

## Глава 3. Волновые свойства частиц. Волны де-Бройля

### §1. Уравнение де-Бройля. Длина волны де-Бройля

#### *Тезисы.*

I. Длина волны де Бройля определяет в каких структурах данная частица будет проявлять волновые свойства

II. Классические характеристики частицы не могут быть известны одновременно попарно (по соотношениям неопределенностей):

- 1) энергия и время;
- 2) координата и импульс.

И, как следствие из второго соотношения неопределенностей

- 3) кинетическая и потенциальная энергия,

а также

полная энергия не равна сумме кинетической и потенциальной энергий, так как последние не могут существовать вместе одновременно.

III. Соотношения неопределенностей позволяют оценить минимальные возможные значения («нулевые») импульса и энергии.

IV. Вероятность – квантовая интерпретация интенсивности.

Итак, свет – это электромагнитная волна и поток фотонов. В одних условиях свет проявляет волновые свойства (интерференция, дифракция и др.), сталкиваясь с препятствиями, сравнимыми с длиной волны, в других – корпускулярные свойства (фотоэффект, создание давления).

В 1924 Л. де Бройль высказал **гипотезу** о том, что корпускулярно-волновой дуализм присущ всем без исключения материальным частицам. Использование аналогий между механикой и оптикой и позволило де Бройлю теоретически описать волновые свойства частиц.

Уравнения де Бройля

$$\begin{cases} W = \hbar\omega \\ \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \end{cases} \quad (1)$$

связывают энергию  $W$  и импульс  $\mathbf{p}$ , описывающие состояние частицы, с характеристиками волны: частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{h} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  - постоянная Планка). Идея де Бройля изменила физическую картину мира.

Для свободно движущейся частицы с импульсом направленным вдоль оси  $Ox$  волновая функция (волна де Бройля) имеет вид плоской волны:

$$\Psi(r, t) = C \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2)$$

Закон дисперсии  $W = W(p)$  для свободной частицы с массой  $m$ , чья волновая функция, описывается уравнением (2) :

$$W = \frac{p^2}{2m}. \quad (3)$$

Важное отличие корпускулярно-волнового дуализма частиц от корпускулярно-волнового дуализма света заключается в физическом смысле амплитуды волновой функции: квадрат амплитуды

$$|\Psi(r, t)|^2 = \Psi(r, t)\Psi^*(r, t) \quad (4)$$

определяет вероятность обнаружения частицы в момент времени  $t$  в точке с координатой  $\mathbf{r}$ . Статистическая интерпретация волновой функции была в 1926г. дана М. Борном.

**Задача 1.** Вычислите длины волн де-Бройля для электрона  $\lambda_e$ , движущегося со скоростью 10 000 км/с, автомобиля  $\lambda_A$  массой 2 т, движущегося со скоростью 144 км/ч.

**Решение.** Согласно формуле (1)  $p = \mathbf{h}k = \frac{2\pi\mathbf{h}}{\lambda}$  :

$$\lambda_e = \frac{2\pi\mathbf{h}}{mv} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7} = 7.3 \cdot 10^{-12} \text{ м} ,$$

$$\lambda_A = \frac{2\pi\mathbf{h}}{mv} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{2000 \cdot 144 \cdot 10/36} = 8.3 \cdot 10^{-39} \text{ м} .$$

Таким образом:  $\lambda_e / \lambda_A \approx 10^{27}$ .

**Ответ:**  $\lambda_e = 7.3 \cdot 10^{-12} \text{ м}$  ,  $\lambda_A = 8.3 \cdot 10^{-39} \text{ м}$  .

**Вопросы для самопроверки:**

- 1) Во сколько раз изменится длина волны де-Бройля для электрона, если увеличить его скорость в 3 раза?
- 2) Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если рассматривать протон, движущийся с той же скоростью?
- 3) Для каких частиц будет существенным проявление корпускулярно-волнового дуализма в структуре кристаллической решетки с периодом  $a=0,3$  нм?

**Ответы:** 1) Уменьшится в 3 раза. 2) Уменьшится в  $\sim 1000$  раз. 3) Для частиц, длина волны де-Бройля которых сопоставима с периодом кристаллической решетки. В нашем случае, для электрона.

**Задача 2.** Вычислите длины волн де-Бройля фотона и свободных частиц: электрона, протона и атома урана, имеющих кинетическую энергию 100 эВ.

**Решение.** Длина волны де-Бройля частицы определяется ее импульсом  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p}$  (1), а импульс частицы связан с ее энергией

законом дисперсии: для фотона  $W = cp$  и для свободных частиц  $W = \frac{p^2}{2m}$  (3).

Таким образом, получаем для фотона  $\lambda = c \frac{2\pi\hbar}{W}$  и для свободных частиц  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}}$ . Таким образом, для фотона длина волны

$$\lambda_f = \frac{2\pi\hbar c}{W} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 12,4 \text{ \AA}$$

Учитывая значения масс электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ \AA}$ , протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ \AA}$ , атома урана  $m_U = \frac{238,0 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23}} = 3,97 \cdot 10^{-25} \text{ \AA}$  находим

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e W}} = \frac{1,16 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{m_e}} = \frac{1,16 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 0,12 \text{ \AA} , \quad \lambda_p = \frac{1,16 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{1,67 \cdot 10^{-27}}} \approx 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} ,$$

$$\lambda_U = \frac{1,16 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{3,97 \cdot 10^{-25}}} \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ \AA} .$$

**Ответ:**  $\lambda_f = 12,4 \text{ \AA}$  ,  $\lambda_e \approx 0,12 \text{ \AA}$  ,  $\lambda_p \approx 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$  ,  $\lambda_U \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$  .

**Вопрос для самопроверки:** Будет ли изменяться длина волны частицы, если частица попадает в потенциальное поле?

**Ответ:** Длина волны частицы изменится, так как в соответствии с законом сохранения механической энергии часть кинетической энергии частицы перейдет в потенциальную.

**Задача 3.** Напряжение, разгоняющее электрон в кинескопе, равно  $U = 20\,000$  В, а диаметр электронного пучка  $d = 0,1$  мм. 1) Почему электрон, проявляя волновые свойства в кристаллической структуре металла, не проявляет волновых свойств в кинескопе телевизора? 2) Объясните, почему электронный микроскоп обладает большей разрешающей способностью, чем обычный. Разрешающая способность обычного микроскопа ограничена длиной волны используемого для освещения света.

**Решение.** Пусть электрон до попадания в электростатическое поле не имел кинетической энергии. Запишем закон сохранения энергии для моментов времени  $t_1$  – начала движения электрона и  $t_2$  – сразу перед попаданием электрона на экран:

$$0 = \frac{p_e^2}{2m} - eU,$$

где  $e$  – модуль заряда электрона, тогда  $\frac{p_e^2}{2m} = eU$ . Выражая из (1)

импульс  $p_e = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_e}$ , получаем:  $\frac{4\pi^2\hbar^2}{\lambda_e^2 2m} = eU$ . Отсюда следует

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \approx 0,8 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,08 \text{ \AA}.$$

Для электрона в меди с энергией Ферми ( $W_F = 7$  эВ) длина волны порядка межатомного расстояния  $a$ :

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW_F}} \approx 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 5 \text{ \AA} \sim a,$$

и его волновые свойства (дифракция, интерференция, ...) проявляются в кристаллической структуре, обладающей периодичностью  $a$  порядка нескольких ангстрем.

