

Глава.1

Введение. Упругие и электромагнитные волны. Характеристики и основные свойства

1.1. Основные характеристики волн

Для простоты будем рассматривать только плоские *гармонические* (синусоидальные) *волны*, распространяющиеся в однородных изотропных средах.

Волна – процесс распространения колебаний в пространстве, в каждой точке которого происходит согласованное чередование максимумов и минимумов некоторой физической величины ξ . Волна носит название этой физической величины: волна смещений частиц среды из положения равновесия ξ , волна скоростей $\xi = v$, волна плотности (например, в акустической волне) $\xi = \Delta\rho$, электромагнитная волна (в световых и радиоволнах) $\xi = E$ и $\xi = B$, температура $\xi = T$ и др.

Рассмотрим *плоскую* гармоническую **бегущую волну**, для которой ξ – скалярная величина, зависящая от времени t и декартовой координаты x по **закону**:

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1)$$

Выражение (1) называется **законом распространения плоской гармонической волны**. Волна (1) распространяется вдоль оси OX в положительном направлении

x – **координата** точек пространства;

A – **амплитуда** – максимальное значение ξ (в общем случае (не для плоской гармонической волны) может зависеть как от времени t , так и от координаты x);

$$(\omega t - kx) \quad (2)$$

– **фаза волны** в точке x в момент времени t ;

ω – **частота** (циклическая), равная умноженному на 2π числу полных колебаний в единицу времени (секунду);

величина обратная частоте определяет **период** колебаний – минимальное время, через которое система возвращается в то же состояние, (для механической колебательной системы состояние характеризуется двумя параметрами: координатой и импульсом)

$$T = 2\pi / \omega; \quad (3)$$

k – **волновой вектор** (волновое число), направление волнового вектора совпадает с направлением распространения волны. Модуль волнового вектора равен:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad (4)$$

λ – **длина волны** – пространственный период, минимальное расстояние между пространственными точками, колебания ξ в которых происходит синфазно (изменение фазы $\Delta(\omega t - kx) = 2\pi$ при $\Delta t = 0$ и $\Delta x = \lambda$): $k\lambda = 2\pi$;

c – **фазовая скорость**, с которой перемещается поверхность постоянной фазы (для волны (1) это плоскость). Найдем фазовую скорость дифференцированием по времени условия постоянства фазы $\omega t - kx = \text{const}$:

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (5)$$

или

$$c = \frac{\lambda}{T}; \quad (6)$$

Зависимость частоты от волнового вектора называется **законом дисперсии**:

$$\boxed{\omega = \omega(k)}. \quad (7)$$

Звуковые (упругие волны)

Закон дисперсии и скорость распространения звуковых волн в среде вычисляются при рассмотрении динамики распространения колебаний частиц среды (**см. приложение 1**).

Для волны, скорость распространения которой $c = \text{const}$, закон дисперсии (5) линейный: $\omega = ck$.

Амплитуда A и частота ω волны задаются источником, а скорость распространения волны зависит от свойств среды, в которой волна распространяется: скорость звуковых волн зависит от упругих свойств среды, а скорость электромагнитных волн – от электромагнитных свойств (диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей среды).

Совокупность точек, фаза колебаний в которых одинакова, образует поверхность – **фронт волны**. Волна распространяется в направлении, перпендикулярном фронту волны, то есть вдоль нормали к фронту: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$. В зависимости от формы этой поверхности волны называются **плоскими** (поверхность постоянной фазы – плоскость (1)), **сферическими** (поверхность постоянной фазы – сфера, волны создаются точечными источниками), **цилиндрическими** (поверхность постоянной фазы цилиндр, волны создаются источниками в виде нитей).

Волна называется **поперечной**, если колебания ξ происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения (для (1) в

плоскости YZ), и *продольной* – если колебания происходят вдоль направления распространения (для (1) вдоль оси OX).

Для поперечной волны вводится еще одна характеристика – **поляризация**. Тип поляризации определяется формой линии, которую описывает конец вектора ξ с течением времени в какой-либо точке в плоскости YZ . В зависимости от типа поляризации волны могут быть линейно-поляризованными, эллиптически поляризованными, поляризованными по кругу и неполяризованными.

Зависимость $\xi(x)$ для плоской волны смещений (1) в разные моменты времени представлена на **рис.1**, а зависимость $\xi(t)$ в точке $x = 0$ на **рис.2**.

Волна, описываемая законом (1) называется **бегущей** и имеет следующие характерные особенности: колебания ξ происходят во всех точках пространства с одинаковой амплитудой A , но с разными фазами, как будто-то в ряд, вдоль направления OX поставлены одинаковые осцилляторы с непрерывно возрастающей начальной фазой колебаний. В фиксированный момент времени разность фаз колебаний в точках x_1 и x_2 равна $k(x_2 - x_1) = k\Delta x$.

В такой системе в отличие одного грузика на пружинке (колебательной системы с сосредоточенными параметрами: вся масса сосредоточена в грузике, а вся упругость в пружинке) масса и упругость распределены по всему объему вещества. Поэтому вещество, в котором распространяется упругая волна можно рассматривать как **колебательную систему с распределенными параметрами**.

Задача 1. Плоская волна смещений частиц среды из положения равновесия $\xi = A \cos(\omega t - kx)$ распространяется вдоль оси OX . Определите, какие точки среды имеют максимальное и минимальное перемещение за время $\Delta t = T/4$ за счет волнообразного движения (исключая тепловое движение). Чему равно это перемещение? Может ли за четверть периода перемещение быть больше амплитуды? Постройте график скоростей точек среды в зависимости от их координаты x .

Решение. Смещение точки среды с координатой x за время $\Delta t = T/4$

$$\begin{aligned} \Delta \xi(x) &= \int d\xi = \xi(T/4) - \xi(0) = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - kx\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 - kx\right) \right] = \\ &= A [\sin(kx) - \cos(kx)] \end{aligned}$$

Минимальное по модулю перемещение $|\Delta \xi_{\min}(x)| = 0$ имеют точки, для которых $\sin(kx) = \cos(kx)$, то есть $\operatorname{tg}(kx) = 1$, или

