

Квантование энергии в магнитном поле и в тонкой пленке

1. Квантование магнитного потока

1.1. Канонический импульс

В квантовой механике различаются две импульсные величины.

1) Кинетический импульс: mv , определяющий кинетическую энергию $W = \frac{(mv)^2}{2m}$, где m – масса частицы.

2) Канонический импульс, который определяет длину волны де Бройля частицы

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|\mathbf{p}|}. \quad (1)$$

По условию квантования Бора на длине боровской орбиты укладывается целое число длин волн. Для круговой орбиты радиуса r

$$2\pi r = n\lambda,$$

где n – целое число. Подставляя выражение для λ (1), находим $2\pi r|\mathbf{p}| = 2\pi\hbar \cdot n$.

Для орбиты произвольной формы это соотношение записывается в виде

$$\oint \mathbf{p} d\ell = 2\pi\hbar \cdot n. \quad (1_1)$$

В квантовой механике квантуется канонический импульс, так как его величина не зависит от наличия магнитного поля.

Найдем, как связаны канонический \mathbf{P} и кинетический mv импульс частицы. Рассмотрим частицу с зарядом q , движущуюся в отсутствие магнитного поля со скоростью \mathbf{v} .

Пусть магнитное поле с индукцией \mathbf{B} вводится за время τ . В течение этого времени меняется величина магнитного поля, что приводит к появлению вихревого электрического поля, согласно уравнению Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad (3)$$

имеем уравнение $\text{rot}\mathbf{E} = -\text{rot}[d\mathbf{A}/dt]$, интегрируя которое получаем

$$\mathbf{E} = -d\mathbf{A}/dt + \mathbf{C}, \quad (4)$$

где константа \mathbf{C} равна нулю, так как $\mathbf{E} = 0$, если $d\mathbf{A}/dt = 0$.

Под действием электрического поля с напряженностью (4) частица ускоряется, и ее кинетический импульс изменяется и становится равным

$$mv_2 = mv_1 + \int_0^\tau q\mathbf{E}dt = mv_1 + q \int_0^\tau \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt = mv_1 - q\mathbf{A}, \quad (5)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал, соответствующий величине введенного за время τ магнитного поля.

Из (5) следует, что величина

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}}, \quad (6)$$

всегда равна значению кинетического импульса до введения магнитного поля, то есть не зависит от \mathbf{B} . Эта величина (6) и называется **каноническим импульсом**.

1.2. Магнитный поток внутри сверхпроводящей трубки

В 1933 г. Мейснером и Оксенфельдом было открыто удивительное свойство сверхпроводников. При охлаждении массивных сверхпроводников от $T > T_c$ (T_c – температура перехода в сверхпроводящее состояние, критическая температура) в постоянном магнитном поле обнаружено, что при температуре T_c магнитное поле выталкивается из объема образца, а по его поверхности начинает течь сверхпроводящий ток. Поверхностный сверхпроводящий ток течет в слое толщиной γ , которая называется **глубиной проникновения магнитного поля**. Сверхпроводящий ток своим полем полностью экранирует проникновение в образец внешнего магнитного поля, так что внутри сверхпроводника индукция магнитного поля \mathbf{B} всегда равна нулю. Величина γ варьируется в пределах от 400 до нескольких тысяч Å (Ангстрем). Таким образом, сверхпроводники в сверхпроводящем состоянии, формально, ведут себя как идеальные диамагнетики с магнитной восприимчивостью $\chi = -1$ (индукция \mathbf{B} и напряженность \mathbf{H} магнитного поля в магнетиках связаны соотношением $\mathbf{B} = (1 + \chi)\mu_0\mathbf{H}$).

В первом приближении индукция магнитного поля при удалении от поверхности $x = 0$ вглубь образца $x > 0$ экспоненциально затухает (см. **рис. 1**).