Длина волны электрона, движущегося в трубке кинескопа значительно меньше характерных размеров пучка

$\lambda_e = 0,08 \text{ \AA} \ll d = 0,1 \text{ \AA}$ . Поэтому его волновые свойства при движении в кинескопе не существенны.

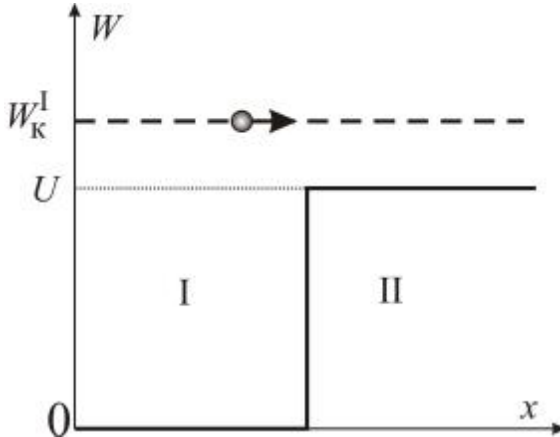
Так как средняя длина волны видимого света  $\lambda_{\text{вд}}$  значительно больше длины волны электрона  $\lambda_e$ , движущегося в кинескопе

$$\lambda_{\text{ср}} \approx 5000 \text{ \AA} \gg \lambda_e = 0,08 \text{ \AA},$$

то в электронный микроскоп можно рассмотреть объекты в  $\lambda_{\text{ср}}/\lambda_e \sim 10^5$  раз меньше, чем в обычный оптический микроскоп.

**Ответ:** 1) Так как  $\lambda_e \ll d$ . 2) Электронный микроскоп обладает большей разрешающей способностью, т.к. длина волны электрона в  $\lambda_{\text{ср}}/\lambda_e \sim 10^5$  раз меньше длин волн видимого света.

**Задача 4.** Частица движется в положительном направлении оси  $Ox$  в одномерном потенциальном поле (см. **рис. 1**) Высота барьера  $U$ , кинетическая энергия частицы в области I  $W_K^I$ . Во сколько раз изменяется длина волны частицы при переходе из области I в область II?



**Рис. 1.** Область I – частица в потенциальной яме, область II – частица над барьером.

**Решение.** Обозначим длину волны частицы в области I –  $\lambda_0$  и  $\lambda$  – длину волны частицы в области II.

При переходе частицы в область II часть ее кинетической энергии  $W_K^I$  переходит в потенциальную  $U$ . Из закона сохранения механической энергии  $W_K^I = W_K^II + U$  находим кинетическую энергию частицы  $W_K^II$  в области II:

$$W_K^{\text{II}} = W_K^{\text{I}} - U.$$

Используя квадратичный закон дисперсии  $W_K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m\lambda^2}$ , имеем

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW_K^{\text{I}}}}, \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(W_K^{\text{I}} - U)}} \text{ и}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{W_K^{\text{I}}}{W_K^{\text{I}} - U}}.$$

**Ответ:**  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{W_K^{\text{I}}}{W_K^{\text{I}} - U}}$ , то есть длина волны увеличивается.

## §2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

Свободная частица, имеющая точное значение импульса  $\mathbf{p}$  и энергии  $W = p^2/(2m)$ , с одинаковой вероятностью

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t) = C^2 = \text{const}$$

может быть обнаружена в любой точке пространства, то есть дебройлевская частица не локализована в координатном пространстве. Если  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_x$ , то неопределенность («размазанность») значений импульса  $\Delta p_x = 0$ , а неопределенность  $x$ -координаты  $\Delta x \rightarrow \infty$ .

Описание локализованной частицы основано на введении неопределенности импульса (и неопределенности волнового вектора в соответствии  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ).

Какими волнами можно описать локализованную в определенной области пространства  $\Delta x$  частицу (в фиксированный момент времени)? Локализация в области  $x_0 - \Delta x/2 < x < x_0 + \Delta x/2$  означает, что вероятность  $|\Psi(x)|^2$  нахождения частицы в этой области (а значит и  $|\Psi(x)|$ ) существенно больше, чем в остальной области пространства. С таким эффектом возрастания амплитуды в ограниченной области  $\Delta x$  мы уже сталкивались при рассмотрении суперпозиции плоских волн с близкими частотами  $\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2$  (при рассмотрении движения волнового пакета (см. задачу)). Было показано, что максимум  $|\Psi(x)|$  движется с групповой скоростью

$$u = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} = \frac{1}{\hbar} \frac{dW}{dk} = \frac{dW}{dp},$$

определяемой законом дисперсии  $\omega = \omega(k)$ . Для свободной частицы  $W = \frac{p^2}{2m}$  и групповая скорость  $u = \frac{p}{m}$  равна скорости механического движения частицы  $u = \frac{p}{m} = v$ .

Итак, скорость движения частицы, как корпускулы, определяется ее импульсом  $p = mv$  и связана с энергией  $W = W(p)$ . В то же время скорость движения частицы, как волны, - есть групповая скорость движения волнового пакета  $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dW}{dp}$  (скорость перемещения главного максимума волновой функции), описывающего эту частицу. В квазиклассическом приближении волновой пакет перемещается в пространстве по классической траектории со скоростью движения частицы.

Подчеркнем, что при нелинейном законе дисперсии (нелинейной зависимости  $\omega(k)$ ) групповая скорость не равна и фазовой, как и в рассматриваемом случае свободной частицы.

### ***Важные следствия из модели, описывающей движение частицы, как движение волнового пакета***

1). Квадрат амплитуды волнового пакета

$$C^2(x,t) = C^2(\eta) = C_0^2 \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2}$$

пропорционален вероятности нахождения частицы в точке  $(x, t)$ . Из рис.3 гл.1 видно, что область локализации волнового пакета не является точечной: с наибольшей вероятностью частица находится в окрестности главного максимума. Обычно размер области локализации  $\Delta\eta_{\text{loc}}$  принимают равным половине расстояния между первыми нулями функции  $C^2(\eta)$ , то есть  $\Delta\eta_{\text{loc}} \approx \pi$ .

2). В фиксированный момент времени (например, при  $t = 0$ )  $\eta = -x\Delta k/2$ . Отсюда следует, что условие  $\Delta\eta_{\text{loc}} \approx \pi$ , записанное через пространственную координату  $x$ , определяет **область  $\Delta x_{\text{loc}}$  пространственной локализации волнового пакета** (рис. гл.1):

$$\Delta x_{loc} \Delta k \approx 2\pi, \quad (5)$$

или, так как  $p = \hbar k$ ,

$$\Delta p_x \Delta x_{loc} \approx 2\pi\hbar, \quad (6)$$

где  $\Delta k$  — интервал волновых чисел, соответствующих волновому пакету.

