# Лекция 13

Основы гидро- и аэростатики.

1. Закон Паскаля.
2. Сжимаемость жидкостей и газов.
3. Основное уравнение гидростатики.
4. Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести.
5. Барометрическая формула.
6. Закон Архимеда.
7. Условия устойчивого плавания тел.

# Закон Паскаля

- **Вектор** напряжения
- **t**
- на произвольном элементе dS поверхности ***покоящейся*** жидкости (газа) коллинеарен **нормали**
- **n**
- к этой поверхности и ***одинаков*** по величине для всех ***ориентаций этого элемента*** в данной точке.

Закон Паскаля

- Вектор напряжения **t** равен
- $$\mathbf{t}_i = -p_0 \cdot \mathbf{n}_i \ ,$$
- где $p_0$ – скалярная величина
- модуля вектора напряжения, или ***гидростатическое давление***, $\mathbf{n}_i$ – нормаль , $p_0>0$.
- Знак минус указывает, что происходит сжатие.

Закон Паскаля

Тензор напряжения равен

- $$\sigma_{ij} = -p_0 \cdot \delta_{ij} \quad ,$$

- В ***покоящейся*** жидкости касательные элементы тензора напряжения равны нулю.

- На сжимающее действие напряжения, гидростатическое сжатие, указывает отрицательный знак.

# Закон Паскаля

- Рассмотрим ***приближенно*** условия **равновесия** очень маленького кубика (длина ребра равна $a$), находящегося в произвольном месте внутри жидкости (газа) и ориентированного

# Закон Паскаля

Массовые силы (силы тяжести) определяют как давление так и выделенное направление и ими пренебрегать нельзя. Но для кубика величина этих сил $F_m \sim a^3$ мала по сравнению с силам давления $F \sim a^2$, если длина ребра $a$ очень мала ($a \sim 10^{-8}$ м). Поэтому пренебрежение величиной вклада массовых сил в уравнения равновесия оправдано для случая приближенного рассмотрения.

# Закон Паскаля

Кубик находится в равновесии.

Совместим начало отсчета системы координат с одной из вершин кубика и направим оси координат Ox, Oy, Oz вдоль трех ребер кубика.

Силы давления, а следовательно, и значения давления *p* на ***противоположные*** грани кубика должны быть равны для любой ориентации кубика.

Закон Паскаля

Следовательно, относительно выделенного направления значения давления $p$ должны быть распределены ***симметрично***. Если разрезать кубик вдоль диагонали одной из его граней и ориентировать одну из половинок кубика (призму) произвольным образом, то легко показать, что все значения давления $p$ должны быть ***одинаковы***.

# Закон Паскаля

- Давления на грани a, b, c и торцы d, e призмы
- $p_a$, $p_b$, $p_c$, $p_d$, $p_e$
- Призма расположена произвольно.

# Закон Паскаля

Силы давления на грани торцы призмы:

- $F_a = p_a \cdot a^2,$
- $F_b = p_b \cdot a^2,$
- $F_c = p_c \cdot a^2 \cdot \sqrt{2},$
- $F_d = p_d \cdot a^2/2,$
- $F_e = p_e \cdot a^2/2.$

Закон Паскаля

# Условия равновесия для всех направлений:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0.$$

Закон Паскаля

Проекции сил на направление нормали к грани a:

$$-F_a + F_c \cdot \cos 45° =$$

- $= -p_a \cdot a^2 + p_c \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}/\sqrt{2} = 0.$
- $p_a = p_c$

Закон Паскаля

Проекции сил на направление нормали к грани b:

$$-F_b + F_c \cdot \sin 45° =$$

- $=-p_b \cdot a^2 + p_c \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}/\sqrt{2} = 0.$
- $p_b = p_c$

# Закон Паскаля

Так как площади торцов одинаковы, то

$$p_d = p_e$$

Так как грань *c* призмы может быть ориентирована произвольным образом, то

$$p_d = p_e = p_c$$

# Закон Паскаля

- Закон Паскаля:
- Величина давления на площадку в данном месте жидкости одинакова
- для всех ориентаций a, b, c, d, e площадки
- $p_a = p_b = p_c = p_d = p_e = p$

# Закон Паскаля

- Закон Паскаля:
- Опыты:
- 1. Манометр в жидкости.
- 2. Шар Паскаля

# Сжимаемость жидкостей и газов

- При всестороннем сжатии **твердого** тела относительное изменение объема (закон Гука):
- $\Delta V/V = \sigma/K$,
- $K = E/(3\cdot(1-2\cdot\mu))$.
- K – модуль всестороннего сжатия.

# Сжимаемость жидкостей и газов

Сжимаемость **жидкости** (газа) при постоянной температуре T характеризуется

*коэффициентом сжимаемости* κ:

- $$\kappa=(\partial V/\partial p)_T/V$$

$$\kappa=1/K$$

K~$10^{10}$ Па, модуль всестороннего сжатия

κ~$10^{-10}$ Па$^{-1}$, коэффициент сжимаемости

Сжимаемость жидкостей и газов

Сжимаемость

жидкости при

постоянной температуре

Т

измеряется

**пьезометром.**

Сжимаемость жидкостей и газов

- Устройство пьезометра.

- В **колбу** заливается
- **исследуемая жидкость**.

Сжимаемость жидкостей и газов

- Устройство пьезометра.
- Открытым концом –
- **капиллярной трубкой** – колба погружается в **ртуть**,
- налитую в ***кювету***.

Сжимаемость жидкостей и газов

- Устройство пьезометра.
- Колба и ***кювета*** помещаются в **сосуд** *с технической* ***жидкостью***, в которой можно **устанавливать** требуемое **давление** р, измеряемое **манометром**.

Сжимаемость жидкостей и газов

- При увеличении давления на Δp объем жидкости в колбе уменьшается и ртуть поднимается и *заполняет*
- капиллярную трубку.

## Сжимаемость жидкостей и газов

- **Изменение** объема $\Delta V$ жидкости определяется по **высоте** h поднятия ртути в капиллярной трубке:
- $$\Delta V = S \cdot h,$$
- где S – сечение капиллярной трубки радиуса r.