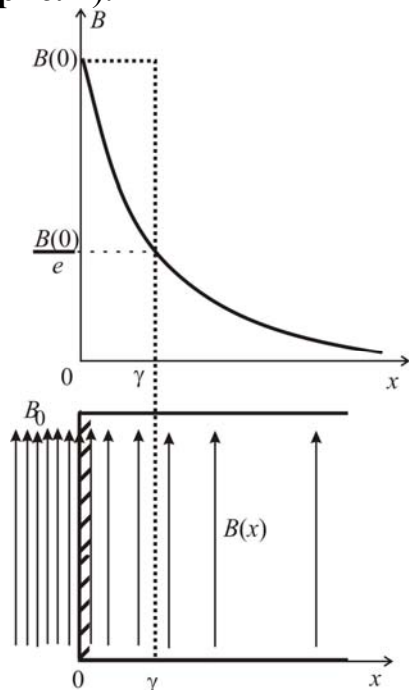


Рис.1. Индукция B магнитного поля уменьшается от значения $B(0) = B_0$ на поверхности при $x = 0$ до нуля при переходе вглубь сверхпроводника $x \rightarrow \infty$. На глубине проникновения γ индукция уменьшается в e раз.

Для удобства расчетов экспоненциальная функция $B(x)$ заменяется ступенькой шириной γ , исходя из соотношения:

$$\int_0^{\infty} B(x) dx = \gamma B(0), \quad (9.2)$$

где x — координата, нормальная к поверхности, $B(0)$ — магнитная индукция на поверхности сверхпроводника (рис. 9–2). На глубине γ , таким образом, внешнее магнитное поле уменьшается в e раз.

Задача 1. Сверхпроводящая трубка с толщиной стенок значительно больше γ при температуре выше T_c помещена в однородное внешнее магнитное поле, индукция которого параллельна оси трубки. Затем температура понижается ниже T_c . По поверхности трубки в слое толщиной γ начинает течь круговой незатухающий сверхпроводящий ток, экранирующий материал объема трубки от проникновения магнитного поля. Определите магнитный поток, пронизывающий внутреннее отверстие трубки.

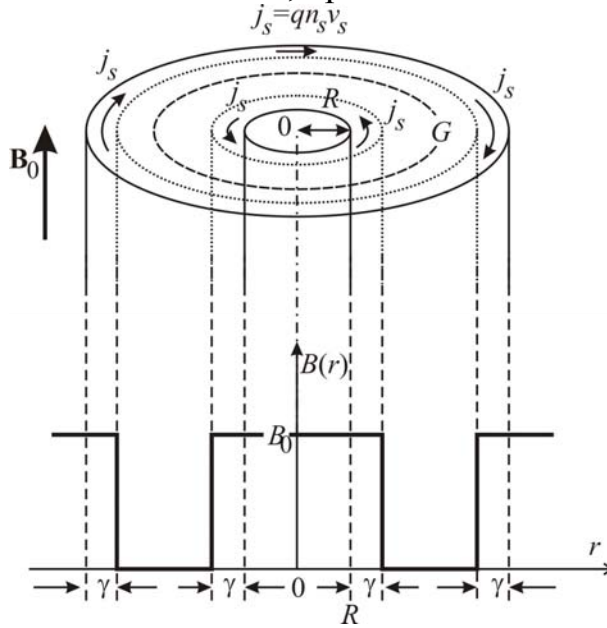


Рис. 2. внешнее магнитное поле экранируется сверхпроводящим током так, что индукция магнитного поля в объеме сверхпроводящей трубки равна нулю. Вблизи поверхности магнитное поле проникает в трубку на глубину γ .

Решение. Условие (1_1) квантования в магнитном поле, определяющее стационарные замкнутые орбиты с учетом (6) принимает вид

$$\oint m v(r) dl + q \oint A(r) dl = 2\pi\hbar \cdot n. \quad (7)$$

Скорость v входит в формулу для плотности сверхпроводящего тока

$$j_s = q n_s v_s \quad (8)$$

Подставляя v_s из (8) в (7), находим

$$\frac{m}{q n_s} \oint j_s(r) dl + q \oint A(r) dl = 2\pi\hbar \cdot n. \quad (9)$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части (7):

$$\oint A(r) dl = \iint_{\Sigma} \text{rot} A ds = \iint_{\Sigma} B_n ds = \Phi_n, \quad (10)$$

то есть циркуляция векторного потенциала по замкнутому контуру $\oint A(r) dl$ равняется магнитному потоку $\Phi_n = \iint_{\Sigma} B_n ds$ через площадь Σ , натянутую на этот контур.

Условие квантования (9) приобретает вид

$$\Phi_n + \frac{m}{q^2 n_s} \oint j_s dl = \frac{2\pi\hbar n}{q}. \quad (11)$$

где q – заряд частиц, квантование канонического импульса которых приводит к квантованию магнитного потока в цилиндре. Как следует из эксперимента этот заряд равен удвоенному заряду электрона $q = 2e$.