Аналогично, положив в условии  $\Delta \eta_{loc} \approx \pi$ , определяющем размер волнового пакета,  $x = \text{const}$  (например,  $x = 0$ ) при произвольном  $t$ , и учитывая, что  $\omega'_0 \cdot \Delta k \equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} \cdot \Delta k = \Delta \omega$ , получим соотношение:

$$\Delta \omega \Delta t \approx 2\pi,$$

из которого следует, например, что установить экспериментально наличие монохроматической волны  $\Delta \omega = 0$  можно только за бесконечно большое время  $\Delta t \rightarrow \infty$ .

Так как  $W = \hbar \omega$ , то соотношение неопределенностей

$$\Delta W \Delta t \approx 2\pi\hbar, \quad (7)$$

трактуются как невозможность точного определения энергии квантовой частицы за ограниченный интервал времени ( $\Delta W$  — неопределенность энергии, измеряемой в течение времени  $\Delta t$ ).

Оба приближенных равенства (5) и (6) являются частными случаями **соотношений неопределенностей**, открытых в 1927 г. немецким физиком В. Гейзенбергом.

Если  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — размеры области пространства (вдоль трех осей координат), а  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$ ,  $\Delta p_z$  — неопределенности значений компонентов импульса вдоль тех же осей, то соотношения неопределенностей Гейзенберга имеют вид

$$\boxed{\Delta p_x \Delta x \sim \hbar}, \quad \boxed{\Delta p_y \Delta y \sim \hbar}, \quad \boxed{\Delta p_z \Delta z \sim \hbar} \quad (8)$$

Если среднее значение координаты  $x$  частицы  $\langle x \rangle$ , импульса  $\langle p_x \rangle$ , а средняя квадратичная флуктуация координаты  $\delta x = \sqrt{(x - \langle x \rangle)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2}$  и импульса  $\delta p_x = \sqrt{(p - \langle p \rangle)^2}$ , то произведение средних квадратичных флуктуаций импульса в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга имеет вид

$$\boxed{\delta p_x \delta x \geq \frac{\hbar}{2}},$$



Знак равенства соответствует минимальному возможному значению произведения.

Второе соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\boxed{\Delta W \Delta t \geq \hbar}. \quad (9)$$

Первое соотношение накладывает ограничение на точность одновременного определения импульса  $\Delta p_x$  и координаты  $\Delta x$  микрочастицы. Второе — на точность определения энергии  $\Delta W$  в течение времени  $\Delta t$ .

Таким образом, соотношения неопределенностей устанавливают пределы применимости классической физики.

Описывая реальную систему классическими методами и параметрами (координата и импульс), мы используем некоторое приближение, а соотношение неопределенностей показывает степень его справедливости.

Это означает, что поведение микрочастиц (в частности, электронов в металлах) нельзя рассматривать на основе классических законов, если характерные размеры (межатомное расстояние и размеры кристалла) сравнимы с длиной волны де Бройля  $\lambda = 2\pi\hbar/p$  электронов. Реальные микрочастицы не ведут себя подобно точечным частицам классической физики. Классическое описание движения микрочастиц с использованием таких понятий, как закон движения, траектория движения, является лишь приближенным. Таким образом, благодаря корпускулярно-волновому дуализму, при описании состояний микрочастиц возможно *одновременное использование* таких выражений, как, например, «электрон движется по круговой орбите» и «плотность электрического заряда электрона  $e|\Psi|^2$  распределена в сферическом слое».

**Задача 5.** Оцените минимально возможную энергию электрона в атоме водорода.

**Решение.** Минимальная энергия частицы (энергия основного состояния) в квазиклассическом приближении определяется величиной минимального импульса  $\Delta p$ :

$$W = \frac{\Delta p^2}{2m}.$$

Минимально возможное значение импульса, в соответствие с соотношением неопределенностей Гейзенберга, связано с размером области локализации частицы.

Выберем систему отсчета, связанную с ядром атома, тогда:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle &= 0, \\ \Delta x = \Delta y = \Delta z &\approx 2r.\end{aligned}$$

В этом случае, выражения определяющие неопределенности проекций импульса на декартовы оси координат, могут быть записаны в виде:

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z \approx \frac{\hbar}{2r}. \quad (10)$$

Значение кинетической энергии, связанное с неопределенностью импульса  $\Delta p$ :

$$W_K = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}{2m} = \frac{3}{2m} \left( \frac{\hbar}{2r} \right)^2.$$

Учитывая также потенциальную энергию, получаем следующее выражение для полной энергии атома, которая является функцией эффективного расстояния  $r$  от ядра до электрона:

$$W(r) = \underbrace{\frac{3}{2m} \left( \frac{\hbar}{2r} \right)^2}_{W_K} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}}_U. \quad (11)$$

Приравняв нулю первую производную  $W(r)$ , найдем эффективное расстояние  $r$ , соответствующее минимальному значению полной энергии атома:

$$\frac{dW(r)}{dr} = -\frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 0.$$

Следовательно,

$$r = \frac{3\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) получаем отличное от нуля значение минимальной энергии атома в основном состоянии:

$$W = - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{2me^4}{3\hbar^2} \approx -2,88 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -18 \text{ эВ}.$$

**Ответ.**  $W_{\min} = -2,88 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$

**Замечание.** Полученное значение меньше точного значения минимальной энергии атома водорода  $w \approx -2.18 \cdot 10^{-18}$  Дж. Это связано с тем, что в основе решения задачи лежит принцип неопределенности, который позволяет получить *принципиальный* предел значений неопределенности величин импульса  $\Delta p$ , при заданной неопределенности координаты  $\Delta x$ . Фактически – это оценка, позволяющая установить порядок физических величин.

**Задача 6.** Частица может смещать по оси ОХ, а положение равновесия находится в точке с координатой  $x=0$  (например, равновесное положение атома в молекуле). Масса частицы  $m$ . При отклонении частицы на нее действует возвращающая сила, пропорциональная отклонению ( $F \sim x$ ), коэффициент пропорциональности  $k_{\Gamma}$ . Оценить, используя соотношения неопределенностей, интервал вероятных значений энергии  $W$  частицы. Получить численное значение  $W_1$ , если бы в качестве частицы рассматривался грузик, прикрепленный к одному из концов стальной пружине, другой конец которой закреплен. Масса груза  $m_1 = 50$  г, коэффициентом Гука пружины  $k_{\Gamma} = 0,66 \text{ Н/м}$ .

