Глава 3. Корпускулярные свойства электромагнитных волн. Фотоны.

***Тезисы*.**

I. Свет проявляет волновые свойства (интерференция и дифракция) на объектах, имеющих размеры порядка длины волны, и проявляет корпускулярные свойств, как поток фотонов, взаимодействующих с другими частицам по законам упругого соударения.

II. Фотоны, как и другие элементарные частицы, могут рождаться и уничтожаться при взаимодействии.

Опытные факты, обнаруженные в конце XIX – начале XX веков: исследования спектра равновесного теплового излучения, внешнего фотоэффекта, эффект Комптона не могут быть описаны на основе волновых электромагнитных представлений о свойствах света. Для объяснения этих экспериментов была предложена корпускулярная модель света, согласно которой свет представляет собой поток квантовых частиц (корпускул), называемых ***фотонами***. Все фотоны движутся с одной и той же скоростью. В вакууме эта скорость равна $\tilde{n}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3\cdot10^8$ ì /ñ. В диэлектрической среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε скорость движения фотонов

$$c_\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon}}=\frac{c}{n}\ . \qquad (1)$$

Поэтому фотоны являются *релятивистскими* частицами.

Согласно квантовой теории свет обладает ***одновременно*** как корпускулярными (энергия $W_ф$ и импульс $\mathbf{P}_ф$ фотонов), так и волновыми (циклическая частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ электромагнитной волны) характеристиками. Такое явление называется ***корпускулярно-волновым дуализмом*** света. Оба типа характеристик связаны между собой уравнениями Эйнштейна:

$$\begin{cases} W_ф = \hbar\omega \\ \mathbf{P}_ф = \hbar\mathbf{k} \end{cases}, \tag{2}$$

где $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Используется также константа $h = 2\pi\hbar = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Постоянная Планка играет фундаментальную роль во всех квантовых явлениях. Отношение $\hbar$ к такой же по размерности величине данной физической системы определяет «степень квантовости» этой физической системы. Переход от квантовой к классической физике формально может быть определен, как предельный переход при $\hbar \to 0$, подобно переходу от волновой к геометрической оптике при $\lambda \to 0$.

Фотон – ***безмассовая*** частица, ее масса покоя равна нулю: $m_ф = 0$. ***Закон дисперсии фотонов*** (дисперсионное соотношение) фотонов:

$$W_ф = cP_ф \tag{3}$$

или

$$\omega = ck\ . \tag{4}$$

Дисперсионное уравнение (4) связывает независимые уравнения Эйнштейна. И позволяет выразить частоту и энергию фотона через длину волны света. Так как $k = 2\pi/\lambda$, то

$$\omega = ck = c \cdot 2\pi/\lambda \qquad (5)$$

и

$$W_ф = \hbar\omega = \hbar c \cdot 2\pi/\lambda\ . \qquad (5)$$

У фотонов линейный ((3) и (4)) закон дисперсии, а, например, закон дисперсии свободной релятивистской частицы

$$P = \sqrt{W^2/c^2 - m^2c^2}\ . \qquad (7)$$

В электромагнитной волне напряженности электрического **E** и магнитного **H** полей существуют в каждой точке пространства, где распространяется волна. Поэтому энергия, плотность потока которой характеризуется вектором Умова-

Пойнтинга **S=[EH]**, также непрерывно распределена в пространстве и непрерывно же изменяется во времени.

Согласно корпускулярной теории энергия электромагнитного поля квантована, то есть разделена на равные части $\mathbf{h}\omega$. Носителями квантов энергии являются фотоны.

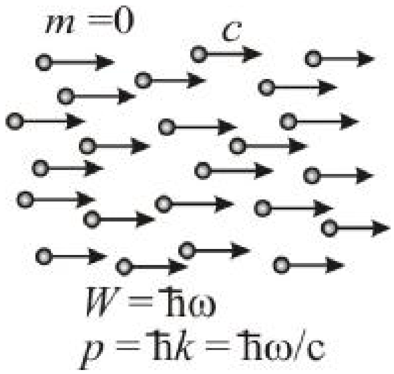

Рис.1 Пучок света представляет собой поток корпускул – фотонов, распространяющихся с одинаковыми скоростями *c*, обладающими массой $m_{\hat{o}} = 0$, энергией $W_{\hat{o}} = \mathbf{h}\omega$ и импульсом $p_{\hat{o}} = \mathbf{h}k = \mathbf{h}\omega / c$.

В законе электромагнитной волны $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$ частота и волновой вектор волны связаны уравнениями Эйнштейна с параметрами фотонов (энергией $W_ф$ и импульсом $p_ф$), а какой смысл имеет амплитуда волны E_0 в корпускулярной теории?

Как уже говорилось выше (см. гл.1) амплитуда волны связана с плотностью энергии электромагнитного поля ϖ:

$$\varpi = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \text{ (и ее среднее значение } \langle\varpi\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \text{)} \qquad (8)$$

и интенсивностью волны

$$I = \langle\varpi\rangle \cdot c = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cdot c \ . \qquad (9)$$

В корпускулярной теории энергия, проходящая за время dt через сечение площадью Σ, равна энергии фотонов, заключенных в объеме $\Sigma \cdot cdt$. Чтобы вычислить эту энергию, приходится ввести еще одну характеристику – концентрацию фотонов $n_ф$ (число фотонов в единице объема $V = 1\text{м}^3$ электромагнитного поля). Тогда энергия фотонов в объеме $(cdt\Sigma)$

$$W_ф = n_ф \cdot \mathbf{h}\omega \cdot (cdt\Sigma) \ , \qquad (10)$$

а плотность энергии

$$\varpi = n_{ф}\hbar\omega\ , \tag{11}$$

и интенсивность волны (средняя плотность потока энергии)

$$I = \frac{W_{ф}}{\Sigma dt} = n_{ф}\hbar\omega \cdot c\ . \tag{12}$$

Сравнивая (8) и (11), получаем, что плотность энергии с одной стороны (волновой) пропорциональна квадрату амплитуды, а с другой стороны (корпускулярной) – концентрации фотонов:

$$\langle\varpi\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = n_{ф}\hbar\omega\ . \tag{13}$$

При неизменной частоте источника и увеличении его мощности, например в два раза, амплитуда напряженностей электрического и магнитного полей при в волновой теории возрастает в $\sqrt{2}$ раз, а в корпускулярной теории в два раза возрастает средняя концентрация фотонов.

Аналогично (10) – (12) усредненную по времени плотность потока импульса:

импульс фотонов в объеме $(cdt\Sigma)$

$$P_{\Sigma ф} = n_{ф} \cdot \frac{\hbar\omega}{c} \cdot (cdt\Sigma)\ , \tag{14}$$

где $\hbar\omega / c = \hbar k = P_{ф}$ - импульс одного фотона (см. (2) и (4));

средняя **плотность потока импульса**

$$\frac{P_{\Sigma ф}}{dt\Sigma} = n_{ф}\hbar\omega = \langle\varpi\rangle = \frac{I}{c}\ . \tag{15}$$

В **табл.1** сопоставлены параметры, используемые для описания света в корпускулярной и волновой моделях.

Таблица 1.

