

Глава 4. Объем квантового состояния. Число состояний в заданном интервале энергий

Задача 1. Частица с массой m находится в одномерной потенциальной яме - «потенциальном ящике». Вид потенциальной энергии показан на рис.1 Шириной ящика L . Исходя из периодического (циклического) граничного условия Борна-Кармана

$$\Psi(x+L) = \Psi(x), \quad (1)$$

определите возможные значения импульса p_x , кинетической энергии, а также минимальное значение импульса и плотность состояний частицы в потенциальной яме.

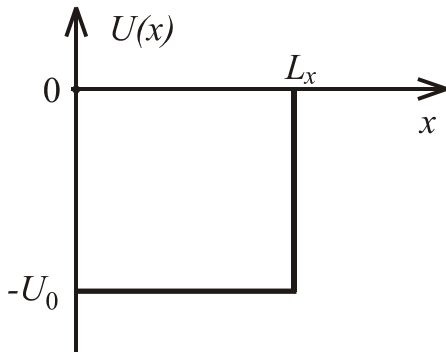


Рис. 1. Потенциальная энергия электрона $U(x)$ в одномерном кристалле длиной L_x

Решение. Условие Борна-Кармана означает, что частица не различает «левой» и «правой» границ ящика, т.е. фаза волны на одной из границ может отличаться от фазы волны на другой границе только на целое число 2π . Это условие напоминает условие квантования орбит в атоме Бора (см. задачу гл. 5).

Чтобы выполнялось условие Борна-Кармана для волны де-Бройля $\Psi(r, t) = C e^{i(\omega t - kr)}$, разность фаз $\Delta\varphi = \Delta(\omega t - kr)$ на границах ямы $\Delta\varphi = \varphi(L) - \varphi(0)$ может отличаться только на целое число 2π : $\Delta\varphi = \varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi n$ (то есть $k_n L = 2\pi n$). Отсюда следует условие квантования волнового вектора

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n \quad (4)$$

и импульса

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} n, \quad (5)$$

При этом из (4) следует, что на ширине потенциальной ямы L должно укладываться целое число длин волн

$$L = n\lambda_n. \quad (6)$$

Волновой вектор может принимать только дискретные значения, отличающиеся на $\delta k_x = 2\pi/L$. Так как квантовое состояние частицы определяется ее волновым вектором (или импульсом) и энергией, связанной с импульсом законом дисперсии, то величина $\delta k_x = 2\pi/L$ является **объемом квантового состояния частицы** в пространстве волновых векторов в одномерном случае. В двумерном случае объем равен $\delta k_x \delta k_y = (2\pi/L)^2$, в трехмерном - $\delta k_x \delta k_y \delta k_z = (2\pi/L)^3$. В пространстве импульсов квантовый объем записывается аналогично:

в одномерном случае $\delta p_x = 2\pi\hbar/L$;

в двумерном $\delta p_x \delta p_y = (2\pi\hbar/L)^2$;

в трехмерном $\delta p_x \delta p_y \delta p_z = (2\pi\hbar/L)^3$.

Понятие объема **p**-состояния имеет глубокий квантово-механический смысл, связанный с соотношением неопределенностей Гейзенберга $\delta p_x \delta x \geq \hbar$, где δp_x и δx неопределенности импульса и координаты частицы при их одновременном определении. Описывая частицу волной на длине L , естественно считать, что неопределенность координаты частицы имеет порядок длины L : $\delta x \approx L$. При этом неопределенность волнового вектора

$$\delta k_x = \frac{1}{\hbar} \delta p_x \geq \frac{1}{\hbar} \frac{\hbar}{\delta x} = \frac{2\pi}{L}$$

можно рассматривать как объем состояния частицы в **k**-пространстве (объем **k**-состояния).