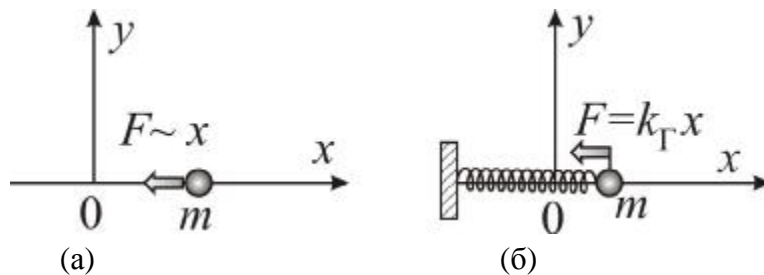


Рис. 2.  $x=0$  – положение равновесия частицы (атома в молекуле (а) или грузика на пружинке (б)), при отклонении от которого возникает возвращающая сила  $F \sim x$ .

**Решение.** В квантовой интерпретации заданная в условии задачи координата частицы – есть положение главного максимума  $|\Psi(x,t)|^2$  (см. задачу 1). Ширина максимума  $\Delta x$  связана соотношением неопределенностей с неопределенностью импульса  $\Delta p$ :

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2\Delta x}. \quad (13)$$

Поскольку частица покоится, то среднее значение импульса равно нулю, и за вероятные значения энергии принимается неопределенность энергии, связанная с неопределенностью импульса частицы.

$$W = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{k_{\Gamma} \Delta x^2}{2}. \quad (14)$$

Так как  $\Delta x$  мало, а возвращающая сила по условию является линейной функцией отклонения от положения равновесия ( $F \sim x$ ), то колебания можно считать гармоническими. Для таких колебаний среднее значение кинетической энергии равно среднему значению потенциальной:

$$\frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{k_{\Gamma} \Delta x^2}{2}. \quad (15)$$

Решая систему уравнений (13) и (15) находим:

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{k_{\Gamma} m}}.$$

Подставляя данное значение  $\Delta x^2$  в (14), учитывая (15), получаем величину неопределенности энергии частицы:

$$W = k_{\Gamma} \Delta x^2 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k_{\Gamma}}{m}}.$$

Для грузика на стальной пружине при подстановке численных значений получим выражение, определяющее границу интервала возможных значений энергии:

$$W_1 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k_{\Gamma}}{m}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{2} \sqrt{\frac{0.66}{5 \cdot 10^{-2}}} \approx 1.2 \cdot 10^{-33} \text{ Дж}.$$

Как будет показано ниже, полученное значение – есть энергия нулевых колебаний квантового осциллятора:

$$W_1 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k_{\Gamma}}{m}} = \frac{\hbar \omega}{2}.$$

**Ответ.**  $W = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k_{\Gamma}}{m}}$ ;  $W_1 \approx 1.2 \cdot 10^{-33}$  Дж.

**Замечание.** Как и следовало ожидать, для макроскопического объекта (грузик на пружинке - физическая модель классической физики), абсолютные значения неопределенности энергии являются пренебрежимо малыми величинами.

**Задача 7.** Частица массой  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками» (см. **рис.3**). Ширина ямы  $l$ . Оценить на основании соотношения неопределенностей:

- 1) минимально возможную энергию частицы;
- 2) силу давления частицы на стенку ямы при минимально возможной энергии.

**Решение.** Направим ось координат ОХ как показано на **рис.3**. В данном случае неопределенность координаты  $x$  определяется размером потенциальной ямы:  $\Delta x \approx l$ . Учитывая условие минимальности энергии, можно считать, что значение проекции импульса  $p_x$  приблизительно равно его неопределенности  $\Delta p_x$ :  $p_x \approx \Delta p_x$  (см. **задачу 5**). Тогда на основании принципа неопределенности Гейзенберга можно записать  $\Delta p_x \cdot \Delta x \approx \frac{\hbar}{2}$  и, следовательно,  $\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2l}$ .

По условию задачи внутри ямы потенциальная энергия равна нулю, и минимальная полная энергия частицы в яме определяется с помощью соотношения:

$$W = \frac{\Delta p_x^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8ml^2}. \quad (16)$$

Для нахождения силы  $F$ , действующей на стенки потенциальной ямы со стороны частицы, используем **принцип виртуальной работы**. Предположим, что одна из стенок ямы под действием искомой виртуальной силы  $F$  сместилась на бесконечно малое расстояние  $dl$ .

Со стороны «стенки» на частицу действует такая же по величине, но противоположная по направлению сила  $F'$  (по III закону Ньютона). По закону изменения механической энергии для частицы записываем

$$dW = F' dl. \quad (17)$$

Из (16) находим изменение кинетической энергии

$$dW = -\frac{\hbar^2}{4ml^3} dl$$

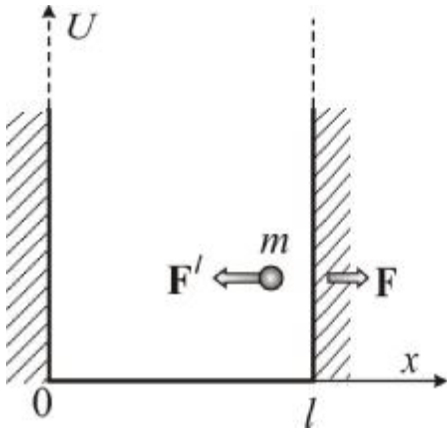


Рис. 3. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками». Ширина ямы  $l$ .

и, подставляя в (17), получаем

$$F'dl = -\frac{\hbar^2}{4ml^3} dl. \text{ Отсюда}$$

$$F = -F' = \frac{\hbar^2}{4ml^3} > 0,$$

то есть частица давит на стенку, а стенка отталкивает частицу с силой  $F' = -\frac{\hbar^2}{4ml^3}$ .

**Ответ.** 1)  $W \approx \hbar^2/(8ml^2)$ , 2) Сила, удерживающая частицу в яме,  $F = \hbar^2/(4ml^3)$ .

### §3. Волновая функция частиц и ее вероятностная интерпретация

**Задача 8.** Волновая функция некоторой частицы, движущейся вдоль оси OX, имеет вид  $y = Cxe^{i(\omega t - kx)}$ , где  $C=0$  при  $x < 0$  и при  $x > b > 0$ , а при  $0 \leq x \leq b$   $C$  – неизвестная положительная константа, Найти:

- 1) плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатой  $x = b$ ;
- 2) средние значения  $x$  и  $x^2$  в интервале  $[0, b]$ .

**Решение.** 1) Прежде всего, необходимо осуществить нормировку волновой функции  $\int_{sp} \Psi(r, t) \Psi^*(r, t) dr = 1$ . Поскольку волновая функция

отлична от нуля только при  $0 \leq x \leq b$ , то интеграл отличен от нуля лишь для данного диапазона. Положим  $C = a = \text{const}$  в интервале  $0 \leq x \leq b$ . Подставляя волновую функцию в условие нормировки, находим

$$\int_0^b a x e^{i(\omega t - kx)} \left( a x e^{i(\omega t - kx)} \right)^* dx = 1,$$

$$\int_0^b (ax)^2 dx = \frac{a^2 b^3}{3} = 1 \text{ и}$$

$$a = \sqrt{3/b^3}.$$

Таким образом, плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатой  $x$  определяется выражением:

$$|\Psi(x)|^2 = (ax)^2 = \frac{3}{b^3} x^2.$$

При  $x = b$  плотность вероятности  $|\Psi(x)|^2 = 3/b$ .