Выберем контур G (рис.2) в глубине сверхпроводящего материала трубки, где $\mathbf{V} = 0$ и $j_s = 0$. Тогда из (11) получаем, что магнитный поток через площадь круга с радиусом $R + \gamma$ (отверстие с радиусом R плюс слой толщиной γ) квантован:

$$\Phi_n = \frac{\pi \hbar}{e} n, \quad (12)$$

где квант магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{e} = \frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,06 \cdot 10^{-15} \text{ \AA} . \quad (13)$$

Квант магнитного потока (13) мал по величине и, чтобы наблюдать заметные скачки магнитного потока $\Phi_n = B \cdot \pi R^2$ при изменении индукции магнитного поля \mathbf{B} , следует брать цилиндры с малым внутренним радиусом R .

Ответ. $\Phi_n = \frac{\pi \hbar}{e} n$

2. Квантование движения в магнитном поле

На заряженные частицы в магнитном поле действует сила Лоренца. Пусть индукция магнитного поля направлена вдоль оси OZ . Тогда частицы совершают вращательное движение в плоскости XY , перпендикулярной направлению индукции магнитного поля. Движение в этой плоскости становится периодическим и ограниченным. Энергия всякого периодического движения квантуется, и можно ожидать квантования той части кинетической энергии частицы, которая связана с компонентами скорости v_x и v_y .

Уравнение Шредингера для частицы в магнитном поле получается заменой оператора $-i\hbar\nabla$ кинетического импульса mv_1 (5) в нулевом магнитном поле на оператор P кинетического импульса mv_2 (5) в магнитном поле

$$P = -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} : \quad (1)$$

$$\frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2}{2m} \psi = W\psi, \quad (2)$$

где q – заряд частицы, \mathbf{A} – векторный потенциал магнитного поля. Так как $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, то вектор \mathbf{A} можно выбрать в виде $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$. В этом случае для компонентов оператора P (1) справедливы выражения:

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - qyB,$$

$$P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y},$$

$$P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Решение уравнения (2) можно получить в аналитическом виде (см., например, учебники по квантовой механике), но здесь мы не будем останавливаться на ходе решения. Скажем только, что разрешенные энергетические уровни для движения в плоскости ХУ получаются такие же, как для квантового осциллятора. Энергетический спектр заряженной частицы в магнитном поле представляется в виде

$$W = W_{x,y} + W_z = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{P_z^2}{2m}, \quad (3)$$

где энергия поперечно движения

$$W_{x,y} = W_{\perp} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4-1)$$

Циклотронная частота ω_c - частота прецессионного движения частицы по замкнутой траектории в плоскости, перпендикулярной направлению индукции магнитного поля, может быть найдена из классического уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp}B, \quad (4)$$

где m – масса, q - заряд частицы, r – радиус орбиты, $v_{\perp} = \omega_c r$. Из (4) находим

$$v_{\perp} = \frac{qB}{m}r \quad (5)$$

Таким образом, все электроны прецессируют с одной и той же частотой

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (6)$$

Энергия продольного движения квантуется также как и в предыдущих задачах за счет ограниченности движения вдоль оси OZ, например, размером L кристалла:

$$W_{\parallel} = \frac{P_z^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} n_z \right)^2. \quad (7)$$

Задача 2. Определите радиус орбит электронов в двумерном металлическом кристалле, если магнитное поле с индукцией $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ направлено перпендикулярно плоскости кристалла.

Решение. Магнитное поле не совершает работы, так как сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения электронов. Поэтому энергия движения в магнитном поле не изменяется $W_{x,y} = W_{\perp} = \frac{P_{\perp}^2}{2m}$. Используя (3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\perp}^2}{2m} &= \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ и} \\ P_{\perp n} &= \sqrt{2m\hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $P_{\perp n} = m\omega_c r_{\perp n}$, то

$$r_{\perp n} = \sqrt{\frac{2\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{|e|B}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Из (9) следует, что не любые радиусы орбит для электронов разрешены. Переход с одной орбиты на соседнюю с квантовым номером на единицу

больше возможен только при получении электроном энергии, равной энергии **циклотронного кванта** $\hbar\omega_c$. Все электроны, имеющие одинаковую энергию $W_n = \hbar\omega_c(n+1/2)$, то есть находящиеся на энергетическом уровне, с одним квантовым числом n , вращаются по орбитам одинакового радиуса.

