

Глава. Резонансное прохождение барьера и туннельный эффект в одномерных задачах

На предыдущем семинаре мы отметили, что классическому сохранению числа частиц в квантовой теории соответствует сохранение полной вероятности, описываемое уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1)$$

где $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ – плотность вероятности обнаружения частицы в момент времени t в точке \mathbf{r} . При этом плотность потока вероятности \mathbf{j} задается выражением

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2)$$

В одномерном случае

$$j_x = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) \quad (3)$$

В **стационарных** задачах (при $\frac{\partial}{\partial t} U = 0$) энергия квантовой частицы сохраняется (впрочем, как и классической). Уравнение Шредингера приобретает вид стационарного уравнения

$$W\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) \psi. \quad (4)$$

При этом временная зависимость волновой функции ψ сводится к фазовому множителю $\exp\left(-\frac{iWt}{\hbar}\right)$. Для таких состояний $\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$ и уравнение (1) приобретает в одномерном случае вид $\frac{\partial}{\partial x} j_x = 0$. Иначе говоря $j_x = \text{const}$. То есть имеет место **сохранение потока**.

Задача 1. Показать, что плотность потока вероятности равна всюду нулю $j_x = 0$ в стационарных задачах с дискретным спектром и в задаче 2-II

предыдущего семинара и отлична от нуля в задаче 2-I из предыдущего семинара. Рассчитать поток вероятности в последнем случае.

Решение. Из уравнения (3) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} j_x = \frac{\hbar}{2im} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* \right). \quad (5)$$

Для действительных W и $U(x)$ из (4) следует

$$W\psi^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) \psi^*. \quad (6)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - W) \psi$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* = \frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - W) \psi^*,$$

то из (5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} j_x = \frac{1}{i\hbar} \left(\psi^* (U - W) \psi - \psi (U - W) \psi^* \right) = 0 \quad (7)$$

и

$$j_x = \text{const}.$$

В задачах с дискретным спектром обычно используют действительные решения стационарного уравнения Шредингера. Для таких решений из (3) получаем $j_x = 0$. Например, для потенциальной ямы с бесконечными стенками четные и нечетные решения:

$$\psi_{\text{чет}}(x) = A \cos kx = \frac{A}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad \text{и} \quad \psi_{\text{нечетн}}(x) = A \sin kx = \frac{A}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}), \quad (8)$$

представляют собой стоячие волны, скорость потока вероятности которых равна нулю: поток частиц отсутствует.

В задаче 2-II из предыдущего семинара (потенциальная энергия в виде ступеньки и $W < U_0$) решение имеет вид

при $x < 0$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{iP_1 x/\hbar} + A_1 e^{-i(P_1 x/\hbar + \varphi_2)}; \quad (9)$$

и при $x > 0$

$$\psi_2(x) = \frac{2A_1}{\sqrt{1 + (\gamma\hbar / P_1)^2}} e^{-\gamma x - i\varphi_1}. \quad (10)$$

Подставляя комплексные выражения (9) и (10) формулу в (3), убеждаемся, что и в этом случае $j_x = 0$.

Рассмотрим теперь случай надбарьерного отражения, описанный в задаче 2-I из предыдущего семинара (потенциальная энергия в виде ступеньки и $W > U_0$).

Подстановка решения

$$\psi_1(x) = A_1 e^{iP_1 x/\hbar} + A_2 e^{-iP_1 x/\hbar} \quad (11)$$

в (3) дает при $x < 0$

$$(j_x)_1 = \frac{P_1}{m} (|A_1|^2 - |A_2|^2) > 0; \quad (12)$$

и при $x > 0$:

$$(j_x)_2 = \frac{P_2}{m} |A_3|^2. \quad (13)$$

Используя выражения для A_2 () и A_3 (), полученные в решении задачи 2-I предыдущего семинара, убеждаемся в том, что

$$(j_x)_1 = (j_x)_2, \quad (14)$$

то есть полный поток отличен от нуля и сохраняется, в том числе и в точке скачка потенциальной энергии $U(x)$ при $x = 0$. При этом вклад в поток падающей волны де Бройля

$$(j_x)_{\text{пад}} = \frac{P_1}{m} |A_1|^2 \quad (15)$$

разделяется на поток, связанный с отраженной волной $(j_x)_{\text{отр}} = -\frac{P_1}{m} |A_2|^2$ и

прошедшей волной $(j_x)_{\text{прош}} = \frac{P_2}{m} |A_3|^2$:

$$(j_x)_{\text{пад}} = |(j_x)_{\text{отр}}| + (j_x)_{\text{прош}}. \quad (16)$$

Ответ: $j_x = \frac{P_1}{m} (|A_1|^2 - |A_2|^2) > 0$

Задача 2. Рассчитать коэффициенты отражения R и прохождения T для квантовой частицы движущейся в потенциальном поле в виде одномерной ступеньки (см. условия задачи 2-I предыдущего семинара).