Учитывая условие нормировки $\int_0^L \Psi \Psi^* dx = 1$, комплексная амплитуда волновой функции частицы $\Psi(x)$ приобретает вид:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(2\pi n/L)x}. \quad (7)$$

Из (5) с учетом закона дисперсии следует условие квантования энергии

$$W_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2} n^2. \quad (8)$$

Чем больше номер n квантового состояния, тем больше энергия и больше «зазор» $\Delta W_{n,n+1}$ между разрешенными значениями энергии

$$\Delta W_{n,n+1} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{mL^2} n. \quad (9)$$

Если энергетический зазор между уровнями мал, так что спектр можно считать квазинепрерывным, то можно ввести понятие плотности состояний dn/dW . По размерности это число состояний, приходящееся на единичный интервал энергии. Из (8) находим $n = \frac{L\sqrt{2mW_n}}{2\pi\hbar}$ и

$$\frac{dn}{dW} = \frac{L}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2W_n}}. \quad (9)$$

Таким образом, в одномерном случае с увеличением энергии плотность состояний уменьшается.

Решение данной задачи еще раз подтверждает вывод о том, что **если движение ограничено в пространстве, то оно квантуется**. Квантование движения означает квантование импульса и энергии, каждым значениям которых соответствуют стационарные состояния. Набор разрешенных дискретных значений энергии называется **энергетическим спектром** частицы.

Замечание. Условие (1) отличается от условия возбуждения собственных (нормальных) колебаний в ограниченной среде (в стержне, струне (см. задачи 6, 7 гл. 1), когда образуются стоячие волны и на длине L укладывается целое число длин полуволин

$$L = n \cdot \lambda / 2. \quad (2)$$

В случае струны на границах

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0 \quad (3)$$

и $|\Psi(0)|^2 = |\Psi(L)|^2 = 0$, то есть вероятность перейти границу равна нулю.

Полная аналогия с обычными волнами не возможна, так как стационарные решения системы в случае (2) и (3) изображались бы стоячими волнами, образующимися в результате отражений волн. Скорость распространения энергии в стоячей волне равна нулю, а частица, поведение которой описывается волновой функцией, перемещается в области потенциальной ямы, перенося с собой энергию.

По условию (1) волновая функция периодична по L , и определена во всем пространстве как бегущая волна с однородной плотностью

вероятности $\Psi\Psi^* = 1/L$ (в отличие от стоячих волн, для которых $\Psi\Psi^* = (2/L)\sin^2(n\pi x/L)$). Таким образом, условие Борна–Кармана обеспечивает непрерывность волновой функции на границах потенциальной ямы, сохраняя возможность использования бегущих волн для описания частиц.

Ответ. $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $W_n = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2}n^2$, $p_1 = \frac{2\pi\hbar}{L}$, $\frac{dn}{dW} = \frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2W_n}}$.

Задача 2. (квантовые состояния молекулы идеального газа). Идеальный газ, состоящий из N молекул, заключен в сосуд, имеющий форму куба со стороной L . Масса одной молекулы m . Определите степень вырождения энергетических уровней и число доступных состояний $\Gamma(W, V, N)$ в интервале значений $(W, W + dW)$ для одной молекулы и системы, состоящей из N одноатомных молекул.

Решение. В одномерном случае при прямолинейном движении частицы вдоль оси Ox ее импульс может принимать только значения, отмеченные точками на **рис.2а** (см. задачу 1). Если частица движется в двумерном координатном пространстве, то разрешенным значениям импульса \mathbf{p}_i на плоскости $p_x p_y$ соответствуют центры квадратов со стороной $2\pi\hbar/L$ (**рис.2б**). При движении в трехмерном координатном пространстве разрешенным значениям импульсов соответствуют центры кубиков со сторонами $2\pi\hbar/L$ (**рис.2в**).

