

## 1.2. Электромагнитные волны

Электромагнитная волна – процесс распространения электромагнитного поля, процесс распространения колебаний векторов электрического магнитного полей. В отличие от рассмотренных выше упругих волн электромагнитные волны могут распространяться как в веществе, так и в вакууме.

*Электрическое поле* характеризуется вектором напряженности  $\mathbf{E}$  и вектором электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Вектора  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  связаны друг с другом. В изотропных диэлектрических средах эта связь описывается материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды. В вакууме

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2)$$

Напряженность электрического поля – силовой вектор, равный силе, действующей на помещенный в данную точку точечный заряд  $q$ , деленной на величину этого заряда:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (3)$$

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и вектором напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . **Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$**  – силовая характеристика магнитного поля, равная по величине максимальной силе  $F_{\max}$ , действующей на элемент тока  $Jd\mathbf{l}$ , помещенный в данную точку поля, деленной на величину этого элемента тока

$$|\mathbf{B}| = \frac{F_{\max}}{Jd\mathbf{l}}.$$

Направление вектора  $\mathbf{B}$  находится на основании **закона Ампера**, определяющего силу, действующую на элемент тока  $Jd\mathbf{l}$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F}_A = [Jd\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

В изотропных магнитных средах

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

В вакууме и диэлектрических средах, в которых  $\mu$  отличается от единицы только в четвертом и далее знаке

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4)$$

Электромагнитная волна – *поперечная волна*, в которой вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  совершают колебания в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (**рис.1**). Причем  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  в любой момент времени в каждой точке волны и связаны соотношением

$$\boxed{E = cB}. \quad (5)$$

(для запоминания (5): Ex! Центральный Bанк)

Волна распространяется в вакууме со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с (скорость света в вакууме)}, \quad (6)$$

где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума (для запоминания  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \left[ \frac{\text{Вб}}{\text{м} \cdot \text{Кл}} \right]$ ),  $\mu_0$  – магнитная постоянная вакуума.

Скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике (закон Максвелла)

$$c_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (7)$$

где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая, а  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость вещества.

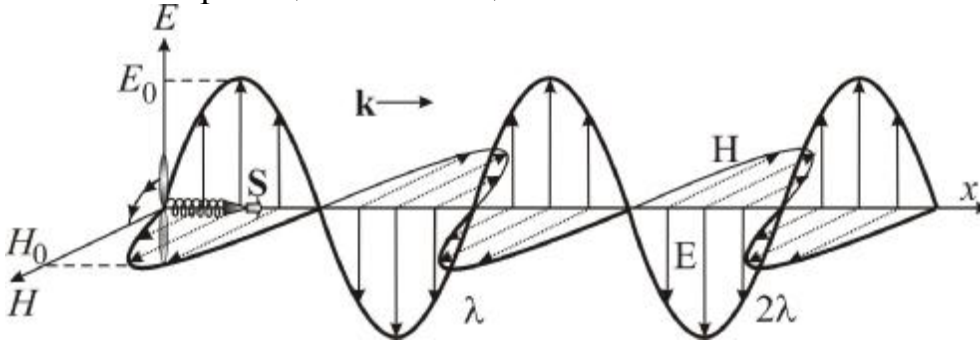


Рис.1. Зависимость напряженностей электрического и магнитного поля от координаты  $x$  (вдоль направления распространения бегущей электромагнитной волны) в фиксированный момент времени (11)

Электромагнитное поле **в вакууме и в незаряженном идеальном диэлектрике**, в котором отсутствуют токи проводимости, описывается четырьмя уравнениями Максвелла, которые представлены в **табл. 1** в системе СИ в интегральном и дифференциальном виде.

**Таблица 1.**

Уравнения Максвелла в вакууме	
в дифференциальном виде	в интегральном виде
$\text{div}\mathbf{E} = 0$	$\oint_{\Sigma} \mathbf{E}_n d\sigma = 0$ (8)
$\text{div}\mathbf{B} = 0$	$\oint_{\Sigma} \mathbf{B}_n d\sigma = 0$ (9)
$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$	$\oint_L \mathbf{E}_1 d\mathbf{l} = -\iint_{\Sigma} \frac{dB_n}{dt} d\sigma = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B_n d\sigma$ (10)

$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$	$\oint_L \tilde{\mathbf{H}}_1 d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \frac{dD_n}{dt} d\sigma = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} D_n d\sigma$ (11)
---	--

$d\sigma$  – элемент площади поверхности  $\Sigma$ ,  $d\mathbf{l}$  – элемент длины. Индекс  $\mathbf{l}$  означает проекцию на направление элемента  $d\mathbf{l}$ , индекс  $n$  – проекцию на направление нормали к элементу  $d\sigma$ .

Вектор напряженности электрического поля в электромагнитной волне называется **световым вектором**, так как в силе  $\mathbf{F}$ , с которой электромагнитное поле действует на заряженные частицы вещества ( $q$  – заряд частицы)  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , первое слагаемое значительно превосходит второе.

О дивергенции и роторе см. **приложение**.

Уравнения (8) означают отсутствие свободных зарядов ( $\rho = 0$ ), а (9) – магнитных зарядов.

Уравнения (10) выражают **закон электромагнитной индукции Фарадея**: циркуляция напряженности электрического поля  $\oint_L \tilde{\mathbf{E}}_1 d\mathbf{l}$  по произвольной замкнутой кривой  $L$  равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции через площадь  $\Sigma$ , натянутую на кривую  $L$ .

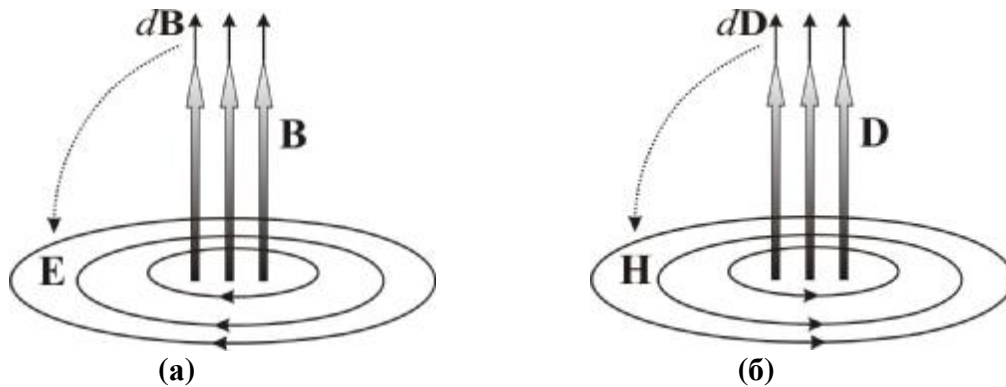


Рис. 2. (а) Изменение  $d\mathbf{B}$  индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  вызывает появление вихревого электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E}$  (9). (б) Изменение индукции  $\mathbf{D}$  электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля с напряженностью  $\mathbf{H}$ .

Или в другой формулировке: **изменяющееся магнитное поле является источником вихревого электрического поля** (см. рис. 2а).

Уравнение (10) – **теорема о циркуляции напряженности магнитного поля**. Формулировка теоремы в магнитостатике: циркуляция напряженности магнитного поля  $\oint_L \tilde{\mathbf{H}}_1 d\mathbf{l}$  по любому

замкнутому контуру  $L$  равна силе тока проводимости  $J = \iint_{\Sigma} j_n d\sigma$ ,

пронизывающего данный контур. Здесь  $j_n$  – нормальная к поверхности  $\Sigma$  составляющая вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ . В качестве плотности тока в уравнении (11) выступает скорость изменения индукции электрического поля

$$j_{\text{нi}} = \frac{dD_n}{dt}, \quad (12)$$

которую Максвелл назвал **током смещения**:

$$J_{\text{нi}} = \iint_{\Sigma} j_{\text{нi}} n d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{dD_n}{dt} d\sigma = \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} D_n d\sigma. \quad (13)$$

Согласно (13) ток смещения  $J_{\text{см}}$  через поверхность  $\Sigma$  возникает тогда, когда меняется поток  $\iint_{\Sigma} D_n d\sigma$  вектора электрического

индукции  $\mathbf{D}$  через поверхность  $\Sigma$ . Например, при изменении заряда на обкладках плоского конденсатора в пространстве между обкладками изменяется напряженность и вектор электрической индукции, а, следовательно, возникает ток смещения, плотность которого равна  $j_{\text{нi}} = \frac{dD}{dt}$ :

$$J_{\text{нi}} = j_{\text{нi}} \Sigma = \frac{dD}{dt} \Sigma = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \Sigma = \frac{dq}{dt} \quad (14)$$

Соотношение (11) можно прочесть иначе: *изменяющееся электрическое поле вызывает вихревое магнитное поле* (см. рис.2б).

Остановимся, главным образом на плоских волнах, для которых поверхностями постоянной фазы являются плоскости. Вдоль каждой такой плоскости вектора напряженности электрического поля и индукции магнитного поля не меняются ни по величине, ни по направлению.

Для плоской линейно поляризованной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля записываются в виде (см. рис.1):

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad (15)$$

$$B_z = B_0 \cos(\omega t - kx). \quad (16)$$

$$E_y = cB_z \quad (17)$$

Обратим внимание на то, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  достигают максимумов и минимумов одновременно в каждой точке пространства (аналогично скорости  $\partial\xi/\partial t$  и относительной деформации  $\partial\xi/\partial x$  в упругой волне).

**Энергетические соотношения в электромагнитной волне.**

Электрическое поле обладает энергией, равной работе внешних сил по созданию этого поля. Энергия, заключенная в единице объема

электрического поля – плотность электрической энергии. В диэлектрической изотропной среде (в том числе и в вакууме) плотность электрической энергии пропорциональна квадрату напряженности:

$$\varpi_E = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2. \quad (18)$$

Магнитное поле также обладает энергией и плотность магнитной энергии в диэлектрической изотропной среде (и в вакууме) имеет аналогичный вид:

$$\varpi_B = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \approx \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (19)$$

Учитывая, что  $B = E/c = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}E$  (см. (5) и (6)),  $\varpi_B = \varpi_E$  и для плотности энергии электромагнитного поля в диэлектрической среде получаем:

$$\boxed{\varpi = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D})}{2} + \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H})}{2}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (20)$$

Вместе с электромагнитным полем распространяется со скоростью  $c$  и энергия. Плотность потока энергии  $\mathbf{S}$  (**вектор Умова-Пойнтинга**) – энергия, переносимая в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения энергии в данной точке:

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]}. \quad (21)$$

Если вращать буравчик (см. **рис.1**) по направлению от вектора  $\mathbf{E}$  к вектору  $\mathbf{H}$ , то направление движения острия буравчика покажет направление вектора Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ .

По модулю вектор Умова-Пойнтинга равен плотности электромагнитной энергии, умноженной на скорость ее распространения:

$$S = c\varpi = c\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2, \quad (22)$$

но, кроме того, показывает направление распространения энергии.

Среднее за период  $T$  значение модуля вектора Умова-Пойнтинга – средний поток энергии – называется **интенсивностью волны**:

$$\underline{I} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{c\varepsilon_0}{T} \int_0^T E^2 dt. \quad (23)$$

Световой поток регистрируется приборами (и глазом) именно по интенсивности.

Для плоской электромагнитной волны (15) – (17) интенсивность выражается через квадрат амплитуды светового вектора:

$$\underline{I} = \frac{c\varepsilon_0}{T} \int_0^T E^2 dt = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \quad (24)$$

**Задача 1.** Плоская бегущая волна  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx)$  имеет интенсивность  $I_0$ . Изобразите графически вектор Умова-Пойнтинга для данной волны через равные промежутки времени  $\Delta t = T/16$ , начиная с  $t = 0$ . Перпендикулярно волновому вектору в точке  $x=L=1,5\lambda$  поставлен отражающий экран. В том же масштабе через те же интервалы времени изобразите графики вектора Умова-Пойнтинга для образовавшейся стоячей волны. Проведите сравнение полученных рисунков.

**Решение.** Для бегущей волны, используя (20), получаем

$$S_{\text{áää}} = c\varepsilon_0 E^2 = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 [1 + \cos 2(\omega t - kx)] = I_0 [1 + \cos 2(\omega t - kx)] \quad (25)$$

где  $I_0$  – интенсивность (24). Подставляя  $t = (T/16)n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , находим

$$S_{\text{áää}} = I_0 [1 + \cos 2\pi(n/8 - 2x/\lambda)].$$

Максимумы вектора Умова-Пойнтинга наблюдаются при  $2\pi(n/8 - 2x/\lambda) = \pm 2\pi m$ :

$$x_m = n \frac{\lambda}{16} \mathbf{m} \frac{\lambda}{2}$$

Расстояние между максимумами для фиксированного момента времени (фиксировано значение  $n$ )  $\Delta x_m = \lambda/2$ .

Через время  $\Delta t$  вся кривая смещается на  $\Delta x = c\Delta t = cT/16 = \lambda/16$  (смещение показано широкой стрелкой на **рис.3**). Значение  $n$  указано цифрами у кривых.

Для стоячей волны получим закон изменения **E** и **B** аналогично задаче №.

Пусть в волне, распространяющейся по оси OX

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ B_z = B_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases} \quad (26)$$

тогда в волне, идущей навстречу либо **E**, либо **B** должны поменять фазу на  $\pi$ , чтобы сохранить правую тройку векторов  $S_n = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ . Пусть вектор **E** меняет фазу:

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega t - k(2L - x) + \pi) \\ B_z = B_0 \cos(\omega t - k(2L - x)) \end{cases} \quad (27)$$

Складывая, получаем вектора электромагнитного поля

$$\begin{cases} E_y = 2E_0 \sin(kx - kL) \sin(\omega t - kL) \\ B_z = 2B_0 \cos(kx - kL) \cos(\omega t - kL) \end{cases} \quad (28)$$

и  $X$ -компонента вектора Умова-Пойнтинга в стоячей волне

$$\begin{aligned} S_x &= E_y H_z = E_0 \frac{B_0}{\mu_0} \sin[2(kx - kL)] \sin[2(\omega t - kL)] = \\ &= c \epsilon_0 E_0^2 \sin^2[2(kx - kL)] \sin^2[2(\omega t - kL)] = 2I_0 \sin^2[2(kx - kL)] \sin^2[2(\omega t - kL)] \end{aligned} \quad (29)$$

Среднее за период значение вектора Умова-Пойнтинга в стоячей волне

$$\langle S_x \rangle = 2I_0 \sin^2[2(kx - kL)] \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2[2(\omega t - kL)] dt = 0, \quad (30)$$

то есть в стоячей волне нет направленного потока энергии.

В точках с координатами

$$\begin{aligned} [2(kx_m - kL)] &= \pi m, \\ x_m &= L + m\lambda/4 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

вектор Умова-Пойнтинга в любой момент времени равен нулю. Эти точки называются **узлами волны**. Через них электромагнитная энергия пройти не может. Энергия, заключенная между узлами, находящимися на расстоянии  $\Delta x = \lambda/4$  законсервирована и с течением времени периодически (с удвоенной частотой  $2\omega$ ) переходит с одного конца участка на другой. Это означает, что через  $T/4$  поток  $S_x$  меняет направление.

Подставляя в (29)  $t = Tn/16$  и  $L = 2,5\lambda$  (условие задачи), получаем

$$S_x = 2I_0 \sin[2\pi(2x/\lambda - 5)] \sin[2\pi(n/8 - 5)] = 2I_0 \sin[4\pi x/\lambda] \sin[\pi n/4]. \quad (31)$$

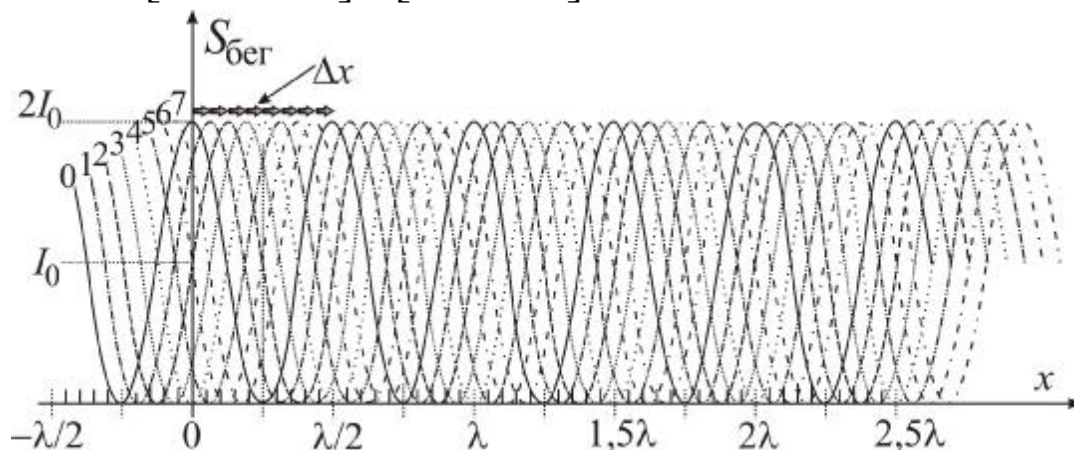
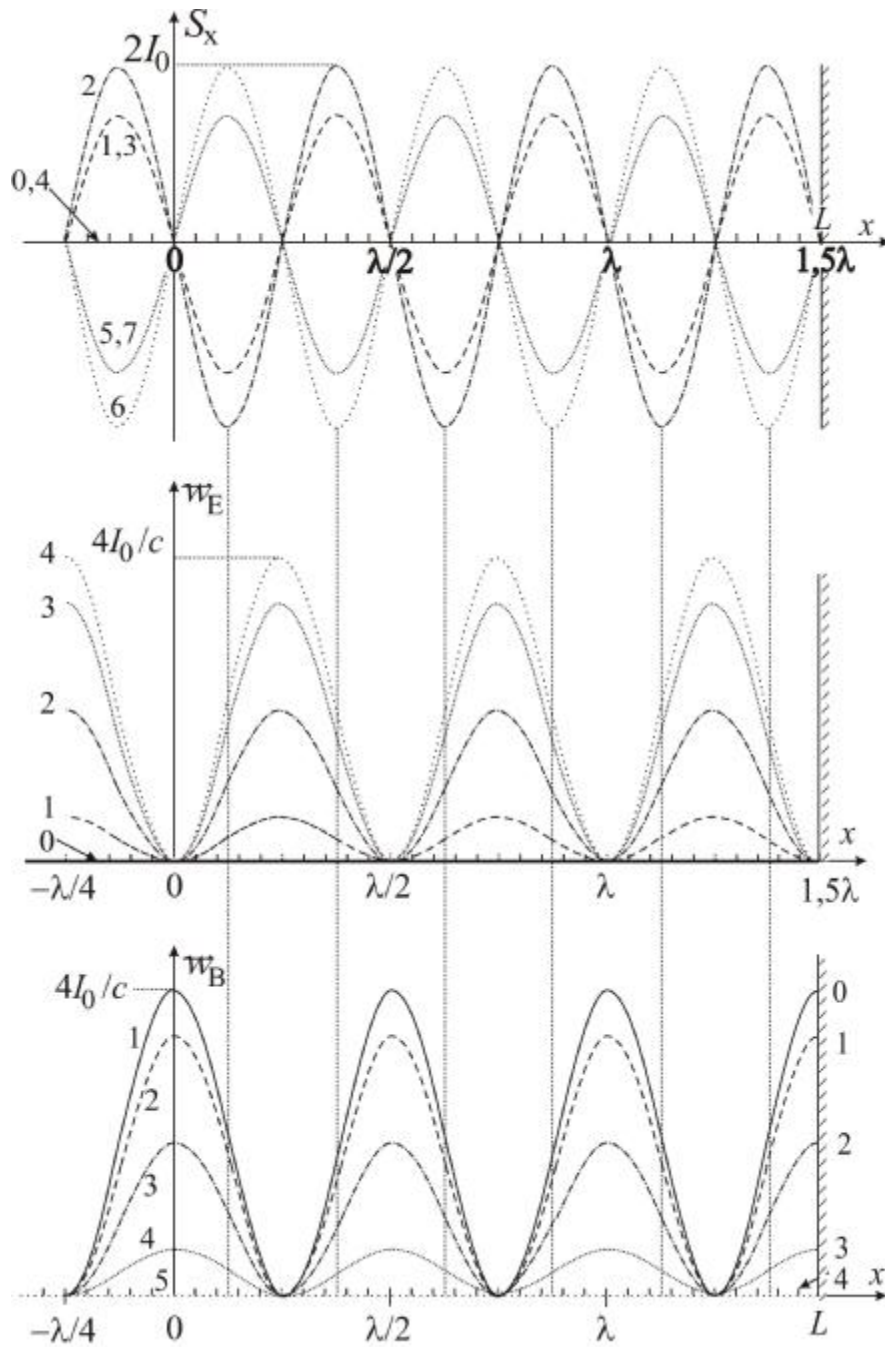


Рис. 3. Вектор Умова-Пойнтинга в бегущей волне.