Сжимаемость жидкостей и газов

- Сжимаемость воды К при заданной температуре Т
- рассчитывается
- по измеренным значениям
- $\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3 \cdot 10^{-9}$ м$^3$,
- $r = 1$ мм, $h = 1$ мм,
- $\Delta p = 10^5$ Па и $V = 6 \cdot 10^{-5}$ м$^3$:

$$\kappa = (\Delta V / \Delta p)_T / V \sim 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$$

# Сжимаемость газов

- В газах при постоянной температуре выполняется закон Бойля – Мариотта:
- $$V \cdot p = C,$$
- где С – постоянная.
- **Сжимаемость газов** (T=const)
- $$\kappa = (\partial V/\partial p)_T / V =$$

$$= (C/p^2)/(C/p) = 1/p$$

# Сжимаемость газов

Сжимаемость газов:

$\kappa = 1/p \sim 10^{-5}$ Па$^{-1}$

Сжимаемость газов

в 20 000 раз больше,

чем у воды.

Основное уравнение гидростатики

- Выделим в жидкости
- малую **призму**
- сечения $S$ ,
- высоты $\Delta h$
- на уровне $h$.

## Основное уравнение гидростатики

- Будем рассматривать условия равновесия призмы в жидкости с учетом массовых сил.

## Основное уравнение гидростатики

- Ориентируем **призму так, чтобы ее** высота Δh
- **была параллельна**
- направлению поля вертикальных **внешних** сил (например, сил тяжести).

Основное уравнение гидростатики

- Внешние силы
- будем считать **потенциальными**.

## Основное уравнение гидростатики

- Условие равновесия призмы:
- силы на призму:
- $$\Sigma \mathbf{F}_i = 0.$$

Основное уравнение гидростатики

- 1. Силы давления на **верхнюю** грань

$$F_1 = -S \cdot p(h + \Delta h) =$$

$$= -S \cdot (p(h) + (\Delta p / \Delta h) \cdot \Delta h)$$

Основное уравнение гидростатики

- 2. Силы давления
- на **нижнюю** грань
- $F_2 = S \cdot p(h)$

Основное уравнение гидростатики

- 3. Силы давления
- на **боковые** грани
- из-за симметрии взаимно
- **компенсируются**.
- $F_3=0$.

# Основное уравнение гидростатики

**Потенциальная энергия единицы массы:**

$$u = U/\Delta m = \Delta m \cdot g \cdot h/\Delta m = g \cdot h$$

**Сила на единицу массы:**

$$-(du/dh) = -g$$

Основное уравнение гидростатики

Масса жидкости в объеме $\Delta V$ призмы

($\rho(h)$ – плотность жидкости на глубине h):

$$\Delta m = \rho(h) \cdot \Delta V = \rho(h) \cdot \Delta h \cdot S.$$

Основное уравнение гидростатики

4. Внешняя сила, действующая на массу $\Delta m$ жидкости в объеме $\Delta V$ равна:

$$F_4 = -(du/dh)\cdot\Delta m =$$

$$= -(du/dh)\cdot \Delta h\cdot S\cdot\rho(h).$$

Основное уравнение гидростатики

# Условие равновесия:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = F_1 + F_2 + F_4 = 0.$$

$$-(p(h+\Delta h)-p(h))\cdot S-(du/dh)\cdot\Delta h\cdot S\cdot\rho(h)=0.$$

$$((p(h+\Delta h) - p(h))/\Delta h)\cdot(S\cdot\Delta h) +$$
$$+(du/dh)\cdot(\Delta h\cdot S)\cdot\rho(h)=0.$$

Разделим на общий множитель

$(S\cdot\Delta h)$: $(\Delta p/\Delta h)+(du/dh)\cdot\rho(h)=0.$

# Основное уравнение гидростатики

В пределе при $\Delta h \to 0$ имеем

**основное уравнение гидростатики**:

$$dp/dh + \rho(h)\cdot(du/dh) = 0.$$

# Основное уравнение гидростатики

Основное уравнение в случае произвольной ориентации призмы:

$$grad(p) + \rho(r)\cdot grad(u)=0,$$

где

$$grad(p)=\mathbf{i}\cdot\partial p/\partial x+\mathbf{j}\cdot\partial p/\partial y+\mathbf{k}\cdot\partial p/\partial z,$$

$$grad(u)=\mathbf{i}\cdot\partial u/\partial x+\mathbf{j}\cdot\partial u/\partial y+\mathbf{k}\cdot\partial u/\partial z.$$

Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести.

- В общем случае
- основное уравнение
- $dp/dh + \rho(h)\cdot(du/dh)=0.$
- аналитически не интегрируется.

## Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести.

- 1. В частном случае среды постоянной плотности $\rho(h)=\rho_0=const$
- имеем
- $d(p+\rho_0 \cdot u)/dh=0 \rightarrow$
- $p+\rho_0 \cdot u=const$
- В однородном поле сил тяжести ($g=const$) $u=g \cdot h$ и
- $p+\rho_0 \cdot g \cdot h=const=p_0$

Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести.

- На дне сосуда
- (на высоте $h=0$)
- давление $p$ равно $p_0$
- $$p+\rho_0 \cdot g \cdot h = p = const = p_0,$$
- На высоте $h$ давление будет
- $$p(h) = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot h$$

Распределение давления в покоящемся газе в поле сил тяжести.

- 2. Второй частный случай –
- газ в изотермической атмосфере.
- В газах при постоянной температуре выполняется закон Бойля – Мариотта:
- $V \cdot p = C,$
- где C – постоянная, или
- $p_0/\rho_0 = p/\rho \rightarrow \rho = \rho_0 \cdot (p/p_0)$

# Распределение давления в покоящемся газе в поле сил тяжести.

- $dp/dh + \rho_0 \cdot (p/p_0) \cdot (du/dh) = 0$
- $dp/p = -(\rho_0 \cdot g/p_0) \cdot dh$
- $dp/p = -dh/h_0$ ,
- где $h_0 = p_0/(\rho_0 \cdot g)$ – постоянная изотермической атмосферы (высота *однородной* атмосферы).