<table>
<tr><td colspan="3">Свет</td></tr>
<tr><td>Волновая теория</td><td rowspan="2">⇔</td><td>Корпускулярная теория</td></tr>
<tr><td>$E = E_0 \cos(\omega t - kx)$</td><td>$W_{ф} = \hbar\omega$</td></tr>
</table>

$B = B_0 \cos(\omega t - kx)$ $E = cB$, $[\mathbf{E}/E, \mathbf{B}/B] = \mathbf{k}/k$		$p_ф = \hbar k$
Закон дисперсии		
$\omega = ck$		$W_ф = cp$
Средняя плотность энергии		
$\langle \varpi \rangle = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E_0^2$		$\langle \varpi \rangle = n_ф \hbar\omega$
Интенсивность (средняя плотность потока энергии) $I = c\langle \varpi \rangle$		
$I = c\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E_0^2$		$I = cn_ф \hbar\omega$
Средняя плотность потока импульса		
I/c		$cn_ф \hbar k$

Задача 1. Длины волн видимой части спектра лежат в пределах от $\lambda = 0,4$ мкм до $\lambda = 0,75$ мкм. В каких пределах заключены энергии квантов видимого света? Какой скоростью должен обладать электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотонов видимого света?

Решение. Энергию фотона выразим через длину волны $W_ф = \hbar c \frac{2\pi}{\lambda}$ (6). При заданном в задаче интервале изменения длин волн энергия фотонов лежит в пределах

$$\frac{2\pi \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,75 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \cdot 10^{-19}\text{Äæ} < W_ô < \frac{2\pi \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,4 \cdot 10^{-6}} = 0,47 \cdot 10^{-19}\text{Äæ} \quad . \qquad (16)$$

Для столь малых значений энергии принято использовать единицу энергии электрон-вольт

$$1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Дж} \; .$$

Тогда $1,6\text{эВ} < W_ф < 2,9\text{эВ}$.

Для электрона из условия задачи $mv_e^2/2 = W_ф$ следует, что $v_e = \sqrt{2W_ф/m}$, где $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг масса свободного электрона. В интервале энергий (16) скорость электрона

$$0{,}73\cdot10^6 \text{ м/с} < v_e < 1{,}0\cdot10^6 \text{ м/с}.$$

Верхняя предельная скорость электрона в 300 раз меньше скорости фотонов.

Ответ: $1{,}6\,эВ < W_ф < 3{,}2\,эВ$, $0{,}73\cdot10^6$ м/с $< v_e < 1{,}0\cdot10^6$ м/с.

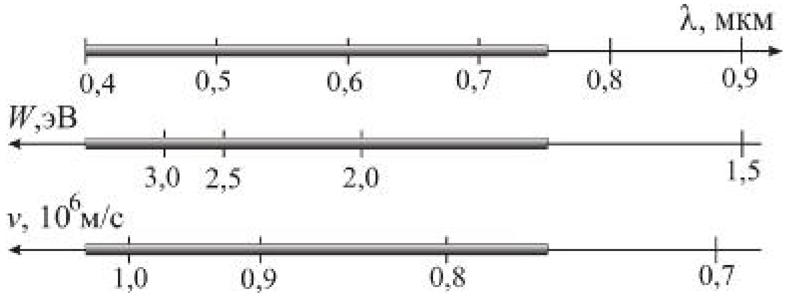

Рис.2 Шкалы энергии $W_ф$ и скоростей v фотонов, соответствующих длинам волн видимого диапазона

Задача 2. Интенсивность светового потока от солнца на Земле в полдень составляет около I = 1,3 кВт/м^2, считая, что свет монохроматический с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, определить концентрацию фотонов.

Решение. Из формулы для интенсивности (12) с учетом (5) находим

$$n_ф = \frac{I}{c\mathbf{h}\omega} = \frac{I\lambda}{2\pi\mathbf{h}c^2} = \frac{1{,}3\cdot10^3\cdot0{,}6\cdot10^{-6}}{2\pi\cdot10^{-34}\cdot(3\cdot10^8)^2} \approx 1{,}3\cdot10^{13}\,\text{м}^{-3} = 1{,}3\cdot10^7\,\text{см}^{-3} =$$
$$= 13\,\text{млн фотонов в см}^3.$$

Ответ: $n_ф = \dfrac{I\lambda}{hc^2} = 1{,}3\cdot10^{13}$ м$^{-3}$.

Задача 3. Какой скоростью должен обладать электрон для того, чтобы иметь такой же импульс, как и фотон с λ = 0,1 нм?

Решение: Импульс фотона равен $P_ф = \dfrac{h}{\lambda}$, импульс электрона – $P_e = \dfrac{mv}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}$. Из записанных соотношений с учетом условия задачи $P_ф = P_e$ получаем

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\lambda mc/h\right)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{1+\left(0{,}1\cdot 10^{-9}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^8 / 6{,}63\cdot 10^{-34}\right)^2}} \approx 7\cdot 10^6\,\text{м/с} \approx \frac{\text{c}}{43}$$

Ответ: $v = \dfrac{c}{\sqrt{1+\left(\lambda mc/h\right)^2}} \approx 7\cdot 10^6$ м/с

Работа выхода

Металл представляет собой кристаллическую решетку, образованную ионами и заполненную валентными электронами, которые свободно перемещаются по всему объему металла. Каждый валентный электрон связан со всеми ионами кристаллической решетки металла (их число очень велико: порядка 10^{23}см$^{-3}$). Чем дальше электрон от иона, тем слабее притяжение. Благодаря силам притяжения электрона ко всем ионам решетки, электрон остается в объеме металла, как в потенциальном ящике. Следует отметить, что силы отталкивания выделенного нами электрона от всех других свободных электронов металла ослабляют результирующую силу притяжения, уменьшают глубину потенциальной ямы. Глубина потенциальной ямы U_0 различна для разных металлов и определяет ту минимальную энергию, которую надо сообщить электрону, чтобы он вышел из объема металла и стал «по-настоящему» свободным. Эта энергия называется работой выхода $\Delta A_{\text{вых}}$.

Как можно сообщить электрону энергию, равную работе выхода?

Например, разогревая металл до температур, достаточных для эмиссии электронов. Это явление называется **термоэлектронной эмиссией**, а вышедшие электроны – **термоэлектронами**.

Другой способ - внешний фотоэффект.

Фотоэффект и его законы

Фотоэффект - это процесс взаимодействия электромагнитного излучения с веществом (фотокатода), в результате которого энергия фотонов передается электронам вещества, так что электроны приобретают возможность покинуть фотокатод (при **внешнем фотоэффекте**).