$$\underline{x_{\min} = \frac{\lambda}{8}(4n+1)}. \quad (8)$$

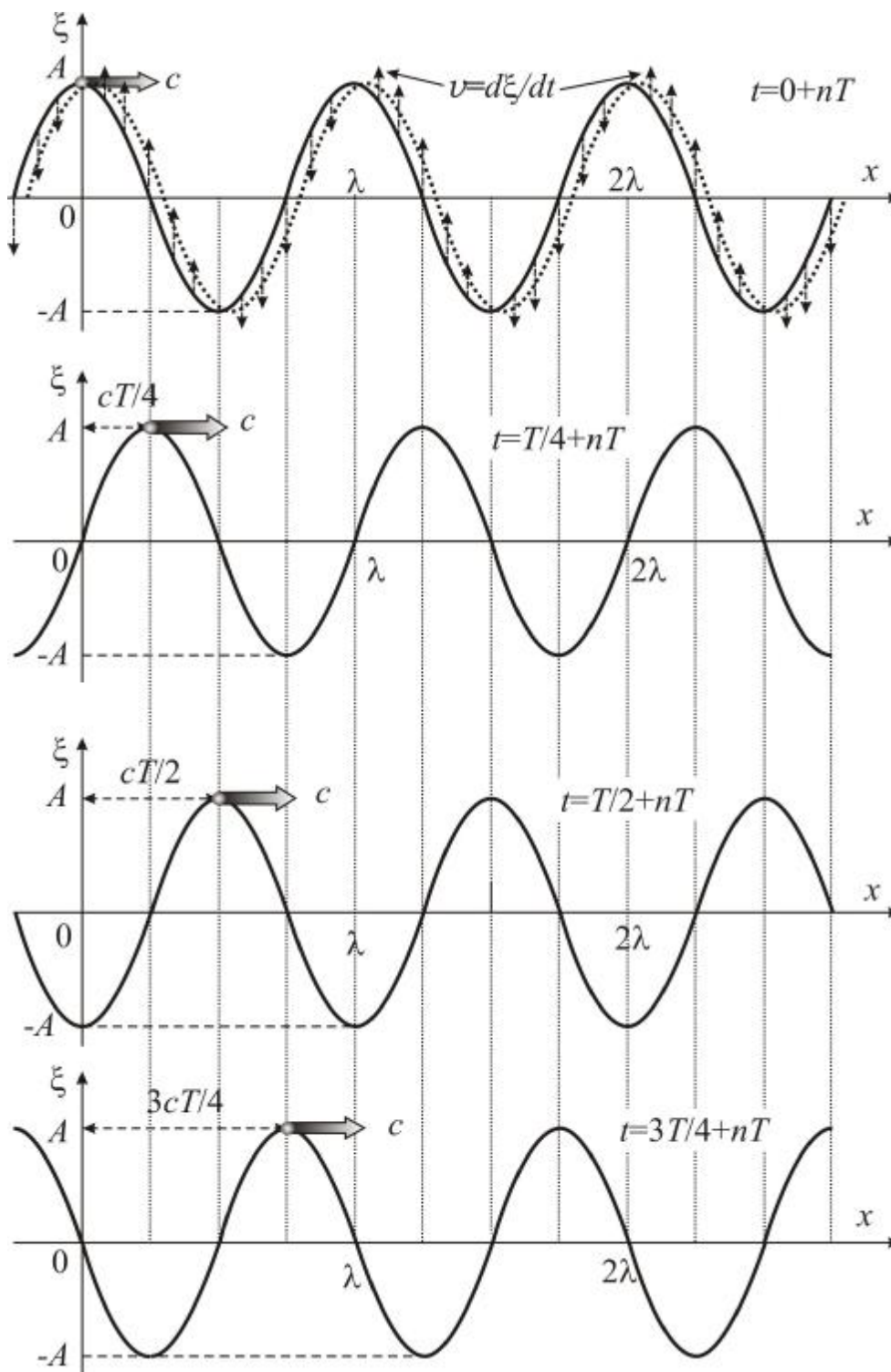


Рис.1. Светлым кружком обозначен один из «горбов» волны. С течением времени он перемещается (широкая стрелка) со скоростью c : за $T/2$ на расстояние $\Delta x = \lambda/2$. Тонкие стрелки показывают вектор скорости в разных точках x .

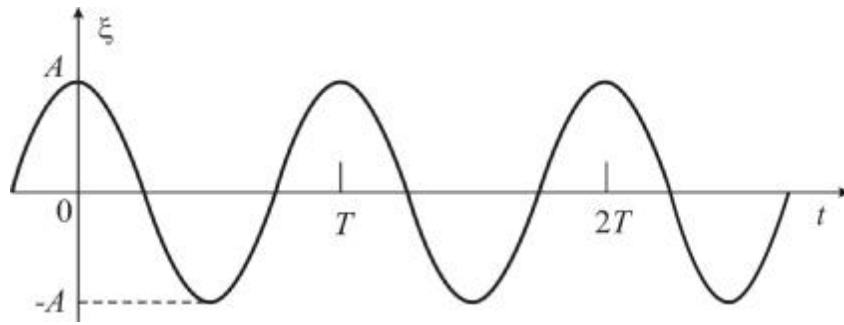


Рис.2. Зависимость $\xi(t)$ (1) в точке $x = 0$.

Максимальное по модулю смещение $|\Delta\xi_{\max}|$ осуществляется при $\partial\Delta\xi/\partial x = 0$, то есть при $Ak[\cos(kx) + \sin(kx)] = 0$, или $\text{tg}(kx) = -1$, и

$$x_{\max} = \frac{\lambda}{8}(4n+3).$$

Заметим, что максимальное перемещение больше амплитуды колебаний $|\Delta\xi_{\max}| = \sqrt{2}A > A$.

Ответ: $|\Delta\xi_{\min}(x)| = 0$, $|\Delta\xi_{\max}| = \sqrt{2}A > A$.

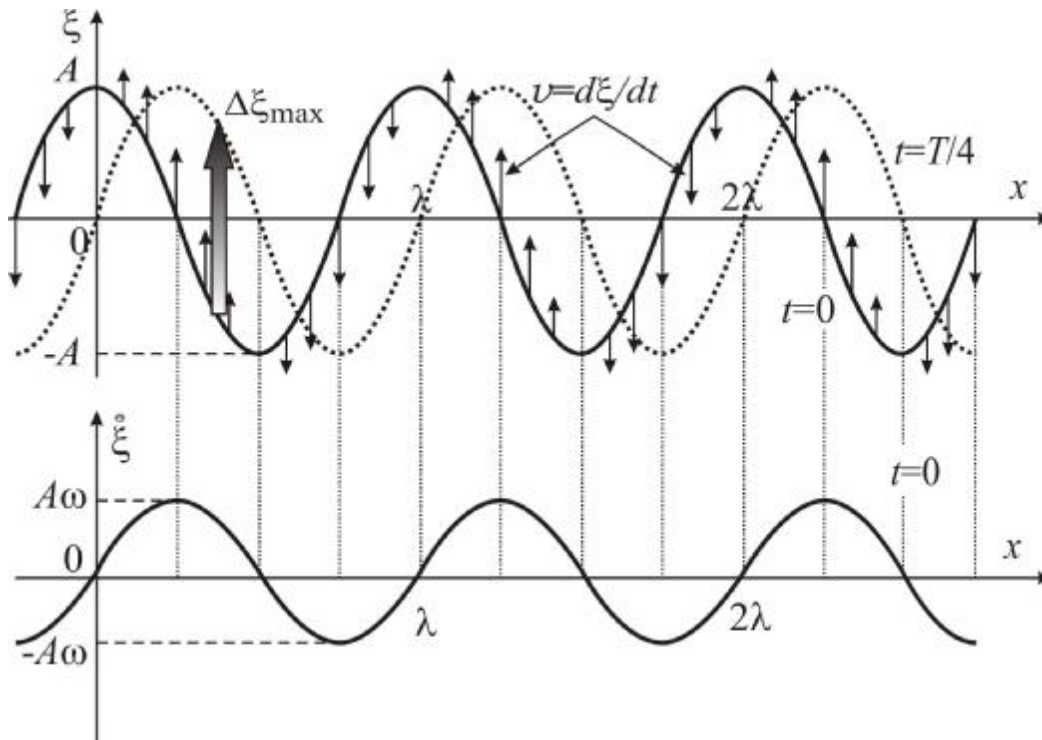


Рис.3. Длины векторов скоростей на верхнем рисунке $\mathbf{v} = \partial\xi/\partial t$ соответствуют нижнему графику. Смещение через четверть периода показано пунктирной линией. Максимальное перемещение за это время – широкой стрелкой.

Вопросы для самопроверки

1) Найдите максимально возможное перемещение точек среды. За какой промежуток времени оно происходит?

2) Означает ли, что точки с координатами $x_{\min} = \frac{\lambda}{8}(4n+1)$ (8), для которых перемещение $|\Delta\xi_{\min}(x)| = 0$, неподвижны?

3) Одинаковый ли путь проходят все точки за $T/4$? Вычислите путь точки с координатой $x_1 = \lambda/8$ и с $x_2 = \lambda/4$.

Ответы. 1) Перемещение $2A$ за время $T/2$ 2) Нет. $|\Delta\xi_{\min}(x)| = 0$ означает, что через $T/4$ они будут иметь то же смещение из положения равновесия $\xi(t=0) = \xi(t=T/4)$ для $x_{\min} = \frac{\lambda}{8}(4n+1)$. Скорости этих точек в моменты времени $t=0$ и $t=T/4$ имеют равные, но противоположные по знаку значения.

$$3) \text{ Нет. } L(x) = \int |d\xi| = \int_0^{T/4} |\partial\xi/\partial t| dt = \int_0^{T/4} |-\omega A \sin(\omega t - kx)| dt = A \int_{-kx}^{\pi/2 - kx} |\sin \alpha| d\alpha,$$

$$\text{где } \alpha = \omega t - kx. \text{ Для } x_1 = \lambda/8: L_1 = A \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\sin \alpha| d\alpha = 2A \int_0^{\pi/4} \sin \alpha d\alpha = A(2 - \sqrt{2});$$

$$\text{для } x_2 = \lambda/4: L_2 = A \int_{-\pi/2}^0 |\sin \alpha| d\alpha = A \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = A.$$

Задача 2. Плоская волна ξ распространяется в положительном направлении оси Ox со скоростью c . Колебания в точке x_0 описываются законом $\xi(x_0, t) = A \cos \omega t$ (рис.2). Найти закон колебаний ξ в точке x_1 .

Ответ. $\xi(x_1, t) = A \cos[\omega(t - (x_1 - x_0)/c)].$

Уравнение волны.

Найдем первую и вторую производные от ξ (8) по времени и по координате.