# Барометрическая формула

- $dp/p = -\,dh/h_0$
- $\ln(p/p_0) = -\,h/h_0$
- $p = p_0 \exp(-\,h/h_0)$

- $h_0 = p_0/(\rho_0 \cdot g) =$
- $= 10^5/(1.3 \cdot 10) = 7.7$ км.

# Зависимость давления от высоты

- Опыт с газовой горелкой:
- Размер пламени  зависит от высоты торца трубки с газом.

# Барометрическая формула

- $p = p_0 \exp(-h/h_0)$
- При малых h ($h_0 = p_0/(\rho_0 \cdot g)$):
- $p = p_0 \cdot (1 - h/h_0) = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot h$
- (как в жидкости).
- Высота $h_{1/2}$, на которой давление уменьшается в 2 раза:
- $h_{1/2} = \ln 2 \cdot h_0 = 5.3$ км

# Барометрическая формула

- $$p=p_0\exp(-h/h_0)$$
- Для легких газов (водорода):
- $h_{0в}=p_0/(\rho_0\cdot g)=10^5/(0.089\cdot 10)=$
- $=112$ км.
- Подъемная сила аэростатов:
- $F=S\cdot p_0\cdot(\exp(-h/h_{0л})-\exp(-h/h_0))$
- $h_{0л}$ – высота для легкого газа.

# Барометрическая формула

- Подъемная сила аэростатов на уровне моря:
- $F=S\cdot p_0\cdot(\exp(-h/h_{0л}) - \exp(-h/h_0))$ .
- Высота аэростата h=300 м мала по сравнению с $h_0$ , r=10 м радиус сферы
- $F=S\cdot p_0\cdot(1-h/h_{0л} - 1+h/h_0)=$
- $=S\cdot p_0\cdot h(1/h_0 - 1/h_{0л})=$
- $=S\cdot p_0\cdot h\cdot(h_{0л} - h_0)/(h_{0л}\cdot h_0)\approx S\cdot p_0\cdot h/h_0=$
- $= 3\cdot 10^2\cdot 10^5\cdot 3\cdot 10^2/7.8\cdot 10^3 \approx$
- $\approx 10^6$ н (100 т)

# Барометрическая формула

- Подъемная сила аэростатов на большой высоте $h=33$ км:
- $F=S\cdot p_0\cdot(\exp(-(h+h_{аэр})/h_{0л}) - \exp(-h/h_0))$

$\approx S\cdot p_0\cdot\exp(-h/h_0)\cdot(\exp(-h_{аэр}/h_{0л})-\exp(-h_{аэр}/h_0)) \approx$

$\approx F_{ум}\cdot\exp(-h/h_0)\approx 100\cdot 1.5\cdot 10^{-2}\approx 1.5$ т.