Пусть на поверхность металла падает свет. Рассмотрим следующую ***модель внешнего фотоэффекта***. Каждый падающий на металл фотон поглощается одним электроном. Если энергия фотона удовлетворяет соотношению $\hbar\omega \geq \Delta A_{\text{вых}}$, то электрон обязательно вырывается из металла. Излишек энергии фотона переходит в кинетическую энергию электрона W_{max}

$$\hbar\omega - \Delta A_{\text{вых}} = W_{\max} . \tag{17}$$

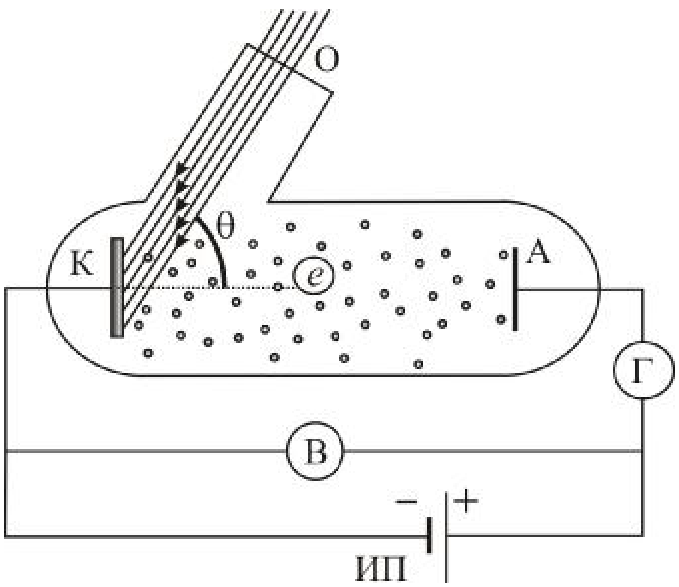

Рис. 3. В сосуде воздух откачан до состояния вакуума. Два электрода *А* (анод) и *К* (катод). согласно схеме подключены к источнику питания ИП. Для измерения силы тока используется гальванометр Г, а напряжения - вольтметр В. Через окно *О* пучок света падает на поверхности катода К под углом θ к нормали.

Полученное соотношение в виде

$$\hbar\omega = \Delta A_{\text{вых}} + W_{\max} , \tag{18}$$

называется **уравнением Эйнштейна.**

Выбитые фотонами фотоэлектроны образуют вблизи поверхности металла электронное облако. Электроны в облаке имеют скорости, направленные в разные стороны (в том числе присутствуют электроны, возвращающиеся назад – в металл). Чтобы зарегистрировать фотоэлектроны, можно использовать наличие у них зарядов. Если создать поблизости на другом металле (***аноде***) потенциал относительно металла (***фотокатода***), из которого выбиваются фотоэлектроны, то выбитые электроны приобретают дополнительную скорость направленного к аноду движения. Идет электрический ток - **фототок**, который можно зафиксировать амперметром соответствующей точности (гальванометром Г).

Из уравнения Эйнштейна следует, что работа выхода определяет минимально возможную частоту света $\hbar\omega_{\min} = \Delta A_{вых}$, при которой фотоэффект наблюдается (**I закон фотоэффекта**).

Поскольку работа выхода – характеристика вещества катода, то из (17) следует также, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов у поверхности катода линейно зависит от частоты падающего света и не зависит от интенсивности падающего света (**III закон фотоэффекта**).

Даже при отсутствии разности потенциалов между катодом и анодом, некоторое количество электронов, чьи скорости направлены к аноду, попадают на анод, создавая ток $J(0)$. С ростом по модулю отрицательного напряжения $V < 0$ (при отталкивающем потенциале) сила тока уменьшается, достигая нуля при $V = V_0 < 0$, называемом **запирающим напряжением**. При $V > 0$ сила фототока растет $J > J(0)$ и стремится к насыщению $J \to J_{нас}$. Насыщение достигается тогда, когда все выбиваемые фотоэлектроны попадают на анод. Вычислим силу тока насыщения и определим, от каких параметров зависит его величина. В данной модели число dN_e выбитых электронов за время dt равно числу $dN_ф$ падающих фотонов за то же время. Если поток фотонов идет под углом θ к нормали поверхности металла, то $dN_ф = n_ф \cdot (\Sigma c dt \cos\theta)$ и

$$dN_e = n_ф c(\Sigma \cos\theta) dt\,, \tag{19}$$

где Σ – площадь поверхности, освещаемой светом, $(\Sigma c dt \cos\theta)$ - объем светового пучка, фотоны которого достигают катода за время dt. При токе насыщения все dN_e достигают анода. Причем, учитывая непрерывность электрического тока, dN_e электронов поступают на анод каждые dt секунд. Таким образом, сила фототока насыщения равна

$$J_{\text{ф нас}} = \frac{dq}{dt} = \frac{e \cdot dN_e}{dt} = en_{\text{ф}} c \Sigma \cos\theta \qquad (20)$$

или, учитывая (12)

$$J_{\text{ф нас}} = \frac{e}{\hbar\omega}\left(I \cdot \Sigma\cos\theta\right). \qquad (21)$$

Выражение в скобках $(I \cdot \Sigma\cos\theta)$ – полный поток световой энергии, падающий на поверхность с площадью Σ под углом θ к нормали поверхности.

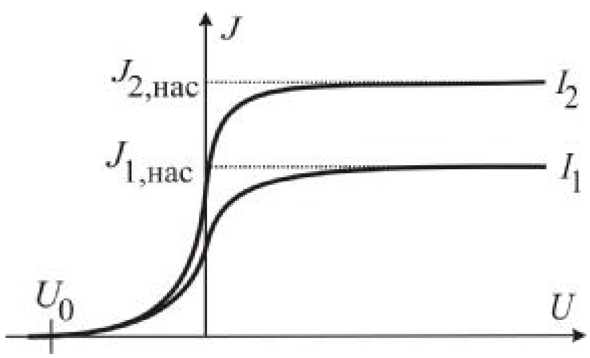

Рис.4. Зависимость силы фототока J от разности потенциалов U между анодом и катодом фотоэлемента при интенсивностях падающего света I_1 и I_2 $(I_2 > I_1)$

Таким образом, сила тока насыщения пропорциональна интенсивности падающего света и не зависит от материала катода (**II закон фотоэффекта**).

С увеличением интенсивности света фототок насыщения будет больше по величине и достигаться он будет при бо′льших значениях напряжения.

Итак, сформулируем все ***три закона фотоэффекта:***

1. Существует ***красная граница фотоэффекта*** – граничная частота $\omega_{\min}$, ниже которой для данного материала фотоэффект отсутствует.
2. Сила фототока *J* с увеличением напряжения на фотоэлементе достигает насыщения. Сила тока насыщения $J_{\text{нас}}$ при фиксированной частоте падающего света прямо пропорционален его интенсивности I.
3. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов у поверхности катода линейно зависит от частоты падающего света и не зависит от интенсивности падающего света.

Еще одной особенностью фотоэффекта является его практическая безынерционность – время запаздывания фототока не превышает 10^{-9} с.

Задача 4. В вакуумном фотоэлементе сила фототока при насыщении достигает значения $J_{\text{нас}} = 2\cdot 10^{-10}$ А . Найти число ΔN электронов, вырываемых светом из катода фотоэлемента в одну секунду.

Решение. При насыщении фототока все электроны, вырываемые из катода попадают на анод. Поэтому число электронов ΔN, покидающих катод за 1 секунду, равно отношению величины силы фототока к заряду электрона $N = \dfrac{J}{e}$ и в численном выражении: $N = \dfrac{J_{нас}}{e} = \dfrac{2\cdot 10^{-10}}{1,6\cdot 10^{-19}} \approx 1,2\cdot 10^{9}\ \text{с}^{-1} = 12\ \text{млн электронов в секунду}$.