**Рис. 4.** Вектор Умова-Пойнтинга в стоячей волне и плотности электрической и магнитной энергий через равные промежутки времени  $\Delta t = T/16$ . В узлах плотностей энергии нет переноса энергии ( $S_x = 0$ )

Для  $2\pi(n/8 - 5) = \pi \mathbf{1}$ , то есть для  $n = 4(\mathbf{1} + 10)$ , поток энергии отсутствует  $S_x = 0$ . Этому случаю соответствуют  $n = 0$  ( $\mathbf{1} = -10$ ),  $n = 4$  ( $\mathbf{1} = -9$ ),  $n = 8$  ( $\mathbf{1} = -8$ ),  $n = 12$  ( $\mathbf{1} = -7$ )...

Расстояние между максимумами при  $t = \text{const}$  определяется изменением аргумента первого сомножителя в (31) на  $2\pi$ :  $\Delta x_m = \lambda/2$ .



С течением времени максимумы изменяются по величине, не смещаясь вдоль оси ОХ (**рис. 4**). Для сравнения на **рис.4** приведены зависимости плотностей электрической и магнитной энергий в те же моменты времени. Видно, что максимумы потока  $S_x$  находятся посередине между узлами электрической и магнитной плотностей энергии.

**Вопрос для самопроверки.** Энергия электромагнитной волны состоит из двух частей: электрической и магнитной, так же как и энергия упругой волны состоит из кинетической и потенциальной частей. Сравните процессы распространения энергии и ее составляющих в бегущих упругой и электромагнитной волнах. В чем их сходство и отличие?

**Ответ.** См. **рис. 3, 4**.

**Задача 2.** Оценить амплитуду напряженности электрического поля солнечного света, если от Солнца на квадратный сантиметр поверхности Земли в среднем падает 2 калории в минуту. Для оценки можно принять, что солнечное излучение приходит в виде плоских монохроматических волн.

**Решение.** Значение интенсивности солнечного света в системе СИ:

$$I = 2 \frac{\hat{e} \hat{e}}{i \cdot i \cdot \hat{n}^2} = 2 \frac{4,2 \text{ \AA} \cdot \text{e}}{60 \hat{n} \cdot 10^{-4} i^2} = 1400 \frac{\text{ \AA} \cdot \text{e}}{\hat{n} \cdot i^2}.$$

Из (22) получаем

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}} \sqrt{I} \approx 27,46 \sqrt{I} \approx 1025 \frac{\hat{A}}{i} \approx 1,0 \cdot 10^3 \frac{\hat{A}}{i}. \quad (32)$$

Для сравнения определим напряженность электрического поля лазерного излучения, если мощность излучения  $100 \text{ МВт/см}^2$  при длительности  $\tau = 10 \text{ нс}$ . Подставляя значение интенсивности лазерного

излучения  $I = 100 \frac{i \hat{A}}{\hat{n}^2} = 100 \frac{10^6}{10^{-4}} \frac{\text{ \AA} \cdot \text{e}}{\hat{n} \cdot i^2} = 10^{12} \frac{\text{ \AA} \cdot \text{e}}{\hat{n} \cdot i^2}$  в формулу (32), находим

$$E_{0\text{e}} = 27,46 \sqrt{I} \approx 2,7 \cdot 10^7 \frac{\hat{A}}{i}.$$

Напряженность поля на электронной орбите в атоме водорода:

$$E_H = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a_B^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{(0,5 \cdot 10^{-10})^2} \approx 5,8 \cdot 10^{11} \frac{\hat{A}}{i},$$

где  $a_B$  – радиус боровской орбиты электрона,  $e$  – заряд протона, равный заряду электрона.

**Ответ.**  $E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} \approx 1,0 \cdot 10^3 \frac{\hat{A}}{i}$

**Задача 3.** Определить форму и скорость распространения группы электромагнитных волн (волнового пакета), представляющих собой **суперпозицию** плоских волн с одинаковой поляризацией, с одинаковыми амплитудами  $A/\Delta\omega$  и с непрерывным спектром частот в интервале  $\omega_0 - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega/2$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Рассмотрите случаи распространения волнового пакета в среде с дисперсией и в вакууме.

**Волновой пакет** представляет собой суперпозицию мало отличающихся друг от друга по длине волны и направлению распространения ОХ монохроматических волн.

**Решение.** Напряженность электрического поля, создаваемая группой волн – суперпозиция напряженностей, создаваемых каждой волной в отдельности:  $E(x,t) = \sum E_i$ . Чтобы перейти от суммирования к интегрированию под частотой монохроматической волны  $\omega$  будем понимать бесконечно узкий интервал частот  $d\omega$  вблизи  $\omega$ . Тогда амплитуда такой волны равна  $E_{0i}(\omega) = Ad\omega/\Delta\omega$ , суммарная напряженность группы волн:

$$E(x,t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \frac{A}{\Delta\omega} \cos(\omega t - kx) d\omega \quad (33)$$

Рассмотрим случай, когда среда обладает дисперсией, то есть описывается нелинейным законом дисперсии ( $k \neq \omega/c$ , где фазовая скорость  $c = \text{const}$ ).

Поскольку интервал частот узкий, то можно разложить волновое число в ряд Тейлора вблизи среднего значения  $k_0$ :

$$k = k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k_0 + (\omega - \omega_0)/u, \quad (34)$$

где

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (35)$$

является **групповой скоростью**. Тогда аргумент косинуса в (33) можно представить в виде новой переменной

$$\zeta = \omega t - kx = \omega(t - x/u) + x(\omega_0/u - k_0). \quad (36)$$

Интегрируя (33) в пределах от  $\zeta_1 = (\omega_0 - \Delta\omega/2)(t - x/u) + x(\omega_0/u - k_0)$  до  $\zeta_2 = (\omega_0 + \Delta\omega/2)(t - x/u) + x(\omega_0/u - k_0)$ , получаем

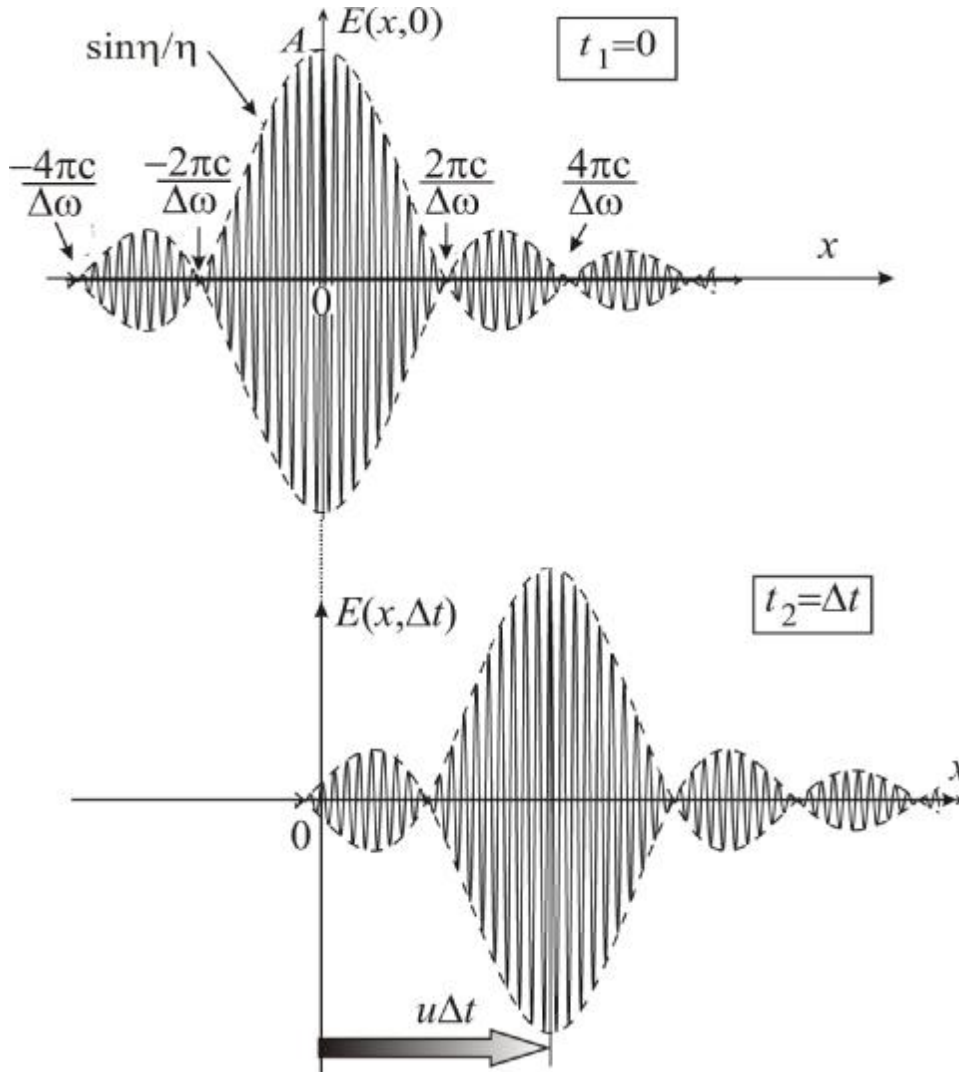
$$E(x,t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{A}{\Delta\omega(t-x/c)} \cos \zeta d\zeta = A \frac{\sin[\Delta\omega(t-x/u)/2]}{\Delta\omega(t-x/u)/2} \cos(\omega_0 t - k_0 x). \quad (37)$$

Здесь **амплитуда волнового пакета**  $E_0(x,t)$  равна

$$E_0(x,t) = A \frac{\sin[\Delta\omega(t-x/u)/2]}{\Delta\omega(t-x/u)/2} = A \frac{\sin \eta}{\eta}, \quad (38)$$

$$\eta = \Delta\omega(t - x/u)/2. \quad (39)$$

На **рис. 5** представлена зависимость (37) от пространственной координаты для двух последовательных моментов времени.