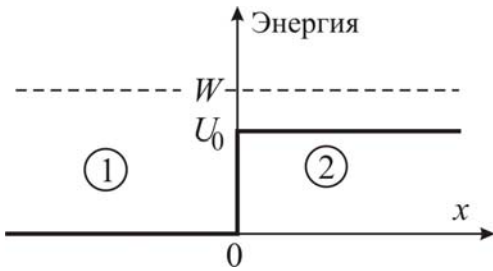


Рис. 1. «Ступенька» потенциальной энергии частицы при $W > U_0$

Решение. Коэффициент прохождения равен отношению прошедшего и падающего потока вероятности:

$$T = j_{\text{прош}} / j_{\text{пад}} = (P_2 / P_1) |A_3|^2 / |A_1|^2, \quad (16-1)$$

а коэффициент отражения волны де Бройля равен отношению отраженного и падающего потока вероятности:

$$R = j_{\text{отр}} / j_{\text{пад}} = |A_2|^2 / |A_1|^2. \quad (16-2)$$

Коэффициенты T и R находим по определению, используя волновые функции, полученные в задаче 2-I (см. предыдущий семинар):

$$T = \frac{4\sqrt{W(W-U_0)}}{(\sqrt{W} + \sqrt{W-U_0})^2}, \quad R = \frac{(\sqrt{W} - \sqrt{W-U_0})^2}{(\sqrt{W} + \sqrt{W-U_0})^2} \quad (17)$$

и

$$T + R = 1.$$

Примечание. 1. Формулы (17) являются прямым аналогом формул Френеля для световых волн на резкой границе двух сред с разными показателями преломления. Аналогично оптической задаче, данная задача позволяет сменить направление падающей волны на обратное, при этом из-за симметрии формул (17) коэффициенты отражения и прохождения останутся неизменными.

2. В задаче 2-1, рассмотренной ранее (см. гл.), волна де-Бройля падает на барьер из области с меньшей потенциальной энергией в область с большей

потенциальной энергией, но, если исходная волна попадает в обратном направлении, то формулы (17) остаются справедливыми. Проверьте это самостоятельно.

Ответ.
$$T = \frac{4\sqrt{W(W-U_0)}}{(\sqrt{W} + \sqrt{W-U_0})^2}, \quad R = \frac{(\sqrt{W} - \sqrt{W-U_0})^2}{(\sqrt{W} + \sqrt{W-U_0})^2}$$

Задача 3. Найти коэффициент прохождения и коэффициент отражения для волны де Бройля, падающей на ступенчатый потенциальный барьер (см. рис. и задачу 3-1 предыдущего семинара).

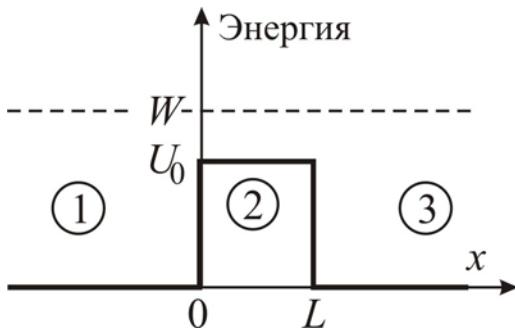


Рис. 2. Потенциальный барьер $W > U_0$

Решение. Волновая функция при $x < 0$ имеет вид

$$\psi_1 = A_1 e^{i\frac{P_1 x}{\hbar}} + A_2 e^{-i\frac{P_1 x}{\hbar}}, \quad P_1 = \sqrt{2mW}, \quad (18)$$

а при $x > L$

$$\psi_3 = A_5 e^{i\frac{P_1}{\hbar}(x-L)}. \quad (19)$$

Коэффициентом прохождения волны де Бройля является величина $T = |A_5 / A_1|^2$, а коэффициентом отражения – $R = |A_2 / A_1|^2$. Конкретные значения этих коэффициентов можно найти с помощью формул (28)-(31) (см. гл. предыдущего семинара). Опуская довольно громоздкие преобразования, представим конечный результат:

$$T = \frac{8W(W-U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cos\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W-U_0)}\right)}, \quad (20)$$

$$R = 1 - \frac{8W(W - U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cos\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W - U_0)}\right)}, \quad (21)$$

при $W > U_0$, очевидно, имеет место баланс потоков: $R + T = 1$

Ответ.

$$T = \frac{8W(W - U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cos\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W - U_0)}\right)},$$

$$R = 1 - \frac{8W(W - U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cos\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W - U_0)}\right)}.$$

Задача 4. Проанализировать зависимость коэффициентов надбарьерного прохождения T и отражения R , полученные в предыдущей задаче в зависимости от энергии падающей частицы W и от толщины барьера L .