Ответ: $\Delta N = 1,2\cdot 10^{9}\ \text{с}^{-1}$.

Задача 5. При освещении монохроматическим светом катода, изготовленного из лития, максимальная скорость фотоэлектронов оказалась равной $v_{\max} = 5,5\cdot 10^{5}$ м/с. Работа выхода электрона из лития составляет $\Delta A_{вых} = 2,38$ эВ. Вычислить длину волны света, применявшегося для освещения катода.

Решение. Подставим значение энергии фотона $\hbar\omega = \hbar c\dfrac{2\pi}{\lambda}$ (6) в уравнение Эйнштейна (18), которое с учетом нерелятивистского значения скорости фотоэлектронов (см. **задачу** 1) записывается в виде $\hbar\omega = \Delta A_{вых} + \dfrac{mv_{\max}^{2}}{2}$. Тогда

$\dfrac{hc}{\lambda} = \Delta A + \dfrac{mv_{\max}^{2}}{2}$ и

$$\lambda = \frac{hc}{mv^{2}_{\max}/2 + \Delta A}.$$

Поскольку $\Delta A_{вых} = 2,38\ \text{эВ} = 2,38\ \text{В}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл} = 3,80\cdot 10^{-19}\ \text{Дж}$, то в численном выражении

$$\lambda = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{9,1\cdot 10^{-31}\cdot (5,5\cdot 10^{5})^{2}/2 + 3,8\cdot 10^{-19}}\ \text{м} = 384\ \text{нм} \approx \lambda\ \text{фиолетового цвета}\ .$$

Ответ. $\lambda = \dfrac{hc}{mv^2_{\max}/2 + \Delta A} = 384\,\text{нм}$.

Тормозное рентгеновское излучение

Задача 6. Медь, имеющая работу выхода $\Delta A_{\text{вых}} = 4{,}4\,\text{эВ}$, облучается пучком электронов, предварительно ускоренных разностью потенциалов $U = 25\,\text{кВ}$. Определить минимальную длину волны возникающего рентгеновского излучения.

Решение. Ситуация, описанная в условиях задачи, может рассматриваться как ***обратный фотоэффект***, то есть процесс взаимодействия пучка электронов с веществом, в результате которого электроны поглощаются веществом, а их энергия передается излучаемым в данном процессе фотонам. К обратному фотоэффекту также применимо уравнение Эйнштейна (18).

$$W_e + \Delta A_{\text{вых}} = \hbar\omega_{\max}\ , \qquad (22)$$

где $W_e = eV$ – максимальная кинетическая энергия электрона, $\omega_{\max}$ – максимальная частота возникающего излучения.

По условию задачи $W_e = eU = 25\,\text{кэВ} >> \Delta\text{A}_{\text{вых}} = 4{,}4\,\text{эВ}$. Заметим, что работа выхода у большинства металлов имеет тот же порядок величины, что и у меди. Из уравнения (22) следует, что $\hbar\omega_{\max} >> \Delta A_{\text{вых}}$. Пренебрегая величиной $\Delta A_{\text{вых}}$ уравнение Эйнштейна запишем в виде:

$$W_e = \hbar\omega_{\max}\,. \qquad (23)$$

Поскольку $\omega = c2\pi/\lambda$, то $\lambda_{\min} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{\max}}$. С учетом (23)

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{W_e} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} = \frac{2\pi\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 25\cdot 10^{3}} \approx 0{,}5\cdot 10^{-11}\,\text{м}$$

Ответ: $\lambda_{\min} = \dfrac{2\pi\hbar c}{eU} \approx 0{,}5\cdot 10^{-11}\,\text{ì}$

Давление света и фотоны

Задача 7. Свет, в виде плоской волны, имеющий интенсивность I, падает в вакууме под углом θ на отражающую поверхность. Коэффициент отражения по энергии равен R. Определить давление, оказываемое светом на поверхность, а также касательную силу, действующую вдоль поверхности, имеющей площадь Σ.

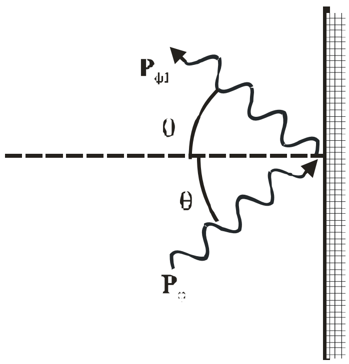

Рис. 5. Отражение фотона от зеркальной поверхности: угол падения равен углу отражения, величина импульса фотона не изменяется

Решение. Коэффициент отражения по энергии $R<1$ есть отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей волны: $R = I_{отр}/I$. Таким образом, отраженная волна переносит меньше энергии, чем падающая. Разность энергий световых волн поглощается поверхностью.

Для вычислений удобно использовать следующую схему взаимодействия света с поверхностью: сначала считать, что весь падающий свет интенсивности I поглощается поверхностью, а затем свет с интенсивностью IR излучается в направлении, предписываемом законом отражения света.

Давление – это нормальная составляющая силы, действующей на единицу площади поверхности: $p = \dfrac{F_n}{\Sigma}$. Сила, действующая на поверхность, по II закону Ньютона равна $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dt}$, где $d\mathbf{P}$ – импульс, получаемый поверхностью вещества за время dt. Этот импульс равен импульсу поглощаемых фотонов, взятому со знаком «+» (на первом этапе), и импульсу испускаемых фотонов, взятому со знаком «–» (на втором этапе).

1. ***Полное поглощение света с интенсивностью I.***

За время dt поверхностью с площадью Σ поглощаются все фотоны $dN_{\text{ф}}$, находящиеся в объеме $dV = cdt\Sigma\cos\theta$

$$dN_{\text{ф}} = n_{\text{ф}}c(\Sigma\cos\theta)dt\,; \tag{24}$$

и несущие импульс

$$dP_{\text{ф}} = dN_{\text{ф}}\cdot P_{\text{ф}} = \left[n_{\text{ф}}c(\Sigma\cos\theta)dt\right]\cdot\left[\frac{\mathbf{h}\omega}{c}\right] = n_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\Sigma\cos\theta dt\,. \tag{25}$$

Учтем, что импульс фотонов направлен под углом θ. Тогда нормальная составляющая силы

$$\left(F_n\right)_{\text{погл}} = \frac{dP_{\text{ф}}\cos\theta}{dt} = n_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\Sigma\cos^2\theta\,, \tag{26}$$

тангенциальная составляющая силы

$$\left(dF_\tau\right)_{\text{погл}} = \frac{dP_{\text{ф}}\sin\theta}{dt} = n_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\Sigma\cos\theta\cdot\sin\theta\,. \tag{27}$$

и давление (с учетом формулы (12))

$$p_{\text{погл}} = \frac{dF_n}{\Sigma} = n_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\cos^2\theta = \frac{I}{c}\cos^2\theta\,. \tag{28}$$

2. ***Излучение света с интенсивностью IR.***

Рассуждая аналогично при расчете вклада отраженного света, приходим к выводу, что вместо формул (26) и (27) с учетом замены $I \to IR$ и изменения знаков получаем:

$$\left(F_n\right)_{\text{отр}} = R\frac{dP_{\text{ф}}\cos\theta}{dt} = Rn_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\Sigma\cos^2\theta \tag{29}$$

$$\left(F_\tau\right)_{\text{отр}} = -R\frac{dP_{\text{ф}}\sin\theta}{dt} = -Rn_{\text{ф}}\mathbf{h}\omega\Sigma\cos\theta\cdot\sin\theta\,. \tag{30}$$

И давление, создаваемое при отражении фотонов, равно

$$p_{\text{отр}} = \frac{IR}{c}\cos^2\theta\,. \tag{31}$$

Объединяя соотношения (28) и (31), находим полное давление:

$$p = p_{\text{погл}} + p_{\text{отр}} = \frac{I(1+R)}{c}\cos^2\theta = \varpi(1+R)\cos^2\theta\,, \tag{32}$$

и полную касательную силу

$$F_\tau = (F_\tau)_{\text{погл}} + (F_\tau)_{\text{отр}} = \varpi(1-R)\sin\theta\cos\theta\,\Sigma. \quad (33)$$

Частные случаи.