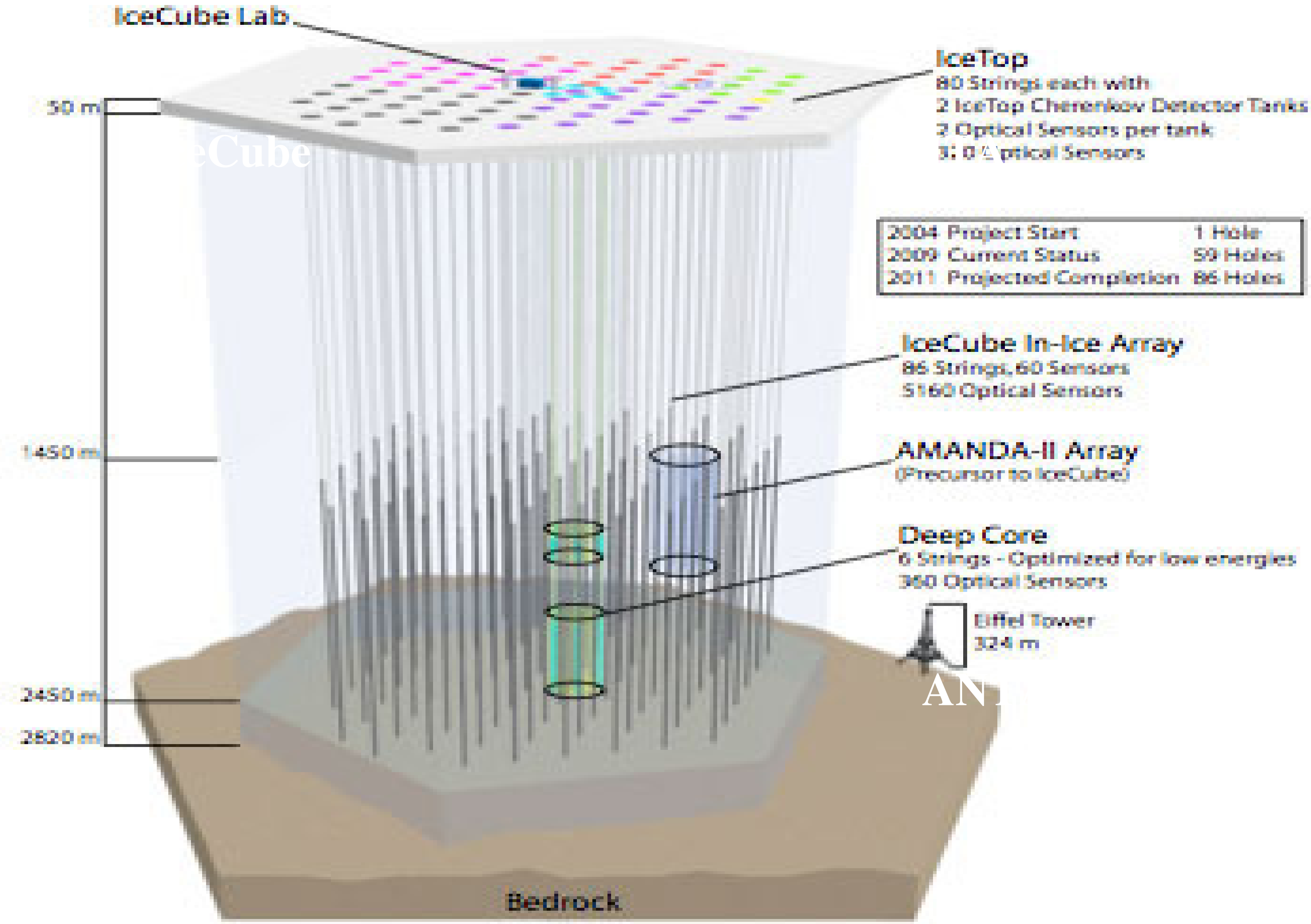
# Антарктика

ANTARCTIC REGION
Year-round research station
Scale 1:68,000,000
Azimuthal Equal-Area Projection
South Atlantic Ocean
Antarctic Convergence
Port Elizabeth
SOUTH AFRICA
Bouvet Island (NORWAY)
PRINCE EDWARD ISLANDS (SOUTH AFRICA)
BRITISH CLAIM
ARGENTINE CLAIM
Southern Ocean
NORWEGIAN CLAIM
CHILEAN CLAIM
AUSTRALIAN CLAIM
FRENCH
French Southern and Antarctic Lands (FRANCE)
Scotia Sea
Weddell Sea
Bellingshausen Sea
Amundsen Sea
Ross Sea
Queen Maud Land
Marie Byrd Land
Victoria Land
Wilkes Land
ARGENTINA
CHILE
Neumayer (GERMANY)
SANAE IV
Novolazarevskaya (RUSSIA)
Maitri (INDIA)
Syowa (JAPAN)
Molodezhnaya (RUSSIA)
Halley (U.K.)
Belgrano II (ARGENTINA)
Mawson (AUSTRALIA)
Amery Ice Shelf
Zhong Shan (CHINA)
Progress (RUSSIA)
Davis (AUSTRALIA)
Amundsen-Scott (U.S.)
Indian Ocean
Mirnyy (RUSSIA)
Vostok (RUSSIA)
Concordia (FRANCE AND ITALY)
Shackleton Ice Shelf
Casey (AUSTRALIA)
McMurdo (U.S.)
Scott (N.Z.)
Dumont d'Urville (FRANCE)
South Pacific Ocean
Peter I Island
Orcadas (ARGENTINA)
Esperanza (ARGENTINA)

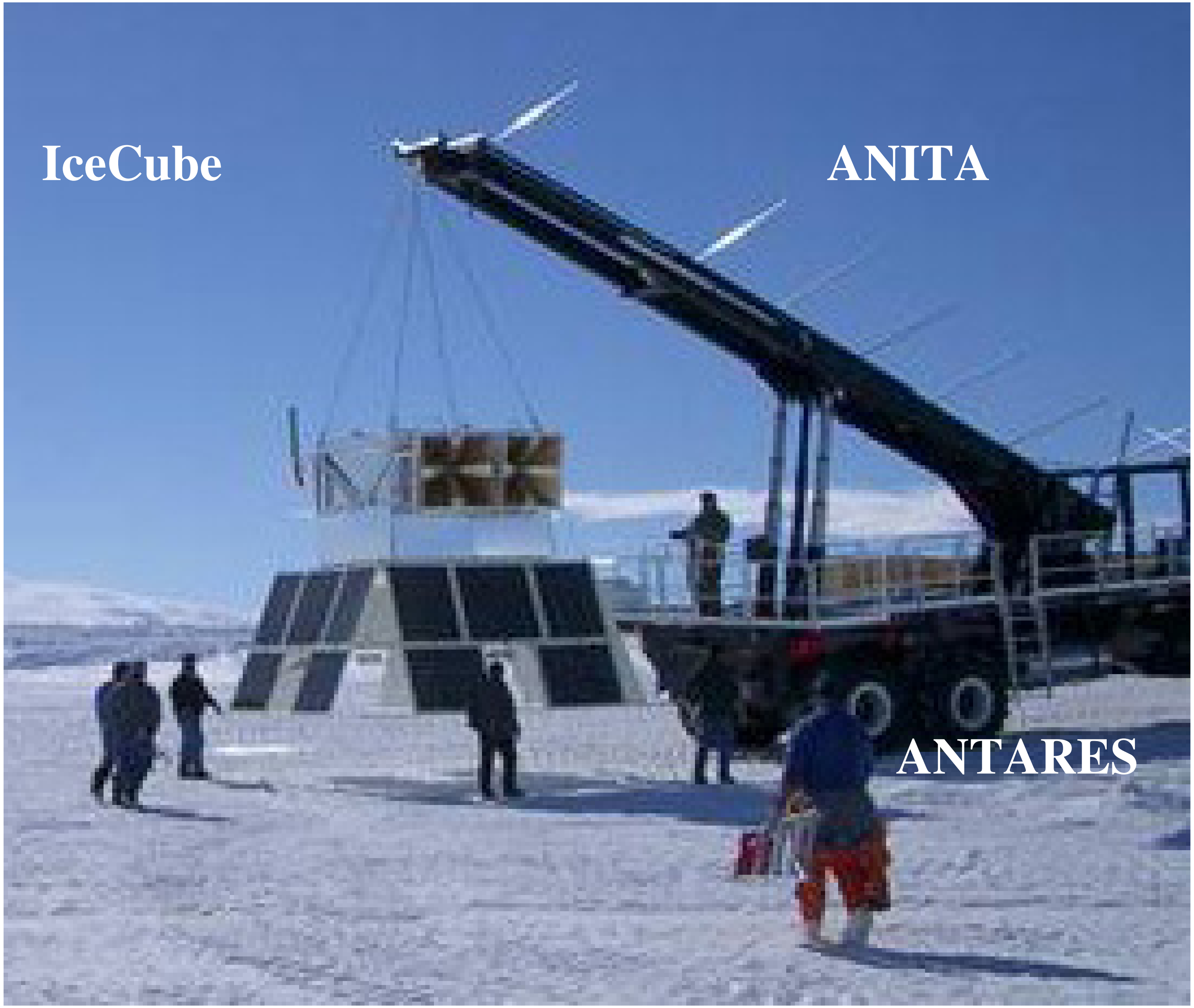
Amundsen's party at the South Pole, From left to right: Amundsen, Hanssen, Hassel and Wisting (photo by fifth member Biaaland). December 14, 1911.


