

Лекция 7

- 1. Сложение скоростей в релятивистской механике.
- 2. Релятивистская динамика.
Импульс, энергия, масса и сила в релятивистской механике.
- 3. Уравнение движения в релятивистской механике.

Быстрота в пространстве Лобачевского

В эвклидовой плоскости (вращения и сдвиги):

- $x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi$
- $y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi$
- В плоскости Лобачевского (вращение на гиперболический угол ψ , которые, как и обычные углы поворота, складываются):
 - $x = x' \cdot \operatorname{ch} \psi + y' \cdot \operatorname{sh} \psi$
 - $y = x' \cdot \operatorname{sh} \psi + y' \cdot \operatorname{ch} \psi$
- Преобразования Лоренца:
 - $x_0 = x'_0 \cdot \operatorname{ch} \psi + x'_1 \cdot \operatorname{sh} \psi$
 - $x_1 = x'_0 \cdot \operatorname{sh} \psi + x'_1 \cdot \operatorname{ch} \psi$

Быстрота в пространстве Лобачевского

- Начало координат $x'_1=0$ системы K' движется со скоростью V вдоль оси OX .

Преобразования Лоренца:

- $x_0 = x'_0 \cdot \text{ch}\psi + x'_1 \cdot \text{sh}\psi$
- $x_1 = x'_0 \cdot \text{sh}\psi + x'_1 \cdot \text{ch}\psi$
- Принимают вид
- $x_0 = x'_0 \cdot \text{ch}\psi$ $ct = ct' \cdot \text{ch}\psi$
- $x_1 = x'_0 \cdot \text{sh}\psi$ или $x = ct' \cdot \text{sh}\psi$
- Разделим части второго равенства на соответствующие части первого
- $x/(t \cdot c) = V/c = \text{sh}\psi/\text{ch}\psi = \text{th}\psi$

Быстрота в пространстве Лобачевского

- Скорость V/c системы K' в единицах скорости света равна гиперболическому тангенсу быстроты ψ – гиперболическому углу ψ :

- $$V/c = \operatorname{th} \psi$$
- Значения $\operatorname{sh} \psi$ и $\operatorname{ch} \psi$ равны
- $$\operatorname{sh} \psi = (V/c) / \sqrt{1 - (V/c)^2}$$
- $$\operatorname{ch} \psi = 1 / \sqrt{1 - (V/c)^2}$$
- Преобразования Лоренца:
- $$x_0 = \gamma \cdot (x'_0 + (V/c) \cdot x'_1)$$
- $$x_1 = \gamma \cdot (x'_0 \cdot (V/c) + x'_1)$$

Быстрота в пространстве Лобачевского

- Быстрота ψ – гиперболический угол ψ – аналог скорости V/c в пространстве Лобачевского, так как быстрота ψ определяет длину дуги гиперболы единичного радиуса, или расстояние, которое пролетает частица в течение собственного времени t при движении со скоростью V/c .
- В пространстве Лобачевского сложению сонаправленных по одной прямой скоростей V_1/c и V_2/c соответствует сумма быстрот (сумма гиперболических углов):
 - $$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Быстрота в пространстве Лобачевского

- Отсюда следует закон сложения релятивистских скоростей
- $V/c = \text{th}\psi = \text{th}(\psi_1 + \psi_2) =$
- $= (\text{th}\psi_1 + \text{th}\psi_2) / (1 + \text{th}\psi_1 \cdot \text{th}\psi_2) =$
- $= (V_1/c + V_2/c) / (1 + (V_1/c) \cdot (V_2/c)).$
- Скорости света в пространстве Лобачевского соответствует быстрота $\psi = \infty$.
- Если к этому значению быстроты прибавить любое конечное значение, то сумма будет равна бесконечности. Это и означает, что скорость света имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

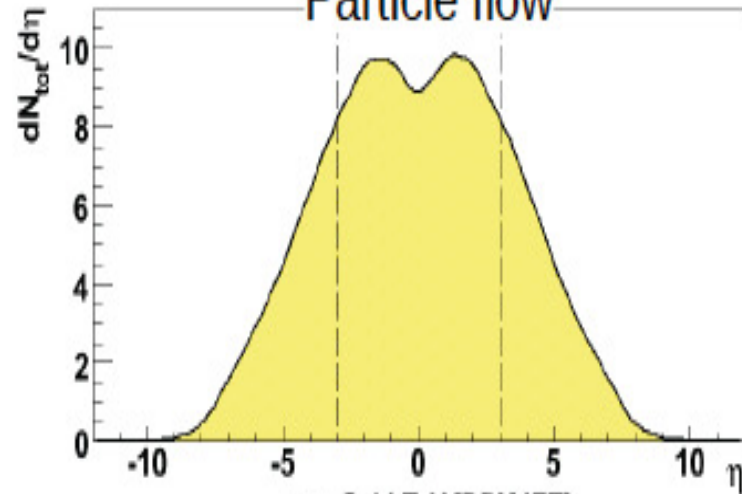
Быстрота в пространстве Лобачевского

- В экспериментах на ускорителях изучают распределения рожденных частиц по псевдобыстроте η — аналогу быстроты ψ .