1) Давление при зеркальном отражении (абсолютно полном), когда R=1:

$$p = \frac{2I}{c}\cos^2\theta = 2\varpi\cos^2\theta \text{ и } F_\tau = 0. \quad (34)$$

2) Давление при нормальном падании и отражении с коэффициентом R (по интенсивности)

$$p = \frac{I(1+R)}{c} = \varpi(1+R) \text{ и также } F_\tau = 0. \quad (35)$$

Задача 8. Плоская волна падает на зеркально отражающий шар. Интенсивность волны I. Радиус шара R. Определить силу давления на шар.

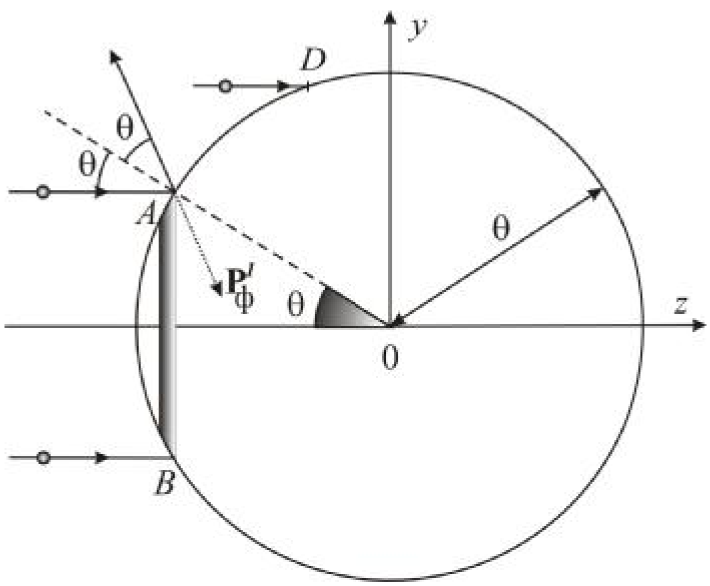

Рис.6. Отражение фотонов от зеркальной сферической поверхности шара

Решение. Используем схему взаимодействия света с поверхностью, описанную в предыдущей задаче.

1. Полное поглощение

За время dt шаром поглощаются все фотоны из объема $(cdt\pi R^2)$, суммарный импульс которых равен $P_\Phi n_\Phi(cdt\pi R^2)$ и направлен вдоль оси OZ.

Учитывая, что $P_\phi = \hbar\omega / c$, а $I = cn_\phi\hbar\omega$, получаем

$$\mathbf{F}_{\text{погл}} = \mathbf{h}\omega n_{\phi}\pi R^2 \mathbf{e}_z = \pi R^2 I / c\mathbf{e}_z \ .$$

2. Излучение

Рассмотрим фотоны, излучаемые в точке A. Каждый фотон при излучении передает импульс $\mathbf{P}'_{б}$ шару (на **рис**. 6 изображен пунктирным вектором). В результате сила, создаваемая излучаемыми в точке A фотонами имеет как z-, так и y-компоненты. Однако, силы, действующие в симметрично расположенных точках (точка В для точки А), компенсируют y-составляющие.

При излучении под углом θ с поверхности колечка (затемнен на **рис. 6**) с площади $d\Sigma = 2\pi(R\sin\theta)Rd\theta$ за время dt уносится импульс

$$dP_{\Sigma\phi} = n_{\phi}P_{\phi}(c\cos\theta dt d\Sigma) = n_{\phi}\frac{\mathbf{h}\omega}{c}(c\cos\theta dt\cdot 2\pi R^2\sin\theta d\theta) = \frac{I}{c}\pi R^2\sin 2\theta d\theta dt$$

Составляющая силы вдоль оси OZ

$$\left(dF_{изл}\right)_z = \frac{\left(dP_{\Sigma\phi}\right)_z}{dt} = \frac{I}{c}\pi R^2\sin 2\theta d\theta\cdot\cos 2\theta$$

Полная сила при излучении

$$\left(F_{изл}\right)_z = \int\limits_0^{\pi/2}\left(dF_{изл}\right)_z = \frac{I}{2c}\pi R^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin 4\theta d\theta = 0 \ .$$

Почему при излучении сила равна нулю? Сравните F_z в точках A и D.

Таким образом, результирующая сила, действующая на шар, связана только с поглощением света и равна

$$F_z = \frac{I}{c}\pi R^2 .$$

Замечание. При решении задачи можно было воспользоваться тем фактом, что в случае зеркального отражения от поверхности сила, с которой излучение воздействует на поверхность, направлена строго по нормали к поверхности.

Тогда давление в точке A $p(\theta) = \frac{2I}{c}\cos^2\theta$ (33), а z-составляющая силы dF_z, действующей на колечко с площадью $d\Sigma = 2\pi(R\sin\theta)Rd\theta$ равна

$$dF_z = pd\Sigma\cos\theta = \frac{2I}{c}\cos^3\theta\cdot 2\pi R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2\frac{I}{c}\cos^3\theta d\theta$$

Результирующая сила

$$F_z = \int_0^{\pi/2} \frac{2I}{c} 2\pi R^2 \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{I}{c}\pi R^2 .$$

Ответ: $f_z = \pi R^2 I / c$.

Вопрос для самопроверки. Одинаковое ли давление в любой точке поверхности шара?

Ответ. Нет. Давление изменяется от 0 при $\theta = \pi/2$ до $\dfrac{2I}{c}$ при $\theta = 0$ (см. (34)).

Задача 9. В замкнутой полости, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре, устанавливается равновесное излучение, называемое **излучением абсолютно черного тела**. Равновесное излучение представляет собой совокупность фотонов (**фотонный газ**), движущихся в полости без столкновения друг с другом, поглощаемых стенкой полости и отражающихся от нее в том же количестве. Обладая импульсом, фотон (как и любая частица) при ударе о площадку и последующем отражении от нее оказывает на площадку давление.