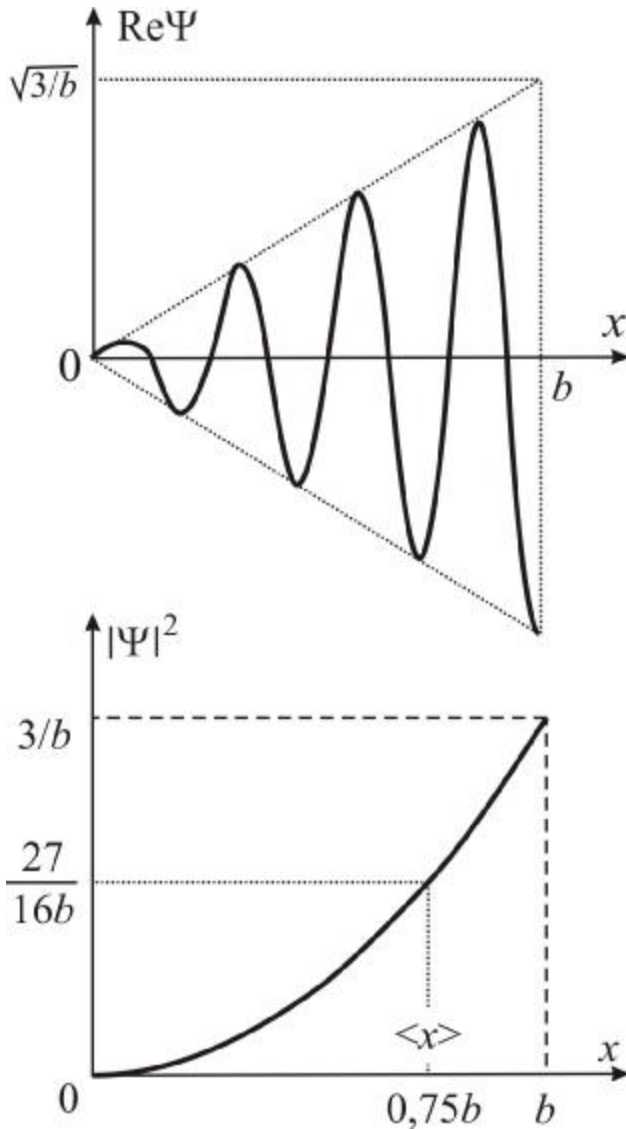


Рис. 4. Зависимости  $\text{Re}\Psi(x)$  и  $|\Psi(x)|^2$  для волновой функции, заданной в условии задачи

2) Используя формулу для вычисления среднего значения

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

где  $f(x)$  – функция распределения плотности вероятности для  $x$ , получаем:

$$\langle x \rangle = \int_0^b x f(x) dx = \int_0^b a^2 x^3 dx = \frac{3}{b^3} \frac{x^4}{4} \Big|_0^b = \frac{3}{4} b;$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^b x^2 f(x) dx = \int_0^b a^2 x^4 dx = \frac{3}{5} b^2;$$

**Ответ.** 1)  $|\Psi(x)|^2 = 3/b$ ; 2)  $\langle x \rangle = 3b/4$ ;  $\langle x^2 \rangle = 3b^2/5$ ;

**Задача 9.** Волновая функция некоторой частицы имеет вид

$$\Psi(x, t) \sim \exp\left[-(x/a)^2 + i(\omega t + bx)\right]. \quad (18)$$

Качественно изобразить вид функций: 1)  $\text{Re}(\Psi(x))$  и 2)  $|\Psi(x)|^2$  в момент времени  $t = 0$ . Найти границы области локализации частицы. Постоянные  $a$  и  $b$  считать известными величинами.

**Решение.** Константу  $C$  волновой функции  $\Psi(x, t) = C \exp\left[-(x/a)^2 + i(\omega t + bx)\right]$  определим из условия нормировки

$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = 1$ . Используя значение табличного интеграла

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ , находим:

$$\Psi(x, t) = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4} a^{1/2}} \exp\left[-(x/a)^2 + i(\omega t + bx)\right]. \quad (19)$$

1) Представим волновую функцию (19) частицы в момент времени  $t = 0$ :

$$\Psi = C \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + ibx\right) = C e^{-(x/a)^2} e^{ibx}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , получим выражение, определяющее действительную часть волновой функции:

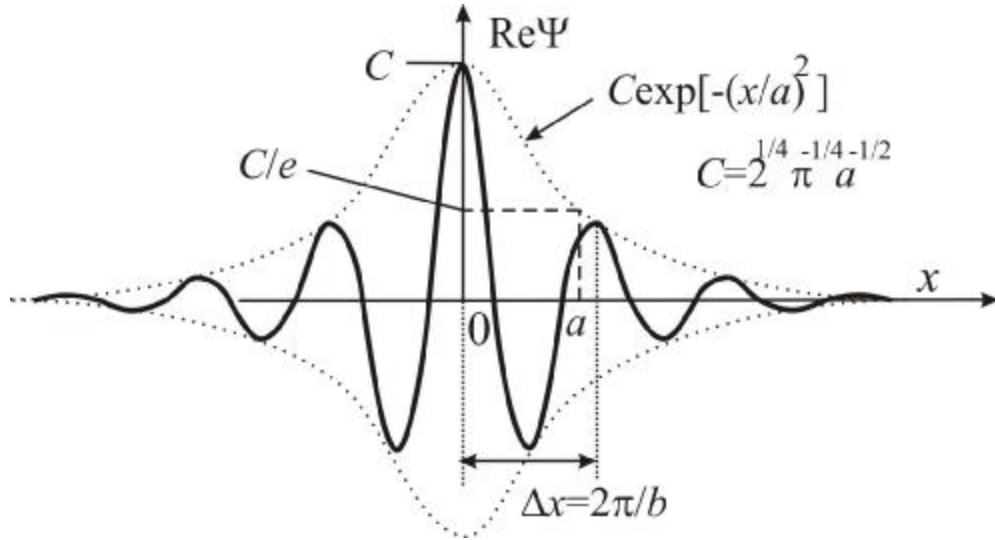
$$\text{Re}(\Psi) = C e^{-(x/a)^2} \cos(bx) = A(x) \cos(bx), \quad (20)$$

где  $A(x) = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4} a^{1/2}} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$ . То есть  $\text{Re}(\Psi(x))$  представляет собой

гармоническую функцию, модулированную по амплитуде



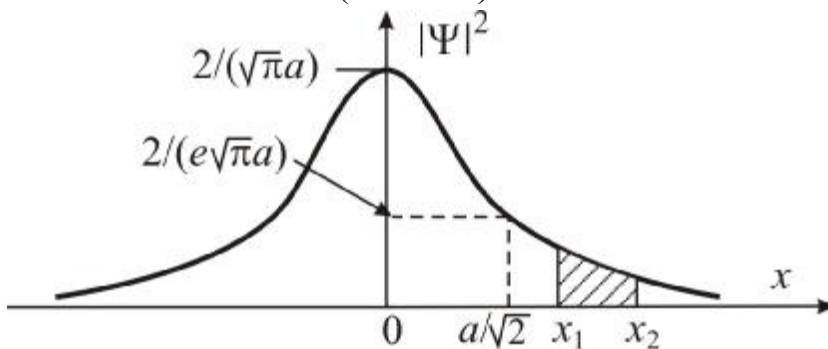
экспоненциально убывающей функцией  $A(x)$ . Примерный вид такой зависимости представлен на **рис.5**.