Распределения по псевдобыстроте

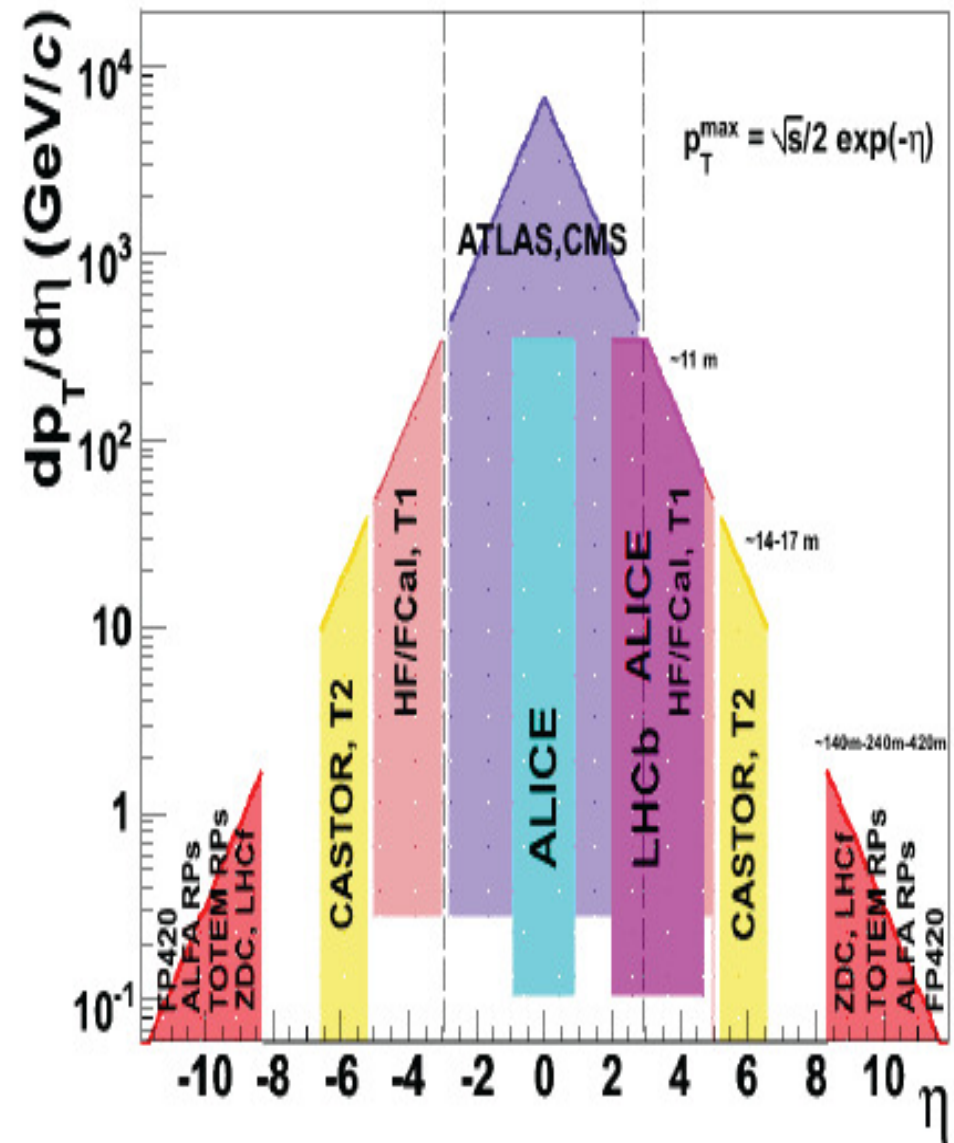
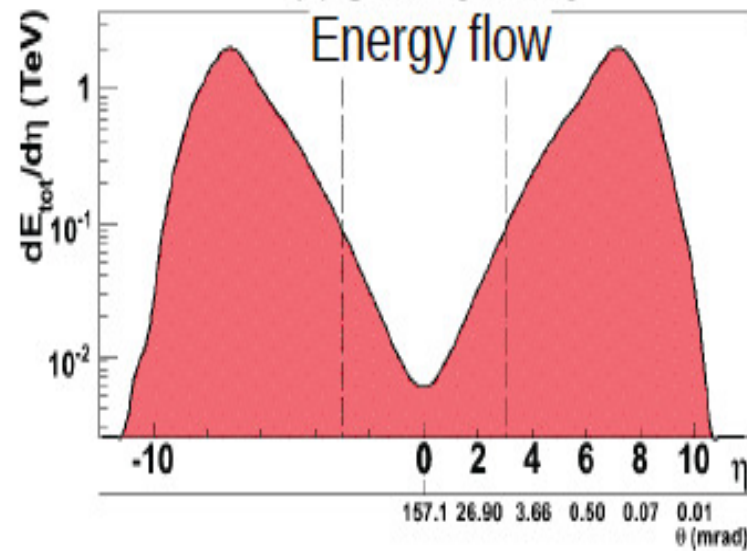
p-p @ 14 TeV

Particle flow



p-p @ 14 TeV [DPMJET]