Ответ.

Задача 3. Используя условие предыдущей задачи, определите, как изменяется плотность электронных состояний в магнитном поле. Площадь, занимаемая двумерным кристаллом равна $S = L^2$. Наличие спина и собственного магнитного момента у электронов не учитывать.

Решение. Без магнитного поля с учетом квантования импульса вдоль осей OX и OY $P_x = \frac{2\pi\hbar}{L}n_x$ и $P_y = \frac{2\pi\hbar}{L}n_y$ объем квантового состояния равен $\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2$. Одну и ту же энергию, значения которой лежат в интервале $(W, W + dW)$, имеют электронные состояния в кольце с внутренним радиусом $P = \sqrt{2mW}$ и внешним на величину $dP = \sqrt{\frac{m}{2W}}dW$ больше.

Число таких состояний в интервале заданном энергии dW :

$$dN = 2 \frac{2\pi P dP}{(2\pi\hbar/L)^2} = \frac{Sm}{\pi\hbar^2} dW. \quad (10)$$

Первая двойка в (10) учитывает возможность нахождения в одном состоянии двух электронов с разными направлениями спинов.

Из (10) находим плотность состояний:

$$\frac{dN}{dW} = \frac{Sm}{\pi\hbar^2}, \quad (11)$$

которая оказывается независимой от энергии. Чем больше энергия W , то есть больше импульс P и радиус окружности, тем меньше ширина кольца dP . И при одном и том же dW число состояний dN в кольце оказывается одинаковым.

В магнитном поле энергия квантована $W = \hbar\omega_c(n+1/2)$ (4-1). Причем, так как электроны имеют одинаковую циклотронную частоту вращения, то энергетический спектр всей системы совпадает с энергетическим спектром одного электрона.

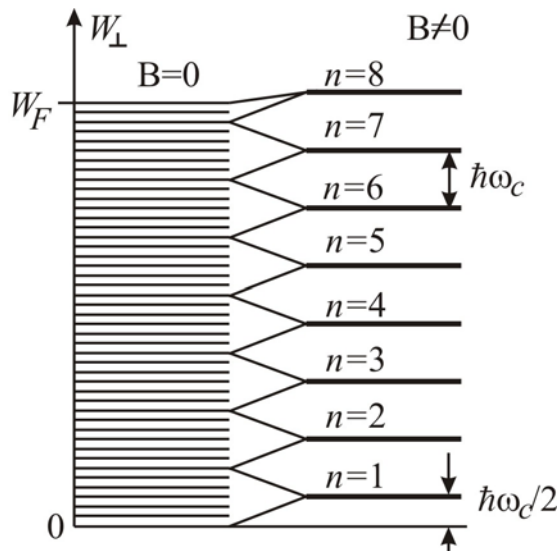


Рис. 3. В отсутствии магнитного поля плотность состояний для двумерной пленки постоянна и разрешенные значения энергии образуют систему эквидистантных квазинепрерывных уровней энергии. В магнитном поле полосы квазинепрерывного спектра шириной $\hbar\omega_{\tilde{n}}$ стягиваются в дискретные энергетические уровни Ландау.

В магнитном поле квазинепрерывные уровни энергии, расположенные с постоянной плотностью, которые имеет система без магнитного поля, в магнитном поле стягиваются в уровни, расстояние между которыми по шкале энергии равно $\hbar\omega_c$ (см. рис.3). Эти уровни называются **уровнями Ландау**. В результате каждый уровень Ландау в магнитном поле содержит все уровни квазинепрерывного спектра в интервале энергии $\hbar\omega_c$ и, таким образом, его степень вырождения равна

$$N_{n,B} = \hbar\omega_c \cdot \frac{dN}{dW} = \hbar\omega_c \frac{Sm}{\pi\hbar^2} = S \frac{eB}{\pi\hbar}. \quad (12)$$

В магнитном поле вырождение энергетических уровней Ландау возрастает с ростом индукции магнитного поля.

Таким образом, плотность состояний в магнитном поле представляет собой набор дельта-функций, расположенных на одинаковом энергетическом расстоянии $\hbar\omega_c$ друг от друга.

Ответ.

Задача 4. Определите качественно, с какой частотой изменяется плотность состояний на уровне Ферми у двумерного металла при увеличении индукции магнитного поля. Считать, что магнитное поле не велико так что, во-первых, под уровнем Ферми насчитывается большое количество уровней Ландау (ситуация далека от квантового предела, при котором $\hbar\omega_{\tilde{n}}/2 = W_F$) и, во-вторых, положение уровня Ферми не изменяется при изменении индукции магнитного поля. Определите период осцилляций сопротивления.