Решение. Рассмотрим сначала зависимость коэффициента надбарьерного прохождения T от энергии W . Для этого построим график $T(W)$, например, при $L / \hbar = 32$ и $2mU_0 = 1$

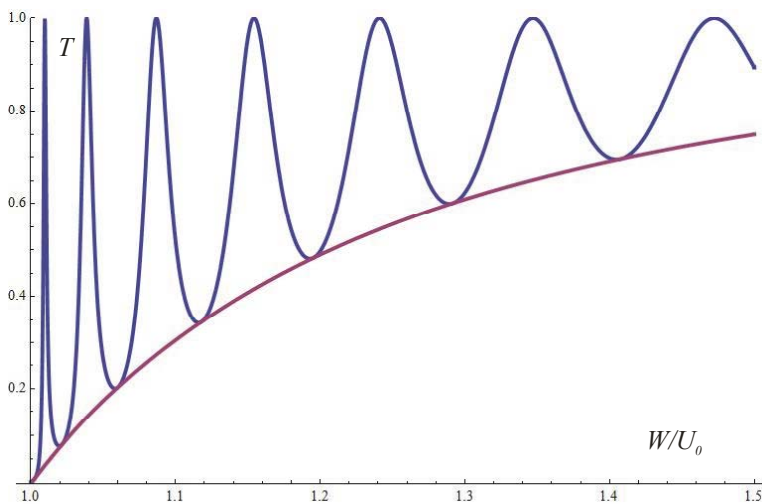


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения T от энергии W падающей частицы

График (рис.3) $T(W)$ (20) демонстрирует осциллирующий характер зависимости при $W > U_0$. Заметим также, что при $W / U_0 = 1$ $T = 0,004 > 0$, что существенно для дальнейшего изложения.

Коэффициент прохождения достигает локального максимума $T = 1$, когда $\cos\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W_n - U_0)}\right) = 1$, то есть при значениях энергии падающей частицы, удовлетворяющих соотношению

$$W_n = U_0 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar n}{L} \right)^2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

При значениях энергии

$$W'_n = U_0 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar (n + 1/2)}{L} \right)^2, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

когда $\cos(2L / \hbar \sqrt{2m(W'_n - U_0)}) = -1$,

коэффициент прохождения T достигает локального минимума:

$$T_n = \frac{8W'_n(W'_n - U_0)}{8W_n^2 - 8U_0W'_n + 2U_0^2}. \quad (24)$$

Все максимумы соответствуют $T = 1$, а локальные минимумы (23) лежат на плавной кривой (рис.3), соответствующей формуле (24).

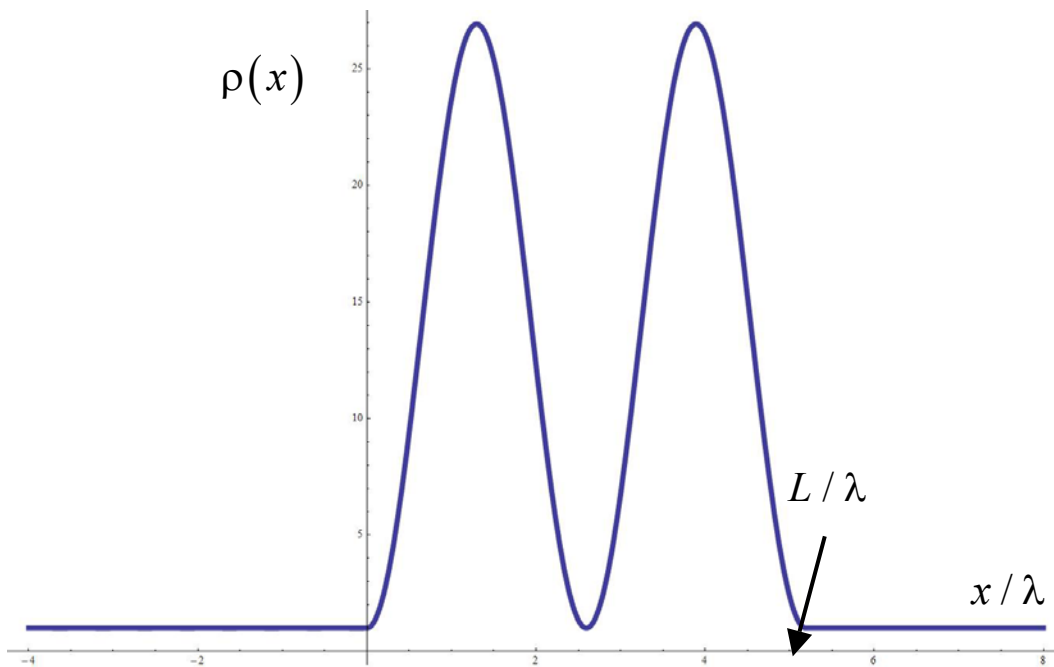


Рис. 4.

$\rho(x) = |\psi(x)|^2$
при
 $W_2 = 1,038U_0$,

Наличие локальных минимумов и максимумов зависимости $T(W)$ связано с резонансным характером взаимодействия волны де Бройля с потенциальным барьером. Если длина области 2 (барьера) такова, что в области барьера укладывается четное число половин длин волн де Бройля внутри области 2

$L = n\lambda_2 = n \frac{2\pi\hbar}{P_2}$ (целое число длин волн λ_2), то наблюдается максимум

коэффициента прохождения волны де Бройля (полное прохождение $T = 1$), а нечетное – минимум коэффициента прохождения.

Плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x в случае полного прохождения $T = 1$ представлена на **рис.4** (при $n = 2$ $W_2 = 1,038U_0$ и $L / \hbar = 32$).

Падающая и прошедшая бегущие волны (см. рис.4) имеют одинаковую амплитуду ($\rho = 1$), а внутри потенциального барьера волна подобна стоячей волне, амплитуда которой в ~ 5 раз больше, а амплитуда плотности больше в ~ 25 раз! Частица как бы «останавливается» над барьером.

Плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x в случае **локального минимума** прохождения $T = 0,0096 \ll 1$ (при $n = 0$ $W'_0 = 1,0024U_0$, и $L / \hbar = 32$) представлена на **рис.5**.

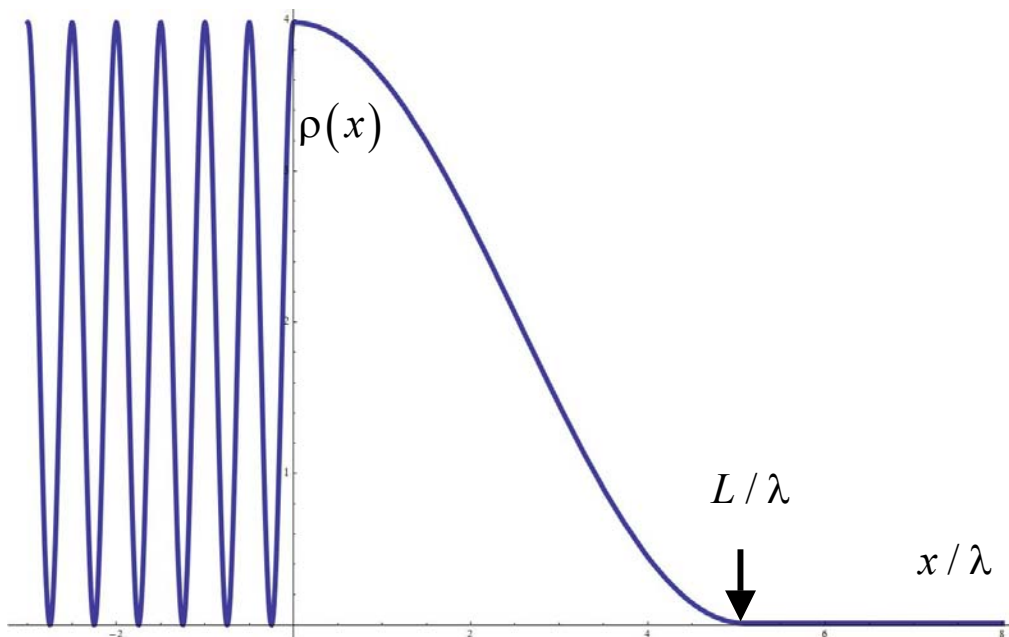


Рис. 5.

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 \text{ при } W'_0 = 1,0024U_0$$

При $x < 0$, волна имеет форму, близкую к стоячей. Она образована наложением падающей и отраженной волн с практически одинаковыми амплитудами ($A \approx 1$) и бегущей волны с очень маленькой амплитудой ($A = 0,0096$).

Зависимости коэффициентов T и R от толщины барьера L / \hbar изображены на **рис.6** (см.(20), (21)).