GEOGRAPHIC
SOUTH POLE
ROALD AMUNDSEN
DECEMBER 14, 1911
ROBERT F. SCOTT
JANUARY 17, 1912

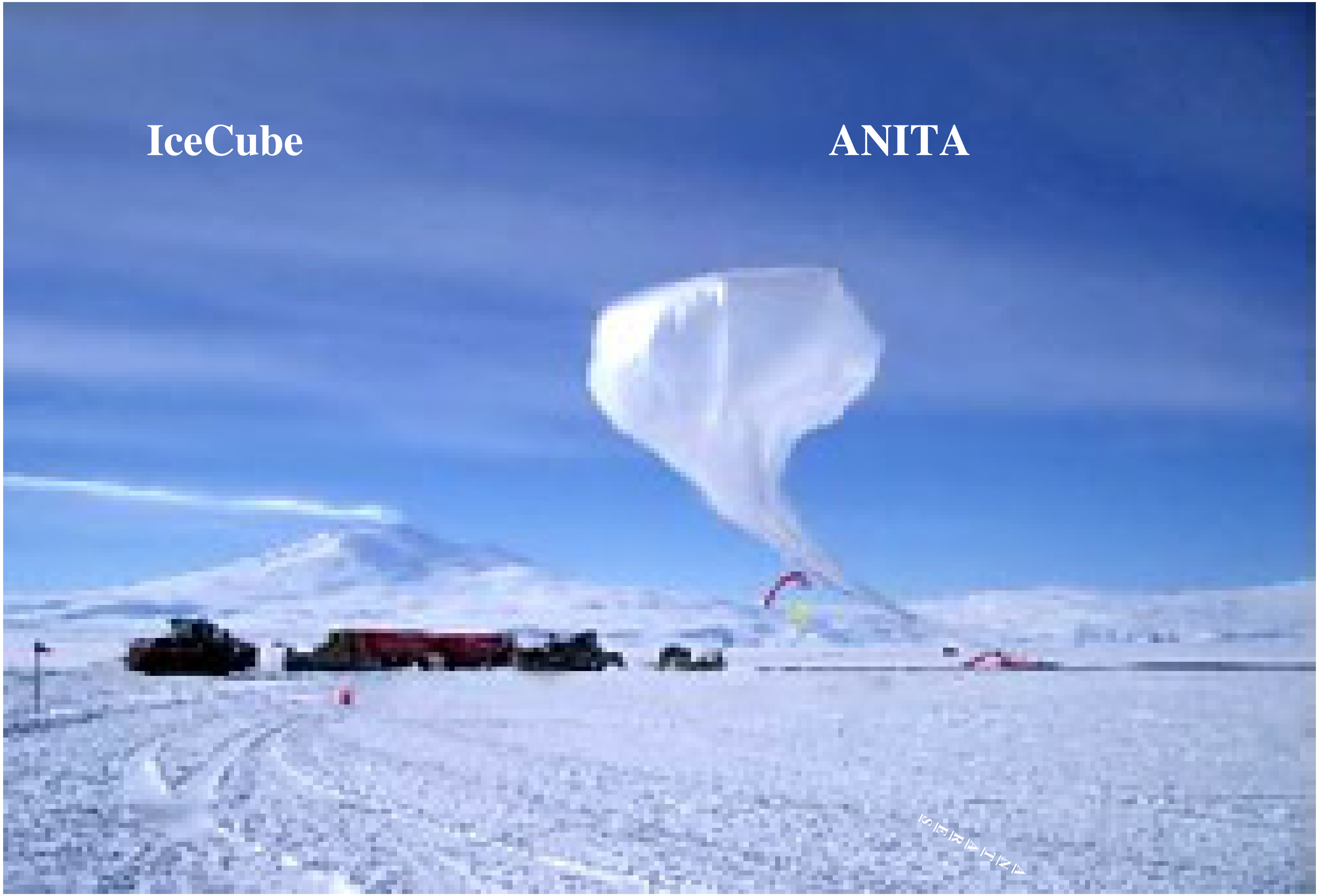
# Highest Energy Neutrino Observatories



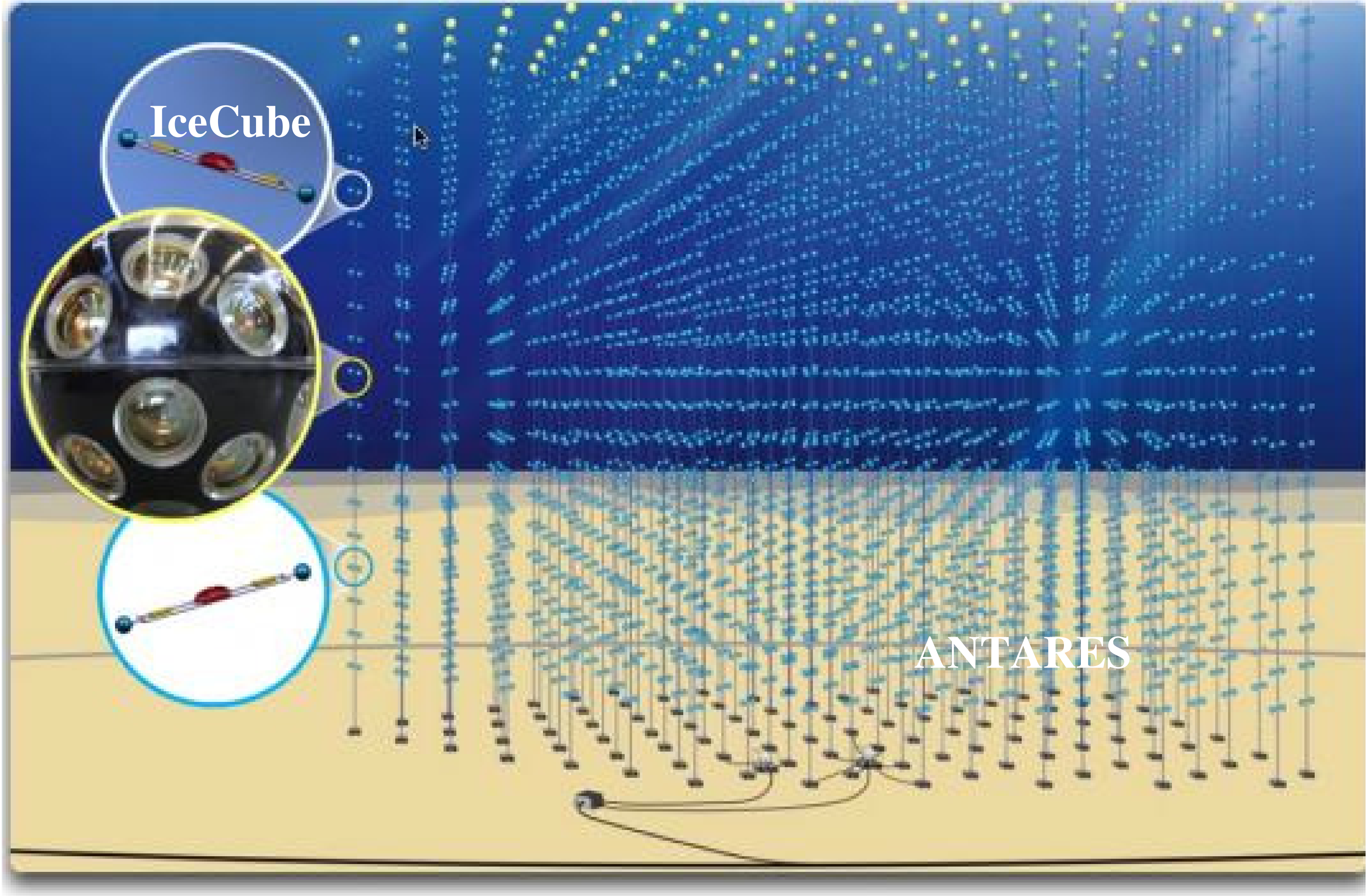
# Highest Energy Neutrino Observatories

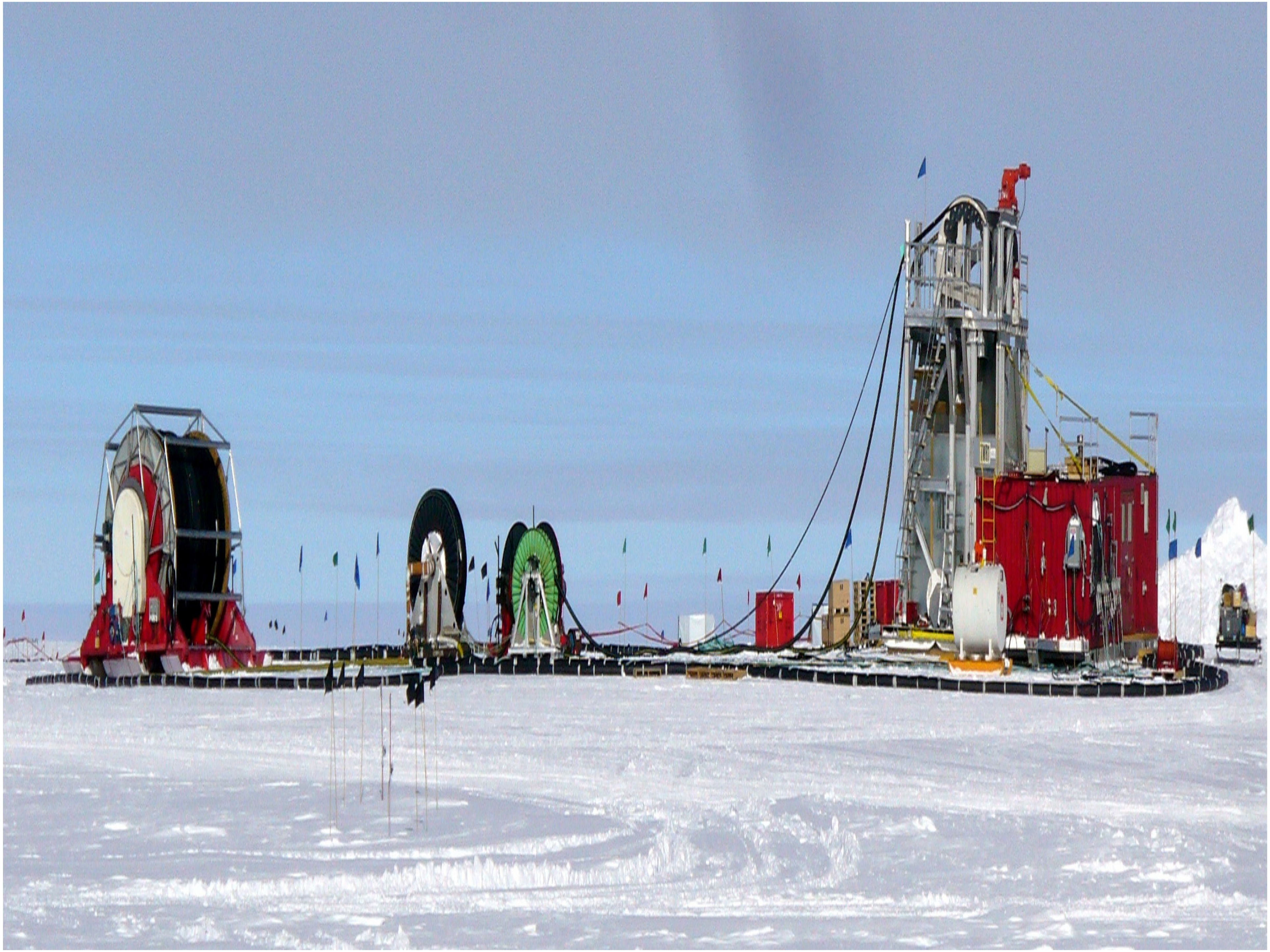


# Highest Energy Neutrino Observatories



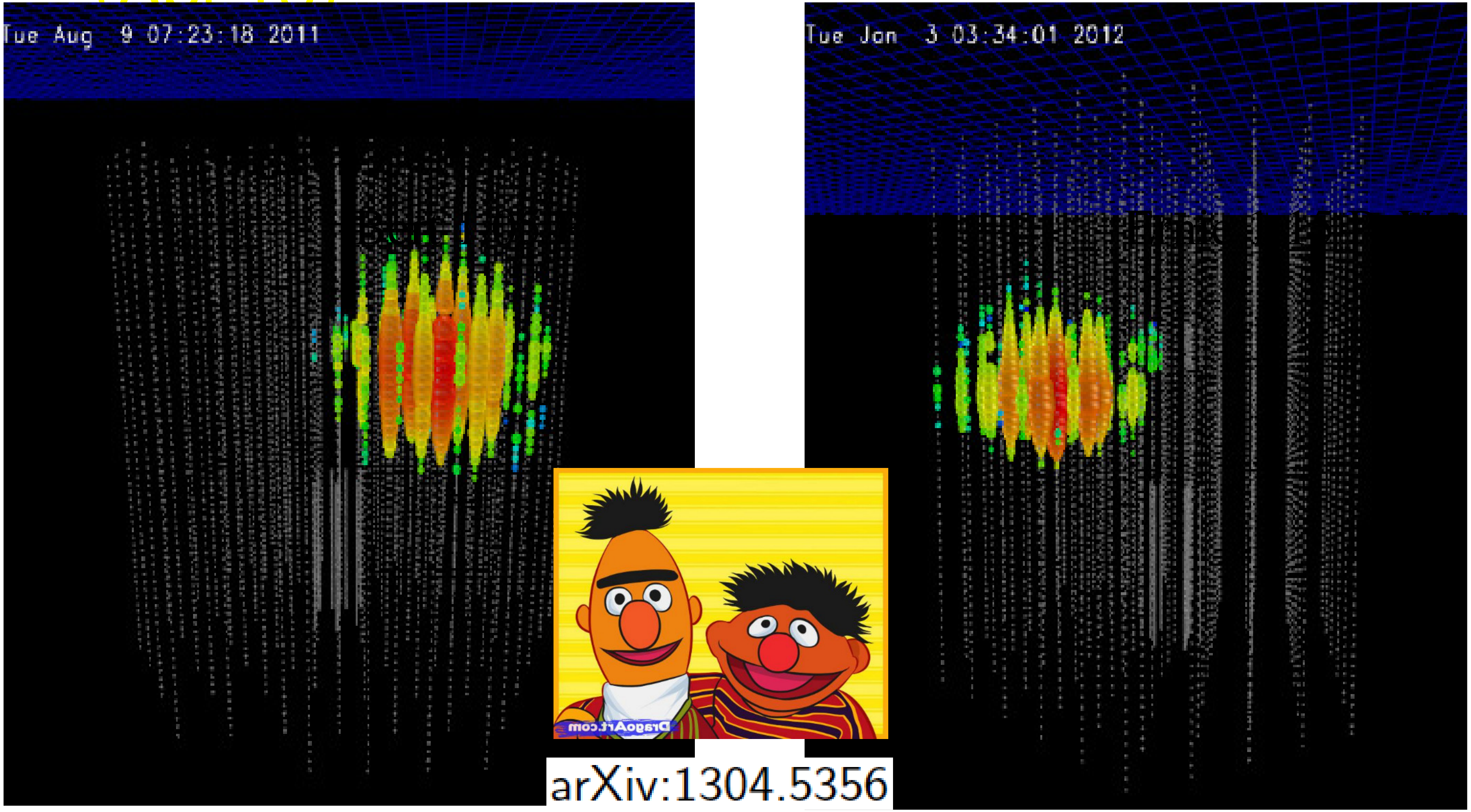
# Highest Energy Neutrino Observatories





# Neutrino Astronomy Begins

- PeV neutrinos first observed by **IceCube** (Apr'13)




arXiv:1304.5356

Закон Архимеда

- На всякое плавающее в жидкости тело действует направленная по вертикали выталкивающая сила, равная весу объема вытесненной жидкости и приложенная в центре масс вытесненной жидкости.