Решение. При увеличении магнитного поля расстояние между уровнями Ландау увеличивается, и все уровни поднимаются вверх по энергии. Если верхний заполненный электронами уровень расположен ниже уровня Ферми на расстоянии $\hbar\omega_c/2$, его степень заполнения такая же, как и всех уровней Ландау, расположенных ниже по энергии. При дальнейшем увеличении магнитного поля заселенность верхнего уровня уменьшается (см. рис.3) и обращается в нуль, когда он поднимается выше уровня Ферми на расстояние $\hbar\omega_c/2$. Расположенный ниже уровень Ландау в этот момент полностью заполнен. Таким образом, заселенность верхнего уровня при увеличении

магнитного поля периодически изменяется от максимального значения до нуля.

Поскольку число уровней Ландау велико, то можно пренебречь $\frac{1}{2}$ в (4-1) и записать условие совпадения уровня Ферми W_F в магнитном поле с индукцией B_1 с уровнем Ландау с номером n_1 в виде $W_F = \hbar\omega_{c1}n_1$ или, используя выражение для циклотронной частоты:

$$W_F = \frac{\hbar q}{m} B_1 n_1. \quad (13)$$

Последующее совпадение уровня Ферми произойдет с уровнем Ландау с номером $n_2 = n_1 - 1$ в магнитном поле B_2 :

$$W_F = \frac{\hbar q}{m} B_2 (n_1 - 1) \quad (14)$$

Разность уравнений $0 = B_2(n_1 - 1) - B_1 n_1$. Выражая из (13) n_1 , получаем

$$\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} = \frac{\hbar q}{m W_F}.$$

Таким образом, в обратном магнитном поле заселенность верхнего уровня меняется с постоянным периодом:

$$T_{1/B} = \frac{\hbar q}{m W_F}. \quad (15)$$

Определяя период осцилляций заселенности (15) можно вычислить энергию Ферми.

Ответ. $T_{1/B} = \frac{\hbar q}{m W_F}.$

Задача 5. В двумерном металле в магнитном поле электроны совершают вращательное движение по квантовым орбитам, каждая из которых соответствует определенному уровню Ландау. Вычислите, на сколько отличаются магнитные потоки через орбиты, квантовые номера которых отличаются на единицу.

Решение. Радиус орбиты с квантовым номером n для электрона $r_n = \sqrt{\frac{2\hbar}{|e|B}}(n + 1/2)$, магнитный поток через круговую площадь орбиты

$$\Phi_n = B \cdot \pi r_n^2 = \frac{2\pi\hbar}{|e|}(n + 1/2).$$

Отличие магнитных потоков через соседние орбиты равен удвоенному кванту магнитного потока:

$$\Delta\Phi = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \frac{2\pi\hbar}{|e|} = 2\Phi_0 = 4,12 \cdot 10^{-15} \text{ \AA}^2.$$

Ответ. $\Delta\Phi = \frac{2\pi\hbar}{|e|} = 2\Phi_0$

3. Квантовый размерный эффект

Квантовый размерный эффект представляет собой еще одно проявление квантовых свойств частиц на макроскопическом уровне.

Как только размеры кристалла или толщина кристаллической пленки становятся сравнимы с длиной волны де-Бройля, включается механизм

квантования энергии в узких потенциальных ямах. Возникает ряд качественно новых эффектов, называемых квантовыми размерными эффектами.

Задача 6. Полупроводниковая пленка из InSb имеет толщину $L = 10$ нм. Плоскость пленки перпендикулярна направлению оси OZ. У массивного полупроводника InSb имеется прямая энергетическая щель между потолком валентной зоны и дном зоны проводимости, равная $W_g = 0,18$ эВ. Определить насколько сдвинется край полосы поглощения в пленке по сравнению с массивным образцом из InSb. В качестве модели потенциала для пленки используйте прямоугольный потенциальный «желоб с плоским дном» и бесконечно высокими стенками. Эффективные массы электронов у дна зоны проводимости и дырок у потолка валентной зоны равны соответственно: $m_{3C} = 0,013m_0$, $m_{3V} = 0,4m_0$.