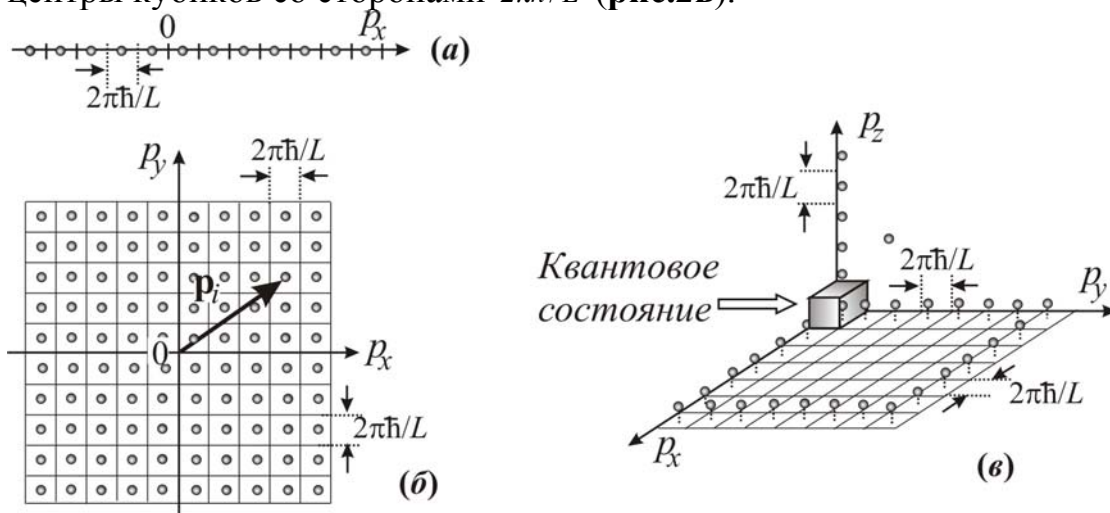


Рис.2. Разрешенные дискретные значения проекций импульса в одномерном (а), двухмерном (б) и трехмерном (в) случаях (на оси Ox , Oy , Oz соответственно) у молекулы газа, заключенной в объеме $V = L^3$, могут принимать только дискретные значения, кратные $2\pi\hbar/L$.

Поскольку импульс характеризует состояние частицы в импульсном пространстве, то кубик со стороной $2\pi\hbar/L$ представляет

собой одно квантовое состояние частицы в импульсном пространстве. Объем одного квантового состояния равен

$$\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 \quad (10)$$

Если известен импульс $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ частицы массой m , то из закона дисперсии можно найти ее кинетическую энергию E (энергетический уровень, на котором находится данная частица)

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (11)$$

Если известно, что значение энергии частицы заключено в интервале $(W, W + dW)$, то в импульсном пространстве существует множество квантовых состояний с такой же энергией, отличающихся направлением импульса \mathbf{p} . Эти состояния заключены в сферическом слое (рис.3), радиус которого p_W определяется из (11):

$$p_W = \sqrt{2mW}. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнение (12) по энергии, получаем связь интервала энергии dW с толщиной сферического слоя dp_W в импульсном пространстве:

$$dp_W = \sqrt{\frac{m}{2W}} dW. \quad (13)$$

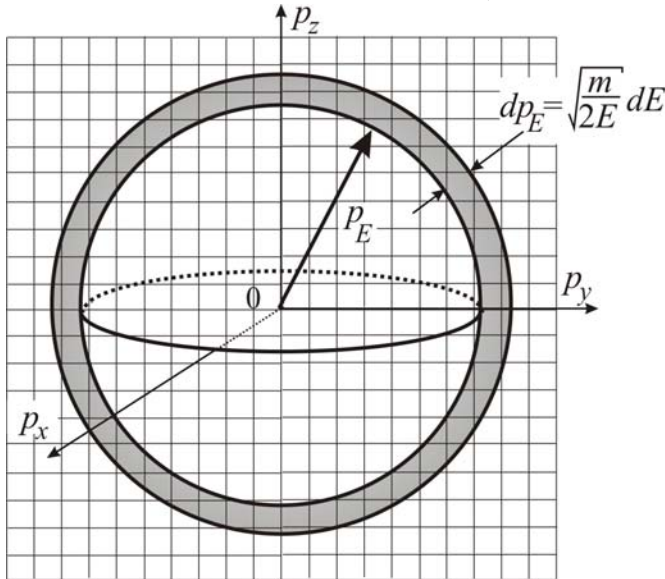


Рис.3. Шаровой слой (затемнен), в котором находятся квантовые состояния молекулы идеального одноатомного газа, заключенной в объеме $W = L^3$ и имеющей значение энергии в интервале $(W, W + dW)$ и импульс $p_W = \sqrt{2mW}$.