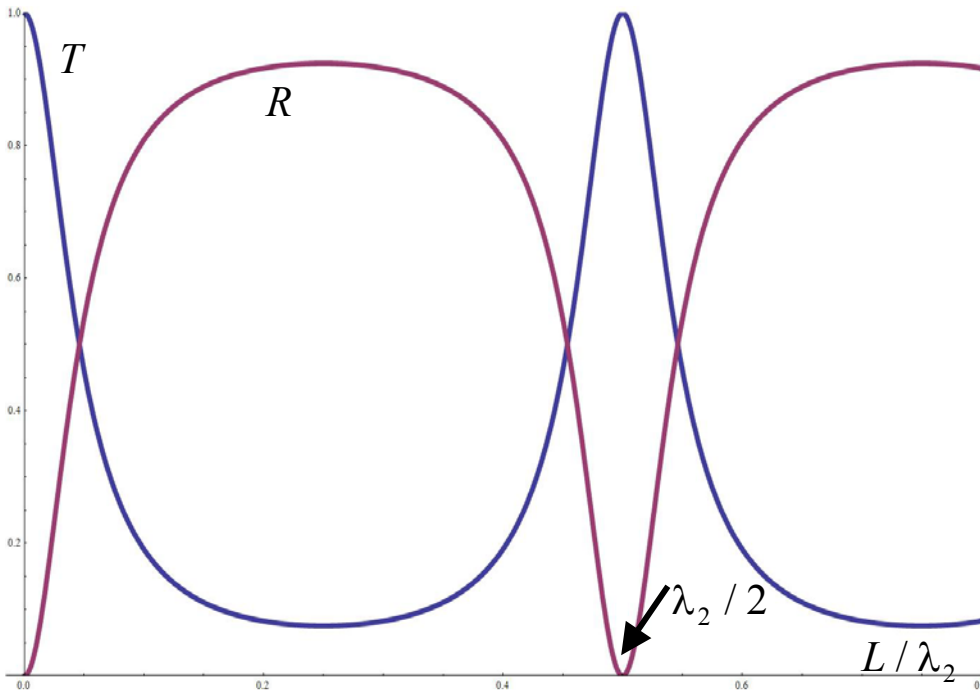


Рис.6 Зависимость коэффициентов T и R от толщины барьера при $\lambda=22$

В соответствии с формулами (20) и (21) **рис.6** демонстрирует периодический характер зависимости коэффициентов T и R от толщины барьера.

Ответ.

Задача 5 (Туннельный эффект для прямоугольного барьера). Найти коэффициент прохождения и коэффициент отражения для волны де Бройля, падающей на ступенчатый потенциальный барьер при $W < U_0$ (см. **рис. и задачу 3-II предыдущего семинара**).

Решение. Аналогично решению задачи 3 воспользуемся результатом решения задача 3-II предыдущего семинара. Волновая функция при $x < 0$ имеет вид

$$\psi_1 = A_1 e^{i\frac{P_1 x}{\hbar}} + A_2 e^{-i\frac{P_1 x}{\hbar}}, \quad P_1 = \sqrt{2mW}, \quad (25)$$

а при $x > L$

$$\psi_3 = A_5 e^{i\frac{P_1}{\hbar}(x-L)}. \quad (26)$$

Значения коэффициентов прохождения $T = |A_5 / A_1|^2$ и отражения $R = |A_2 / A_1|^2$ находим, используя формулы (36)-(38) из предыдущего семинара, опуская довольно громоздкие преобразования, представим конечный результат:

$$T = \frac{8W(W - U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cosh\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W - U_0)}\right)}, \quad (27)$$

$$R = 1 - \frac{8W(W - U_0)}{8W^2 - 8U_0W + U_0^2 - U_0^2 \cosh\left(2L / \hbar \sqrt{2m(W - U_0)}\right)}, \quad (28)$$

При $W > U_0$, очевидно, имеет место баланс потоков: $R + T = 1$. Заметим, что формулы (27) и (28) отличаются от формул (20) и (21) лишь заменой обычного косинуса на гиперболический.

Зависимость коэффициента прохождения от энергии $T(W)$ при $2mU_0 = 1$ и $L / \hbar = 3$ представлена на **рис.7**.

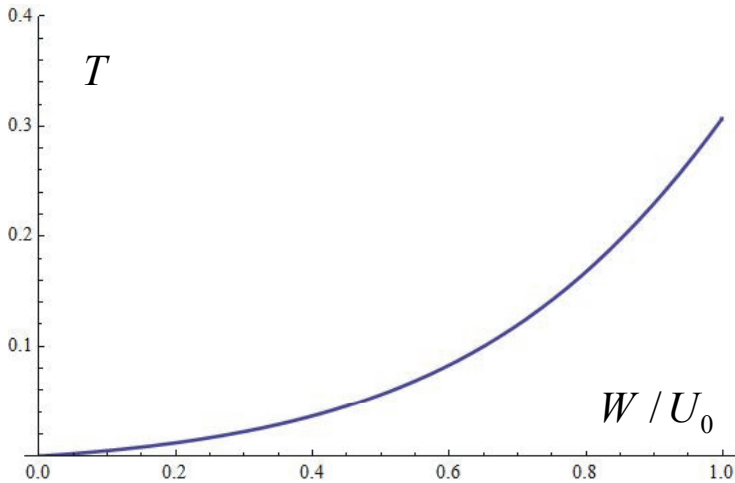


Рис.7. Зависимость коэффициента T от W / U_0 при

$$\frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)} = 0,949$$

Рисунок 7 демонстрирует подбарьерное распространение квантовых частиц. Чем больше кинетическая энергия падающей частицы (то есть при $W/U_0 \rightarrow 1$), тем больше коэффициент прохождения сквозь барьер, больше вероятность оказаться частице по другую сторону барьера.

Отметим, что зависимости $T(W)$ при $W < U_0$ и $W > U_0$ всегда гладко и непрерывно стыкуются, то есть графики рис.3 и рис.7 непрерывно бы переходили друг в друга, если бы толщина барьера была одинаковой (для рис.7 толщина барьера меньше, чем для рис.3).

Зависимость коэффициента прохождения $T(L)$ от ширины барьера L при $W/U_0 = 0,9$ представлена на **рис.8**.