**Рис. 5.** Зависимость  $\text{Re}\Psi(x)$  для волновой функции (18).

2) По определению, модулем комплексного числа  $z$  называется выражение:  $z = \sqrt{z \cdot z^*}$ . Таким образом, исследуемую функцию можно представить в виде:

$$|\Psi(x)|^2 = \Psi(x)\Psi^*(x) = \left( C e^{-(x/a)^2} \right)^2 = 2e^{-2(x/a)^2} / (a\sqrt{2\pi}).$$



**Рис. 6.** Зависимость  $|\Psi(x)|^2$  для волновой функции (18).

Данное выражение представляет собой зеркально симметричную относительно оси ординат экспоненциально убывающую функцию, качественный вид которой представлен на **рис. 6**.

Площадь под графиком  $|\Psi(x)|^2$  в интервале значений  $x_1 \leq x \leq x_2$  - есть вероятность нахождения частицы в данном интервале значений координаты  $x$ . При  $x \rightarrow \pm\infty$  плотность вероятности  $|\Psi(x)|^2$  стремится к

нулю. Таким образом, частицу можно считать локализованной в той области пространства, где плотность вероятности ее нахождения «существенно» отлична от нуля. Какая величина плотности вероятности является «существенной», а какая нет, определяется из условий конкретной задачи, однако чаще всего в качестве оценки границ области локализации частицы используются значения  $x_{\text{л}}$ , при которых плотность вероятности  $|\Psi(x)|^2$  уменьшается в  $e$  раз (или в два раза) по сравнению с максимальным значением  $\left[|\Psi(x)|^2\right]_{\text{max}}$ , т.е.

$$e \cdot |\Psi(x_{\text{л}})|^2 = \left[|\Psi(x_{\text{м}})|^2\right]. \quad (21)$$

В данной задаче максимальное значение плотности вероятности достигается при  $x_{\text{м}} = 0$ :

$$\left[|\Psi(x_{\text{м}})|^2\right] = |\Psi(0)|^2 = \tilde{N}^2. \quad (22)$$

Из (21) и (22) находим  $e \cdot C^2 e^{-2(x_{\text{л}}/a)^2} = C^2$  и координаты границ области локализации частицы:

$$x_{\text{л}} = \pm\sqrt{a/2}.$$

**Ответ.**  $x_{\text{л}} = \pm\sqrt{a/2}$

#### §4. Дифракция и интерференция частиц

Как проверить справедливость гипотезы де Бройля? Как обнаружить волновые свойства частиц?

Если гипотеза справедлива, то должны наблюдаться **интерференция и дифракция** частиц. Например, дифракция электронов (корпускул) на щели, размеры которой сравнимы с длиной волны де Бройля для электронов. А длина волны определяется, в свою очередь, импульсом электронов: из (2)  $p = \mathbf{h}k = \mathbf{h} \frac{2\pi}{\lambda}$  и

$$\lambda = \frac{2\pi\mathbf{h}}{p} = \frac{2\pi\mathbf{h}}{mv}. \quad (23)$$

**Задача 10.** На щель шириной  $b$  падает широкий пучок электронов с импульсами  $\mathbf{p} = p_0\mathbf{e}_z$  и  $p_y = 0$  (а, следовательно  $\Delta y = \infty$ ). Интенсивность потока электронов столь мала, что можно пренебречь их взаимодействием и считать, что все электроны движутся к щели с

одной и той же скоростью независимо друг от друга. Провести качественную оценку движения электронов за щелью.

**Решение.** При прохождении щели неопределенность  $y$ -координаты становится равной ширине щели  $\Delta y = b$ , что, по соотношению неопределенностей, автоматически означает появление неопределенности  $y$ -компоненты импульса порядка  $\Delta p_y = \frac{h}{2b}$ , то есть появлению импульса

$$p_y = \Delta p_y = \frac{h}{2b} \quad (24)$$

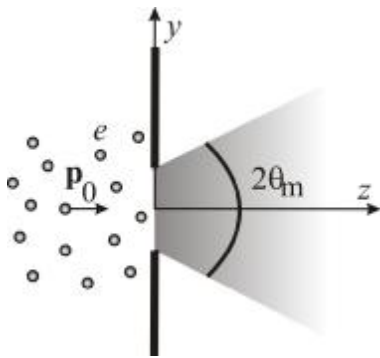


Рис. 7. Дифракция электронов, падающих перпендикулярно на экран со щелью

и волнового вектора

$$k_y = \Delta k_y = \frac{1}{2b}. \quad (25)$$

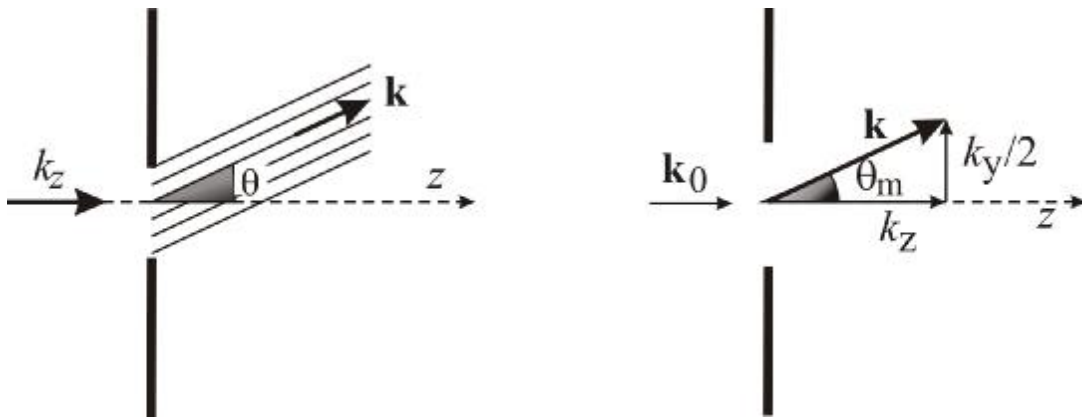


Рис. 8. В результате дифракции электронных волн, за щелью у волнового вектора электронов появляется  $k_y$  составляющая и вероятность отклонения от первоначального движения вдоль оси OZ