Energy flow



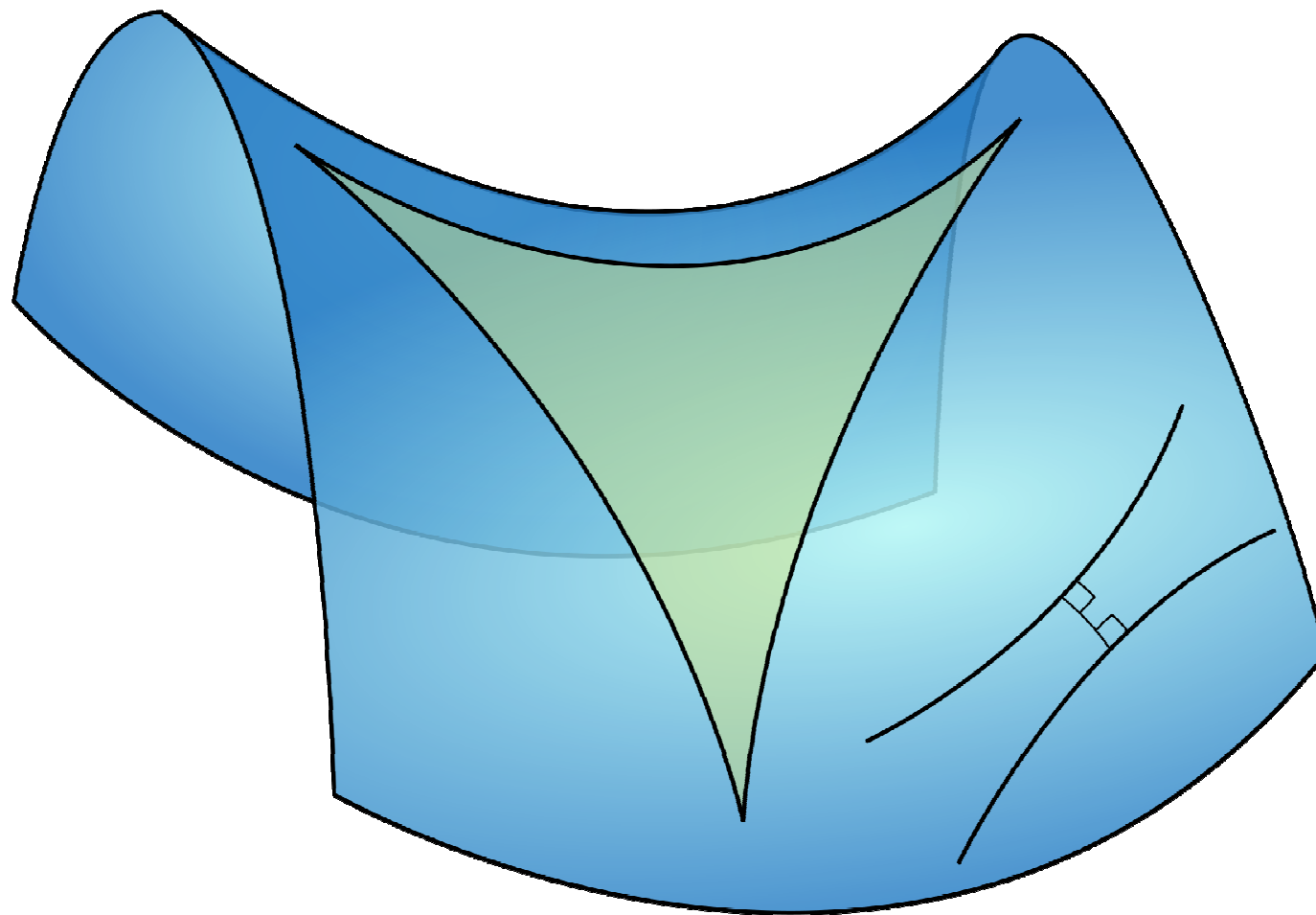
Угол параллельности Π

$$\tan \frac{\Pi}{2} = e^{-d/k} \quad (e > 1, \quad k > 0) \quad \dots (1)$$

where

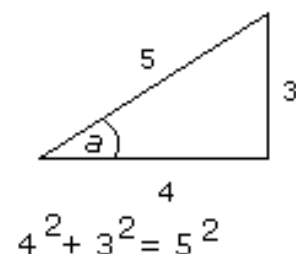
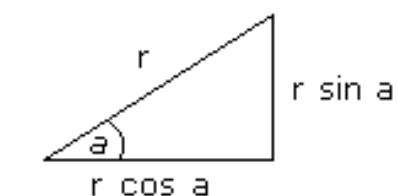
d = distance between
parallel lines.

Сумма углов треугольника меньше π



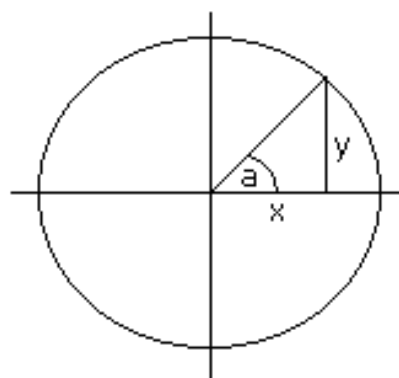
Euclidean and hyperbolic geometry

Euclidean triangle



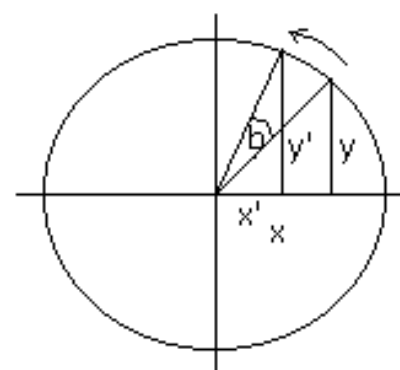
$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

The circle



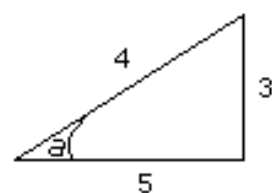
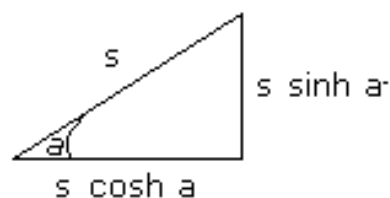
$$\begin{aligned} y &= r \sin a \\ x &= r \cos a \end{aligned}$$

Euclidean rotation



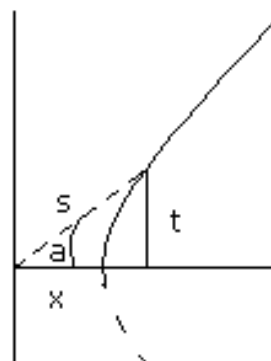
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hyperbolic triangle