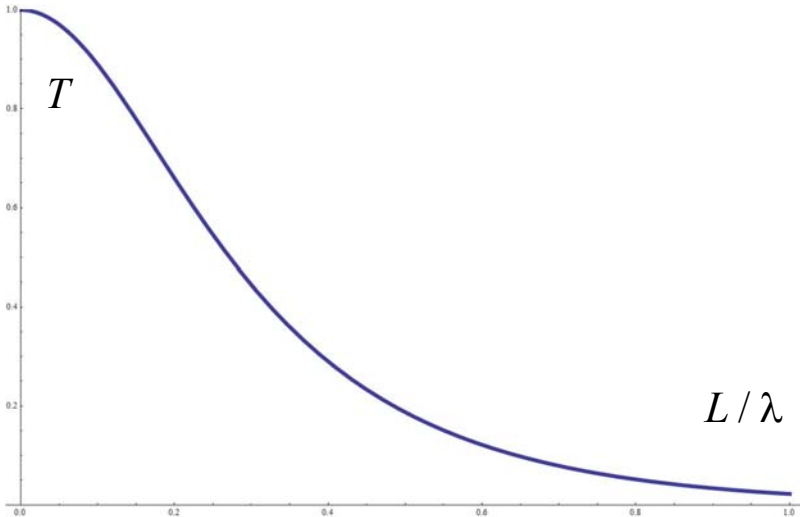


Рис.8. Зависимость коэффициента прохождения T от L/λ при $\lambda=6,6$ и $W/U_0=0,9$

Асимптотический вид коэффициента прохождения (27)

В выражении (27) для коэффициента прохождения прямоугольного барьера при выполнении условия $\frac{L}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - W)} \gg 1$, то есть, например, при заметном превышении высоты порога над энергией частицы $U_0 \gg W$ и при достаточно больших L значение $\cosh\left(2L/\hbar\sqrt{2m(W - U_0)}\right) \approx \frac{1}{2}\exp\left(2L/\hbar\sqrt{2m(W - U_0)}\right)$ – экспоненциально велико.

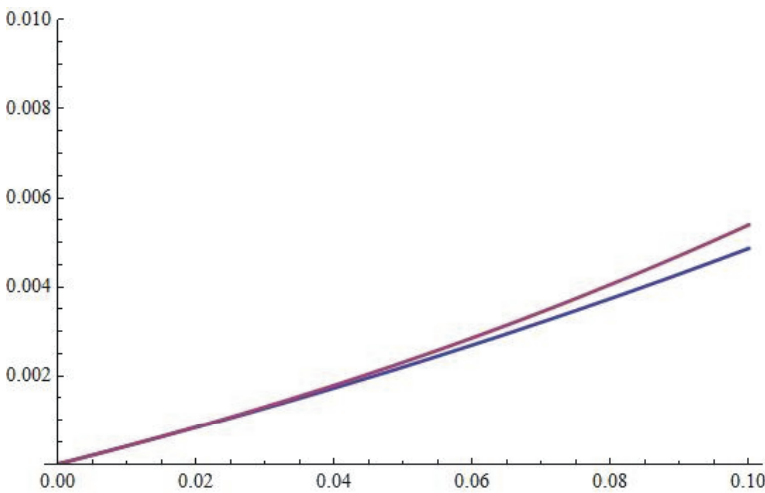


Рис.9. Сравнение точного коэффициента $T(W)$ с асимптотической формулой $T' = \frac{16W}{U_0} \exp\left(-2\frac{L}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - W)}\right)$

С учетом неравенства $U_0 \gg W$ из (27) получаем асимптотическую оценку для T :

$$T \approx T' = \frac{16W}{U_0} \exp\left(-2\frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}\right) \quad (29)$$

Сопоставление зависимостей коэффициентов T и T' от W/U_0 представлено на рис.9.

Сопоставление зависимостей коэффициентов T и T' от L/λ представлено на рис.10.

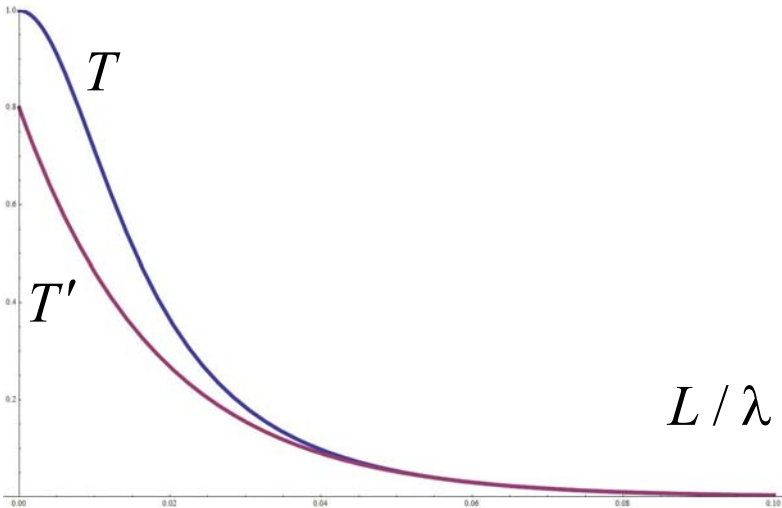


Рис.10. Сравнение точных значений коэффициента прохождения со значениями, рассчитанными по асимптотической формуле $T' = \frac{16W}{U_0} \exp\left(-2\frac{L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}\right)$ в зависимости от L/λ при $W/U_0 = 0,05$

Рисунки 9 и 10 демонстрирует возможность замены T на T' в упомянутом пределе для прямоугольного барьера.