Решение. Потенциальная энергия электронов в пленке

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & \text{и } \delta \text{ э } z < 0 \\ 0, & \text{и } \delta \text{ э } 0 \leq z \leq L \\ \infty, & \text{и } \delta \text{ э } z > L \end{cases} \quad (1)$$

Кинетическая энергия вдоль оси OZ квантуется (см. задачу №2)

$$W_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_z L^2} n^2.$$

Волновая функция, описывающая движение в этом направлении

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi z}{L} n\right).$$

Пусть в направлениях OX и OY эффективные массы одинаковы и равны $m_x = m_y = m_1$, тогда для полной энергии можно записать

$$W = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_x} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_y} + W_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_3 L^2} n^2, \quad (2)$$

а для полной волновой функции

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} e^{ikr} \psi_n = \sqrt{\frac{2}{L_x L_y L}} e^{ikr} \sin\left(\frac{\pi z}{L} n\right),$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Квазидискретный спектр электронов (2) в зоне проводимости для размерно-квантованной полупроводниковой пленки изображен на **рис.4**.

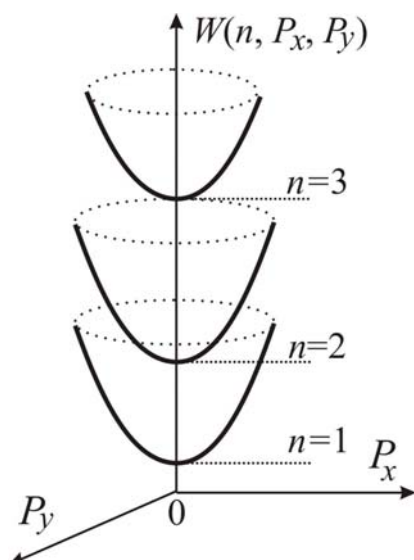


Рис.4. Вблизи дна энергетической зоны проводимости плотность расположения энергетических уровней значительно понижается.

Дну зоны проводимости ($k_x = k_y = k_z = 0$) в массивном полупроводнике соответствует энергия $W = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_3}$, равная нулю, если энергия отсчитывается от дна зоны проводимости.

Если ввести один энергетический уровень отсчета, как для зоны проводимости, так и для валентной зоны, то

$$W_{\text{дн}} = W_C.$$

Тогда в пленке у дна зоны проводимости $k_x = k_y = 0$ и $n = 1$:

$$W_{\text{дн}} = W_C + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_{3C} L^2},$$

где m_{3C} - эффективная масса электронов у дна зоны проводимости (С).

Аналогично для потолка валентной (V) зоны имеем

$$W_{\text{п}} = W_V - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_{3V} L^2}.$$

Если в массивном полупроводнике энергетическая щель между потолком валентной зоны и дном зоны проводимости $W_{\text{г}} = W_C - W_V$, то для пленки энергетическая щель изменяется на величину

$$\Delta W_g = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_{3C} L^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_{3V} L^2} \approx \frac{10^{-68} \pi^2}{2 \cdot 0,013 \cdot 10^{-30} 10^{-16}} + \frac{10^{-68} \pi^2}{2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-30} 10^{-16}} = 3,9 \cdot 10^{-20} \text{ эВ} = 0,24 \text{ эВ}$$

и станет равной $W_g = 0,42 \text{ эВ}$.

Поглощение электромагнитных волн в массивном полупроводнике начинается с частот

$$\omega_{\text{г}} = \frac{1}{\hbar} W_{\text{г}} = \frac{0,18 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-34}} = 2,9 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}, \text{ соответствующих длинам волн}$$

$$\lambda_{\text{г}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{г}}} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 6500 \text{ нм},$$

а в пленке край полосы поглощения сдвигается в коротковолновую область:

$$\omega = \frac{1}{\hbar} W_g = \frac{0,42 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-34}} = 6,8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 2770 \text{ нм}.$$

Ответ.

Задача 7. Квадратная пленка со стороной L_1 имеет толщину L изготовлена из полупроводника (см. предыдущую задачу). Определите зависимость плотности электронных состояний от энергии в размерно-квантованной полупроводниковой пленке. Электронный газ считать вырожденным, то есть подчиняющимся статистике Ферми – Дирака. Эффективные массы вдоль осей Ox и Oy одинаковы $m_x = m_y = m_1$.