**Рис. 5.** Волновой пакет движет со скоростью  $u = d\omega/dk$ .

Для линейной зависимости частоты от волнового вектора (**линейного закона дисперсии**  $\omega = ck$ ) групповая и фазовая скорости одинаковы  $u = c$ , также как и относительное изменение частоты  $\omega$ , волнового вектора  $k$  и длины волны  $\lambda$ :

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dk}{k} = \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (40)$$

Важно отметить, что энергия волны, пропорциональная квадрату амплитуды, распространяется, как и максимум амплитуды, с групповой скоростью.

**Ответ.** напряженность поля волнового пакета  
 $E(x,t) = A \frac{\sin[\Delta\omega(t-x/u)/2]}{\Delta\omega(t-x/u)/2} \cos(\omega_0 t - k_0 x)$ , групповая скорость  $u = \frac{d\omega}{dk}$ .

**Задача 4.** В вакууме вдоль оси ОХ распространяются две когерентные плоские волны с одинаковыми амплитудами и разностью фаз  $\delta = \text{const}$ .

**Когерентные волны** (когерентные источники, испускающие данные волны) обладают одинаковой частотой, одинаковой поляризацией и неизменной во времени разности фаз в каждой точке пространства.

Найти интенсивность результирующей волны.

**Решение.** Напряженность электрического поля в результирующей волне

$$\begin{aligned} E &= E_{1y} + E_{2y} = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega t - kx + \delta) = \\ &= 2E_0 \cos(\delta/2) \cdot \cos(\omega t - kx + \delta/2) \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, результирующая волна является бегущей волной, амплитуда которой зависит от разности фаз интерферирующих волн. В результате интенсивность также зависит от разности фаз:

$$I = 2c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\delta/2) = \underline{2I_0(1 + \cos\delta)}, \quad (42)$$

где  $I_0 = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2$  – интенсивность каждой из волн.

**Ответ.**  $I = 2I_0(1 + \cos\delta)$ .

**Задача 5** (схема Юнга). Два точечных когерентных источника расположены вдоль оси ОУ в точках с координатами  $+d/2$  и  $-d/2$ . Частота источников  $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ , амплитуда  $A_1 = A_2 = A$ . На расстоянии  $L$ , параллельно линии, соединяющей источники, поставлен экран для регистрации интенсивности света вдоль оси ОХ, параллельной оси ОУ (см. **рис. 6а**). Найдите зависимость интенсивности  $I(x)$  от координаты  $x$  экрана, пренебрегая изменением амплитуды и интенсивности света при удалении от источников и, полагая  $L \gg d, x$ .

**Решение.** Изобразим ход интерферирующих лучей от двух источников до произвольной точки на экране (см. **рис. 6а**).

Угол  $\angle S_1 O_x S_2 = \theta$  называется углом схождения лучей. Так как  $L \gg d, x$ , то угол схождения лучей для всех точек  $P$  одинаков и равен

$$\theta \approx 2\text{tg}(\theta/2) = 2d/L.$$

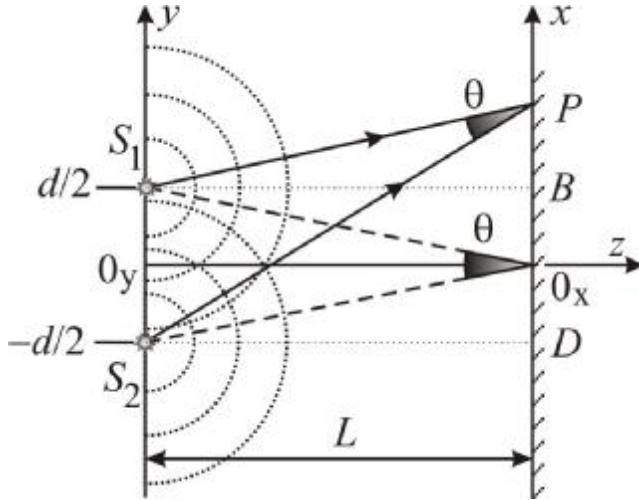
Как следует из формул (41) и (42) напряженность электрического поля и интенсивность в точке  $P$  зависят от разности фаз

$$\delta(x) = k\Delta(x), \quad (43)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  - волновой вектор, а  $\Delta(x)$  - разность хода лучей в точке на экране с координатой  $x$ .

Разность хода равна разности длин лучей, умноженных на показатель преломления среды (в данной задаче  $n=1$ ):  $\Delta = (S_2P) - (S_1P)$ . Длины лучей найдем из треугольников  $\Delta S_1PB$  и  $\Delta S_2PD$ .

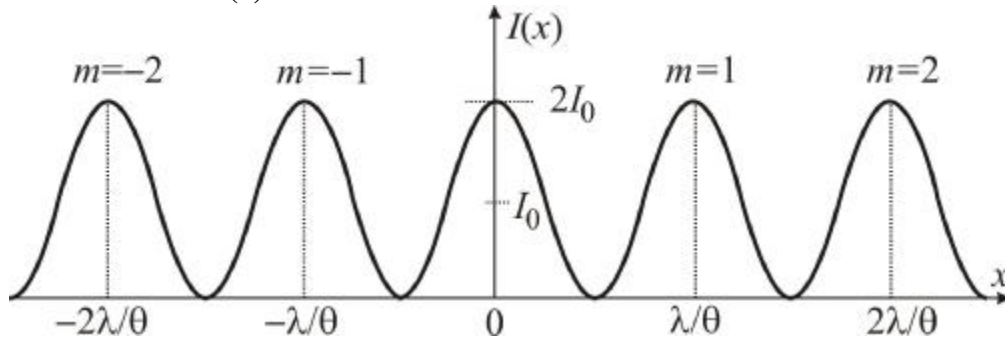
$$S_1P = \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2} = L \left[ 1 + \frac{(x - d/2)^2}{L^2} \right]^{1/2}.$$



(a)

Рис. 6.

(а) Ход лучей при двухлучевой интерференции от источников  $S_1$  и  $S_2$ , расположенных на большом  $L \gg d$ ,  $x$  расстоянии от экрана. (б) Изменение интенсивности света вдоль координаты  $x$  экрана



(б)

Второе слагаемое является малым параметром  $\frac{(x - d/2)}{L} \ll 1$ , поэтому, раскладывая в ряд Тейлора, имеем

$$S_1P = L \left[ 1 + \frac{(x - d/2)^2}{L^2} \right]^{1/2} \approx L \left[ 1 + \frac{(x - d/2)^2}{2L^2} \right] = L + \frac{(x - d/2)^2}{2L}.$$

Аналогично находим

$$S_2P = L \left[ 1 + \frac{(x + d/2)^2}{L^2} \right]^{1/2} \approx L \left[ 1 + \frac{(x + d/2)^2}{2L^2} \right] = L + \frac{(x + d/2)^2}{2L}.$$

Для разности хода получаем

$$\Delta = S_2P - S_1P = \frac{d}{L}x = \boxed{\theta x = \Delta},$$

для разности фаз  $\delta = k\theta x$ ,  
для интенсивности (42)

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos k\theta x). \quad (44)$$

График функции  $I(x)$  (44) представлен на **рис. 6б**

**Ответ.**  $I(x) = 2I_0(1 + \cos k\theta x)$  (см. **рис. 6б.**).

**Задача 6** (дифракция на щели). На пути плоской световой волны  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$  перпендикулярно волновому вектору  $\mathbf{k}$  расположен экран с узкой щелью, ширина которой равна  $b$ . Исследуется дифракция Фраунгофера, вследствие которой за экраном в области П наблюдаются «плоские» волны, распространяющиеся не только вдоль оси OZ, но и под разными углами  $-\pi/2 < \theta < +\pi/2$  к ней.

Для регистрации интенсивности света  $I(\theta)$ , идущего под углом  $\theta$  можно поставить экран наблюдения или 1) на большом расстоянии  $L$  (в пределе  $L \rightarrow \infty$ ), или 2) в фокальной плоскости собирающей линзы (см. **рис. 7а**).

**Дифракция**, в широком смысле, - это совокупность всех явлений, происходящих при распространении волн в неоднородной среде. Классическими примерами дифракции являются 1) дифракция на щели (или круглом отверстии), ширина которой сравнима с длиной волны, и 2) дифракция рентгеновских волн на кристаллической решетке. Дифракция приводит к появлению интенсивности в области геометрической тени.

**Дифракция Фраунгофера** наблюдается при значении волнового параметра  $\sqrt{L\lambda}/b \gg 1$

Найдите зависимость интенсивности  $I(\theta)$  и  $I(x)$  световой волны от угла дифракции  $\theta$  и от координаты экрана  $x$ . Постройте диаграмму направленности  $I(\theta)$  и графики  $I(\theta)$  и  $I(x)$  в приближении  $\text{tg}(\theta) = x/f \ll 1$ .

**Диаграмма направленности** – график в полярных координатах зависимости интенсивности от угла в определенной плоскости.

**Решение.** Для вычисления  $I(\theta)$  используем систему с линзой (см. **рис. 7а**).

Воспользуемся **принципом Гюйгенса – Френеля**, согласно которому каждая точка щели рассматривается как точечный вторичный источник сферических волн той же частоты, что и

первичная волна. Амплитуды и фазы вторичных волн связаны с амплитудой и начальной фазой источника. Картина распределения интенсивности – есть результат интерференции света от вторичных источников.