По t :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx)$$

по x :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx)$$

Разделим вторые производные друг на друга и учтем, что $\omega/k = c$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}. \quad (9)$$

Полученное дифференциальное уравнение в частных производных (9) называется волновым уравнением. Общее решение волнового уравнения (9) записывается в виде:

$$\xi(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t + kx). \quad (10)$$

Бегущие звуковые волны

Задача 3. Постройте графики смещения $\xi = A \cos(\omega t - kx)$, скорости $\partial \xi / \partial t$, относительной деформации $\partial \xi / \partial x$, плотности кинетической $\overline{\omega}_{\text{кин}}$, потенциальной $\overline{\omega}_{\text{пот}}$ и полной $\overline{\omega}$ энергии в момент времени $t = 0$ в зависимости от координаты x , вдоль которой распространяется продольная упругая бегущая волна. Плотность среды ρ , модуль Юнга E , закон дисперсии линейный.

Решение. Дифференцируя $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ по времени или по координате, получаем в точке x среды в момент времени t :
 скорость частиц среды

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx) = A\omega \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right);$$

относительную деформацию среды

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = Ak \sin(\omega t - kx) = Ak \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right);$$

плотность кинетической энергии

$$\overline{\omega}_{\text{кин}} = \frac{\rho(\partial \xi / \partial t)^2}{2} = \frac{\rho(A\omega)^2}{2} \cos^2\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t - kx)];$$

плотность потенциальной энергии (см. приложение 2)

$$\overline{\omega}_{\text{пот}} = \frac{E(\partial \xi / \partial x)^2}{2} = \frac{c^2 \rho (Ak)^2}{2} \cos^2\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t - kx)];$$

плотность полной энергии

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{\text{кин}} + \overline{\omega}_{\text{пот}} = \frac{\rho(A\omega)^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t - kx)].$$

При вычислениях использовалась формула $c = \sqrt{E/\rho}$ для скорости упругой волны и линейный закон дисперсии $\omega = ck$.

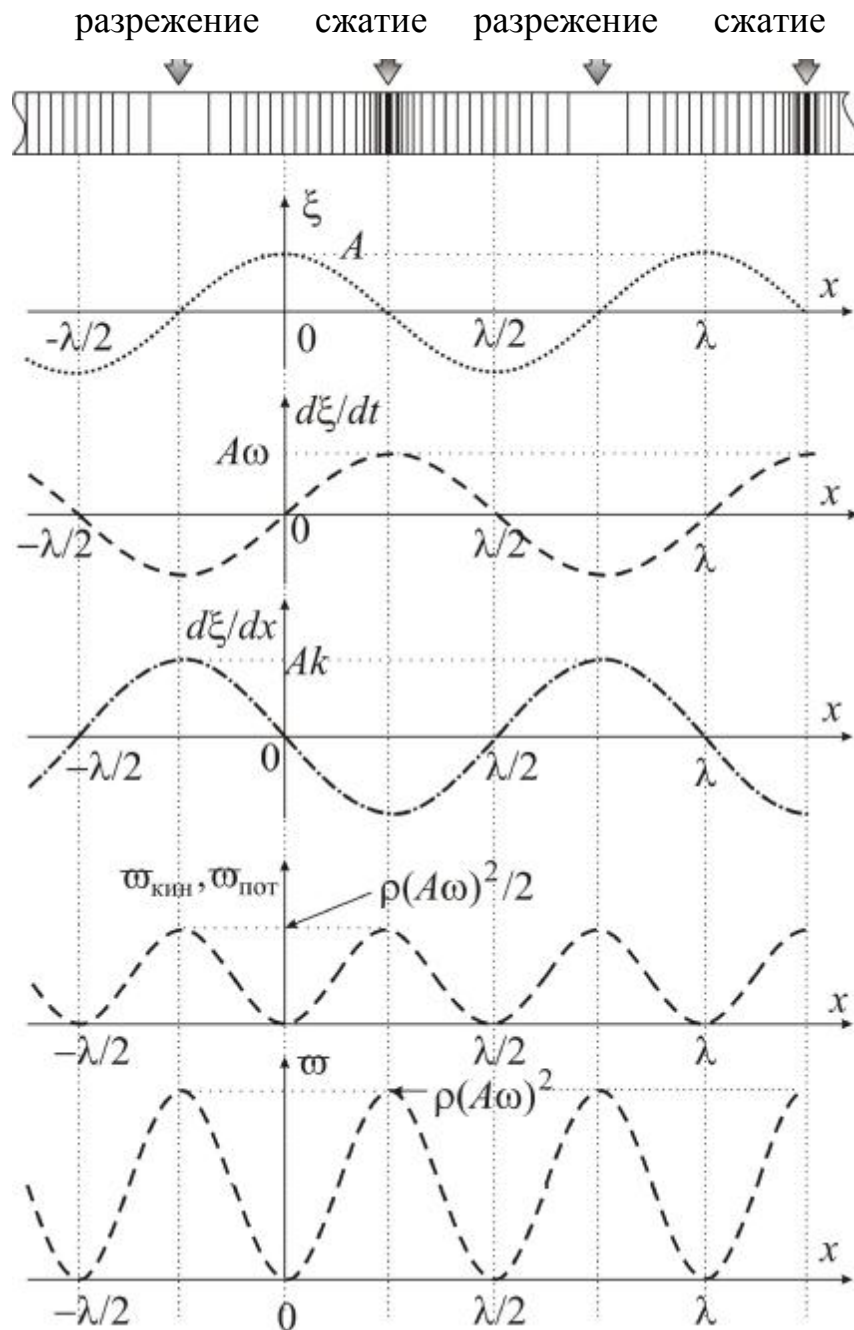


Рис.4. Смещение $\xi = A \cos(\omega t - kx)$, скорость $\partial \xi / \partial t$, относительная деформация $\partial \xi / \partial x$, плотность кинетической $\omega_{кин}$, потенциальной $\omega_{пот}$ и полной ω энергии в момент времени $t = 0$ в зависимости от координаты x для продольной упругой бегущей волны в твердом веществе.

Для момента времени $t = 0$ полученные соотношения принимают вид:
смещение точек среды

$$\xi(x, 0) = A \cos kx;$$

скорость частиц среды

$$\frac{\partial \xi(x, 0)}{\partial t} = A\omega \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right); \quad (11)$$

относительную деформацию среды

$$\frac{\partial \xi(x, 0)}{\partial x} = -Ak \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right); \quad (12)$$

плотность кинетической энергии

$$\varpi_{\text{кин}}(x, 0) = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2kx]; \quad (13)$$

плотность потенциальной энергии

$$\varpi_{\text{пот}}(x, 0) = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2kx]; \quad (14)$$

плотность полной энергии

$$\varpi(x, 0) = \frac{\rho(A\omega)^2}{2} [1 - \cos 2kx]. \quad (15)$$

Зависимости (11)-(15) представлены на рис.4

Скорость и относительная деформация сдвинуты по фазе относительно смещения ξ на $+\pi/2$ и $-\pi/2$, так что между $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$ сдвиг фаз равен π . Это означает, что в точках среды, максимально смещенных от положения равновесия, скорость и деформация отсутствуют (см. **рис.**). Плотности кинетической и потенциальной энергии одинаковы в каждой точке среды, так что плотность полной энергии равна их удвоенному значению.

Средние по времени значения плотностей кинетической, потенциальной и полной энергий:

$$\langle \varpi \rangle = 2 \langle \varpi_{\text{кин}} \rangle = 2 \langle \varpi_{\text{пот}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varpi_{\text{пот}} dt = \frac{\rho(A\omega)^2}{2}.$$

Замечание. Обратим внимание на отличительные особенности колебаний точек среды в бегущей волне от колебаний осциллятора с сосредоточенными параметрами, например, грузика на пружинке или математического маятника). Для осциллятора характерен переход кинетической энергии в потенциальную и, наоборот, в течение четверти периода, то есть кинетическая и потенциальная энергии достигают максимальных значений в разные моменты времени. В бегущей волне же точки, обладающие максимальной кинетической энергией, имеют и максимальную потенциальную энергию.

$$\text{Ответ. } \varpi_{\text{кин}} = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t - kx)], \quad \varpi_{\text{пот}} = \frac{\rho(A\omega)^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t - kx)].$$

Суперпозиция волн

Задача 4. Две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 , амплитудами A_1 и A_2 распространяются вдоль одного направления ОХ. Изобразите графически результат суперпозиции волн

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos[\omega_1(t - x/c)] + A_2 \cos[\omega_2(t - x/c)]. \quad (16)$$

Рассмотрите следующие частные случаи.

1) $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$, где $\Omega \ll \omega_1$, и $A_1 = A_2$. Определите период и частоту биений.

2) $\omega_1 \gg \omega_2$ и $A_1 \gg A_2$;

Является ли решением волнового уравнения волна (16)?