# Закон Архимеда

- Если часть тела, погруженную в жидкость, заменить жидкостью, то на эту часть жидкости будет действовать сила веса, приложенная в центре масс этой части жидкости. Из условия равновесия этой части жидкости следует, что на нее будет действовать направленная вверх выталкивающая сила, равная весу этой части жидкости.

Закон Архимеда

Сила Архимеда равна

$$\mathbf{F} = -\int p \cdot \mathbf{n} \cdot dS,$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности $dS$

и $p$ – давление.

Интеграл берется по всей внешней поверхности жидкости.

Условия устойчивого плавания тел

- Тело **полностью** погружено в жидкость.
- В случае устойчивого плавания
- при **отклонении** от
- положения равновесия
- возникающие **моменты сил** должны **возвращать** тело в положение **равновесия**.

# Условия устойчивого плавания тел

- Определим характерные точки:
- 1. Центр масс тела.
- 2. Центр масс объема жидкости, вытесненной телом.

## Условия устойчивого плавания тел

- Тело **полностью** погружено в **жидкость**.
- **Равновесие** тела будет **устойчиво**, если
- 1) **центры** масс **тела** и **объема** вытесненной **жидкости** лежат на **одной вертикали**,
- 2) **центр масс** **тела** должен лежать **ниже** центра масс объема **вытесненной жидкости**.

Условия устойчивого плавания тел

- Тело **плавает** на поверхности жидкости. Характерные точки:
- 1. **Центр** масс **тела**.
- 2. **Центр** масс объема **жидкости**, вытесненной телом.
- 3. **Метацентр** – точка **пересечения** направления
- **вектора** подъемной силы
- с **плоскостью симметрии** тела.