Решение. В вырожденном массивном полупроводнике заполнены все состояния в импульсном пространстве внутри поверхности Ферми, а в размерно-квантованной пленке заполнены состояния только в эллипсах, получающихся при пересечении поверхности Ферми и плоскостей $P_z = \frac{\pi\hbar}{L}n$ (см. рис.5).

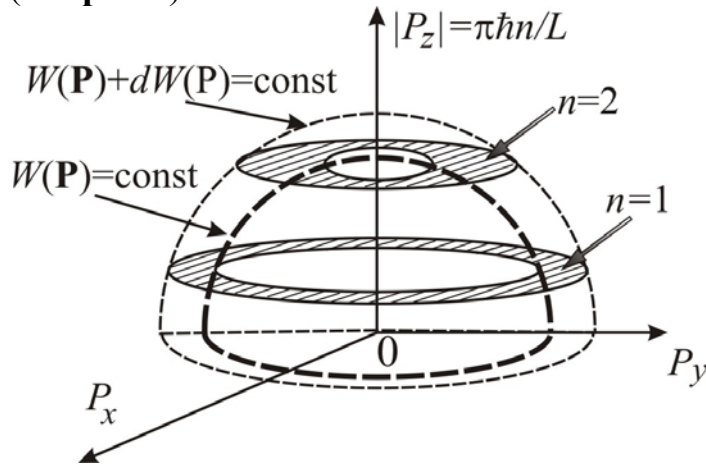


Рис.5

Площадь кольца, заключенного между двумя изоэнергетическими линиями $W(\mathbf{P}) = const$ и $W(\mathbf{P}) + dW(\mathbf{P})$

$$dS_k = \pi(P + dP)^2 - \pi P^2 = 2\pi P dP.$$

Число квантовых состояний (с учетом вырождения по спину) в данном кольце

$$dN = 2 \frac{dS_k}{(2\pi\hbar/L_1)^2} = 2 \frac{2\pi P dP}{(2\pi\hbar/L_1)^2} = \frac{dP^2}{2\pi\hbar^2} L_1^2.$$

Из закона дисперсии (2) $P^2 = 2m_1[W(P) - W_n]$ и для фиксированной подзоны (с заданным номером n)

$$dP^2 = 2m_1 dW(P).$$

Таким образом, находим число квантовых состояний в подзоне

$$dN = \frac{dP^2}{2\pi\hbar^2} L_1^2 = \frac{m_1 dW}{\pi\hbar^2} L_1^2$$

и плотность состояний в одной подзоне

$$\frac{dN}{dW} = \frac{m_1}{\pi\hbar^2} L_1^2.$$

Плотность состояний в единице объема $L_1^2 L = 1$ для одной подзоны

$$\rho_1 = \frac{dn}{dW} = \frac{m_1}{L\pi\hbar^2}. \quad (3)$$

Заметим, что плотность состояний в данном случае не зависит от энергии и номера подзоны.

Для массивного проводника при $m_1 = m_3$ плотность состояний была получена в гл. (формула из кв. состояния):

$$\rho(W) = \frac{dn}{dW} = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{W}. \quad (4)$$

Проанализируем зависимость плотности состояний от энергии для двумерной пленки.

Пусть W такова, что в импульсном пространстве сфера, соответствующая $W = \text{const}$ подходит ко дну подзоны с номером n . Поскольку плотность состояний одинакова во всех подзонах, то плотность состояний с энергией в интервале от W до $W + dW$ равна

$$\rho = \rho_1(n-1) = \frac{m_1}{L\pi\hbar^2}(n-1).$$

При энергии

$$W = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_3L^2}n^2 \quad (5)$$

сфера $W = \text{const}$ касается дна (то есть $P_x = P_y = 0$ в (2)) подзоны с номером n . Плотность состояний испытывает скачок, равный вкладу ρ_1 n -ой подзоны и становится равной $\rho = \rho_1 n$. Выражая из (5) n через энергию, получаем выражение

$$\rho(W) = \frac{dn}{dW} = \frac{m_1}{\pi^2\hbar^3} \sqrt{2m_3W},$$

совпадающее с плотностью состояний (4) в трехмерном случае при $m_1 = m_3$.