Решение.

В первом случае

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cos[\omega_1(t - x/c)] + A \cos[\omega_2(t - x/c)] = \\ &= 2A \cos[\Omega(t - x/c)/2] \cdot \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}(t - x/c)\right] \approx \\ &\approx 2A \cos[\Omega(t - x/c)/2] \cdot \cos[\omega_1(t - x/c)] \end{aligned}$$

Зависимости $\xi(x, t)$ при $t = 0$

$$\xi(x, 0) \approx 2A \cos\left[\frac{\Omega}{2c}x\right] \cdot \cos\left[\frac{\omega_1}{c}x\right]$$

и при $x = 0$

$$\xi(0, t) \approx 2A \cos[\Omega t/2] \cdot \cos[\omega_1 t] \quad (17)$$

имеют одинаковый вид. Поэтому на рис.5 представлена только зависимость от времени при $x=0$. Поскольку $\Omega \ll \omega_1$, то первый сомножитель в (17) является огибающей (амплитудой) более высокочастотных колебаний, описываемыми вторым сомножителем. Период биений T_b – минимальный интервал времени, через который система возвращается в то же состояние. На рис.5 T_b соответствует временному промежутку, через который огибающий косинус $\cos[\Omega t/2]$ принимает нулевые значения, то есть аргумент меняется на π : $\Omega T_b / 2 = \pi$ и

$$T_b = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{0,06\pi} \approx 33,3 \text{ с.}$$

Частота биений $\omega_b = \omega_2 - \omega_1$, основная частота колебаний $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

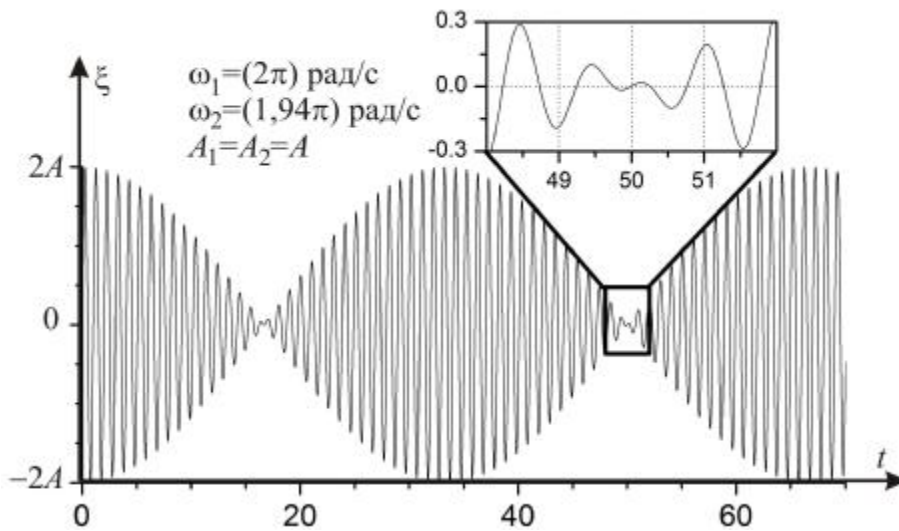


Рис.5. Биения

Во втором случае смещение ξ_1 и по амплитуде и по частоте превосходит смещение ξ_2 , поэтому основное смещение вызывает первая волна, а вторая волна может рассматриваться как слабое возмущение (модуляция) амплитуды первой волны (см. рис.6). **Модуляция** – изменение во времени по заданному закону какого-либо параметра (амплитуды или фазы).

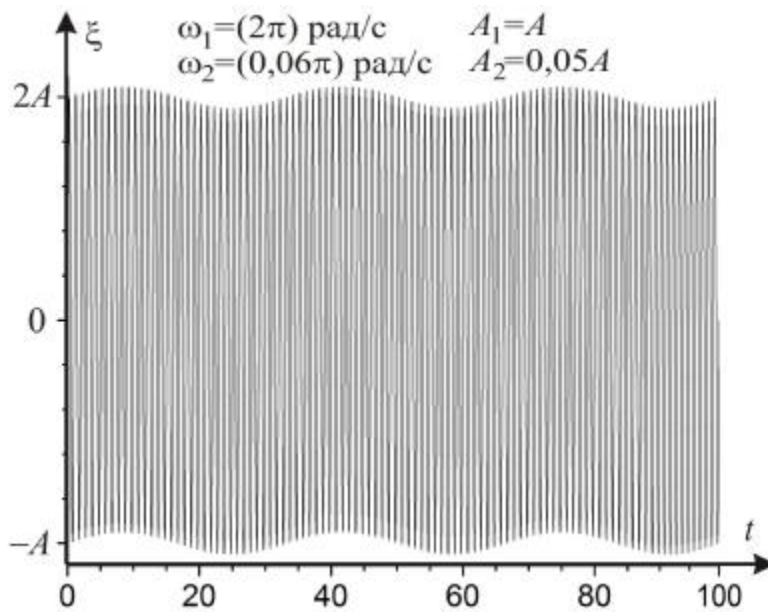
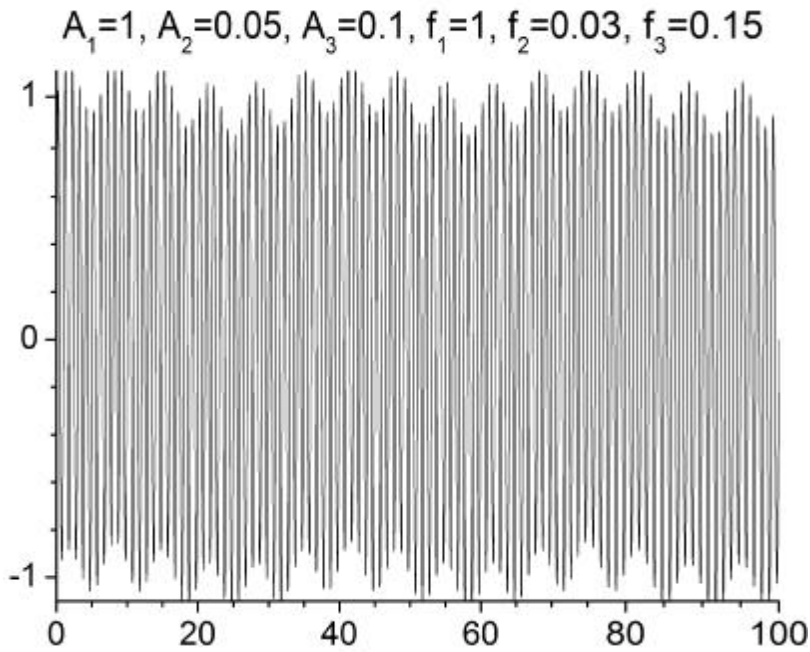


Рис.6. Модуляция



Стоячие волны

Задача 5. Навстречу плоской линейно поляризованной гармонической волне $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx)$ распространяется волна ξ_2 , имеющая такую же частоту, амплитуду и поляризацию. В точке $x = 0$ сдвиг фаз между волнами равен α . С какими амплитудами и фазами происходят колебания в результирующей волне? Определите координаты узлов и пучностей смещений. Изобразите графически для $t = 0$ зависимости от координаты x смещения $\xi = \xi_1 + \xi_2$, скорости $\partial \xi / \partial t$, относительной деформации $\partial \xi / \partial x$, плотностей кинетической $\overline{\omega}_{\text{кин}}$, потенциальной $\overline{\omega}_{\text{пот}}$ и полной $\overline{\omega} = \overline{\omega}_{\text{кин}} + \overline{\omega}_{\text{пот}}$ энергий.

Решение. Первая волна распространяется вдоль оси Ox в положительном направлении, $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx)$, а вторая волна распространяющаяся навстречу, имеет сдвиг фаз α и записывается в виде: $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha)$.

Учитывая, что поляризация волн одинакова, в каждой точке происходит скалярное сложение ξ :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(kx + \alpha/2) \cos(\omega t + \alpha/2). \quad (18)$$

1442448
амплитуда

Волна, описываемая законом (18) называется **стоячей волной**. Характерные особенности стоячей волны:

1) колебания ξ происходят во всех точках пространства с одинаковыми фазами (для (18): $(\omega t + \alpha/2)$);

2) амплитуда колебаний различна в разных точках (18).

Точки x_{0n} амплитуда колебаний ξ в которых равна нулю, называются **узлами**, а точки x_m , амплитуда колебаний в которых максимальна, называются **пучностями** волны ξ .