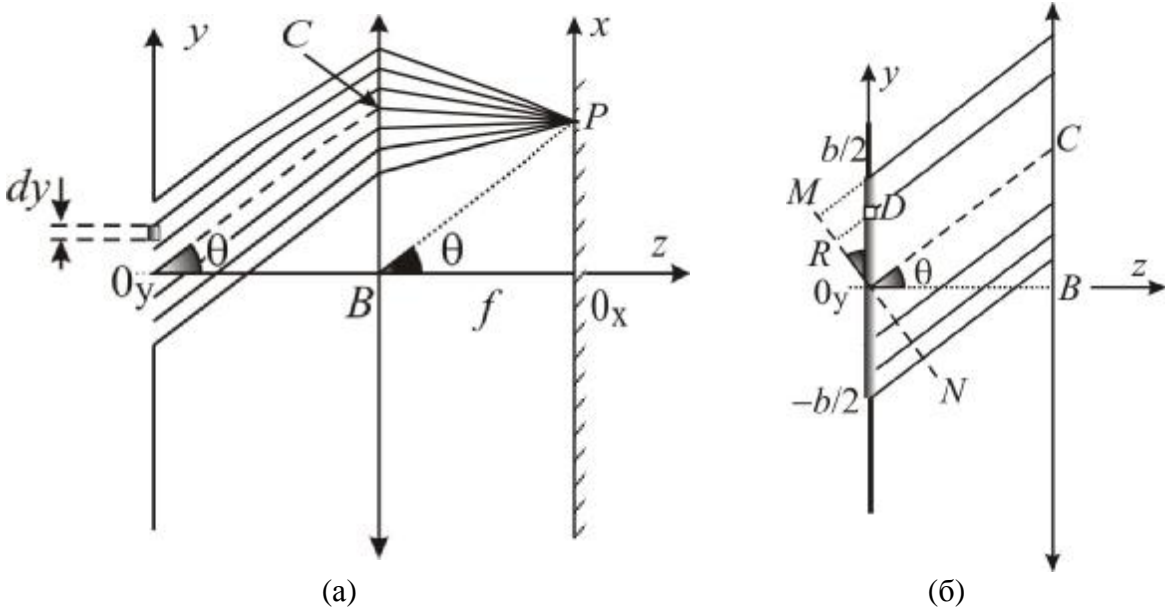


Рис. 7. Плоскости экрана со щелью, линзы и экрана наблюдения параллельны

В точке щели с координатой  $y$  выделим бесконечно узкую полоску шириной  $dy$ . Тогда амплитуда волны, создаваемой каждым вторичным источником одинакова и равна  $\frac{E_0}{b} dy$ , где  $E_0$  – амплитуда напряженности электрического поля в падающей (первичной) волне. Так как падающая волна плоская, а экран со щелью совпадает с фронтом волны, то фазы всех вторичных источников одинаковы.

В точку  $P$  с координатой  $x$  придут все лучи, параллельные  $BP$ , то есть выходящие от вторичных источников под углом  $\theta$  к оси  $OZ$ . Фазу лучей в точке  $P$  будем определять относительно луча  $O_yC$ , вышедшего из точки щели с координатой  $y = 0$ . Так как линза не вносит разности фаз в фронт падающей волны, то в точке  $P$  фаза волны от полоски будет такой же, как в фронте  $MN$  волны, падающей на линзу:

$$\delta = -k \cdot (RD) = -k y \sin \theta.$$

Здесь учтено, что  $\angle RO_yD = \angle CO_yB$  как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Таким образом, от полоски (вторичного источника) идет волна

$$dE = \left( \frac{E_0}{b} dy \right) \cos(\omega t - kz - ky \sin \theta). \quad (45)$$

Суперпозиция когерентных волн (интерференция) (45) в точке  $P$

$$\begin{aligned}
 E(P) = E(\theta) &= \int_{-b/2}^{+b/2} dE = \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{E_0}{b} dy \right) \cos(\omega t - kz - ky \sin \theta) = \\
 &= E_0 \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} \cos(\omega t - kz)
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Интенсивность в точке  $P$ , то есть интенсивность света, дифрагированного под углом  $\theta$ , равна

$$I(P) = I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin[kb \sin \theta / 2]}{kb \sin \theta / 2} \right]^2
 \tag{47}$$

Диаграмма направленности и график  $I(\theta)$  (47) представлены на рис. 8а и рис. 8б, соответственно.

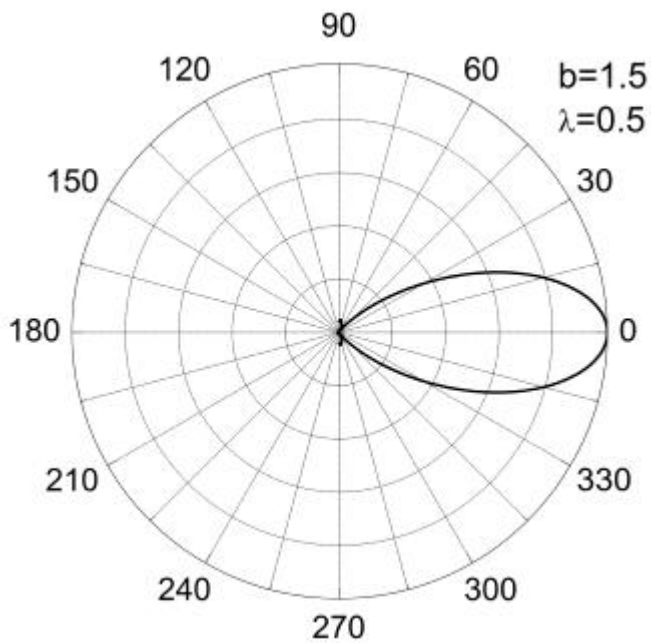
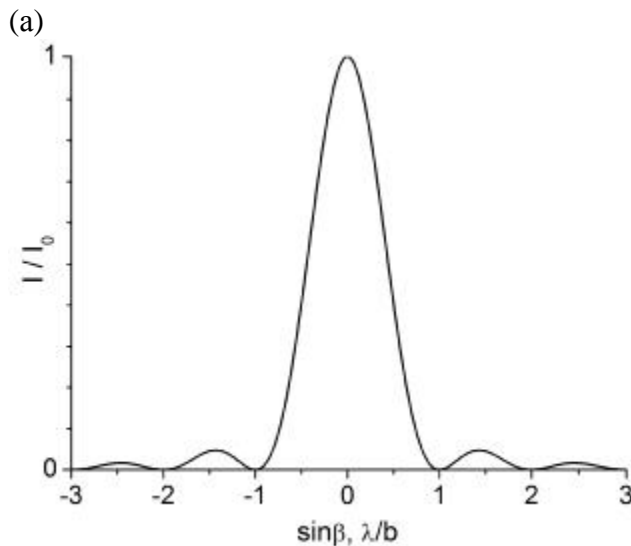
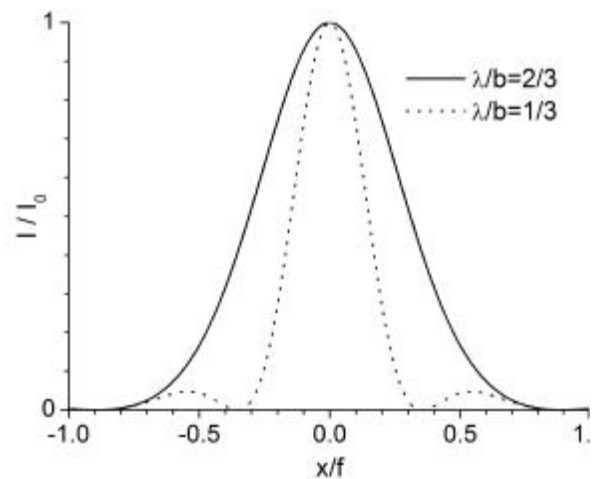


Рис. 8.

(а). Диаграмма направленности  
Зависимость интенсивности  
дифрагированного света от  
синуса угла дифракции (б) и  
координаты экрана (в)



(б)



(в)



Чтобы получить зависимость  $I(x)$ , используем связь  $x/f = \operatorname{tg}\theta$ , тогда  $\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{x/f}{\sqrt{1+(x/f)^2}}$ . Зависимость от  $x/f$  представлена на

**рис. 8в.**

В приближении  $x/f \ll 1$   $\sin\theta = \frac{x}{f} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{f} \right)^2 \right] \approx \frac{x}{f}$  и

$$I_1(P) = I(x) = I_0 \left[ \frac{\sin[kbx/(2f)]}{kbx/(2f)} \right]^2. \quad (48)$$

**2 способ рассмотрения.** Воспользуемся методом векторных диаграмм. Разделим всю щель  $AK$  (**рис. 9а**) на большое число  $N$  узких продольных полосок – вторичных источников (на **рис. 9**, для простоты изображения, число полосок невелико  $N = 20$ ). Амплитуда напряженности от каждой полоски  $\Delta E = E_0/N$  ( $E_0$  – амплитуда падающей плоской волны).

Рассмотрим плоскую волну, создаваемую вторичными источниками под углом  $\theta$  к оси  $OZ$  (**рис. 9а**). Пусть фаза волны, идущей от крайней полоски в точке  $A$ , равна нулю. Обозначим напряженность поля  $\Delta \mathbf{E}_1$  от этой полоски горизонтальным вектором. Вектор напряженности поля от следующей полоски  $\Delta \mathbf{E}_2$  имеет такую же длину  $\Delta E = E_0/N$ . Наличие небольшого сдвига фаз  $\Delta\delta$  проявляется в повороте вектора  $\Delta \mathbf{E}_2$  относительно  $\Delta \mathbf{E}_1$  на угол  $\Delta\delta$  (см. **рис.**). Фаза  $i$ -ой полоски  $\delta_i = i \cdot \Delta\delta$ . Фаза последней полоски, примыкающей к точке щели  $K$ , с одной стороны, равна  $\delta_N = N \cdot \Delta\delta$ , а с другой стороны,

$$\delta_N = k \cdot (KN) = k \cdot b \sin\theta, \quad (49)$$

где  $k$  – волновой вектор,  $(KN)$  – разность хода лучей от крайних полосок (из точек  $A$  и  $K$ ).

Таким образом, угол поворота каждого последующего вектора  $\Delta \mathbf{E}_i$  относительно предыдущего связан с углом  $\theta$ :

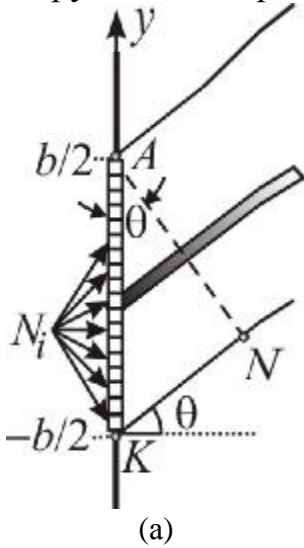
$$\Delta\delta = \delta_N/N = kb \sin\theta/N.$$