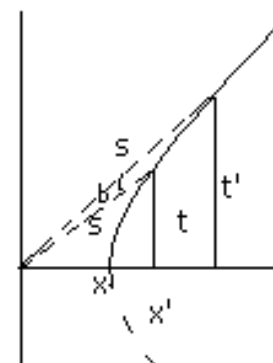
$$5^2 - 3^2 = 4^2$$

Hyperbola



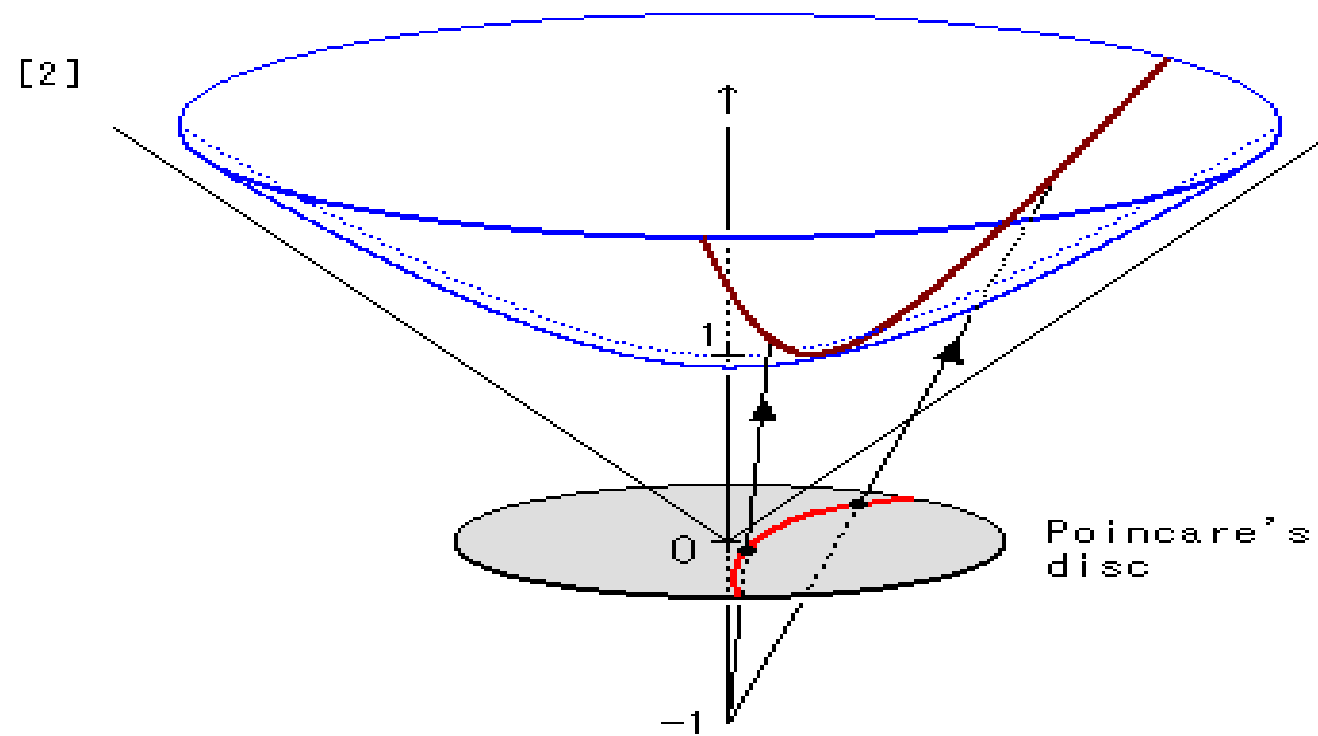
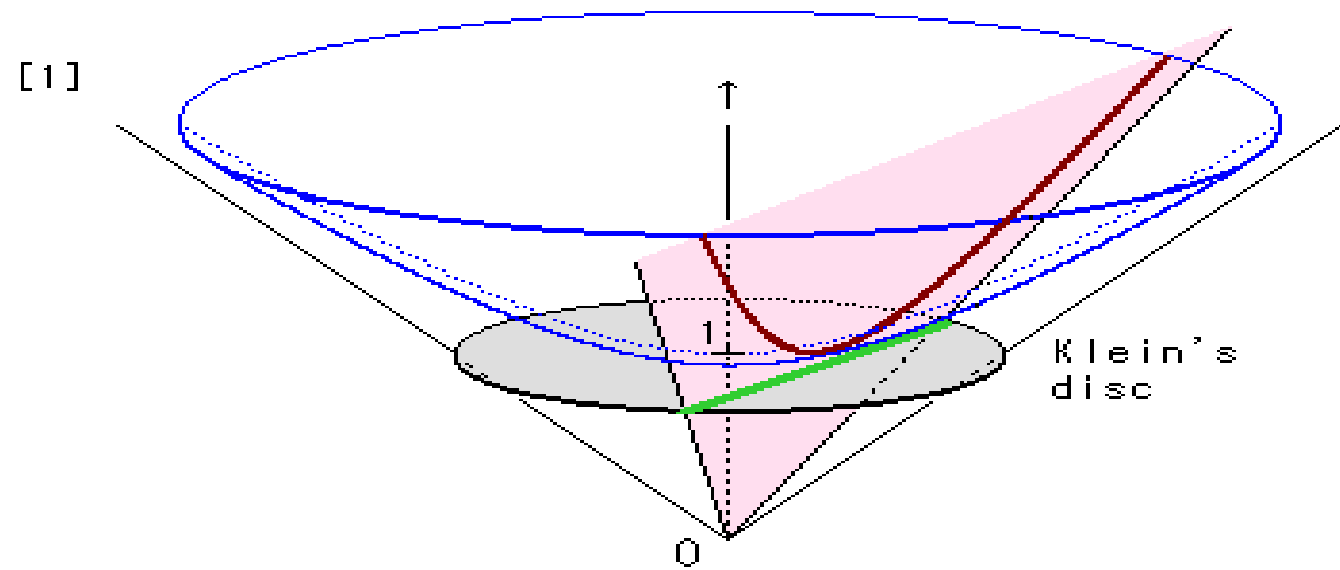
$$\begin{aligned} t &= s \sinh a \\ x &= s \cosh a \end{aligned}$$

Hyperbolic rotation



$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Fig. 5 hyperboloid model



Преобразования Лоренца

- Преобразования Лоренца проекций
- 4-радиус-вектора из системы K в K' :
- $x_0' = \gamma \cdot (x_0 - \beta \cdot x_1),$
- $x_1' = \gamma \cdot (x_1 - \beta \cdot x_0),$
- $x_2' = x_2,$
- $x_3' = x_3,$
- $\gamma(V) = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \beta = \beta(V) = V/c$

Сложение скоростей

Используем определения:

3-скорость в системе K

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt.$$

3-скорость в системе K' :

$$v'_x = dx'/dt', \quad v'_y = dy'/dt', \quad v'_z = dz'/dt'.$$

Скорости в единицах c :

$$\beta(v) = v/c, \quad \beta(v') = v'/c$$

Сложение скоростей

Определение проекций вектора

4-скорости в системе K:

$$u_0 = dx_0/d\tau = \gamma \cdot c$$

$$u_1 = dx_1/d\tau = \gamma \cdot v_x$$

$$u_2 = dx_2/d\tau = \gamma \cdot v_y$$

$$u_3 = dx_3/d\tau = \gamma \cdot v_z$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta = v/c, \quad \gamma = \gamma(v)$$

Сложение скоростей

Используем

правила дифференцирования:

$$dx_0/d\tau = dx_0/dt \cdot dt/d\tau = \gamma \cdot c$$

$$dx_0/dt = c dt/dt = c$$

- $dt/d\tau = \gamma$

Сложение скоростей

Определение проекций вектора 4-скорости в системе K' :

$$u'_0 = dx'_0/d\tau = \gamma \cdot c$$

$$u'_1 = dx'_1/d\tau = \gamma \cdot v'_x$$

$$u'_2 = dx'_2/d\tau = \gamma \cdot v'_y$$

$$u'_3 = dx'_3/d\tau = \gamma \cdot v'_z$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta = v'/c, \quad \gamma = \gamma(v')$$