Координаты узлов и пучностей стоячей волны определяются аргументом амплитудного косинуса в амплитуде волны (18):

узлы

$$kx_{0n} + \alpha/2 = \pi/2 + \pi n \quad \text{и} \quad x_{0n} = \frac{(2n+1)\pi - \alpha}{2k}$$

пучности

$$kx_m + \alpha/2 = \pi m \quad \text{и} \quad x_m = \frac{2\pi m - \alpha}{2k},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для $\alpha = 0$ графики смещения

$$\xi(x, t) = 2A \cos kx \cos \omega t, \quad (19)$$

скорости

$$\partial \xi / \partial t = -2A\omega \cos kx \sin \omega t, \quad (20)$$

относительной деформации

$$\partial \xi / \partial x = -2Ak \sin kx \cos \omega t, \quad (21)$$

плотности кинетической

$$\overline{\omega}_{\text{кин}}(x, t) = \frac{\rho(\partial \xi / \partial t)^2}{2} = 2\rho(A\omega)^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t$$

потенциальной

$$\overline{\omega}_{\text{пот}} = \frac{E(\partial \xi / \partial x)^2}{2} = 2\rho c^2 (Ak)^2 \sin^2 kx \cos^2 \omega t = 2\rho(A\omega)^2 \sin^2 kx \cos^2 \omega t$$

и полной

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{\text{кин}} + \overline{\omega}_{\text{пот}} = 2\rho(A\omega)^2 \left[\cos^2 kx \sin^2 \omega t + \sin^2 kx \cos^2 \omega t \right]$$

энергии в момент времени $t = 0$ представлены на рис.7. в зависимости от координаты x .

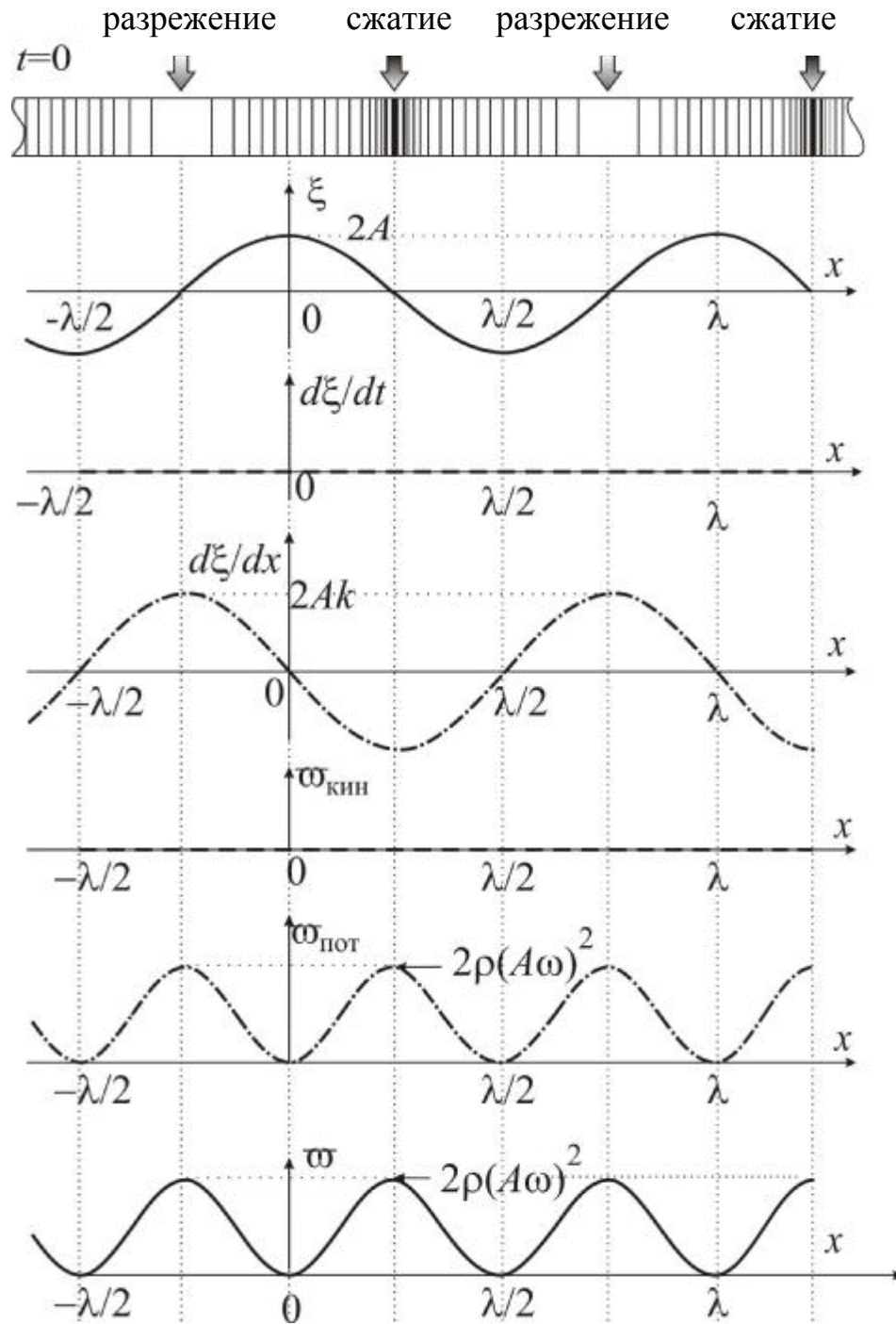


Рис.7. Зависимости смещения $\xi = 2A \cos kx \cos \omega t$ скорости $\partial \xi / \partial t$ относительной деформации $\partial \xi / \partial x$ плотности кинетической $\bar{\omega}_{\text{кин}}$, потенциальной $\bar{\omega}_{\text{пот}}$ и полной энергии $\bar{\omega}$ для продольной плоской стоячей волны в упругой среде в момент времени $t = 0$.

Ответ $\bar{\omega}_{\text{кин}}(x, t) = 2\rho(A\omega)^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t$, $\bar{\omega}_{\text{пот}} = 2\rho(A\omega)^2 \sin^2 kx \cos^2 \omega t$.

Вопросы для самопроверки:

- 1) Удовлетворяет ли волновому уравнению стоячая волна (18)?
- 2) Совпадают ли узлы и пучности смещений с узлами и пучностями скоростей в стоячей волне?

Ответ. 1) Да. 2) Графики смещений (19), скоростей (20) и относительных деформаций (21) в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = T/8$, $t_3 = T/4$, $t_4 = 3T/8$, $t_5 = T/2$, $t_6 = 5T/8$, $t_7 = 3T/4$, $t_8 = 7T/8$ изображены на рис.8. Видно, что узлы смещений и скоростей совпадают, узлы деформаций сдвинуты на расстояние $\lambda/4$ относительно узлов смещений.

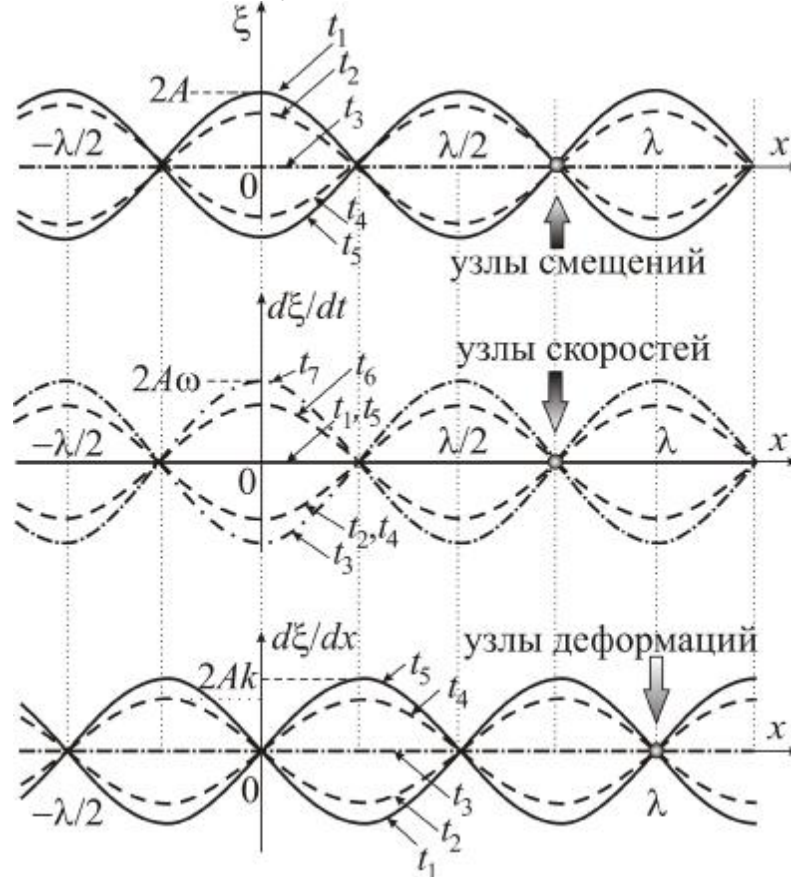


Рис.8. Зависимости смещения $\xi = 2A \cos kx \cos \omega t$, скорости $d\xi/dt$ и относительной деформации $d\xi/dx$ для продольной плоской стоячей волны в упругой среде в моменты времени $t_i = (n-1)T/8$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Задача 6. Струна закреплена с обеих сторон. Длина струны L . Возбуждаются поперечные упругие волны. Скорость волн в струне $c = \sqrt{f/\rho}$, где f – натяжение струны, ρ – ее линейная плотность. Полагая закон дисперсии линейным, найдите закон колебаний точек струны на первых трех гармониках. Изобразите графики смещений через промежутки времени $\Delta t = T/16$.