(1) Покажите, что при идеальном излучении, когда потоки энергии и импульса равномерно распределены по всем направлениям, оказываемое на поверхность давление равно одной трети от объемной плотности световой энергии ϖ (энергии, заключенной в единице объема $\varpi = W/V$):

$$p = \frac{1}{3}\varpi . \tag{36}$$

Решение. Выделим на поверхности замкнутой полости элементарную площадку с бесконечно малой площадью $d\Sigma$ (**рис. 7а**). В течение времени dt о данную площадку могут удариться только фотоны, находящиеся внутри объема, ограниченного полусферой с радиусом cdt. Рассмотрим небольшой объем в виде узкого слоя на поверхности данной сферы (затемнен на **рис**. **7** а), который расположен под углами φ и θ относительно площадки $d\Sigma$.

Скорости фотонов, находящихся в выделенном объеме, направлены изотропно по всем направлениям. На площадку $d\Sigma$ попадут лишь те фотоны, векторы скоростей которых расположены в телесном угле $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Отсюда следует, что доля частиц из рассматриваемого объема, направляющихся под углом θ к площадке, составляет $d\Omega/4\pi$. Другими словами, концентрация фотонов, движущихся в направлении (θ,φ), равна

$$\delta n_{\theta,\varphi} = n\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{n}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi, \qquad (37)$$

где n – полная концентрация фотонов (одинаковая в любой точке полости).

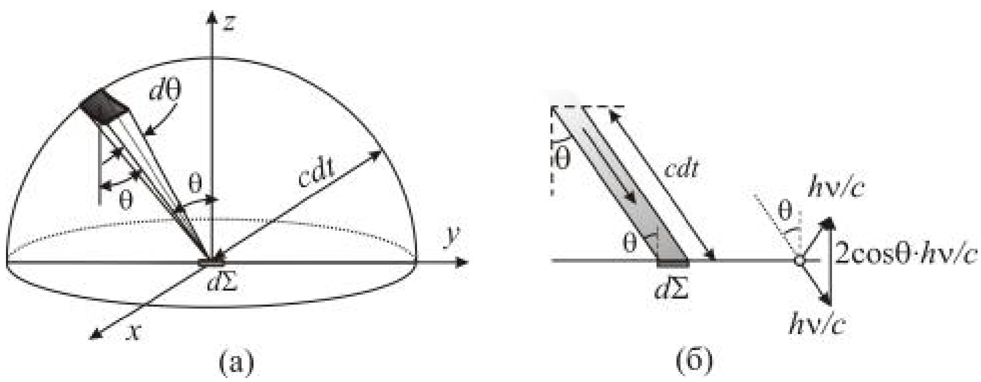

Рис.8.5. К вычислении числа фотонов, ударяющихся о площадку dΣ за время dt, и импульса, передаваемого фотонами площадке.

Рассмотрим поток фотонов к площадке в направлении (θ,φ) (**см. рис**. 7б). Концентрация этих фотонов описывается формулой (37). За время dt, площадки достигнут фотоны, находящиеся в объеме

$$dV = d\Sigma \cdot cdt\cos\theta. \qquad (38)$$

Число фотонов с заданным направлением импульса (θ,φ), ударяющихся о площадку за время dt:

$$dN_{\theta,\varphi} = \delta n_{\theta,\varphi} dV. \qquad (39)$$

Каждый из попадающих под углом θ на площадку фотонов упруго отражается и передает площадке импульс, равный по модулю изменению импульса фотона

$$2h\nu\cos\theta/c. \qquad (40)$$

Получаемый площадкой за время dt импульс $dP_{\theta,\varphi}$ от фотонов, имеющих направление движения (θ,φ), равен

$$dP_{\theta,\varphi} = 2\frac{h\nu}{c}\cos\theta \cdot dN_{\theta,\varphi} . \qquad (41)$$

Оказываемее ими давление на площадку

$$dp_{\theta,\varphi} = \frac{dP_{\theta,\varphi}}{dt \cdot d\Sigma} . \qquad (42)$$

С учетом формул (37)-(41) выражение (42) принимает вид

$$dp_{\theta,\varphi} = \frac{nh\nu}{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (43)$$

Учитывая возможные направления движения фотонов $0 \le \theta \le \pi/2$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$, окончательно находим

$$p = \int dp_{\theta,\varphi} = \frac{nh}{2\pi}\nu\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3}nh\nu . \qquad (44)$$

Поскольку $nh\nu = \varpi$ – плотность энергии фотонного газа, то получаем

$$p = \frac{1}{3}\varpi .$$

Замечание.

1. ***Плотность энергии равновесного излучения*** ϖ зависит от температуры:

$$\varpi = \sigma_c T^4 . \qquad (45)$$

Соотношение (45) выражает **закон Стефана - Больцмана**: плотность энергии, испускаемой абсолютно черным телом, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Постоянная интегрирования (постоянная закона Стефана-Больцмана) определяется из опыта и может быть вычислена статистическим методом

$$\sigma_c = 7{,}64 \cdot 10^{-16}\,\text{Дж/(К}^4 \cdot \text{м}^3) . \qquad (46)$$

Первоначально закон был сформулирован на основании опытных данных, а впоследствии был получен на основании второго начала термодинамики.

2. В задаче для простоты расчетов по умолчанию предполагалось, что все фотоны имеют одну и ту же частоту. В действительности фотонный газ пред-

ставляет собой совокупность фотонов различных частот, но это не изменяет полученных выше уравнений состояния. Следует лишь под плотностью энергии ϖ понимать полную плотность энергии по всем частотам:

$$\varpi = \int_0^\infty \varpi_\omega d\omega,$$

где θ – спектральная плотность энергии излучения абсолютно черного тела, которая описывается **формулой Планка (рис. 8)**

$$\varpi_\omega = \frac{\mathbf{h}\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp\left[\mathbf{h}\omega/(k_B T)\right]-1}.$$

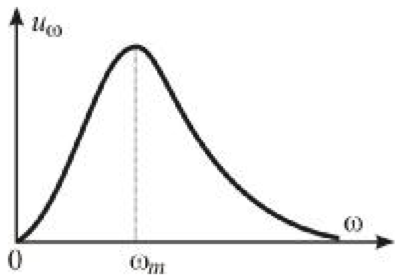

Рис.8. Зависимость от частоты спектральной плотности излучения ϖ_ω абсолютно черного тела.

Частота ω_m, соответствующая максимуму спектральной плотности энергии, увеличивается с ростом температуры: $\omega_m \approx 6,5\cdot 10^{11}\cdot T\,[\text{радиан/с}]$.

Ответ: $p = \varpi/3$

Задача 10. Лазер, мощность которого равна N = 700 МВт, а площадь поперечного сечения светового пучка $\Sigma = 1$ см^2, освещает поверхность, расположенную перпендикулярно направлению распространения света. Рассчитать давление света на поверхность при полном поглощении.

Решение. По формуле (34) при $R = 0$ имеем

$$p = \frac{I}{c} = \frac{N/\Sigma}{c} = \frac{700\cdot 10^6/10^{-4}}{3\cdot 10^8} = 2,3\cdot 10^4\ \text{Па} \approx 0,2\,\text{атм}\,. \qquad (47)$$

Ответ: $p = 2,3\cdot 10^2$ Па .

Замечания.

1. Для сравнения на пороге слышимости звука амплитуда давления в акустической волне на частоте 1 000 Гц равна $p_0 = 2\cdot 10^{-5}$ Па, а давлению (47) соответствует громкость $20\lg\dfrac{p}{p_0} = 140$ дБ (шум выстрела пистолета).