## Условия устойчивого плавания тел

- Тело **плавает** на поверхности жидкости.
- При отклонении возникающие **моменты сил** должны
- возвращать тело
- в положение равновесия.
- Условие **устойчивого** плавания:
- **центр масс тела должен лежать ниже метацентра.**

# Явление присасывания

- 1. Подводная лодка силами давления «прижимается» ко дну.


www.baplpskov.ru

# Явление присасывания

- 2. Присоски.

# Явление присасывания

- 3. Магдебургские полушария.
- Опыт Отто фон Герике


ICONISMUS XI
Cap. 23 Lib III
Fig. I.
A
B
H
Fig. IV.
Fig. V.
N
Fig. II.
D
Fig. III.

# Опыт по демонстрации силы давления

Немецкий физик Отто фон Герике в 1654 году в Регенсбурге выполнил знаменитый эксперимент для демонстрации силы давления воздуха. В эксперименте использовались «два медных полушария около 14 дюймов (35,5 см) в диаметре, полые внутри и прижатые друг к другу». Из собранной сферы выкачивался воздух, и полушария удерживались давлением внешней атмосферы. Сила давления равна

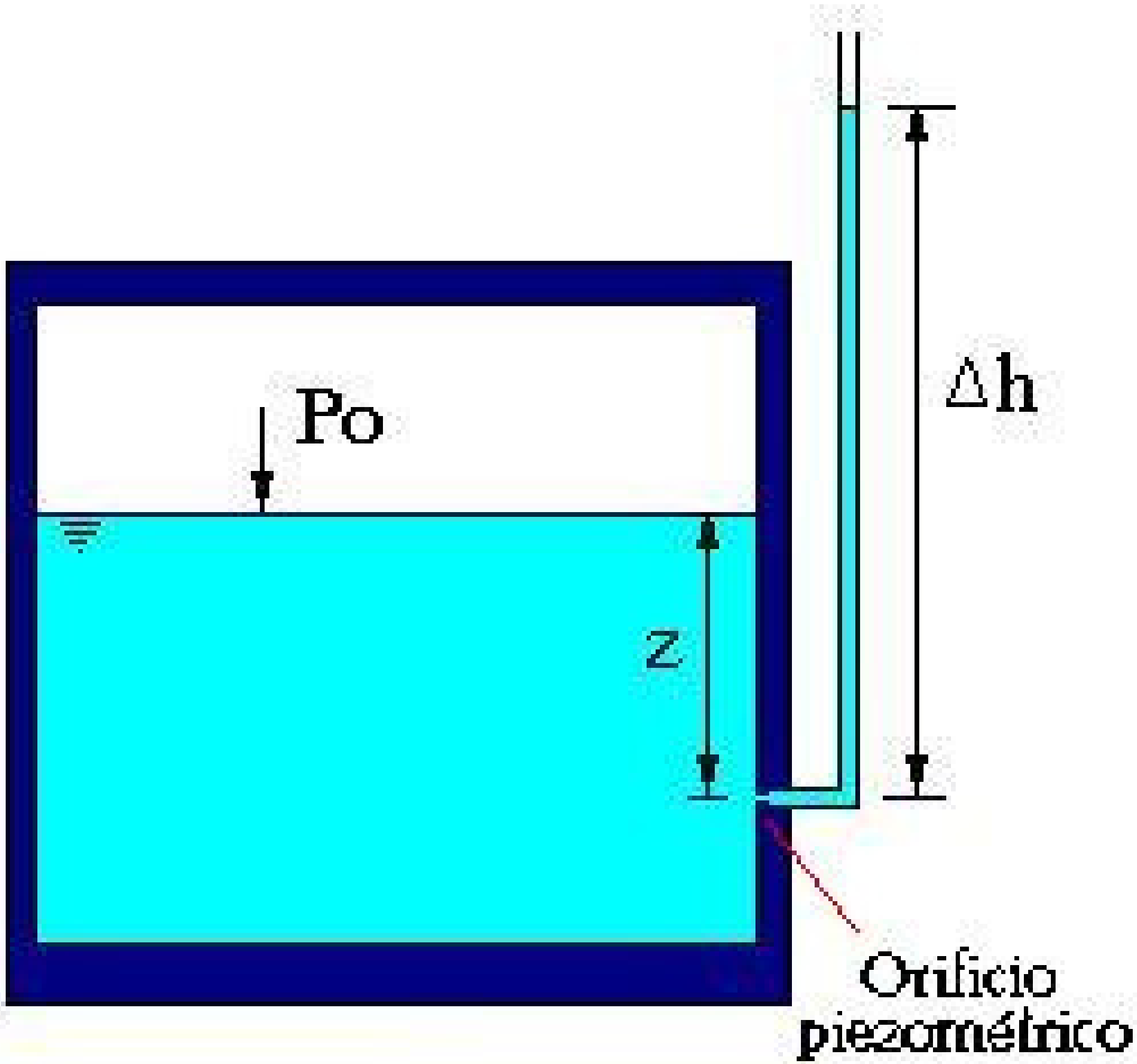
$F=10^5 \cdot 0.0990 \sim 10^4$ н=1 т.

# Магдебургские полушария

В1656 году в Магдебурге Герике продемонстрировал эксперимент  Рейхстагу  в присутствии императора Фердинанда III. После выкачивания из сферы воздуха, 16 лошадей, по 8 с каждой стороны не смогли разорвать полушария. Неизвестно, использовались ли лошади с обеих сторон для большей зрелищности или по незнанию самого физика, ведь можно было заменить половину лошадей неподвижным креплением, без потери силы воздействия на полушария.

# Повторение опыта

- В 1663 году опыт был повторен в Берлине с 24 лошадьми. В соответствии с более поздними расчётами, для преодоления усилия необходимо было впрячь 13 сильных ломовых лошадей с каждой стороны.



Po
z
Δh
Orificio
piezométrico