Решение. До сих пор рассматривались волны в веществе неограниченных размеров (в бесконечной среде). В данной задаче **звуковая волна** возбуждается **в струне**, которая имеет длину L и закреплена с обеих сторон. При легком произвольном щелчке по струне в

ней возникают колебания. Колеблется каждая точка струны (кроме закрепленных концов $x = 0$ и $x = L$).

Любое произвольное колебание в такой системе можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний. **Нормальное колебание** – колебание струны, при котором все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же частотой, называемой **нормальной частотой**. Для системы с распределенными параметрами нормальные колебания представляют собой стоячие волны. Запишем закон (18) для стоячей волны смещений на частоте ω в виде

$$\xi = A \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \alpha).$$

Этот закон колебаний должен удовлетворять граничным условиям: смещения из положения равновесия ξ крайних точек в любой момент времени равны нулю: $\xi(0)=0$, $\xi(L)=0$. Отсюда следует:

$$\left. \begin{array}{l} \xi(0)=0 \\ \xi(L)=0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \cos(kL + \alpha) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad kL = \pi n. \quad (22)$$

Таким образом, из граничных условий вытекает, что колебания в струне происходят по закону

$$\xi = A \sin(kx) \sin(\omega t),$$

а волновые числа и длины волн могут иметь только дискретные значения, удовлетворяющие уравнениям:

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad (23)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (24)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Соотношение (22) в виде

$$L = \frac{\lambda}{2} n = 2n \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (25)$$

означает, что нормальные колебания струны возможны только с длинами волн, которые подчиняются правилу: на длине струны должно укладываться целое число длин полуволен (или четное число $\lambda/4$).

Колебания с максимальной длиной λ_{\max} соответствуют случаю, когда на длине струны уместается половина длины волны $L = \lambda_{\max}/2$. Колебания с λ_{\max} называются **основной (первой) гармоникой**.

Разрешенные значения для волнового вектора нормальных колебаний эквидистантные:

$$\Delta k = \frac{\pi}{L}.$$

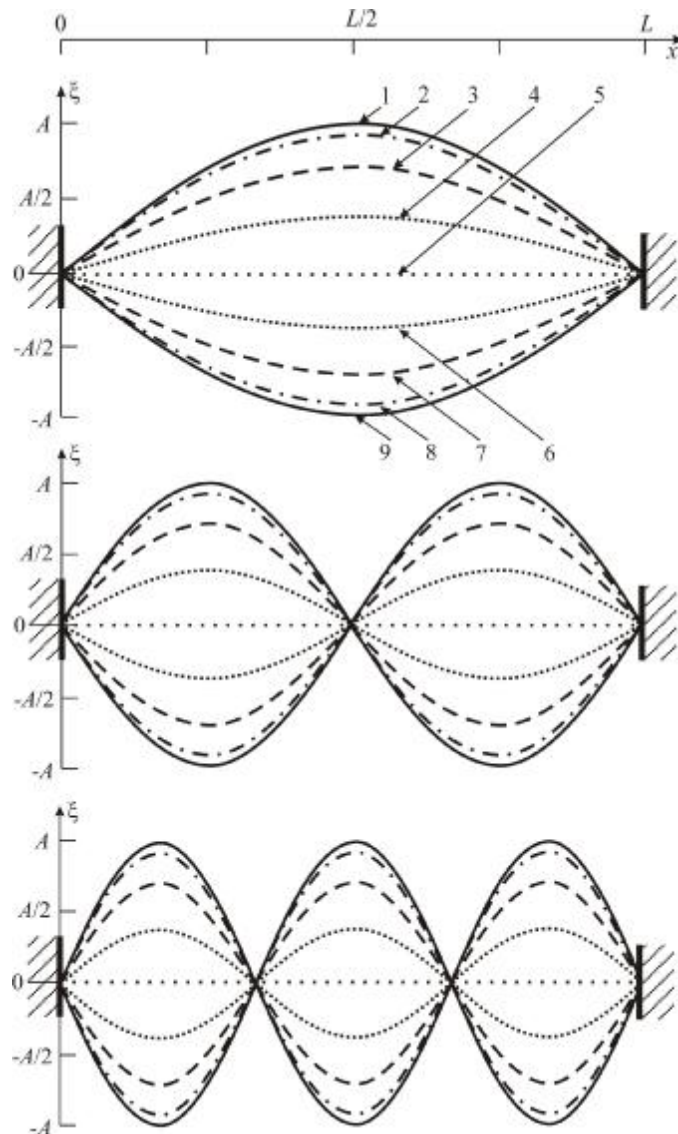


Рис.9 Нормальные колебания в струне, закрепленной с обеих сторон (верхний рисунок - первая, ниже - вторая и третья гармоники). Разной штриховкой отмечены положения точек струны через равные промежутки времени $\Delta t = T/16$ ($t_1 = 0$ - прореженная пунктирная линия, $t_2 = T/16$ - плотная пунктирная линия, $t_3 = 2T/16$ - штриховая линия, $t_4 = 3T/16$ - штрихпунктирная линия, $t_5 = 4T/16$ - сплошная линия).

Для нахождения нормальных частот, необходимо знать закон дисперсии. Тогда

$$\omega_n = \omega(k_n). \quad (26)$$

Аналитическая связь $\omega = \omega(k)$ зависит как от вида волны (звук в газе, упругая волны в металле, электромагнитная волна и др.), так и от соответствующих этой волне свойств среды, в которой она распространяется.

Таким образом, дискретность длин волн приводит к дискретности разрешенных частот (определенному частотному спектру).

Самый простой – линейный закон дисперсии

$$\omega = ck,$$

где $c = \text{const}$ – скорость распространения волны.

При линейном законе дисперсии спектр нормальных частот

$$\omega_n = ck_n = c\pi n / L,$$

а закон нормальных колебаний в струне имеет вид:

$$\xi = \underset{\substack{\text{1 4 2 4 3} \\ \text{амплитуда}}}{A} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} ct\right).$$

Произвольные колебания струны (при щелчке) записываются как суперпозиция нормальных колебаний с разными амплитудами (разным «весовым» вкладом)

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} ct\right).$$

Вопрос для самопроверки. На рис.9 изображены смещения точек струны через равные промежутки времени. Почему зависимости $\xi(t_i)$ расположены не на равных расстояниях друг от друга (см., например, положение в пучностях) $\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i) \neq \text{const}$?

Задача 7 (энергетические соотношения в стоячей волне). В стержне, один конец которого ($x = 0$) закреплен, другой ($x = L$) – свободен, возбуждаются продольные нормальные колебания. Найти закон нормальных колебаний и построить графики плотности кинетической и потенциальной энергии в разные моменты времени (через восьмую часть периода) в зависимости от координаты стержня x . Амплитудное значение плотности полной энергии ϖ_m . Закон дисперсии линейный. Скорость распространения звуковых волн c .

Решение.