Число микросостояний, характеризуемых значениями энергии в интервале $(W, W + dW)$ – это число Γ_1 доступных состояний одной частицы, находящейся в объеме $V = L^3$ и имеющей заданное значение энергии. Полное число состояний, имеющих одну и ту же энергию, называется **степенью вырождения** данного энергетического уровня

$g(W)$. Оно равно объему шарового слоя $4\pi p_W^2 \cdot dp_W$, деленному на объем $(2\pi\hbar/L)^3$ квантового состояния в импульсном пространстве:

$$\Gamma_1 \equiv g(W) = \frac{4\pi p_W^2 \cdot dp_W}{(2\pi\hbar/L)^3} = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V \sqrt{W} dW. \quad (14)$$

Число состояний $\Gamma_1 \equiv g(W)$, соответствующих одному и тому же интервалу энергии $(W, W + dW)$, с ростом энергии $(W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow W_3)$ увеличивается пропорционально $\sqrt{W} dW$ (14), несмотря на то, что в импульсном пространстве ширина $dp \sim dW / \sqrt{W}$ соответствующего сферического слоя уменьшается с ростом энергии: $dp_1 > dp_2 > dp_3$ (**рис.4**).

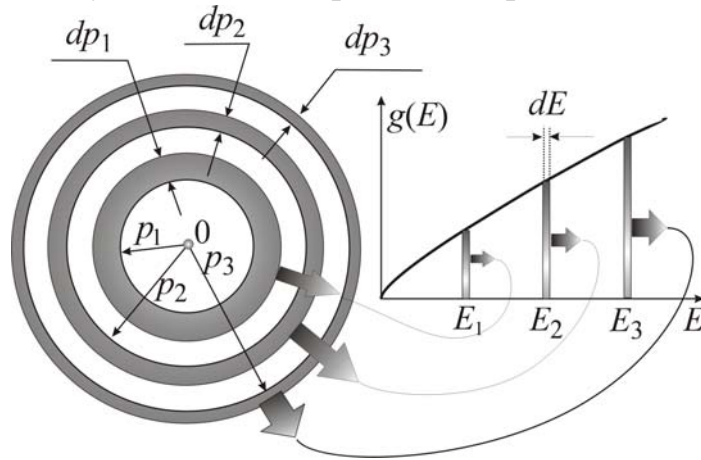


Рис.4. При фиксированной ширине энергетического интервала dE с ростом энергии частицы $(W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow W_3)$ ширина сферического слоя $dp \sim dW / \sqrt{W}$ (13) в импульсном пространстве уменьшается $dp_1 > dp_2 > dp_3$, а степень вырождения (14) увеличивается.

Рассмотрим *систему из N молекул*, находящихся в кубическом сосуде объемом $V = L^3$, где L – длина стороны куба. Определим число доступных состояний этой системы с энергией, меньшей W , где $W = \sum_{i=1}^N W_i$, а W_i – энергия i -й частицы. Состояния всех N частиц в импульсном пространстве описывается $3N$ параметрами: $(p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}, \dots, p_{Nx}, p_{Ny}, p_{Nz})$. Поэтому искомые состояния находятся внутри $3N$ -мерной сферы, радиус p_W которой в импульсном $3N$ -мерном пространстве также определяется соотношением (13) $p_W = \sqrt{2mW}$. Действительно, максимальное значение, которое может иметь, например, p_{1x} , определяется условием равенства нулю проекций импульсов всех других частиц, а также $p_{1y} = p_{1z} = 0$.

В *одномерном* случае число состояний Ω_1 , энергия которых $\leq W$, пропорционально длине интервала $2p_W$ (удвоение происходит из-за того, что импульс может быть направлен как в положительном, так и в отрицательном направлении координатной оси):

$$\Omega_1 = \frac{2p_W}{2\pi\hbar/L} \sim L \cdot p_W \sim L\sqrt{W}.$$

В *двумерном* случае Ω_2 пропорционально площади круга радиусом p_W :

$$\Omega_2 = \frac{\pi p_W^2}{(2\pi\hbar/L)^2} \sim L^2 \cdot p_W^2 \sim L^2 W.$$

В *трехмерном* случае Ω_3 пропорционально объему шара радиусом p_W :

$$\Omega_3 = \frac{4}{3} \frac{\pi p_W^3}{(2\pi\hbar/L)^3} \sim L^3 \cdot p_W^3 = V \cdot W^{3/2}.$$

Следовательно, по аналогии можно ожидать, что в $3N$ -мерном пространстве для импульсов N молекул число состояний Ω_{3N} пропорционально

$$\Omega_{3N} \sim L^{3N} \cdot p_W^{3N} = V^N \cdot W^{3N/2}.$$

Определяя приращение $d\Omega_{3N}$ при бесконечно малом возрастании энергии dW , получаем число состояний, энергия которых лежит в интервале $(W, W + dW)$: $\Gamma_{3N} = d\Omega_{3N} \sim V^N W^{3N/2-1} dW$.