Сложение скоростей

Преобразования Лоренца

проекций вектора 4-скорости:

$$u'_0 = \gamma(V) \cdot (u_0 - \beta(V) \cdot u_1)$$

$$u'_1 = \gamma(V) \cdot (u_1 - \beta(V) \cdot u_0)$$

$$u'_2 = u_2$$

$$u'_3 = u_3$$

$$\gamma(V) = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta(V) = V/c,$$

Сложение скоростей

Преобразования проекций вектора
4-скорости из системы K в K' :

$$\gamma(v') \cdot c = \gamma(V) \cdot (\gamma(v) \cdot c - (V/c) \cdot \gamma(v) \cdot v_x)$$

$$\gamma(v') \cdot v'_x = \gamma(V) \cdot (\gamma(v) \cdot v_x - (V/c) \cdot \gamma(v) \cdot c)$$

$$\gamma(v') \cdot v'_y = \gamma(v) \cdot v_y$$

$$\gamma(v') \cdot v'_z = \gamma(v) \cdot v_z$$

$$\gamma(V) = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta = V/c$$

Сложение скоростей

Преобразования проекций вектора
4-скорости из системы K в K' :

$$\gamma(v') \cdot c = \gamma(V) \cdot \gamma(v) \cdot (c - (V/c) \cdot v_x)$$

$$\gamma(v') \cdot v'_x = \gamma(V) \cdot \gamma(v) \cdot (v_x - (V/c) \cdot c)$$

$$\gamma(v') \cdot v'_y = \gamma(v) \cdot v_y$$

$$\gamma(v') \cdot v'_z = \gamma(v) \cdot v_z$$

$$\gamma(V) = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta = V/c$$

Сложение скоростей

Комбинация Лоренц-факторов:

$$\gamma(V) \cdot \gamma(v) / \gamma(v') = 1 / (1 - V \cdot v_x / c^2)$$

Преобразования проекций вектора

3-скорости из системы K в K' :

$$v'_x = \gamma(V) \cdot \gamma(v) / \gamma(v') \cdot (v_x - V)$$

$$v'_y = \gamma(V) \cdot \gamma(v) / \gamma(v') \cdot v_y / \gamma(V) \cdot$$

$$v'_z = \gamma(V) \cdot \gamma(v) / \gamma(v') \cdot v_z / \gamma(V) \cdot$$

$$\gamma(V) = (1 - \beta^2)^{-0.5}, \quad \beta = V/c$$

Формулы сложения скоростей Лоренца
*Формулы сложения Лоренца проекций 3-
скоростей:*

- $v'_x = (v_x - V) / (1 - V \cdot v_x / c^2),$

- $v'_y = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 - V \cdot v_x / c^2)) \cdot v_y,$

- $v'_z = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 - V \cdot v_x / c^2)) \cdot v_z,$

- $\beta = V/c$

Сложение скоростей

- Альтернативный метод:

Дифференциалы преобразований Лоренца:

- $x' = \gamma(x - V \cdot t),$ $dx' = \gamma(dx - V \cdot dt) = \gamma \cdot dt \cdot (v_x - V),$
- $y' = y,$ $dy' = dy,$
- $z' = z,$ $dz' = dz,$
- $t' = \gamma \cdot (t - V \cdot x/c^2).$ $dt' = \gamma \cdot (dt - V \cdot dx/c^2) =$
- $= \gamma \cdot dt \cdot (1 - V \cdot v_x/c^2).$

Поделим **левые** и **правые** части

первых трех равенств дифференциалов

на соответствующие части **четвертого**

Формулы сложения скоростей Лоренца

Используя определения, получим

*формулы Лоренца сложения проекций
вектора 3-скорости:*

- $v'_x = (v_x - V) / (1 - V \cdot v_x / c^2),$

- $v'_y = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 - V \cdot v_x / c^2)) \cdot v_y,$

- $v'_z = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 - V \cdot v_x / c^2)) \cdot v_z.$

Формулы сложения скоростей Лоренца

- **Обратные преобразования:** $V \rightarrow -V$,
вместо **штрихованных** переменных
использовать **не штрихованные** и
наоборот.

$$v_x = (v'_x + V) / (1 + Vv'_x/c^2),$$

$$v_y = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 + Vv'_x/c^2)) \cdot v'_y,$$

$$v_z = (\sqrt{1 - \beta^2} / (1 + Vv'_x/c^2)) \cdot v'_z,$$

Опыт Алвагера, Фарли, Кжеллмана и Валлина
в ЦЕРН (1964).

- 1. **Генерировался сгусток** нейтральных пи-мезонов, имеющих скорость
 $V=0.99975 \cdot c$ ($\gamma=45$).
- 2. Эти пи-мезоны **распадались** на два гамма-кванта ($\tau=0.83 \cdot 10^{-16}$ с).
- 3. **Определялась скорость** квантов, летящих вперед (вдоль направления полета пи-мезонов)
- по время-пролетной методике ($v=x/t$):
 $v_{\gamma}=(2.9977 \pm 0.0004) \cdot 10^8$ м/с.

Опыт Алвагера, Фарли, Кжеллмана и Валлина
в ЦЕРН (1964).

- По формуле **Лоренца**

- $$v_x = (v'_x + V) / (1 + Vv'_x / c^2) =$$
$$= (1 + 0.99975) \cdot c / (1 + 0.99975 \cdot c \cdot c / c^2) = c \approx$$
$$\approx 2.9979 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

- **Опыт:** $v_y = (2.9977 \pm 0.0004) \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

- По формуле **Галилея:**

- $$v_x = v'_x + V = (1 + 0.99975) \cdot c \approx 2 \cdot c \approx$$
$$\approx 6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Релятивистская динамика

- 1. Импульс, энергия,
 - масса и сила в
 - релятивистской
 - механике.
- 2. Уравнение движения.