Неопределенность волнового вектора по  $y$ -координате приводит к появлению вероятности отклонения траектории движения электрона на

угол  $\theta$ . В волновой интерпретации падающая плоская волна с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направленным вдоль оси  $OZ$ , после дифракции дает множество плоских волн под разными углами  $\theta$  к оси  $OZ$  и интенсивностью, зависящей от  $\theta$ . В основном все траектории попадают в угол  $2\theta_m$ , соответствующий условиям (24) и (25). На основании **рис.8**:

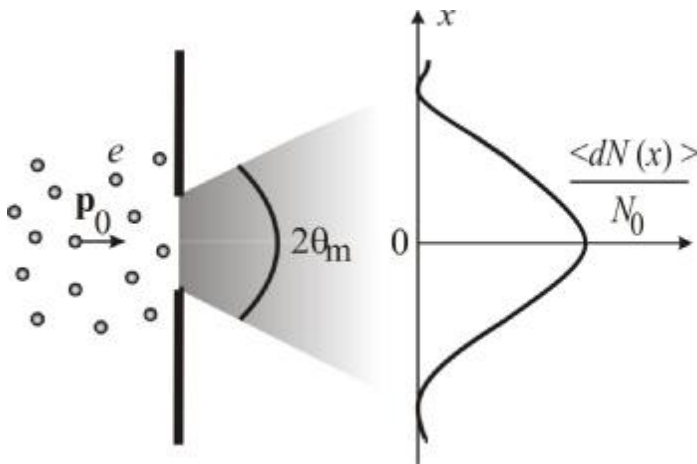
$$\operatorname{tg}\theta_m = \frac{\Delta k_y / 2}{k_z} = \frac{1/(4b)}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{8\pi b}. \quad (26)$$

Плотность вероятности отклонения электрона на угол  $\theta$ , пропорциональная квадрату амплитуды волновой функции (5), зависит от  $\theta$ , аналогично зависимости интенсивности электромагнитной волны (также пропорциональной квадрату амплитуды), движущейся в результате дифракции под углом  $\theta$  (**см. гл.1**).

Расположим экран перпендикулярно оси  $OZ$  (**см. рис. 8**) с датчиками вдоль оси  $OX$ , регистрирующими число пролетающих электронов в единицу времени

$$\frac{dN(x)}{dt} = \frac{\delta N(x, x + \delta x)}{dt \cdot \delta x} \quad (\text{скорость счета}),$$

где  $\delta N(x, x + \delta x)$  – число зарегистрированных электронов за время  $dt$  на интервале  $(x, x + \delta x)$ .



**Рис. 9.** Скорость счета электронов в зависимости от координаты  $x$  имеет такой же вид как интенсивность при дифракции электромагнитных волн

Усредненная за большой промежуток времени картина распределения скорости счета регистрируемых электронов  $\frac{\langle dN(x) \rangle}{dt}$  представлена на **рис.9** Скорость счета – плотность вероятности попадания электронов в точку с координатой  $x$  на экране. Опытные

факты подтверждают, что  $\frac{\langle dN(x) \rangle}{dt}$  имеет такой же вид, как и интенсивность при дифракции электромагнитной волны.

Вероятность  $|\Psi(x)|^2$  - это квантовая интерпретация интенсивности  $I(x)$ .

С наибольшей вероятностью, равной  $\langle dN(x)/dt \rangle$ , после дифракции частицы движутся в пределах угла  $2\theta_m$ .

**Вопрос для самопроверки.**

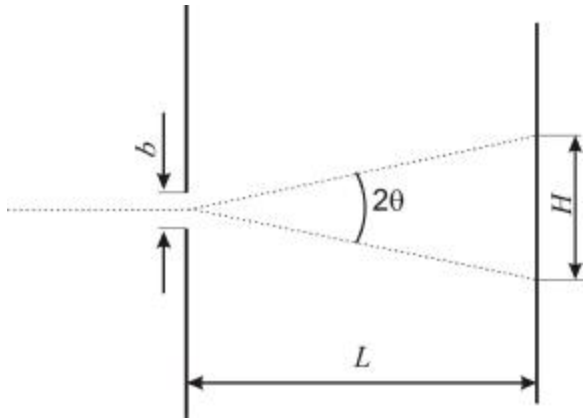
Изобразите графически возможные зависимости  $dN(x)/dt$  с течением времени.

**Задача 11.** Параллельный поток электронов, движущихся с одинаковой скоростью, падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью ширины  $b = 1$  мкм. Определите скорость  $v$  электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстоянии  $L = 50$  см, ширина центрального дифракционного максимума равна  $H = 0,36$  мм.

**Решение.** Направление  $\theta$  на первый дифракционный минимум определяется из выражения:

$$b \sin \theta = \lambda,$$

где  $b$  ширина щели,  $\lambda$  – длина волны электрона.



**Рис. 10.** Схема опыта при дифракции электронов на щели

Оценим тангенс угла дифракции:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{2L} = \frac{0,36 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,5} = 0,00036$ . Угол  $\theta$

можно считать малым, поэтому  $\operatorname{tg} \theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{b}$ , тогда (см. рис. 10):

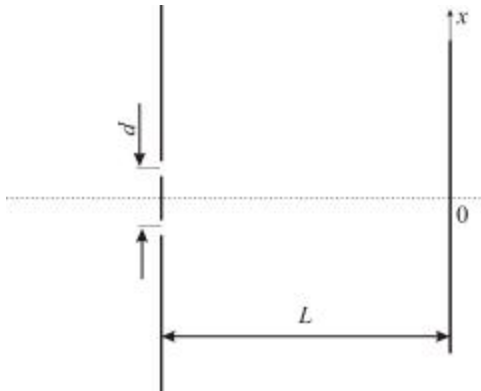
$$\frac{H/2}{L} = \frac{\lambda}{b}.$$

С учетом (1)  $\lambda = \frac{h}{mv}$  получаем:

$$v = \frac{2hL}{Hmb} = \frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,36 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 0,7 \cdot 10^{-3} c.$$

**Ответ:**  $v = \frac{2hL}{Hmb} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$

**Задача 12.** Электроны из состояния покоя ускоряются разностью потенциалов  $U = 25 \text{ В}$  и попадают нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми  $d = 50 \text{ мкм}$ . На экране, покрытом люминофором, наблюдается интерференционно-дифракционная картина. Определите расстояние между соседними максимумами интерференционно-дифракционной картины на экране, если он расположен на расстоянии  $L = 1 \text{ м}$  от плоскости диафрагмы.