Закон нормальных колебаний $\xi = A \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \alpha)$ должен удовлетворять граничным условиям: в точке $x = 0$ в любой момент времени $\xi(0) = 0$, в точке $x = L$ конец свободный, что означает отсутствие деформаций $\partial \xi / \partial x|_{x=L} = 0$. Отсюда следует:

$$\left. \begin{array}{l} \xi(0) = 0 \\ \partial \xi / \partial x|_{x=L} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \sin(kL + \alpha) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad kL = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, из граничных условий вытекает, что колебания в струне происходят по закону

$$\xi = A \sin(kx) \sin(\omega t), \quad (27)$$

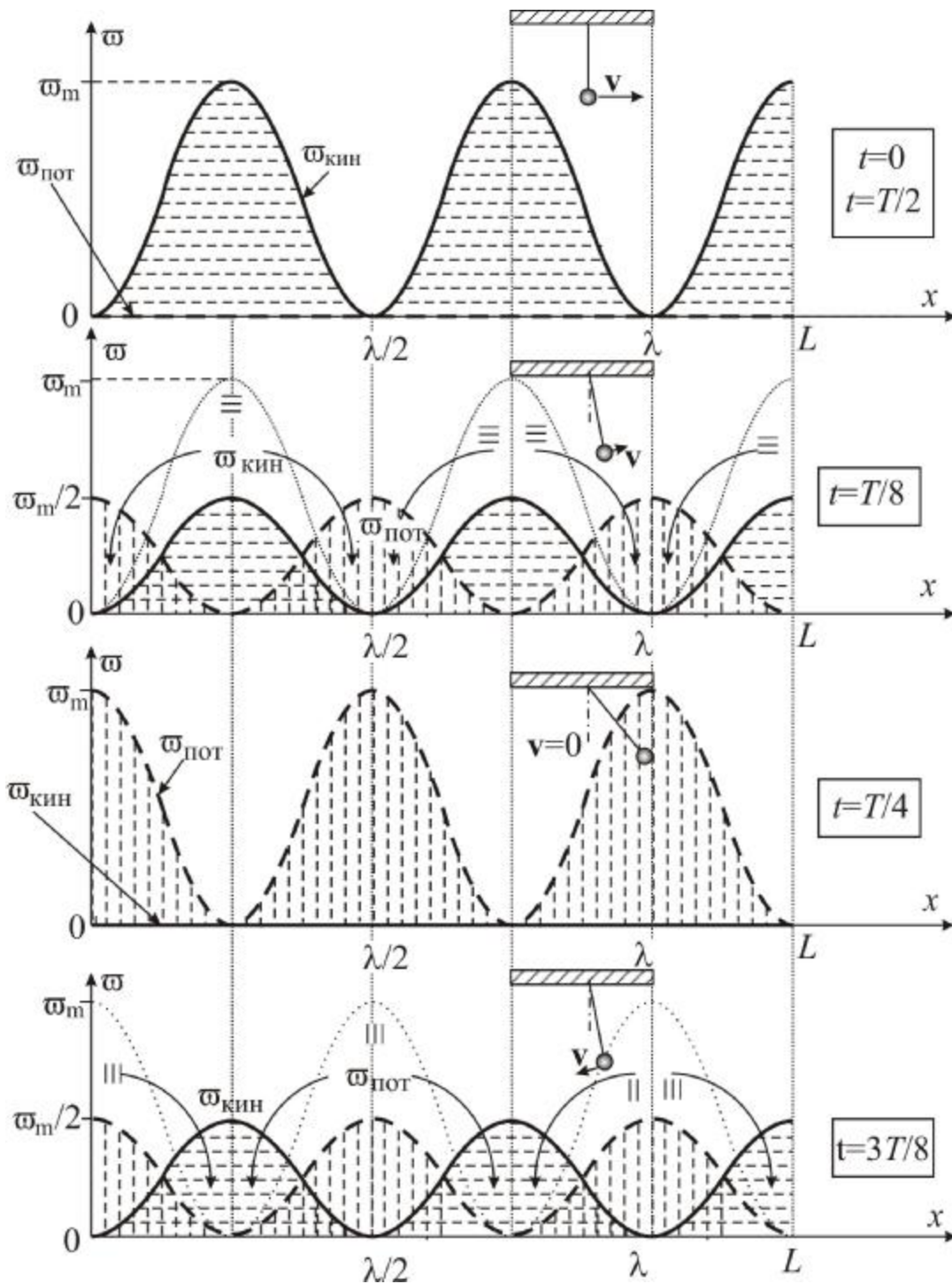


Рис.10. Плотность кинетической (горизонтальная штриховка) и потенциальной (вертикальная штриховка) энергии в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = T/8$, $t_3 = T/4$, $t_4 = 3T/8$ (через следующие интервалы $\Delta t = T/8$ картинки повторяются) в зависимости от координаты стержня x . Изогнутые стрелки на втором сверху рисунке показывают преобразование кинетической энергии в потенциальную, происходящее в интервале $0 \leq t \leq T/8$, а на нижнем рисунке – в интервале $T/4 \leq t \leq 3T/8$

а волновые числа и длины волн могут иметь только дискретные значения, удовлетворяющие уравнениям:

$$k_n = \frac{\pi}{2L}(1+2n), \quad (28)$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{1+2n}, \quad (29)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Соотношение (29) в виде

$$L = (1+2n) \frac{\lambda}{4}$$

означает, что на длине стержня должно укладываться нечетное число $\lambda/4$. При линейном законе дисперсии

$$\omega = ck,$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения волны, возможные частоты нормальных колебаний

$$\omega_n = ck_n = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot (1+2n). \quad (30)$$

Таким образом, закон нормальных колебаний в стержне имеет вид:

$$\xi_n = \underbrace{A_n}_{\text{амплитуда}} \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}ct\right).$$

Для построения графиков найдем плотность кинетической энергии

$$\overline{\omega}_{\text{кин}} = \frac{\rho(\partial\xi/\partial t)^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left[\frac{\pi(1+2n)cA_n}{2L} \right]^2 \sin^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \cos^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}ct\right) \quad (31)$$

и плотность потенциальной энергии

$$\overline{\omega}_{\text{пот}} = \frac{E(\partial\xi/\partial x)^2}{2} = \frac{E}{2} \left[\frac{\pi(1+2n)A_n}{2L} \right]^2 \cos^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}ct\right). \quad (32)$$

Так как $E/c^2 = \rho$, то амплитудные значения плотности кинетической, потенциальной и полной энергии для стоячей волны совпадают (см. **рис.6**). Соотношения (31) и (32) запишем в виде

$$\overline{\omega}_{\text{кин}} = \overline{\omega}_m \sin^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \cos^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}ct\right) \quad (33)$$

и плотность потенциальной энергии

$$\overline{\omega}_{\text{пот}} = \overline{\omega}_m \cos^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi(1+2n)}{2L}ct\right). \quad (34)$$

Графики (33) и (34) представлены на рис.10

Вопрос: какая гармоника изображена на рис.10? (**ответ:** пятая)

Примечание. Как уже говорилось выше при распространении бегущей волны в сплошной среде (колебательной системе с распределенными параметрами) превращения энергии происходят иначе, чем в системе с сосредоточенными параметрами. Однако, в случае стоячей волны с отдельной колебательной системой с сосредоточенными

параметрами (например, с математическим маятником, см. рис.10) можно сравнить участок стоячей волны между узлом скоростей $\partial\xi/\partial t$ (узлом кинетической энергии) и узлом деформаций $\partial\xi/\partial x$ (узлом потенциальной энергии). Длина такого участка равна $\lambda/4$. На этом участке преобразования энергии происходят аналогично математическому маятнику (см. рис.10). За $T/4$ кинетическая энергия переходит в потенциальную и перемещается на расстояние $\lambda/4$. За следующие $T/4$ происходит обратное движение и превращение потенциальной энергии в кинетическую.

$$\text{Ответ. } \overline{\omega}_{\text{кин}} = \overline{\omega}_m \sin^2 \left(\frac{\pi(1+2n)}{2L} x \right) \cos^2 \left(\frac{\pi(1+2n)}{2L} ct \right),$$

$$\overline{\omega}_{\text{пот}} = \overline{\omega}_m \cos^2 \left(\frac{\pi(1+2n)}{2L} x \right) \sin^2 \left(\frac{\pi(1+2n)}{2L} ct \right).$$

Задача 8. В веществе с известным законом дисперсии $\omega = \omega(k)$ возбуждены стоячие волны:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{L} ct \right),$$

где L – длина тела вдоль оси OX . Определить число нормальных мод δn в узком интервале частот $\delta\omega$. Рассмотреть частные случаи линейного и квадратичного законов дисперсии.