Ответ.

Задача 6. Получить асимптотическую формулу коэффициента прохождения барьера произвольной формы.

Решение. Рассмотрим барьер произвольной формы (рис.10). Пусть U_0 – максимальное значение потенциальной энергии. W – энергия частицы, $W < U_0$, x_1 и x_2 – точки, в которых $U(x) = W$.

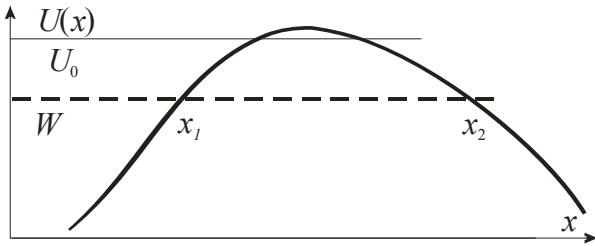


Рис.10 Барьер произвольной формы.

Потенциальный барьер произвольной формы представим в виде последовательности потенциальных барьеров прямоугольной формы (минибарьеров), при прохождении каждого из которых можно использовать асимптотическую формулу (29). Итоговый коэффициент прохождения равен произведению коэффициентов прохождения для упомянутой последовательности минибарьеров,

Значительнее всего в коэффициентах прохождения минибарьеров, рассчитанных с помощью формулы (29), меняется экспоненциальный множитель, множитель же перед экспонентой

$$T_0 = \frac{16W}{U_0} \quad (29_1)$$

меняется незначительно, оставаясь всегда порядка единицы. Таким образом, для барьеров непрямоугольной формы получаем асимптотическую формулу для коэффициента прохождения:

$$T = T_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - W)} dx \right]. \quad (30)$$

В формуле (30) интегрирование ведется в интервале $[x_1, x_2]$, изображенном на рис.10. Внутри $[x_1, x_2]$ интервала $U(x) > W$, а на границах $U(x_1) = U(x_2) = W$.

Ответ. $T = T_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - W)} dx \right]$

Задача 7 (холодная эмиссия электронов из металла). Металл, как уже упоминалось выше, может рассматриваться как потенциальная яма глубины U_0 (см. рис.11 при $x < 0$). У поверхности металла ($x = 0$) создано электрическое поле напряженностью $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$, направленное от поверхности. Внутри металла

электроны проводимости имеют энергию $W < U_0$. Найти зависимость силы тока холодной эмиссии электронов через барьер от величины напряженности электрического поля.

Решение: Поскольку электрическое поле не проникает внутрь металла, то потенциальную энергию электрона проводимости можно представить в виде (рис. 11):

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 - eE x, & x > 0 \\ U(x) &= 0, & x < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

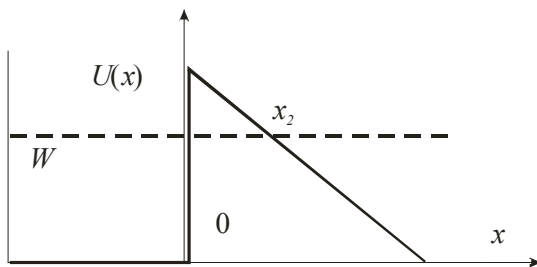


Рис.11.

Коэффициент прохождения электрона через барьер (31):

$$T \approx T_0 \exp(-\alpha), \text{ где } \alpha = \frac{2}{\hbar} \int_0^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - W]} dx. \quad (32)$$

Используя (31) вычисляем

$$\alpha = \frac{4\sqrt{2m}}{3eE\hbar} (U_0 - W)^{3/2} \quad (33)$$

Сила тока холодной эмиссии пропорциональна коэффициенту подбарьерного прохождения и, таким образом, имеет вид

$$J = J_0 \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3eE\hbar} (U_0 - W)^{3/2}\right].$$

При $U_0 - W \approx 3 \div 4 \text{ эВ}$ $\alpha = \frac{10^8 \text{ В/м}}{E}$ и силу тока можно оценить по формуле

$$J = J_0 \exp\left(-\frac{10^8 \text{ В/м}}{E}\right)$$

Ответ: $J = J_0 \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3eE\hbar} (U_0 - W)^{3/2}\right].$

Задача 8. Радиоактивный распад – это самопроизвольное изменение состава ядра (заряда, массового числа) путем испускания элементарных частиц или ядерных фрагментов. Распад имеет квантовомеханический характер, он происходит благодаря туннельному проникновению сквозь потенциальный барьер, образованный совокупным действием отталкивающего кулоновского и притягивающего ядерного взаимодействий вылетающей частицы и *дочернего ядра* (ядра, оставшегося после распада исходного *материнского ядра*).