Релятивистский импульс

- Проекции релятивистского вектора
- 4-импульса частицы определяются как:
- $p^0 = m \cdot u^0 = m \cdot c \cdot \gamma,$
- $p^1 = m \cdot u^1 = m \cdot v_x \cdot \gamma,$
- $p^2 = m \cdot u^2 = m \cdot v_y \cdot \gamma,$
- $p^3 = m \cdot u^3 = m \cdot v_z \cdot \gamma,$
- Индексы написаны **сверху!!!**

Релятивистский импульс

- Пространственная часть релятивистского вектора 4-импульса частицы определяется как релятивистский 3-импульс:

- $$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{u} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma$$

Релятивистский импульс

- **Временная часть** релятивистского вектора
- 4-импульса частицы определяется как
- релятивистская энергия E частицы, поделенная на c :

- $p^0 = m \cdot u^0 = m \cdot c \cdot \gamma = E/c$

Релятивистская энергия

- Релятивистская энергия E частицы:
- $E = m \cdot c^2 \cdot \gamma =$
- $= m \cdot c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$

Преобразование 4 импульса

- Преобразования проекций вектора
- 4-импульса из системы K в K' :
- $p^{0'} = \gamma \cdot (p^0 - \beta \cdot p^1)$
- $p^{1'} = \gamma \cdot (p^1 - \beta \cdot p^0)$
- $p^{2'} = p^2$
- $p^{3'} = p^3$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c$$

Преобразование 4 импульса

- Преобразования проекций вектора 4-импульса из системы K в K' :

- $$E' = \gamma \cdot (E - \beta \cdot c \cdot p_x)$$

- $$p_x' = \gamma \cdot (p_x - \beta \cdot E/c)$$

- $$p_y' = p_y$$

- $$p_z' = p_z$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c$$

4-вектор силы

- Определение проекций
- 4-вектора силы Минковского:

- $dp^i/d\tau = f^i$

- $i=0, 1, 2, 3$

- Преобразования проекций из системы K в K' по формулам Лоренца

4-вектор силы

- $dp^0/d\tau = (d/d\tau) m \cdot u^0 = \gamma \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})/c,$
- $dp^1/d\tau = (d/d\tau) m \cdot u^1 = \gamma \cdot F_x,$
- $dp^2/d\tau = (d/d\tau) m \cdot u^2 = \gamma \cdot F_y,$
- $dp^3/d\tau = (d/d\tau) m \cdot u^3 = \gamma \cdot F_z$
- $\mathbf{F}$ – 3-вектор силы с проекциями
- F_x, F_y, F_z

3-вектор силы

- $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$

- $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma$

- $\mathbf{v}$ – 3-вектор скорости

3-вектор силы

- $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
- $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma$
- $p_x = m \cdot v_x \cdot \gamma$
- $p_y = m \cdot v_y \cdot \gamma$
- $p_z = m \cdot v_z \cdot \gamma$
- $F_x = dp_x/dt$
- $F_y = dp_y/dt$
- $F_z = dp_z/dt$

4-вектор ускорения

- Определение проекций 4-вектора ускорения:
 - $a^0 = (d/d\tau) u^0,$
 - $a^1 = (d/d\tau) u^1,$
 - $a^2 = (d/d\tau) u^2,$
 - $a^3 = (d/d\tau) u^3$
- Преобразования проекций из системы K в K' по формулам Лоренца

Релятивистский импульс

Если **определить импульс по Ньютону**

$$p_y = m \cdot dy/dt,$$

то ***нарушается*** закон
сохранения импульса.

- (время t — неинвариантная величина).

Соударение одинаковых шаров

- Нецентральное соударение одинаковых шаров массы m , движущихся параллельно оси OX
- со скоростью v в СЦМ.
- 1. До соударения $\sum p_{iy}=0$
- 2. После соударения проекции импульса шаров 1 и 2 на ось OY :
- $p_{1y}=m \cdot v_y$
- $p_{2y}=-m \cdot v_y$
- $\sum p_{iy}=0$. Импульс сохраняется.

Соударение одинаковых шаров

- В системе K' , движущейся со скоростью V относительно системы ЦМ:
- 1. До соударения $\sum p'_{iy} = 0$
- 2. После соударения проекции импульса шаров 1 и 2 на ось OY :
- $p_{1y} = m \cdot v_y \cdot \sqrt{(1 - \beta^2) / (1 - V \cdot v_x / c^2)}$,
- $p_{2y} = -m \cdot v_y \cdot \sqrt{(1 - \beta^2) / (1 + V \cdot v_x / c^2)}$,
- $\sum p'_{iy} \neq 0$.
- Импульс не сохраняется.

Релятивистский импульс

Чтобы **выполнялся** закон сохранения, **необходимо** принять

новое определение импульса :

- $p_y = m \cdot dy/d\tau,$
- где m , y и τ (*собственное время* $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$) – инвариантные величины, или
- $p_y = m \cdot dy / (dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}) = m \cdot v_y \cdot \gamma.$

Релятивистский импульс

- Закон сохранения импульса выполняется, если определить 3-импульс согласно формуле
- (в 3-х мерных обозначениях):

- $\mathbf{p}_{\text{рел}} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma,$

- так как

- $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma$

Релятивистское уравнение движения

- В **релятивистской** механике используется стандартная величина силы
- (в 3-х мерных обозначениях)
- **$\mathbf{F}$.**

Релятивистское уравнение движения

- **Релятивистское** уравнение движения на основании **опыта** определяется следующим образом

- (в 3-х мерных обозначениях):

- $$d(\mathbf{p}_{\text{рел}})/dt = \mathbf{F}.$$

- ИЛИ

- $$d(m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma)/dt = \mathbf{F}.$$

Масса

- Вычислим **отношение силы** к **ускорению** в релятивистской механике.
- Продифференцируем левую часть уравнения

- $$d(m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma)/dt = \mathbf{F}.$$

- Имеем:

- $$m \cdot \gamma \cdot d\mathbf{v}/dt + m \cdot \gamma^3 \cdot (v/c^2) \cdot dv/dt \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}.$$

- $$m \cdot \gamma \cdot \mathbf{a} + (m \cdot \gamma^3 \cdot (v/c^2) \cdot dv/dt) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F},$$

- где

- $$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$$

Масса, примеры движения

1. **Прямолинейное** движение

(скорость $\mathbf{v}$ и сила $\mathbf{F}$ параллельны):

$$m \cdot \gamma \cdot dv/dt + m \cdot \gamma^3 \cdot (v/c^2) \cdot dv/dt \cdot v = F,$$

$$m \cdot \gamma \cdot dv/dt \cdot (1 + \gamma^2 \cdot (v^2/c^2)) =$$

$$= m \cdot \gamma \cdot dv/dt \cdot (1) / (1 - (v^2/c^2)) =$$

$$= m \cdot \gamma^3 \cdot a.$$

$$m \cdot \gamma^3 \cdot a = F \rightarrow F/a = m \cdot \gamma^3$$

Масса, примеры движения

- 2. Движение **по окружности** с постоянной по величине скоростью v ($dv/dt=0$).
- (скорость $\mathbf{v}$ и сила $\mathbf{F}$ перпендикулярны):
- $m \cdot \gamma \cdot d\mathbf{v}/dt + m \cdot \gamma^3 \cdot (v/c^2) \cdot dv/dt \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}$.
- $m \cdot \gamma \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$

$$m \cdot \gamma \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \rightarrow F/a = m \cdot \gamma$$

Масса

ВЫВОД:

В релятивистской механике
отношение силы к ускорению

$$F/a$$

не определяет

инерцию массы

m

Преобразование ускорений

Определения:

Ускорения в системе K:

$$a_x = dv_x/dt, \quad a_y = dv_y/dt, \quad a_z = dv_z/dt.$$

Ускорения в системе K':

$$a'_x = dv'_x/dt', \quad a'_y = dv'_y/dt', \quad a'_z = dv'_z/dt'.$$

Преобразования ускорений.