Если  $\Delta\delta=0$ , то есть дифрагированная волна распространяется под углом  $\theta=0$ , то все  $\Delta \mathbf{E}_i$  имеют одно направление (см. **рис. 9б** при  $\Delta\delta = 0^\circ$ ), и суммарная напряженность поля, создаваемая всеми полосками, равна напряженности в падающей волне:

$$E(0) = N \cdot \Delta E = N \cdot (E_0/N) = E_0.$$

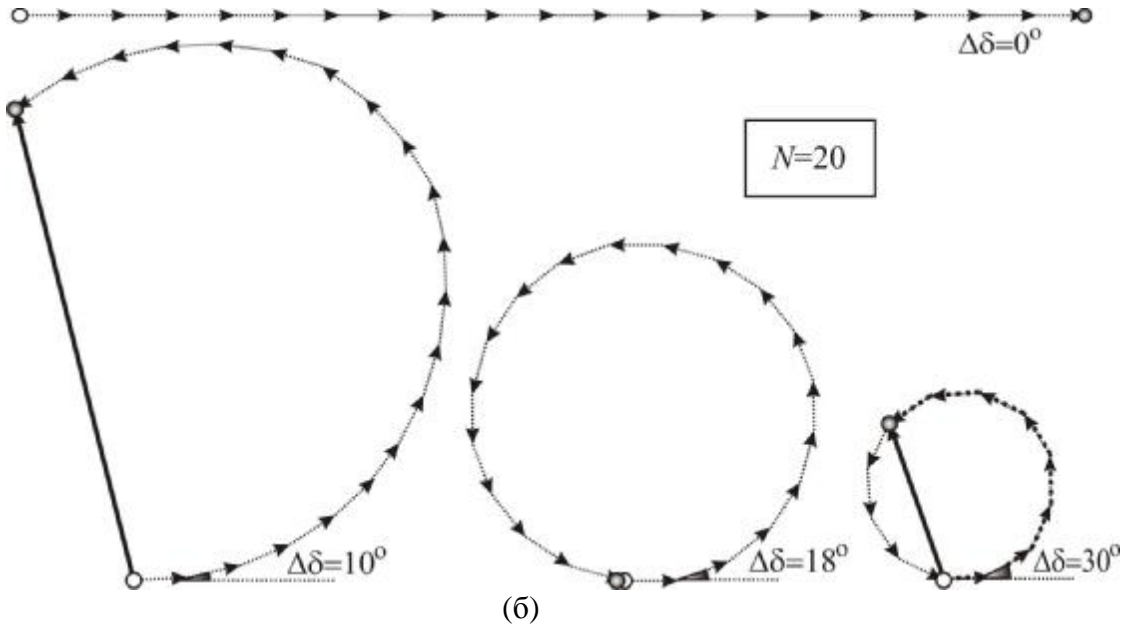
Если  $\theta \neq 0$  ( $\Delta\delta \neq 0$ ), то, складывая напряженности от всех полосок, получаем дугу в виде ломаной линии (см. **рис. 9б** при  $\Delta\delta = 10^\circ$ ). Концы дуги (начало обозначено белым кружком, а конец – темным кружком) соединяет вектор, равный амплитуде результирующей напряженности электрического поля волны, идущей под углом  $\theta$ .

Заметим, что при увеличении угла  $\theta$  длина линии от начала первого вектора  $\Delta E_1$  до конца последнего вектора  $\Delta E_N$  остается неизменной (равной  $E_0$ ). Приобретение фазы  $\Delta\delta$  приводит только к закручиванию кривой.



(a)

**Рис. 9.** (а) Разбиение области щели на большое число  $N_i$  полосок. Оценка напряженности и интенсивности света, дифрагирующего под углом  $\theta$  методом векторных диаграмм  
(б) Результирующий вектор напряженности обозначен сплошным вектором.  $\Delta\delta=10^\circ$  соответствует случаю  $\sin \theta_1 = 5\lambda/(9b)$ ,  $\Delta\delta=18^\circ$  соответствует случаю  $\sin \theta_2 = \lambda/b$ ,  $\Delta\delta=30^\circ$  соответствует случаю  $\sin \theta_3 = 5\lambda/(3b)$ . В случае  $\sin \theta_2 = \lambda/b$  разность фаз от крайних полосок равна  $2\pi$  (а разность хода  $(KN) = b\sin \theta = \lambda$ ), напряженность равна нулю, то есть свет под углом  $\theta_2$  имеет нулевую интенсивность.



(б)

Итак, при  $\theta = 0$  амплитуда напряженности дифрагированной волны  $E_0$ , интенсивность  $I_0$ . С ростом  $\theta$  амплитуда монотонно уменьшается, достигая нуля при угле дифракции  $\theta_m$  (на **рис. 9б** при  $\Delta\delta=18^\circ$ ), когда разность фаз от крайних полосок равна  $\delta_m=2\pi$ . Разность хода  $\Delta_m$  и угол дифракции  $\theta_m$ , соответствующие этому случаю, найдем из (49)

$$\delta_{AK} = k\Delta_{AK} = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta \text{ при условии } \delta_{AK} = \delta_m = 2\pi. \text{ Получаем}$$

$$\sin \theta_m = \lambda / b.$$

При дальнейшем увеличении  $\theta$  дуга начинает закручиваться во вторую (на **рис. 9б** при  $\Delta\delta=30^\circ$ ), затем в третью и т.д. окружности. Амплитуда напряженности будет осциллировать, постепенно приближаясь к нулю. Максимальная доля интенсивности приходится на свет, дифрагированный в интервале углов  $-\theta_m < \theta < \theta_m$ .

**Примечание.** Негласно при решении задачи пренебрегалось изменением первичного поля (падающей волны), возникающим, во-первых, из-за отражения волн от экрана в направлении к источнику и, во-вторых, из-за переизлучения волн краями щелей.

**Ответ.**  $I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin[kb \sin \theta / 2]}{kb \sin \theta / 2} \right]^2$ ,  $I(x) = I_0 \left[ \frac{\sin[kbx / (2f)]}{kbx / (2f)} \right]^2$

### Вопросы для самопроверки.

- 1). Чему равна амплитуда напряженности и интенсивность света, дифрагированного под углами  $\theta_a = \arcsin \frac{\lambda}{2b}$  и  $\theta_b = \arcsin \frac{\lambda}{4b}$ ?
- 2). Можно ли построить и воспользоваться для вычислений диаграммой для интенсивности, аналогичной диаграмме для напряженности (см. **рис. 9б**)?
- 3) Какими параметрами определяется ширина лепестка диаграммы направленности?

**Ответ.** 1).  $4I_0 / \pi^2$ ,  $8I_0 / \pi^2$ . 2). Нет. Для когерентных волн результирующая интенсивность не равна сумме интенсивностей, в отличие от напряженностей, суммирование которых производится с учетом фаз.

**Задача 7** (дифракция Фраунгофера на двух щелях). На пути плоской световой волны  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$  перпендикулярно волновому вектору  $\mathbf{k}$  расположен экран с двумя узкими щелями. Щели имеют ширину  $b$  и расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. За экраном, в области II, исследуется дифракция Фраунгофера. Для регистрации интенсивности света  $I(\theta)$ , идущего под углом  $\theta$ , ставится экран наблюдения или 1) на большом расстоянии  $L$  (в пределе  $L \rightarrow \infty$ ), или 2) в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы (см. **рис. 10**), фокусное расстояние которой  $f$ .

Найдите зависимость интенсивности  $I(\theta)$  и  $I(x)$  световой волны от угла дифракции  $\theta$  и от координаты экрана  $x$ . Постройте диаграмму направленности  $I(\theta)$  (в полярных координатах) и графики (в декартовых координатах)  $I(\theta)$  и  $I(x)$  в приближении  $\text{tg}(\theta) = x/f \ll 1$ .

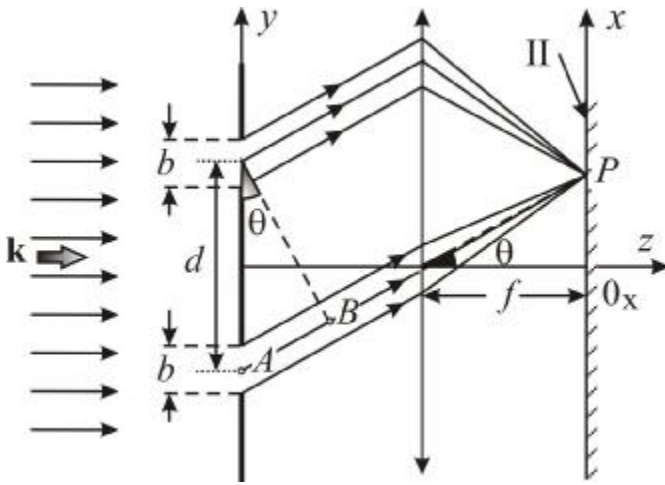


Рис. 10. Плоская электромагнитная волна падает на непрозрачный экран  $OY$  с двумя щелями. Ширина щелей  $b$ , расстояние между щелями  $d$ . Параллельно экрану находится линза с фокусным расстоянием  $f$  и экран для наблюдения  $OX$ . Изображен ход дифрагированных лучей, создающих интенсивность в точке  $P$ .

**Решение.** Для вычисления  $I(\theta)$  используем систему с линзой (см. рис.10).

Суперпозиция (интерференция) в точке  $P$  когерентных волн от вторичных источников, рассчитанная по принципу Гюйгенса – Френеля от одной щели, была получена в задаче № (46):

$$E_1(P) = E_0 \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} \cos(\omega t - kz).$$

Фаза отсчитывалась от середины щели.

Напряженность поля, создаваемая в точке  $P$  вторичными источниками второй щели, имеет такую же амплитуду и сдвиг по фазе (см. рис.10)

$$\delta_{1-2} = k \cdot (AB) = k\Delta_{1-2} = kd \sin \theta.$$

Результирующая напряженность в точке  $P$ :

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_1(\theta) + E_2(\theta) = E_1 \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t - kz + \delta_{1-2})] = \\ &= 2E_0 \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} \cos(\delta_{1-2}/2) \cdot \cos(\omega t - kz + \delta_{1-2}/2) = \\ &= 2E_0 \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} \cos[(kd \sin \theta)/2] \cdot \cos(\omega t - kz + \delta_{1-2}/2) \end{aligned}$$

ИНТЕНСИВНОСТЬ:

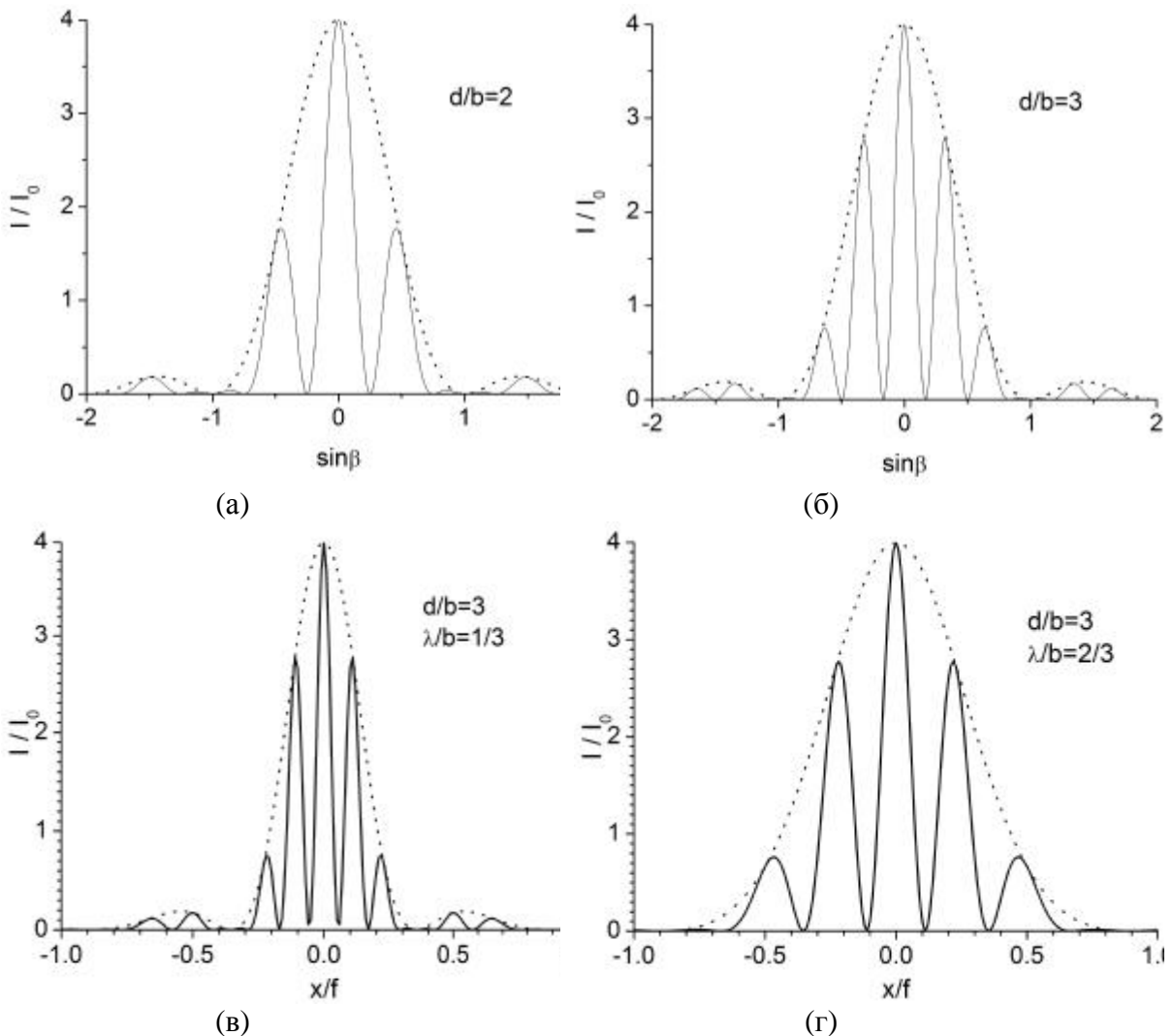
$$\begin{aligned} I(P) = I(\theta) &= 4I_0 \left[ \frac{\sin[kb \sin \theta/2]}{kb \sin \theta/2} \right]^2 \cos^2[(kd \sin \theta)/2] = \\ &= 2I_0 \left[ \frac{\sin[kb \sin \theta/2]}{(kb \sin \theta)/2} \right]^2 [1 + \cos(kd \sin \theta)] \end{aligned} \quad (50)$$

Графики интенсивности  $I(\sin \theta)$ , как функции  $\sin \theta$  (50), при разных соотношениях ширины щели  $b$  и расстояния между щелями  $d$ , представлены на рис. 11.

Учитывая, что в приближении  $x/f \ll 1$   $\sin \theta = x \left[ 1 - x^2 / (2f^2) \right] / f \approx x / f$ , находим зависимость интенсивности от координаты экрана  $x$  в фокальной плоскости линзы:

$$I(P) = I(x) = 2I_0 \left[ \frac{\sin[kbx/(2f)]}{kbx/(2f)} \right]^2 \cdot [1 + \cos(kxd/f)]. \quad (51)$$

Диаграмма направленности  $I(\theta)$  в полярных координатах и графики  $I(x/f)$  при разных соотношениях ширины щели  $b$  и длины волны  $\lambda$  представлены на рис. 11.



**Рис. 11.** Дифракция Фраунгофера на двух щелях. Зависимость интенсивности от  $\sin \theta$  и от координаты экрана  $x$ , расположенного в фокальной плоскости собирающей линзы ( $f$  – фокусное расстояние)

Максимумы  $I(\theta)$  наблюдаются при углах  $\theta$ , соответствующих условию  $\cos(kd \sin \theta) = 1$ , то есть при  $kd \sin \theta_m = 2\pi m$  и

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d}. \quad (52)$$

Эти максимумы отчетливо видны в области главного дифракционного максимума  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ , где интенсивность  $I_1(\theta)$  заметно отличается от нуля/

Поскольку  $\sin \theta_0 = \lambda/b$ , а угловое расстояние  $\Delta(\sin \theta_m) = \lambda/d$ , то максимальный наблюдаемый порядок дифракционных максимумов равен

$$m_m = \frac{\sin \theta_0}{\Delta(\sin \theta_m)} = \frac{\lambda/b}{\lambda/d} = \frac{d}{b}. \quad (53)$$

**Ответ.**  $I(\theta) = 2I_0 \left[ \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2} \right]^2 [1 + \cos(kd \sin \theta)],$

$$I(x) = 2I_0 \left[ \frac{\sin[kbx/(2f)]}{kbx/(2f)} \right]^2 \cdot [1 + \cos(kxd/f)]$$

**Задача 8** (электромагнитная волна в кристалле). Переменное электрическое поле электромагнитной волны вызывает вынужденные колебания электронов атомов вещества (с частотой вынуждающей силы, то есть с частотой падающей волны). В результате электромагнитная волна в кристалле представляет собой суперпозицию падающей волны и волн, переизлученных атомами кристалла. В результате переизлучения образуются отраженные кристаллом волны. Для определения направления и интенсивности отраженных кристаллом рентгеновских волн удобно рассматривать семейства эквидистантных плоскостей, образованных атомами решетки и проведенных таким образом, что каждый атом решетки обязательно находится на какой-либо из плоскостей данного семейства.

На каждой плоскости рассеивающие центры расположены в строгом порядке. Порядок и плотность атомов в плоскостях определяет интенсивность рассеянных волн. При выводе условий рассеяния расположение атомов можно не учитывать, а рассматривать рассеянные атомами волны, как волны, отраженные соответствующими плоскостями.

Пусть на систему кристаллических плоскостей с периодом  $d$  падает электромагнитная волна с волновым вектором  $\mathbf{k}$  под углом  $\theta$  к плоскостям (лучи 1 и 2 на **рис. 12а**). Найдите условие интенсивного отражения волн кристаллической решеткой.

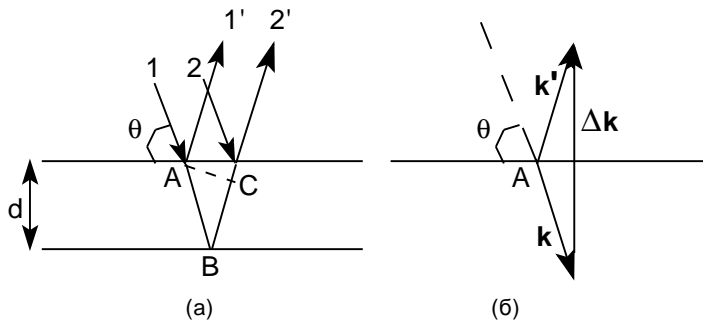


Рис. 12. 2–1. Падающие (1 и 2) под углом  $\theta$  и отраженные (1' и 2') от атомных плоскостей в решетке лучи (а). Изменение волнового вектора волны  $\Delta \mathbf{k}$  при упругом отражении (б).

**Решение.** При рассеянии образуются две волны: одна идет в направлении падающей волны, другая является результатом зеркального отражения падающей волны атомными плоскостями решетки. Рассеяние мало, так что от каждой плоскости данного семейства отражается лишь очень малая доля падающей волны. В противном случае, при сильном отражении, электронные волны не могли бы распространяться в кристалле.

Однако, когда разность хода (суммарная длина отрезков  $AB + BC$  на **рис. 12**)  $\Delta = 2d \sin \theta$  между волнами, отраженными от соседних плоскостей, равна целому числу  $m$  длин волн

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

или

$$k \sin \theta = \frac{\pi}{d} m \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (54)$$

рассеянные волны совпадают по фазе и амплитуда отраженных волн, благодаря их усилению при интерференции, резко возрастает и становится сравнимой с амплитудой падающей волны.

Изменение волнового вектора волны  $\Delta \mathbf{k}$ , показанное на **рис. 12 б**, направлено перпендикулярно семейству отражающих плоскостей и равно

$$\Delta k = 2k \sin \theta. \quad (55)$$

Условие дифракции рентгеновских лучей в кристаллах в виде (54) или, с учетом (55), в виде

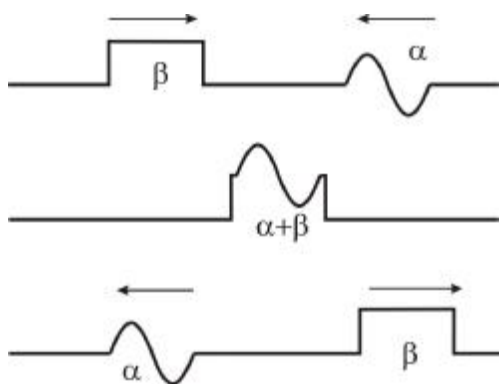
$$|\Delta \mathbf{k}| = \frac{2\pi}{d} m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (56)$$

называется **условием (или законом) Вульфа - Брэггов**.

**Ответ.**  $2d \sin \theta = m\lambda$

**Заключение.**

**Основные свойства волн.**



**Рис.13. Суперпозиция волн:** значение величины  $\xi$  - есть сумма независимых величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , создаваемых в данной точке каждым из источников в отдельности:  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ . Волны проходят одна сквозь другую без взаимных влияний.

2. **Интерференция волн.** При наложении когерентных волн интенсивность в пространстве меняется не монотонным образом: чередуются максимумы и минимумы интенсивности.

3. **Дифракция волн.**

4. Отражение.

5. Рассеяние.

**Примечание.** Обратим внимание на то, что в Природе существуют волны, которые не обладают свойством суперпозиции и интерференции. К таким волнам относятся **автоволны**. Автоволновым процессом происходит, например, распространение нервных импульсов в живых организмах.