Рассмотрим следующую модель α -распада (испускания ядра атома He). Материнское ядро имеет заряд $(Z+2)e$. Пусть ядерные силы притяжения действуют на расстояниях $r < r_0$, где r_0 – радиус ядра, формируя потенциальную яму прямоугольной формы. А при $r > r_0$ силы кулоновского отталкивания положительно заряженного дочернего ядра (с зарядом $+Ze$) от положительно заряженной α -частицы (с зарядом $+2e$) образуют потенциальный барьер (рис.12). Определите вероятность испускания α -частицы за единицу времени и время полураспада. Средняя скорость движения α -частицы в нутрии ядра v .

Решение. Вероятность излучения α -частицы в единицу времени пропорциональна произведению частоты ударов ν (числа ударов в единицу времени) о стенки потенциальной ямы на коэффициент прохождения потенциального барьера T .

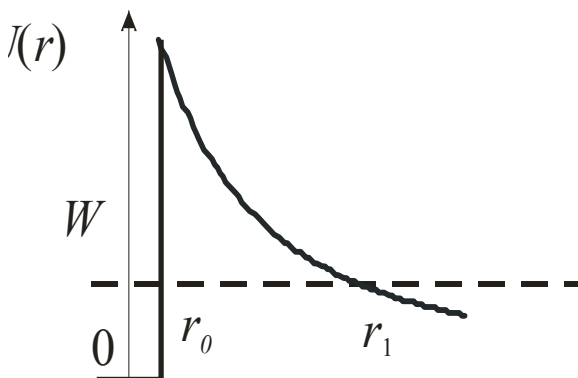


Рис.12.

Частота ударов α -частицы о стенки потенциальной ямы равна $\nu = \frac{v}{2r_0}$.

Форма потенциального барьера определяется кулоновской энергией отталкивания α -частицы и дочернего ядра:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}, \quad (1_1)$$

причем $U(r_1) = W$.

Вычисление коэффициента прохождения через потенциальный барьер (1_1) аналогично решению предыдущих задач

$$T = T_0 \exp(-\alpha), \text{ где}$$

$$\alpha = \frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m[U(r) - W]} dr = \sqrt{8mW} / \hbar \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2Ze^2}{W} \frac{1}{r} - 1} \cdot dr = r_1 \sqrt{8mW} / \hbar \int_{r_0/r_1}^1 \sqrt{\frac{2Ze^2}{Wr_1} \frac{1}{x} - 1} \cdot dx.$$

Значение интеграла (при замене переменной $y = \sqrt{x}$):

$$\int_s^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = 2 \int_{\sqrt{s}}^1 \sqrt{1 - y^2} dy = -\sqrt{s(1-s)} + \arccos(\sqrt{s}) \approx \frac{\pi}{2}$$

при $r_1 \gg r_0$, то есть при $s \rightarrow 0$, приблизительно равно $\pi/2$.

Таким образом, коэффициент прохождения

$$T = T_0 \exp\left[-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{W}}\right].$$

Вероятность распада за единицу времени

$$w = \frac{v}{2r_0} T = \frac{vT_0}{2r_0} \exp\left[-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{W}}\right] = \frac{vT_0}{2r_0} \exp\left[-\frac{4\pi Ze^2}{\hbar v}\right]. \quad (1_2)$$

определяет долю ядер, распавшихся за единицу времени, а доля ядер dN/N , распавшихся за время dt равна

$$\frac{-dN}{N} = w dt. \quad (1_3)$$

Интегрируя (1_3), для числа распадающих за время t ядер получаем

$$N = N_0 \exp[-wt]. \quad (1_4)$$

Время полураспада – время τ , в течение которого половина ядер распадается, определяется из (1_4):

$$\tau = \ln 2 / w = 2 \ln 2 \frac{r_0}{v T_0} \exp \left[\frac{2 \pi Z e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{W}} \right] = 2 \ln 2 \frac{r_0}{v T_0} \exp \left[\frac{4 \pi Z e^2}{\hbar v} \right].$$

При оценке T_0 из (29_1) для U_0 можно взять значение потенциальной энергии при $r = r_0$:

$$T_0 = \frac{18W}{U_0} = \frac{9mv^2(4\pi\epsilon_0)r_0}{2Ze^2}, \quad \tau = \ln 2 / w = 2 \ln 2 \frac{r_0}{v T_0} \exp \left[\frac{2 \pi Z e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{W}} \right] = 2 \ln 2 \frac{r_0}{v T_0} \exp \left[\frac{4 \pi Z e^2}{\hbar v} \right].$$