2. При фокусировке света и уменьшении поперечного сечения пучка света до $\Sigma_1 \approx \lambda^2$ давление возрастает в Σ/Σ_1 раз. Например, при $\lambda = 7\cdot 10^{-7}$ м $\Sigma_1 \approx \lambda^2 = 5\cdot 10^{-13}\,м^2$ давление достигает значения $p \approx 3\cdot 10^{10}\,Па$ (в $3\cdot 10^5$ раза больше атмосферного давления).

Фотоны и электроны. Эффект Комптона

Рассеяние Томсона

Задача 11. (Свободный электрон, классический случай). Плоская световая волна рассеивается на свободном электроне. Показать, что в классическом (нерелятивистском) случае частота переизлученной волны не изменяется.

Решение.

1. Пусть электрон находится в начале системы координат. Запишем уравнение движения электрона в электрическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - kz)$ падающей волны

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \sin\omega t\,, \tag{48}$$

Интегрируя по времени правую часть уравнения (21), получаем закон движения электрона

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e\mathbf{E}_0 \sin(\omega t)}{m\omega^2} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t\,. \tag{49}$$

При решении уравнения движения электрона мы предположили, что амплитуда колебаний электрона $\dfrac{eE_0}{m\omega^2}$ много меньше длины падающей световой волны.

2. Колебательное движение (49) сопровождается излучением. Напряженность переизлученной волны (в рамках теории классического дипольного излучения) задается формулой

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1,t)=\frac{\mu_0 e}{4\pi r_1^3}\left[\left[\ddot{\mathbf{r}}(t)\times\mathbf{r}_1\right]\times\mathbf{r}_1\right], \tag{50}$$

где $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор, проведенный из точки, где находится электрон, в точку наблюдения, а $\mathbf{r}(t)$ определяется законом движения электрона (49). Данная схема решения (с разделением на этапы 1 и 2) справедлива при $|\delta E| << E_0$. Из формул (49) и (50) видно, что падающая электромагнитная волна переизлучается во всех направлениях. Частота вторичного излучения строго совпадает с частотой падающей волны, а полная мощность рассеянного излучения $I_{\text{расс}}$ равна

$$I_{\text{расс}}=\frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4} I\ , \tag{51}$$

где $I=c\varepsilon_0 E_0^2$ – интенсивность падающего света. Коэффициент $\dfrac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4}=6{,}65\cdot 10^{-29}\ \text{м}^2$ в формуле (51) называется сечением рассеяния, а само **рассеяние -томсоновским**.

Задача 12. ***(Невозможность процессов рождения фотонов на свободных электронах).*** Показать, что свободный электрон не может излучать отдельный квант света.

Решение. Формально не существует «закона сохранения числа фотонов», но процесс с рождением одного фотона при изменении состояния свободного электрона противоречит законам сохранения энергии и импульса.

Для доказательства перейдем в систему отсчета, в которой свободный электрон покоится в исходном состоянии. Пусть затем электрон испускает фотон с энергией $W_{\text{ф}}$ и импульсом $\mathbf{P}_{\text{ф}}$.

В корпускулярной теории взаимодействие частиц (фотонов и электронов) – есть упругое взаимодействие, для которого можно записать следующую систему уравнений.

Закон сохранения импульса $0 = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_ф$. (52)

Закон сохранения энергии $mc^2 = W_e + W_ф$. (53)

Закон дисперсии электрона $W_e = \sqrt{m^2c^4 + P_e^2c^2}$. (54)

Закон дисперсии фотона $W_ф = P_ф c$. (55)

Решая систему уравнений (52) – (55) относительно энергии фотона, получаем

из (53) $W_ф = mc^2 - W_е$,

используя (54) $W_ф = mc^2 - \sqrt{P_e^2c^2 + m^2c^4}$,

используя (52) и (55) $W_ф = mc^2 - \sqrt{W_ф{}^2 + m^2c^4}$.

Решая последнее уравнение, находим $2W_ф mc^2 = 0$ и $W_ф = 0$, что и требовалось доказать.

Эффект Комптона.

Эффект Комптона – квантовое рассеяние одного фотона на одном электроне (**рис.9**).

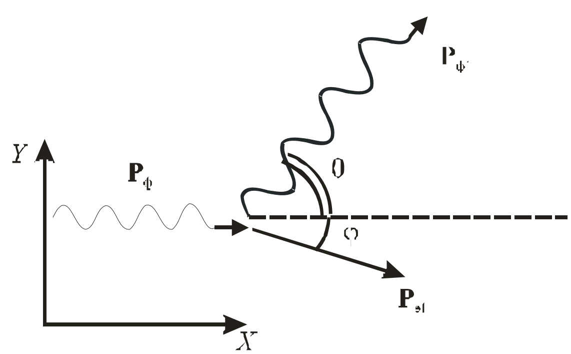

Рис. 9 Схема рассеяния фотона на неподвижном электроне. Фотоны в процессах взаимодействия графически изображаются в виде волнистых линий, электроны – в виде сплошных линий (фейнмановские диаграммы)

Задача 13 (эффект Комптона). Фотон с длиной волны λ рассеивается на неподвижном электроне и отклоняется от первоначального направления движения на угол θ. На сколько изменится длина волны падающего излучения?

Решение. Схема рассеяния фотона на электроне изображена на **рис**. 9. Для абсолютно упругого удара для системы (электрон + фотон) записываем закон сохранения энергии и импульса.

Закон сохранения энергии

$$W_{ф} + W_{e0} = W_{ф1} + W_{e1} \quad . \tag{56}$$

На основании закона дисперсии электрона

$$W_{e0} = mc^2 = 511\text{êýÂ} \quad , \tag{57}$$

$$W_e = \sqrt{P_e^2 c^2 + m^2 c^4} \; ; \tag{58}$$

а из закона дисперсии фотона следует

$$W_{ф} = cP_{ф} \quad , \tag{59}$$

$$W_{ф1} = cP_{ф1} \quad . \tag{60}$$

Закон сохранения импульса

$$\mathbf{P}_{\phi} = \mathbf{P}_{\phi 1} + \mathbf{P}_{e1} \tag{61}$$

возведем в квадрат для записи в скалярном виде

$$(\mathbf{P}_{ф} - \mathbf{P}_{ф1})^2 = \mathbf{P}_e^2 \quad ,$$

$$P_{ф}^2 - 2P_{ф}P_{ф1}\cos\theta + P_{ф1}^2 = P_e^2 \quad . \tag{62}$$

Считая заданным первоначальный импульс фотона $P_{ô} = \mathbf{h}\dfrac{2\pi}{\lambda}$, решаем систему уравнений (56) – (62) относительно $P_{ô1}$ и получаем

$$1 - \cos\theta = mc\left(\frac{1}{P_{ф1}} - \frac{1}{P_{ф}}\right) \tag{63}$$

или в длинах волн

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{2\pi\mathbf{h}}{mc}(1 - \cos\theta) = \lambda_{К}(1 - \cos\theta) \, , \tag{64}$$

где $\lambda_К = \dfrac{h}{mc} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м – – **комптоновская длина волны** электрона.