Поскольку число молекул в газах очень велико, в показателе степени у энергии E можно пренебречь единицей. Тогда окончательно для изолированной системы идеального газа, состоящей из N одноатомных молекул, получаем выражение для полного числа доступных состояний $\Gamma(W, V, N)$ с энергией в интервале значений $(W, W + dW)$:

$$\Gamma(W, V, N) \sim V^N W^{3N/2} dW. \quad (15)$$

Замечания.

1 Выше был рассмотрен случай, когда вероятность, с которой частица имеет энергию W , не зависит от ее положения в объеме V . Если система находится в некотором внешнем поле и энергия частиц различна в разных точках объема: $W = W(\mathbf{r}_i)$, то для N частиц следует рассматривать не только $3N$ -мерное импульсное пространство $\{\mathbf{p}_i\}$, а $6N$ -мерное **фазовое пространство** $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$ – пространство координат \mathbf{r} и импульсов \mathbf{p} . В этом случае, квантовое состояние частицы в координатно-импульсном фазовом пространстве занимает объем

$\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = (2\pi\hbar)^3$. Число состояний в фазовом объеме $dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz \equiv d\tau_{\mathbf{p}} d\tau_{\mathbf{r}}$ равно $dN = \frac{dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{(2\pi\hbar)^3} \equiv \frac{d\tau_{\mathbf{p}} d\tau_{\mathbf{r}}}{(2\pi\hbar)^3}$.

Вероятность нахождения частицы в элементе фазового пространства $d\tau_{\mathbf{p}} d\tau_{\mathbf{r}} = dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ вблизи точки (p_x, p_y, p_z, x, y, z) фазового пространства можно рассматривать, как вероятность для частицы иметь заданную энергию $W(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, соответствующую этому элементу фазового пространства.

2. вычисление термодинамической вероятности позволяет найти термодинамические параметры для системы идеального газа. Например, из соотношения (15) можно получить выражение для энтропии идеального газа:

$$S = k_B \ln \Gamma(W, V, N) = S_0 + Nk_B \ln V + \frac{3}{2} Nk_B \ln W.$$

Для одного моля идеального газа $N = N_A$ и $C_V = 3k_B N_A / 2 = 3R/2$ и $S = k_B \ln \Gamma = S_0 + R \ln V + C_V \ln W$,

где S_0 – часть энтропии, не зависящая от энергии и объема.

Ответ. $\Gamma_1 = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V \sqrt{W} dW$, $\Gamma(W, V, N) \sim V^N W^{3N/2} dW$.

Задача 3. (электроны в металле). Определите объем квантового состояния (в импульсном пространстве) для валентных электронов в куске металла, имеющего форму куба со стороной L . Определите импульс и максимально возможную энергию электронов при абсолютном нуле температур, а также плотность электронных состояний.

Решение. Благодаря кулоновскому полю положительно заряженных ионов полная энергия электронов в кристалле меньше, чем в вакууме на величину, определяющую работу выхода электронов, например, при внешнем фотоэффекте. Поэтому кристалл можно рассматривать как потенциальный ящик для электронов, ограниченный поверхностью кристалла, с некоторым постоянным значением потенциала внутри объема кристалла. Таким образом, решение данной задачи аналогично решению задачи 1 и дискретные допустимые значения волнового вектора (\mathbf{a} , следовательно, и импульса $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$) в потенциальной яме равны

$$k_{xn} = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_{yn} = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_{zn} = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad (16)$$

и импульса \mathbf{p} :

$$p_{xn} = \frac{2\pi\hbar}{L_x} n_x, \quad p_{yn} = \frac{2\pi\hbar}{L_y} n_y, \quad p_{zn} = \frac{2\pi\hbar}{L_z} n_z, \quad (17)$$

где $n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \dots$

Каждое разрешенное состояние занимает **элементарный квантовый объем в пространстве волновых векторов k :**

$$\Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_z = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V};$$

и импульсов p :

$$\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} = \frac{h^3}{V}, \quad (18)$$

где $V = L_x L_y L_z$ — объем кристалла.