**Рис. 11.** Схема опыта при дифракции электронов на двух щелях

**Решение.** В опыте Юнга расстояние  $\Delta x$  (см. **рис.11**) между соседними максимумами (и минимумами) интерференционной картины определяется соотношением (из другой задачи):

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d},$$

Так как для электронов (см. (1) и решение **задачи 4**):  $\lambda = \frac{2\pi h}{\sqrt{2meU}}$ , то:

$$\Delta x = \frac{2\pi h L}{d \sqrt{2meU}} = \frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1}{50 \cdot 10^{-6} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25}} \approx 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 4,9 \text{ нм}.$$

**Ответ:**  $\Delta x = \frac{2\pi h L}{d \sqrt{2meU}} \approx 4,9 \text{ нм}.$

**Вопросы для самопроверки.**

1. Если падает очень слабый поток частиц, так что можно считать, что частицы попадают на экран со щелями по одной. Тогда

каждая частица проходит какую-либо одну щель, и можно ожидать дифракционной картины, но интерференционной (при наложении дифрагировавших волн на разных щелях) не должно быть. Так ли это?

2. Пусть в схеме с двумя щелями пролетело  $N_0 = 10$  электронов. Можно ли предсказать заранее, какая часть из них после дифракции попадет в область  $-\lambda/100 \leq x \leq \lambda/100$  ?

**Ответ.** 1) Да, частица проходит какую то одну щель, но указать какую из них невозможно, не нарушив при этом картину дифракции (поставив, например, регистрирующий прибор за одной из щелей). Поэтому электронная волна проходит через обе щели сразу, и наблюдаемая картина является дифракционно-интерференционной. Интерференционная картина будет наблюдаться даже в том случае, когда в секунду к щелям подлетает один электрон. Для наблюдения такой картины необходимо достаточно много времени (несколько суток).

2) Нет, нельзя, так как любое число от нуля до десяти может попасть в выделенный интервал  $\Delta$ . Однако, можно оценить среднее значение числа частиц (при бесконечно большом числе опытов):

$$\langle N_{\Delta} \rangle = \int_{-\lambda/100}^{\lambda/100} I(x) dx = N_0 \int_{-\lambda/100}^{\lambda/100} |\Psi(x)|^2 dx.$$

**Задача 13.** Параллельный пучок атомов водорода со скоростью  $v$  падает нормально на экран с узкой щелью, за которой на расстоянии  $L$  расположен экран регистрации. Оценить с помощью соотношения неопределенностей ширину щели  $b$ , при которой ширина изображения ее на экране будет минимальной.

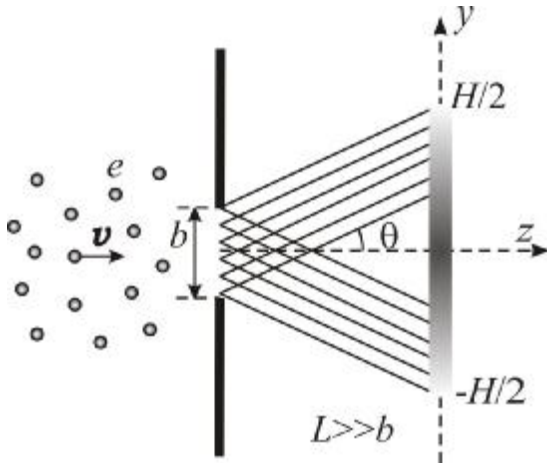
**Решение.** Используя корпускулярно-волновой дуализм, будем рассматривать поток атомов водорода как плоскую волну, падающую на экран со щелью (см. задачу 12). Изобразим две дифрагировавшие под углом  $\theta_m$  волны (рис. 12).

Ширина изображения на экране, определяется углом дифракции  $\theta_m$ , размером щели, а также расстоянием до экрана. Из простых геометрических соображений (см. рис 12), с учетом (26) можно записать следующее выражение:

$$H/2 = b/2 + L \operatorname{tg} \theta_m = b/2 + L \frac{\lambda}{8\pi b}$$

Таким образом, ширина изображения является функцией размера щели:

$$H(b) = b + L \frac{\lambda}{4\pi b} \quad (27)$$



**Рис. 12.** Электронные волны после дифракции при максимальном отклонении от направления первоначального движения вдоль оси OZ

Для нахождения критического размера щели  $b^*$  при котором минимального значения функции  $H(b)$  приравняем нулю ее первую производную:

$$\left. \frac{dH(b)}{db} \right|_{b=b^*} = 1 - \frac{L\lambda}{4\pi(b^*)^2} = 0$$

Из данного соотношения, учитывая, что  $\lambda = 2\pi\hbar/(mv)$  следует:

$$b^* = \sqrt{\frac{L\lambda}{4\pi}} = \sqrt{\frac{L\hbar}{2mv}}$$

Подставив значение  $b^*$  в (27) получим выражение, определяющее минимальную ширину изображения:

$$H^* = b^* + L \frac{\lambda}{4\pi b^*} = \sqrt{\frac{\hbar L}{2mv}} + \sqrt{\frac{\hbar L}{2mv}} = \sqrt{\frac{2\hbar L}{mv}}$$

**Ответ.**  $b^* = \sqrt{\frac{L\hbar}{2mv}}$ .

**Задачи для самостоятельной работы** (нумерация задач в скобках соответствует сборнику 1988 года, см. список литературы)

1 (2.2). При увеличении кинетической энергии свободного электрона на 200 эВ его длина волны изменилась в 2 раза. Чему равна



первоначальная                      длина                      волны                      электрона?

**Ответ:**  $\lambda_0 = \frac{hc}{\Delta W} = 6.2 \cdot 10^{-9} (\text{м})$

2 (2.3). Найдите длину волны молекул водорода, движущихся с наиболее вероятной скоростью при 273 К.

**Ответ:**  $\lambda = \frac{h\sqrt{N_A}}{\sqrt{2kTM}} = 4.2 \cdot 10^{-11} (\text{м}) .$

3 (2.8) Два атома,  $^1\text{H}$  и  $^4\text{He}$ , движутся в одном направлении. Длины волн каждого атома одинаковы и равны  $\lambda$ . Найдите длины волн этих атомов в системе отсчета, связанной с их центром масс.

**Ответ:**  $\lambda_{\text{H}} = \frac{\lambda(m_{\text{H}} + m_{\text{He}})}{(m_{\text{He}} - m_{\text{H}})}, \lambda_{\text{He}} = \frac{\lambda(m_{\text{H}} + m_{\text{He}})}{(m_{\text{H}} - m_{\text{He}})} .$

4 (2.17). Найдите кинетическую энергию электронов, падающих нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, если на экране, отстоящем от диафрагмы на 75 см, расстояние между соседними максимумами 7,5 мкм. Расстояние между щелями равно 25 мкм.

**Ответ:**  $W = \frac{hcL}{d \Delta x} = 7.9 \cdot 10^{-16} (\text{Дж}) = 4.9 (\text{кэВ}) .$

5. Получите из распределения молекул идеального газа по модулю скорости распределение молекул этого газа по длинам волн де-Бройля.

**Ответ**  $f(\lambda)d\lambda = 4\pi \left( \frac{h^2}{\lambda^2 m} \right)^3 \left( \frac{1}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{h^2}{\lambda^2 m 2kT}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda^2}} .$