- Ускорение:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$$

- Преобразование времени:

- $t = \gamma \cdot (t' + V \cdot x' / c^2).$

- Дифференциал:

- $dt = \gamma \cdot (dt' + V \cdot dx' / c^2) = \gamma \cdot dt' \cdot (1 + V \cdot v'_x / c^2).$

Преобразования ускорений

- Ускорение:
- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$
- Преобразование скоростей
- $v_x = (v'_x + V) / (1 + Vv'_x/c^2)$
- Дифференциалы скоростей
- $dv_x = dv'_x / (1 + Vv'_x/c^2) -$
- $- (v'_x + V)(V/c^2) dv'_x / (1 + Vv'_x/c^2)^2 =$
- $= dv'_x / (\gamma \cdot (1 + v'_x \cdot V/c^2))^2$

Преобразования ускорений

Делим левую часть на dt ,

а правую на $\gamma \cdot dt' \cdot (1 + V \cdot v'_x / c^2)$

и, используя определения, получаем

- $a_x = a'_x / (\gamma \cdot (1 + v'_x \cdot V / c^2))^3$
- Определим сопутствующую систему отсчета (ССО): $v'_x = 0$.
- Тогда: $a_x = a'_x / \gamma^3$

Сопутствующая система отсчета

- Частица массы m и заряда e движется параллельно оси OX в постоянном электрическом поле напряженности E , параллельном той же оси, с ускорением.
- Скорость v_x частицы изменяется.
- Рассматривается множество CO , в каждой из которых в данный момент времени скорость системы $V = v_x$.
- В этих системах частица покоится $v'_x = 0$.

Сопутствующая система отсчета

- Сопутствующая система отсчета — это инерциальная система, в которой проекция скорости v'_x частицы равна 0.
- В этой системе отсчета
- частица покоится.
- Рассматривается множество ССО, в каждой из которых в данный момент времени скорость системы $V=v_x$,
- а сама частица покоится.

Сопутствующая система отсчета

- Механика Ньютона:
- Прямолинейное движение
- с постоянным ускорением a
- $a = \text{const}$, $v \sim t$, $x \sim t^2$
- Релятивистская механика:
- Прямолинейное движение
- с постоянным ускорением a_0
- в сопутствующей системе отсчета
- $a = a_0 / \gamma^3$, $v < c$, $x \sim t$

Сопутствующая система отсчета

- В ССО K' ускорение
- $a'_x = dv'_x/dt' = e \cdot E/m = a_0 = \text{const}$

Ускорение в системе K :

$$a_x = dv_x/dt = a_0 \cdot (1 - (v_x/c)^2)^{3/2}$$

Разделяя переменные, получаем
уравнение для скорости

$$dv_x / (1 - (v_x/c)^2)^{3/2} = a_0 \cdot dt$$

Сопутствующая система отсчета

Определим характерное **время** t_0 (за это время тело достигает скорости c при движении с ускорением a_0 в механике Ньютона)

$$t_0 = c/a_0$$

Решение уравнения для **скорости**

$$v_x = c \cdot (t/t_0) / (1 + (t/t_0)^2)^{1/2}$$

Для **ускорения**

$$a_x = a_0 / (1 + (t/t_0)^2)^{3/2}$$

Для **пути** (интеграл от скорости)

$$x = c \cdot t_0 \cdot ((1 + (t/t_0)^2)^{1/2} - 1)$$

Сопутствующая система отсчета

Собственное время движения

$$\tau = \int \sqrt{1 - \beta^2} dt = t_0 \cdot \operatorname{arcsch}(t/t_0)$$

Для вычислений можно

использовать представление

$$\operatorname{arcsch}(z) = \ln(z + \sqrt{1 + z^2})$$

Тогда при $t \gg t_0$:

$$\tau = t_0 \cdot \ln(2 \cdot t/t_0)$$

Работа силы и энергия

- Умножим обе части
- уравнения движения на $\mathbf{v}$:
- $\mathbf{v} \cdot (d(\gamma m \mathbf{v})/dt) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$
- Правая часть – работа силы в единицу времени $\delta A/dt = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$.
- Поэтому левая часть должна быть равна
- скорости изменения энергии
- $dE/dt = \mathbf{v} \cdot (d(\gamma m \mathbf{v})/dt)$

Работа силы и энергия

- **Левая** часть (используем $\beta=v/c$)
- $\mathbf{v} \cdot (d(\gamma \cdot m \cdot \mathbf{v})/dt) =$
- $= (m \cdot \mathbf{v} / \sqrt{1 - \beta^2}) \cdot d\mathbf{v}/dt +$
- $+ (m \cdot \beta^2 / (1 - \beta^2)^{3/2}) \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt =$
- $= (m \cdot \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}) \cdot d\mathbf{v}/dt =$
- $= d/dt (m \cdot c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = dE/dt.$
- где $E = m \cdot c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Работа силы и энергия

- **Правая** часть (**работа** силы в единицу времени) равна **левой** (скорости изменения энергии):
 - $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = dE/dt.$
 - Поэтому **энергия** E равна:
 - $E = m \cdot c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Работа силы и энергия

Формула

Эйнштейна для

энергии:

$$E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Работа силы и энергия

Если тело **не движется**

($v=0$), то проявляется

новое свойство массы:

- масса m определяет

энергию покоя E_0 :

- $$E_0 = m \cdot c^2$$

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия T :

$$T = E - E_0 = \\ = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2.$$

1. Если скорость $v \ll c$, то имеем:

