$.

Переобозначив x-проекцию скорости частицы 2 в системе K' перед столкновением как $\omega = 2v\theta^2$ и выразив v через ω:

$$\frac{v}{c} = \frac{c}{\omega} - \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} - 1},$$

легко получим

$$\frac{\alpha[\omega^2]}{\alpha[0]} = \frac{\gamma^2}{\theta^2} = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{1 + \left(\frac{c}{\omega} - \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} - 1}\right)^2}{1 - \left(\frac{c}{\omega} - \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} - 1}\right)^2} = \frac{\omega^2 + \left(c - \sqrt{c^2 - \omega^2}\right)^2}{\omega^2 - \left(c - \sqrt{c^2 - \omega^2}\right)^2}$$
$$= \frac{2c^2 - 2c\sqrt{c^2 - \omega^2}}{2(\omega^2 - c^2) + 2\sqrt{c^2 - \omega^2}} = \frac{c\left[c - \sqrt{c^2 - \omega^2}\right]}{\sqrt{c^2 - \omega^2}\left[c - \sqrt{c^2 - \omega^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}}}.$$

Т.о., мы нашли функцию, связывающую импульс со скоростью, с точностью до нормировочного множителя. Сравнивая выражение с классическим, выберем $\alpha[0] = 1$ и, следовательно, импульс будет определён как $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$.