Так как $\cos\theta \le 1$, то комптоновское рассеяние фотона на неподвижном электроне идет с увеличением длины волны фотона, то есть фотон «краснеет». Однако $\lambda_К$ столь мала, что даже для рентгеновских волн можно пренебречь данным изменением длины волны. Изменение длины волны в эффекте Комптона заметно только для гамма-диапазона ($\mathbf{h}\omega > 100\,$êýÂ) электромагнитного спектра.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda + \dfrac{2\pi\mathbf{h}}{mc}(1 - \cos\theta)$.

Задача 14 (определение угла рассеяния электрона). Фотон с энергией $W_ф = 400$ кэВ рассеялся под углом $\theta = \pi / 4$ на покоившемся свободном электроне. Определить угол φ между направлением скорости, которую получил электрон в результате взаимодействия, и направлением первоначальной скорости фотона (см. **рис**. 9).

Решение. Запишем закон сохранения импульса (61) по координатам (см. **рис**. 9):

$$P_ф = P_{ф1}\cos\theta + P_{e1}\cos\varphi \,, \qquad (65)$$

$$0 = P_{ф1}\sin\theta - P_{e1}\sin\varphi \qquad (66)$$

Из системы уравнений (65) и (66) находим

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\theta}{P_ф / P_{ф1} - \cos\theta} \,. \qquad (67)$$

Используя результат (63) предыдущей задачи

$$P_ф / P_{ф1} = 1 + P_ф\left(1 - \cos\theta\right) / (mc)$$

окончательно получаем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\theta}{\left(1 - \cos\theta\right)\left(1 + P_ф / (mc)\right)} = \frac{\sin\theta}{\left(1 - \cos\theta\right)\left(1 + W_ф / (mc^2)\right)} \,.$$

Отношение $\dfrac{W_ф}{mc^2} = \dfrac{4 \cdot 10^5\ эВ}{5 \cdot 10^5\ эВ} = 0{,}8$ и для численной оценки имеем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\theta}{\left(1 - \cos\theta\right)\left(1 + W_{\text{ô}} / (mc^2)\right)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\left(1 - \sqrt{2}/2\right)\left(1 + 0{,}8\right)} = 1{,}36 \text{ и } \varphi = 0{,}94\ рад = 54^\circ.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)\left(1+W_{\text{ф}}/(mc^2)\right)}$, $\varphi = 0{,}94\,\text{рад} = 54^{\circ}$.

Задача 15 (изменение частоты фотона)**.** Частота фотона, взаимодействующего с покоящимся свободным электроном равна $\nu = 6\cdot 10^{19}\,\text{Гц}$. Определить частоту ν' фотона, рассеянного назад.

Решение. Так как $\theta = 180°$, $\lambda = c/\nu$, $\lambda' = c/\nu'$, то формула $\lambda' - \lambda = \dfrac{2\pi\mathbf{h}}{mc}(1-\cos\theta)$ (8) для эффекта Комптона принимает вид

$$\nu' = \frac{\nu}{1+4\pi\mathbf{h}\nu/(mc^2)}. \qquad (12)$$

На основании данных задачи $4\pi\mathbf{h}\nu/(mc^2) = 4\pi\cdot 10^{-34}\cdot 6\cdot 10^{19}/\left[500\cdot 10^{3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\right] \approx 1$

Таким образом, получаем, что частота уменьшилась в два раза

$\nu' \approx \dfrac{6\cdot 10^{19}}{1+2\cdot 0{,}5}\,\text{Гц} = 3\cdot 10^{19}\,\text{Гц}$.

Ответ: $\nu' = \dfrac{\nu}{1+2\dfrac{h\nu}{mc^2}} \approx 3\cdot 10^{19}$ Гц.

Приложение 1. Интенсивность и вероятность. Проблема локализации фотона. Флуктуации интенсивности в световом пучке.

Переход от классического описания светового пучка с помощью пространственно-временного задания напряженностей электрического и магнитного полей к квантовому описанию происходит с введением концентрации фотонов $n_{\text{ф}}$, заданной формулой (13). Число фотонов в пучке света, за время Δt пересекающих поперечное сечение Σ лишь в среднем равно

$$\langle N_{\text{ф}}\rangle = c\,\Delta t\cdot\Sigma\cdot n_{\text{ф}}\ .$$

Точное число фотонов $N_{\text{ф}}$ в объеме $c\Delta t\Sigma$ отличается от среднего, а величина $\delta N_{\text{ф}} = N_{\text{ф}} - \langle N_{\text{ф}}\rangle$ называется ***флуктуацией***. Флуктуация $\delta N_{\text{ф}}$ ведет себя аналогично флуктуации числа молекул газа в некотором объеме. Для таких флуктуаций имеет место известное соотношение

$$\frac{\delta N_{ф}}{\left\langle N_{ф} \right\rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{N_{ф}}}$$

из статистической теории. В классическом пределе $N_{ф} >> 1$ флуктуациями можно пренебречь, в случае же, когда концентрация фотонов порядка единицы ($N_{ф} \gtrsim 1$) квантовые флуктуации становятся существенными. Опыты по наблюдению флуктуаций излучения в видимом свете малой интенсивности проводил С.И. Вавилов. Инструментом для фиксирования флуктуаций интенсивности в опытах С.И. Вавилова был человеческий глаз.

Приложение 2. Квантовые квазичастицы в классических системах

Во многих случаях для качественного анализа волновых явлений, и для последовательных расчетов идею квантовых частиц – фотонов используют даже в задачах, где не важна квантовая дискретность, то есть при $N_{ф} >> 1$. Так, в системах, где концентрации квантов излучения очень велики и, казалось бы, вполне адекватно описание с помощью непрерывных функций $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, вводят квантовое описание и концентрации квантов излучения $n_{ф}$. Ярким примером служат волновые явления в газовой плазме. Такая плазма – система с высокими концентрациями свободных электронов и ионов, приближенно нейтральная в среднем. В плазме существует много различных типов электромагнитных волн, то есть волн с разными законами дисперсии. Например, поперечные плазменные волны имеют закон дисперсии

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_p{}^2 + k^2 c^2}\,,$$

где $\omega_p = \sqrt{\dfrac{e^2 n_e}{\varepsilon_0\, m}}$ – плазменная частота, n_e – средняя концентрация электронов.

Для такой волны вводят понятие ***поперечного плазмона*** – квазичастицы с энергией $\mathbf{h}\omega_1(\mathbf{k})$ и импульсом $\mathbf{hk}$. Затем можно рассчитать концентрацию плазмонов аналогично формуле (10):

$$n_\text{ф} = \frac{\varepsilon(\omega_1)\varepsilon_0 E_0^2}{2\mathbf{h}\omega_1}.$$

Использование квантовых образов позволяет записывать выражения для плотности энергии $\mathbf{h}\omega_1(k)n_\text{ф}$ и импульса $\mathbf{hk}\,n_\text{ф}$ таких волн. Получаемые формулы правильно описывают излучение, поглощение и взаимодействие электромагнитных волн в плазме.

Домашнее задание. Иродов [4], второе издание, 1988 год.
№5.278 – концентрация фотонов, №5.280, №5.282 – давление света, №5.288 – рентгеновское излучение, №5.293, №5.296 – фотоэффект, №5.303, №5.304 – эффект Комптона.