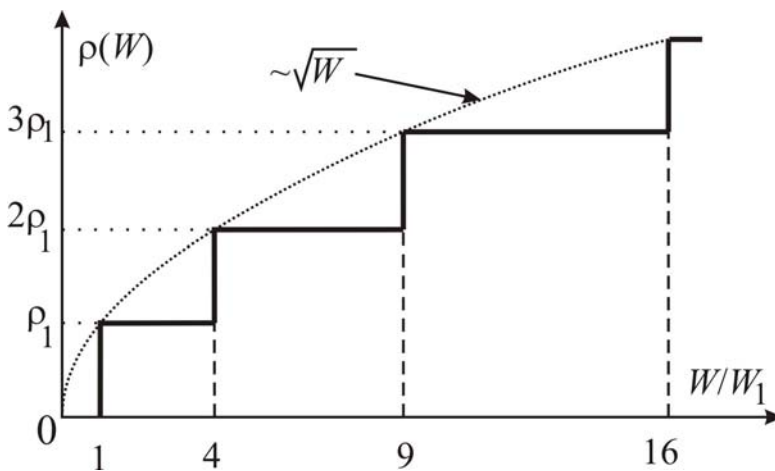


Рис.6

Таким образом, можно заключить, что с ростом энергии плотность состояний испытывает скачкообразный рост, как только энергия совпадает с

дном очередной подзоны, то есть при значениях $W = W_n$ (рис.6). В этих точках плотность состояний в пленке совпадает со значением плотности электронных состояний в массивном образце. Отсутствие состояний при $W < W_1$ связано с принципом неопределенности.

Примечание. Впервые эффекты размерного квантования наблюдались именно на пленках полупроводника InSb и полуметалла Bi.

В настоящее время квантовые структуры изготавливают иначе. В контакт приводятся два полупроводника (рис.7а) с различными запрещенными зонами (широкозонный и узкозонный полупроводники). Для электронов, движущихся в зоне проводимости узкозонного полупроводника с энергией, меньше W_{C2} , граница с широкозонным полупроводником играет роль потенциального барьера (см. задачиШред).

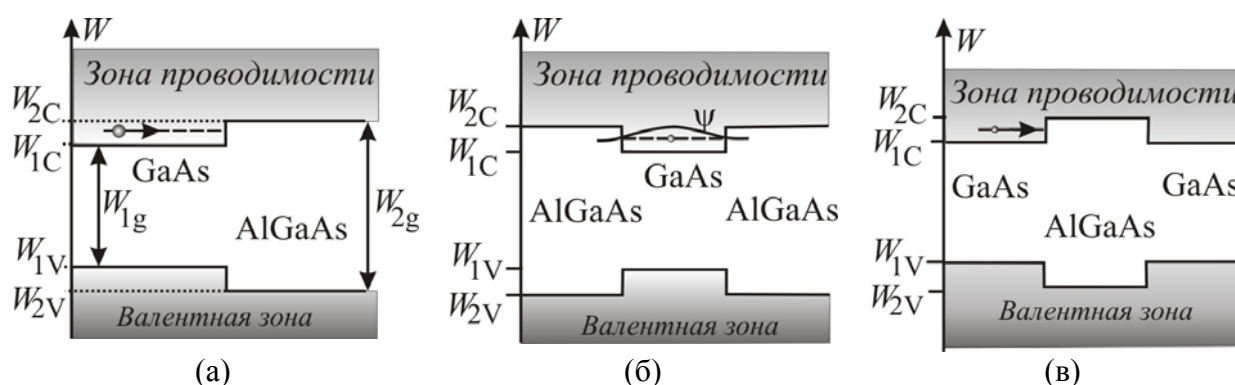


Рис.7. Энергетические схемы гетероструктур - контактов полупроводников арсенида галлия GaAs (ширина запрещенной зоны $W_{1g} = 1,5\text{эВ}$) и твердого раствора $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, в котором часть x атомов галлия заменена на атомы алюминия (ширина запрещенной зоны $1,5\text{эВ} \leq W_{2g} \leq 2,2\text{эВ}$)

Если же тонкий слой полупроводника с узкой запрещенной зоной поместить между широкозонными полупроводниками, то получится одномерная квантовая яма (, см. задачи....Шред) конечной глубины. На рис.7б изображен один дискретный уровень (штриховая линия) в яме и волновая функция электрона в этом состоянии.

Структура, содержащая прямоугольный одномерный барьер получается, если тонкий слой широкозонного полупроводника расположен между двумя узкозонными полупроводниками (рис.7в).

Одним из технических методов получения таких структур является метод молекулярно-лучевой эпитаксии, который позволяет получать гладкие и резкие (с точностью до моноатомного слоя) границы между соседними слоями.

Ответ.