### Приложение 1. О дивергенции и роторе

Оператор набла – вектор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – орты декартовой системы координат.

$div \mathbf{E}$  (исток вектора  $\mathbf{E}$ ) и  $rot \mathbf{E}$  (вихрь вектора  $\mathbf{E}$ ) – это взятые по определенным правилам производные от вектора  $\mathbf{E}$ .

Дивергенция вектора напряженности

$$div \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

является скалярной величиной.

Ротор напряженности

$$rot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} - \text{величина векторная. Компоненты вектора } rot \mathbf{E}$$

вдоль осей OX, OY и OZ имеют следующие значения:



$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot}\mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\
 (\operatorname{rot}\mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\
 (\operatorname{rot}\mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

### **Задачи для самостоятельного решения**

#### **Упругие волны**

**Задача.** Диапазон длин волн человеческого голоса лежит в следующих пределах: для самого высокого женского голоса  $\lambda_{\min} = 25 \text{ м}$ , для самого низкого мужского голоса  $\lambda_{\max} = 4,3 \text{ м}$ . Определить частотный голосовой диапазон.

**Ответ.** Для  $\nu$ : от  $79 \text{ с}^{-1}$  до  $1360 \text{ с}^{-1}$ ; для  $\omega$ : от  $497 \text{ рад/с}$  до  $8545 \text{ рад/с}$ .

**Задача.** Плоская звуковая волна падает нормально на поверхность воды из воздуха. Скорость звука в воздухе  $c_1 = 340 \text{ м/с}$ , в воде —  $c_2 = 1400 \text{ м/с}$ . Какая из характеристик звуковой волны изменится и во сколько раз?

**Ответ.** Длина волны в воде увеличится:  $\lambda_2 / \lambda_1 = c_2 / c_1 = 4,12$ .

**Ир. 4.196.** Для определения скорости звука в воздухе использовали трубу с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из торцов трубы. Найдите скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, для которых наблюдался резонанс на частоте  $2 \text{ кГц}$ , равно  $8 \text{ см}$ .

**Ир. 4.197.** Найдите число возможных собственных колебаний столбе воздуха в труде, частоты которых меньше  $1250 \text{ Гц}$ , если а) труба закрыта с одного конца, б) труба закрыта с обоих концов.

**Ир. 4.198.** Медный стержень длины  $55 \text{ см}$  закреплен в середине. Найдите число продольных собственных колебаний стержня в диапазоне частот от  $20$  до  $50 \text{ кГц}$ .

#### **Электромагнитные волны**

**Задача (Ир. 4.222).** Плоская световая волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля  $E_0 = 10^3 \text{ В/м}$  в

волне  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ . Свет зеленого цвета:  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Определите значение **вектора индукции** магнитного поля в точке с координатой  $z = 5 \text{ м}$  в момент времени  $\tau = 50/3 \text{ нс} \approx 16,7 \text{ нс}$ .

**Ответ.**  $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ ,  $\omega = c \cdot k = 2\pi c/\lambda = 12\pi \cdot 10^{14} \text{ рад/с}$ ,  
 $B_y = B_0 \cos(\omega t - kz)$ ,

$$B_y(\tau, z_0) = \frac{E_0}{c} \cos(12\pi \cdot 10^{14} \tau - 4\pi \cdot 10^6 z_0) = \\ = \frac{10^3}{3 \cdot 10^8} \cos\left[4\pi \cdot 10^6 \left(3 \cdot 10^8 \frac{50}{3} 10^{-9} - 5\right)\right] \approx 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$$

**Задача (Ир. 4.229).** Свет рубинового лазера падает на шарик. Считая излучение лазера плоской электромагнитной волной, полностью поглощаемой шариком, определить какую **энергию** получает шарик за  $\tau = 1$  минуту. Амплитуда напряженности в волне  $10^7 \text{ В/м}$ . Радиус шарика  $R = 1 \text{ мм}$ . Расплавится ли за это время шарик, если он медный. Плотность меди  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплота плавления  $L = 180 \text{ кДж/кг}$ ?

**Ответ.**  $W = \Sigma \cdot I \cdot \tau = \pi R^2 \cdot c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \tau = \pi 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{10^{14}}{2} 60 = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Дж}$ .

Шарик расплавится значительно раньше, так как необходимая для плавления энергия  $W_L = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \cdot L = \frac{4\pi}{3} 10^{-9} 8,9 \cdot 10^3 \cdot 180 \cdot 10^3 = 6,7 \text{ Дж} \ll W$ .

**Задача (Ир. 4.218).** Электромагнитная волна с частотой  $\nu = 3,0 \text{ МГц}$  из вакуума попадает в **диэлектрическую среду** с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2$ . На сколько изменяется ее **длина волны**  $\lambda$ ?

**Ответ.**  $\Delta\lambda = \frac{\tilde{n}}{\nu} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1 \right) \approx 29,3 \text{ нм}$ .

**Задача (Ир. 4.225).** Плоская линейно поляризованная волна с электрической компонентой  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx)$  распространяется в вакууме. Найти среднее за период значение модуля плотности **тока смещения** и плотности потока энергии.

**Ответ.** Учитывая что  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , получаем

$$\langle |j_{\text{см}}| \rangle = \left\langle \left| \frac{dD}{dt} \right| \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_0 E_0 \omega |\sin(\omega t - kx)| dt = \frac{2\epsilon_0 E_0}{T} \int_0^{T/2} \omega \sin(\omega t - kx) dt = \frac{2}{\pi} \epsilon_0 \omega E_0$$

$$\langle |S_x| \rangle = I = \frac{1}{T} \int_0^T |E_y H_z| dt = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2.$$

**Задача (Ир. 4.226).** По известной интенсивности плоской электромагнитной волны с частотой  $\omega$  определить максимальное значение **тока смещения**.

$$\text{Ответ. } \left( \frac{dD}{dt} \right)_m = \varepsilon_0 \omega E_0 = \omega \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 I}{c}}.$$

**Задача (Ир. 4.232).** Обкладки плоского воздушного конденсатора, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга, имеют форму дисков с радиусом  $R \gg d$ . К обкладкам приложено напряжение  $U = U_0 \cos \omega t$ . Определить электрическую и магнитную энергии внутри конденсатора. Оценить во сколько раз максимальное значение электрической энергии превосходит максимальное значение магнитной энергии при  $R = 3 \text{ м}$  и  $\omega = 10^3 \text{ рад/с}$ .

**Ответ.** Из соотношений  $E = U/d$  и  $D = \varepsilon_0 E$  находим плотность тока смещения  $j_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}$ . По теореме о циркуляции напряженности магнитного

поля (10)  $2\pi r H = j_{\text{см}} \pi r^2$  вычисляется  $H(r) = \frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{2d} r \sin \omega t$ , плотность и

полное значение электрической и магнитной энергий:

$$\varpi_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2} \cos^2 \omega t, \quad \varpi_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 U_0^2}{8d^2} r^2 \sin^2 \omega t,$$

$$W_E = \varpi_E \pi R^2 d = \frac{\pi R^2 \varepsilon_0 U_0^2}{2d} \cos^2 \omega t, \quad W_B = \int_0^R \varpi_B (d \cdot 2\pi r) dr = \frac{\pi \mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 U_0^2 R^4}{16d} \sin^2 \omega t.$$

$$\frac{W_E}{W_B} = 8 \left( \frac{c}{\omega R} \right)^2 = 8 \cdot 10^{14}.$$

**Задача (Ир. 4.234).** Обкладки плоского воздушного конденсатора, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга, имеют форму дисков с радиусом  $R \gg d$  (Рис.). Напряжение между обкладки со временем медленно уменьшается  $U = U_0 - \alpha t$ , где константа  $\alpha > 0$ . Найти зависимость от времени электромагнитной энергии, заключенной между обкладками конденсатора, вектор Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и поток вектора  $\mathbf{S}$  через боковую поверхность конденсатора.

**Ответ.** Аналогично задаче 4.232 по теореме о циркуляции находим ток смещения  $|j_{\text{см}}| = \frac{\varepsilon_0 \alpha}{d}$  и величину напряженности магнитного поля

$H(r) = \frac{\varepsilon_0 \alpha}{2d} r$ , значения которых со временем не изменяются. Вектор Умова-

Пойнтинга и поток вектора через боковую поверхность линейно уменьшаются со временем:

$$S(r, t) = \frac{\varepsilon_0 \alpha}{2d^2} (U_0 - \alpha t) r,$$

$$\Phi_S = (d \cdot 2\pi R) \cdot S(R) = \frac{\varepsilon_0 \alpha \pi R^2}{d} (U_0 - \alpha t).$$

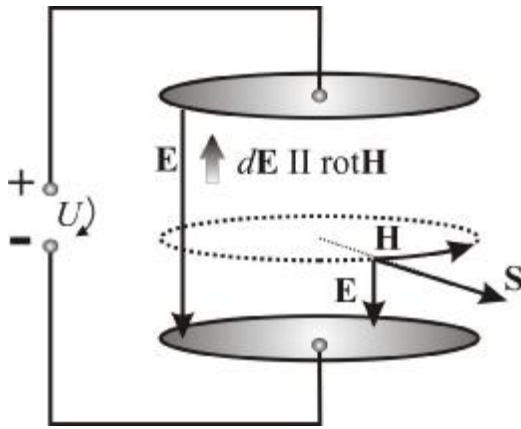


Рис.Д.1

Электрическая энергия  $W_E = \varpi_E (\pi R^2 d) = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D})}{2} (\pi R^2 d) = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{2d} (U_0 - \alpha t)^2$ ,

магнитная энергия  $W_B = \int_0^R \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H})}{2} (d \cdot 2\pi r) dr = \frac{\epsilon_0 \alpha^2 \pi R^4}{16dc^2}$ . Полная

электромагнитная энергия  $W$  и ее изменение со временем:

$$W = W_E + W_B = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{2d} \left[ (U_0 - \alpha t)^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{8c^2} \right] \text{ и } \frac{dW}{dt} = -\frac{\epsilon_0 \alpha \pi R^2}{d} (U_0 - \alpha t) = \Phi_{S(R)}.$$

**Задача. (Ир. 4.235).** По прямому проводу круглого сечения течет постоянный ток с силой тока  $J$ . Определить поток вектора Умова-Пойнтинга через боковую поверхность провода, имеющего сопротивление  $R$ .

**Ответ.**  $\Phi_S = RJ^2$ .