Решение. Поскольку оба конца стержня закреплены, то длины волн нормальных колебаний должны удовлетворять условию (см. задачу струна (22)):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ или } k_n = \frac{\pi}{L} n.$$

Используя закон дисперсии, запишем

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{dk} \delta k = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{\pi}{L} \delta n.$$

Таким образом, получаем

$$\delta n = \frac{L}{\pi(d\omega/dk)} \delta\omega.$$

В частном случае для линейного закона дисперсии $\omega = ck$:

$$\delta n = \frac{L}{\pi c} \delta\omega.$$

Для квадратичного закона дисперсии $\omega = ak^2$:

$$\delta n = \frac{L}{2\pi ak} \delta\omega = \frac{L}{2\pi\sqrt{\omega a}} \delta\omega.$$

Число нормальных мод в единичном интервале частот $\delta n/\delta\omega$ в случае квадратичного закона дисперсии убывает с ростом частоты.

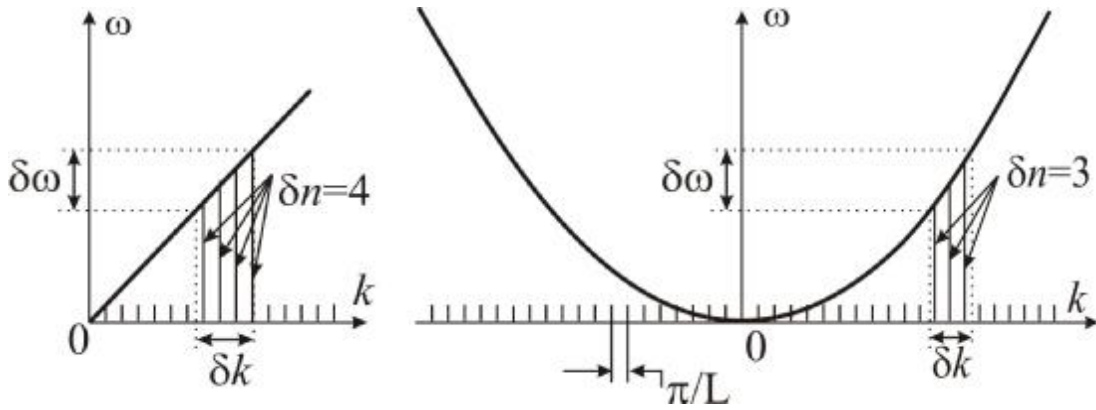


Рис.11. Дисперсионные зависимости для линейного и квадратичного законов

Ответ: $\delta n = \frac{L}{\pi c} \delta \omega$, $\delta n = \frac{L}{2\pi\sqrt{\omega a}} \delta \omega$.

Приложение 2. Плотность потенциальной энергии в стержне

Выберем два сечения стержня в недеформированном состоянии с координатами x и $x+\Delta x$. Если оба сечения сместятся на одно и ту же величину $\xi(x+\Delta x)=\xi(x)$, то участок стержня $\Delta\xi$ останется недеформированным. Пусть сечение с координатой x сместится на $\xi(x)$, а сечение с координатой $x+\Delta x$ на $\xi(x+\Delta x)$. Тогда величина деформации участка Δx равна $\xi(x+\Delta x)-\xi(x)=\frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$, а относительной деформации

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (35)$$

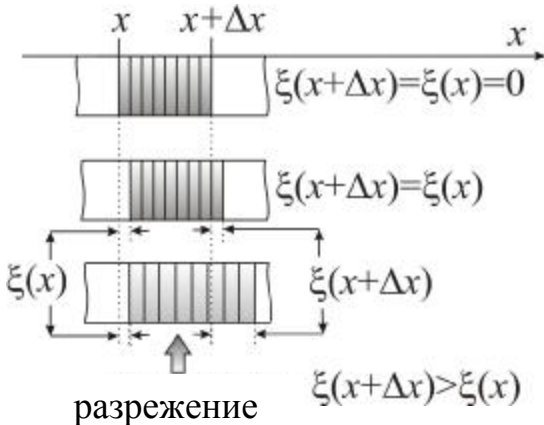


Рис.12 Иллюстрация для вывода соотношения $\varepsilon = \partial \xi / \partial x$ для относительной деформации упругой среды

Как известно из механики потенциальная энергия упруго деформированной пружины равна

$$W(\Delta l) = \frac{k_G (\Delta l)^2}{2}, \quad (36)$$

где k_G - коэффициент жесткости (Гука), а Δl - величина деформации. Коэффициент Гука связан с модулем Юнга вещества, из которого изготовлена пружина. Эту связь можно найти, сравнивая закон Гука в двух записях:

$$F_G = k_G \Delta l$$

и

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (37)$$

где $\sigma = \frac{F_G}{\Sigma}$ - напряжение (сила, действующая на единицу площади),
 $\varepsilon = \Delta l / l$ - относительная деформация. Для коэффициента Гука получаем выражение

$k_G = E \frac{\Sigma}{l}$, подставляя которое в выражение для энергии (36), находим:

$$W = \frac{E\varepsilon^2}{2} (l \cdot \Sigma).$$

Выражение в скобках – объем пружинки, поэтому для плотности потенциальной энергии имеем $\bar{w} = \frac{W}{(l\Sigma)} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$, а с учетом (35):

$$\bar{w}_{\text{пот}} = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (38)$$

Приложение 2. Скорость звука

Задача П2-1. Струна натянута и закреплена с обеих сторон. Длина струны L , натяжение f_0 , линейная плотность ρ . Пусть частицы струны смещаются только вдоль оси OY , а волна может двигаться вдоль оси OX (рис.8). Напишите динамическое уравнение движения элементарного участка струны и, приведя его к виду волнового уравнения (9), найдите скорость распространения упругой волны в струне.

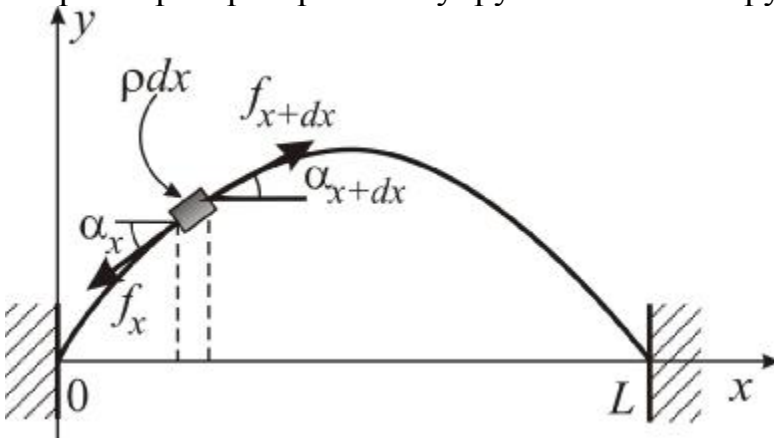


Рис.13

Решение. Выделим элементарный участок струны с длиной dx и с массой ρdx . Уравнение движения (II закон Ньютона) для выделенной массы (см. рис.13):

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f_{x+dx} \sin \alpha_{x+dx} - f_x \sin \alpha_x. \quad (39)$$

Используя приближения

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{и} \quad f_{x+dx} \approx f_x \approx f_0,$$

правую часть уравнения (39) запишем в виде

$$f_{x+dx} \sin \alpha_{x+dx} - f_x \sin \alpha_x = f_0 d \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] = f_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Подставляя в (39), получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{f_0}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (40)$$

и

$$c = \sqrt{\frac{f_0}{\rho}}.$$

Ответ: $c = \sqrt{\frac{f_0}{\rho}}.$

Задача П2-2. Упругая продольная волна распространяется вдоль оси ОХ в твердом теле с модулем Юнга E и плотностью ρ . Напишите динамическое уравнение движения элементарного участка вещества и, приведя его к виду волнового уравнения (9), найдите скорость распространения упругой волны в твердом теле.

Решение.

Выделим элементарный участок тела с длиной Dx площадью Σ и с массой $\Delta m = \rho \cdot \Sigma \cdot \Delta x$. Уравнение движения (II закон Ньютона) для выделенной массы (см. рис.13):

$$\Sigma \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Sigma [\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)].$$

Представим выражение в квадратных скобках, как $\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x$, и используем (37) и (35). Получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

и

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ответ: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$

Замечание. Скорость звука в различных твердых веществах приведена в таблице 1.

Таблица 1.

Материал	скорость продольной волны, м/с	скорость сдвиговой волны, м/с
Кварц плавленный	5970	3762
Бетон	4200—5300	—
Плексиглас	2670—2680	1100—1121
Стекло, флинт	3760—4800	2380—2560
Тефлон	1340	—
Эбонит	2405	—
Железо	5835—5950	—
Золото	3200—3240	1200
Свинец	1960—2400	700—790
Цинк	4170—4210	2440
Никель	5630	2960
Серебро	3650—3700	1600—1690
Латунь Л59	4600	2080
Алюминиевый сплав АМГ	6320	3190