Квантование волнового вектора (импульса) приводит к **квантованию кинетической энергии**. Так как $L_x = L_y = L_z = L$, то для кинетической энергии получаем выражение:

$$W(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2 = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m_0 V^{2/3}} n^2, \quad (19)$$

где $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$.

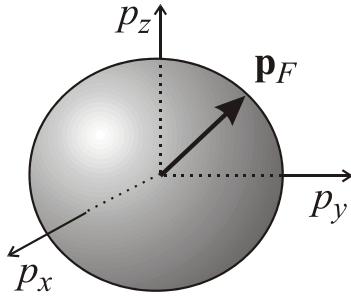


Рис. 5. Сфера Ферми в импульсном пространстве

Из формулы (19) следует, что одно и то же значение кинетической энергии (при фиксированном n) может осуществляться при помощи различных комбинаций чисел n_x, n_y и n_z . Это означает, что нескольким квантовым состояниям с различными волновыми функциями отвечает одно и тоже значение энергии. Одно и то же значение энергии имеют несколько состояний, то оно называется **вырожденным**. Например, **уровень энергии** с $n^2 = 6$ для кубической потенциальной ямы может реализовываться тремя различными комбинациями чисел (n_x, n_y, n_z) : $(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)$, то есть является трехкратно вырожденным.

Ограничение движения электронов приводит к тому, что непрерывный энергетический спектр $W = p^2/(2m)$, характерный для свободного электрона, становится дискретным, с квантованными значениями импульса (17) и энергии (19) для электрона, движущегося в ограниченном пространстве кристалла.

Рассмотрим кристалл единичного объема $L_x L_y L_z = V = 1$. В таком кристалле число (концентрация) коллективизированных электронов равна $n = zN$, где N — число атомов, z — их валентность. Согласно принципу Паули для ферми-частиц (см. следующую гл.), в каждом состоянии, занимающем в \mathbf{p} -пространстве объем, равный $(2\pi\hbar)^3$, могут находиться только два электрона с противоположно направленными спинами. При абсолютном нуле температуры электроны занимают самые низкие энергетические состояния.

Таким образом, при $T = 0$ К электроны заполняют в \mathbf{p} -пространстве сферу (рис. 5), радиус которой $p_F = \hbar k_F$ определяется из равенства числа электронов zN удвоенному (за счет спиновых состояний) числу элементарных квантовых ячеек (18?) в объеме $(4/3)\pi p_F^3$ сферы, то есть

$$2 \frac{(4/3)\pi p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = zN = n. \quad (20)$$

Максимально возможные значения импульса p_F и соответствующей ему энергии E_F электронов при $T = 0$ К, называются, соответственно, **импульсом и энергией Ферми**. Изоэнергетическая ($W = W_F = \text{const}$) поверхность (или совокупность поверхностей) в пространстве импульсов, внутри которой все состояния заполнены при $T = 0$ К, называется **поверхностью Ферми**. Импульс и энергия Ферми на основании (20) определяются следующими соотношениями:

$$p_F = \hbar(3\pi^2 zN)^{1/3} = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}, \quad (21)$$

$$W_F(0) = \frac{p_F^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (22)$$

Таким образом, энергия Ферми растет с увеличением концентрации коллективизированных электронов пропорционально $n^{2/3}$.