- $T = mc^2 \cdot (1 + (1/2) \cdot (v^2/c^2)) - mc^2 = m \cdot v^2/2.$

- 2. Если лоренцевский фактор велик ($\gamma \gg 1$), то

- $T \approx E$

Основные формулы

- **Энергия:**

- $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2 \cdot \gamma$

- Лоренцевский фактор:

- $\gamma = E / (mc^2)$

Основные формулы

- **Импульс** как функция энергии:

- $$\mathbf{p}_{\text{рел}} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \gamma$$

- $$\mathbf{p}_{\text{рел}} = \mathbf{v} \cdot E / c^2.$$

Основные формулы

- **Рассмотрим** переменные (аналогично x_0, x_1, x_2, x_3):
- $E, p_x \cdot c, p_y \cdot c, p_z \cdot c$
- как p_0, p_1, p_2, p_3 и инвариантный интервал для этого 4-х вектора:
- $E^2 - p^2 \cdot c^2 =$
- $= m^2 \cdot c^4 \cdot \gamma^2 - m^2 c^2 \cdot \gamma^2 \cdot v^2 =$
- $= m^2 \cdot c^4 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - v^2/c^2) =$
- $= m^2 \cdot c^4$

Основные формулы

- **Определение массы**

- в релятивистской механике:

- $$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

- (инвариантная

- величина).

Основные формулы

- **Определение массы**
- в релятивистской механике
(01.09.11. СФА. проф. Хойер
(директор ЦЕРН):
- Масса – свойство частицы с энергией E иметь скорость v :
- $$v = c \cdot \sqrt{1 - (m \cdot c^2 / E)^2}$$

Основные формулы

- Если

- $v=c,$

- то

- $p=E/c$

- и

- $m=\sqrt{(E^2-p^2c^2)}/c^2 =0.$

- Если частица движется со скоростью света ($v=c$), то ее масса равна нулю:

- $m=0.$

Масса в релятивистской механике, (Л.Б. Окунь)

- 1. **Масса** изолированной системы частиц **сохраняется**.
- 2. При **переходе** от одной инерциальной системы отсчета к другой **масса сохраняется**.
- 3. **Масса** является **инвариантом**.
- $$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Масса в релятивистской механике

- 4. **Масса не аддитивна.**
- 4.1. Для системы **свободных** частиц:
 - $m^2 = ((\sum E_i)^2 - (\sum c p_i)^2) / c^4$

Масса в релятивистской механике

- 4. **Масса не аддитивна.**
- 4.1. Для системы **свободных частиц**:
 - Пример: при столкновении двух протонов массы $m_p = 1$ ГэВ и энергией $E = 7000$ ГэВ, летящих **навстречу друг другу** с одинаковыми импульсами имеем:
 - $m = 7000 + 7000 = 14\ 000$ ГэВ

Масса в релятивистской механике

- 4. **Масса не аддитивна.**
- 4.2. Для системы **взаимодействующих** частиц:
 - $m < \sum m_i.$
 - **Дефект массы**
 - $\Delta m = \sum m_i - m$

Масса в релятивистской механике

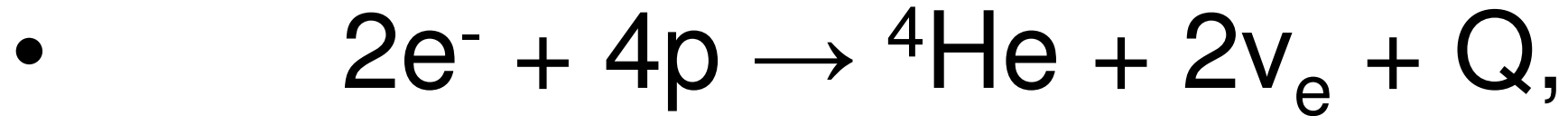
- 4. **Масса не аддитивна.**
- 4.2. Пример для системы **взаимодействующих** частиц:
 - Масса ядра железа $m_{\text{Fe}} = 55.92$ а.е.м.
Сумма масс нуклонов $\Sigma m_i = 56.449$ а.е.м.
 - **Дефект массы**
 - $\Delta m \approx 0.53$ а.е.м..
 - «**Железная звезда**» - все горючее выгорело

Масса в релятивистской механике

- 5. **Масса – мера энергии покоя:**
 - $E_0 = mc^2.$
- 6. **Масса равна нулю**, если частица движется со **скоростью света.**
 - $m = 0.$

Энергетика Солнца

- **Энергия** за счет реакции:



- $Q = 26.7 \text{ МэВ} =$

- $= 26.7 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 4.28 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$

- В **энергию** превращается **доля**
массы

- $\Delta m/m = 0.712 \cdot 10^{-2}$

Энергетика Солнца

- Солнечная постоянная
- $C = 1.37 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$
- Светимость Солнца
- $L_{\odot} = 4\pi R^2 \cdot C = 3.85 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$

Энергетика Солнца

- Каждую секунду в энергию превращается масса

- $\Sigma \Delta m =$

- $= (L_{\odot} / Q) \cdot (Q / c^2) = L_{\odot} / c^2 =$

- $= 3.85 \cdot 10^{26} / 9 \cdot 10^{16} =$

- $= 4.28 \cdot 10^9 \text{ кг} \sim 4.3 \cdot 10^6 \text{ т.}$

Энергетика Солнца

- Поток нейтрино на Земле

- $I_\nu =$

- $= 2 \cdot (L_{\odot} / Q) / 4\pi R^2 = 2 \cdot C / Q =$

- $= 2 \cdot 1.37 \cdot 10^3 / 4.28 \cdot 10^{-12} =$

- $= 6.4 \cdot 10^{14} \text{ частиц} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$

Сложение скоростей. Струи

- В **СЦМ** частица летит под углом
- θ_0
- В **лабораторной** системе частица летит под углом
- θ
- Угол θ можно выразить через θ_0 :
- $\text{tg}\theta = (1/\gamma) \cdot \text{tg}\theta_0 \cdot (1/(1+V/v_x))$
 - Уменьшение в γ раз!
- (Частицы летят вперед! Струя!)

Сложение скоростей. Направление на звезду

- В лабораторной системе звезда видна под углом

- θ

- В системе ракеты эта звезда видна под углом

- θ_p

- Этот угол равен:

- $\text{tg}\theta_p = (1/\gamma) \cdot \text{tg}\theta \cdot (1/(1 - V/v_x))$

- Уменьшение в γ раз!

- (Звезда видна в направлении движения!)