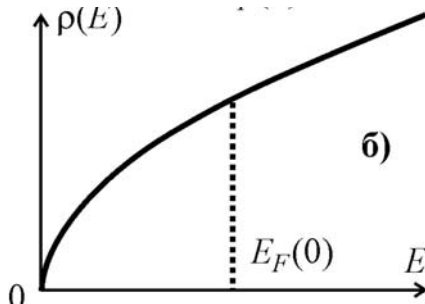


Рис. 6. Зависимости от энергии E плотности состояний $\rho(W)$

Плотность энергетических состояний. Число электронных состояний $dn_s(E)$ с заданными значениями энергии в интервале от E до $(W + dW)$, равно удвоенному (за счет двух противоположных

направлений спина) числу элементарных квантовых ячеек (18) в \mathbf{p} -пространстве в сферическом слое радиусом $p = (2mW)^{1/2}$ и толщиной $dp = d(2mW)^{1/2}$:

$$dn_s(W) = 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{W} dW. \quad (23)$$

Таким образом, **плотность состояний** $\rho(W)$, то есть число разрешенных состояний электронов в единичном интервале энергии, для кристалла единичного объема равна

$$\rho(W) \equiv \frac{dn_s}{dW} = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{W} \sim \sqrt{W} \quad (24)$$

Вид функции $\rho(W)$ (24) показан на **рис. 6**. Плотность состояний $\rho(W)$ растет с увеличением энергии $\sim \sqrt{W}$.

Ответ. $p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$, $W_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$, $\rho(W) = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{W}$.

Задача 4. Современные технологии (например, сканирующий туннельный микроскоп) позволяют из отдельных атомов формировать новые структуры, которые могут обладать определенными физическими свойствами, не наблюдаемыми в объектах иного масштаба. Оцените число атомов, необходимых для создания кластера и его линейный размер L , чтобы максимальное расстояние между энергетическими уровнями для кластера было бы равно $\Delta W \approx k_B T$ при $T=1$ К. Межатомное расстояние принять равным $a = 1$ Å.

Решение. Импульс электрона в металле принимает дискретные значения. Это связано с тем, что движение электронов в пространстве ограничено (например, объемом кристалла L^3 , где L – его характерный линейный размер):

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} j_x \mathbf{e}_x + \frac{2\pi\hbar}{L} j_y \mathbf{e}_y + \frac{2\pi\hbar}{L} j_z \mathbf{e}_z.$$

Квант импульса равен $\Delta p = 2\pi\hbar / L$, а соответствующее расстояние между энергетическими уровнями:

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{1}{m} p \Delta p.$$

Энергетическое расстояние между уровнями увеличивается с ростом импульса и максимально для электронов с импульсом Ферми, определяемым выражением (21), где для концентрации использовано равенство $n = 1/a^3$:

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{L} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{a} (3\pi^2)^{1/3},$$

Здесь a^3 - объем элементарной ячейки, $N = (L/a)^3$ - число атомов в кристалле. В этом случае: $\Delta W = \frac{1}{m} \underbrace{\hbar (3\pi^2)^{1/3}}_{p_F} \underbrace{\frac{2\pi\hbar}{L}}_{\Delta p}$ и

$$L = \frac{\hbar^2 2\pi (3\pi^2)^{1/3}}{am\Delta W},$$

$$N = \left(\frac{L}{a}\right)^3 = \frac{\hbar^6 3\pi^2 (2\pi)^3}{(a^2 m \Delta W)^3}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$L \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad N \approx 3 \cdot 10^{17}.$$

Ответ: $L \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad N \approx 3 \cdot 10^{17}.$

Подчеркнем, что в данной главе в основном исследовались квантовые состояния одной частицы. Как бы рассматривались в каких «комнатах» может находиться частица и, сколько таких комнат на одном «этаже» – энергетическом уровне. Заполнение же этих состояний («комнат») частицами не рассматривалось.

Если частиц N и они не взаимодействуют друг с другом, то есть они могут рассматриваться как идеальный газ частиц, то рассчитанные для одной частицы состояния сохраняются. Заполнение состояний частицами описывается статистическим законом – вероятностью заполнения какого-либо состояния с заданной энергией. Есть два основных статистических закона для идентичных невзаимодействующих частиц, к изучению которых мы и переходим в следующей главе.

Задания для самостоятельной работы

1. Определите минимальную длину волны де-Бройля электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$. Концентрация электронов при указанной температуре равна n .

Ответ: $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{(3\pi^2 n)^{3/2}}}.$

2. Для одновалентного металла с простой кубической решеткой с периодом $a = 3,3 \text{ \AA}$ определите импульс Ферми p_F .

Ответ: $p_F = 9,9 \cdot 10^{-25} \text{ кг м / с}.$