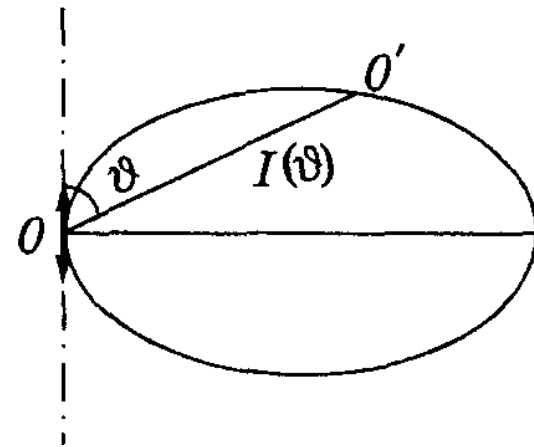
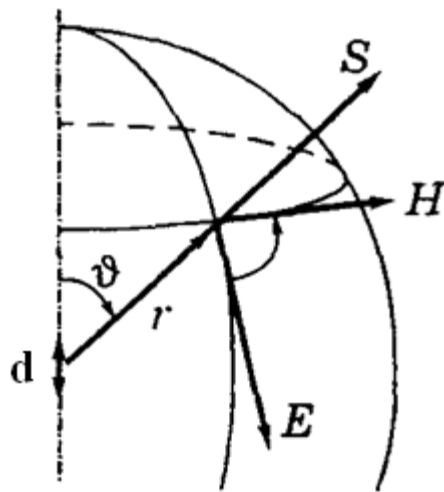
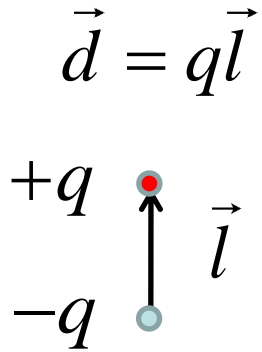


# Классическая теория излучения

## Поле диполя



$$E_m \propto H_m \propto \frac{1}{r} \sin \vartheta,$$

$$I = \langle S \rangle \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta.$$

Для атома водорода  $\mathbf{d} = q_e \mathbf{r}$   $r = r_0 \cos \omega t$

Средняя энергия, излучаемая в единицу времени по всем направлениям

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \langle \ddot{d}^2 \rangle}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{3c^3} r_0^2$$

# Квантовая теория излучения

## Принцип соответствия

Энергия, излучаемая  
в единицу времени

$$\hbar\omega P_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{3c^3} d^2 \quad \text{где}$$

$$P_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^3}{3\hbar c^3} d^2$$

Вероятность испускания фотона  
в единицу времени (спонтанный переход)

Для непрерывного распределения  
зарядов с плотностью  $\rho$   
(классическая физика)

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r}\rho(r)dV$$

Для непрерывного распределения  
зарядов (квантовая физика)

$$\mathbf{d} = \int \Psi^* q_e \mathbf{r} \Psi dV$$

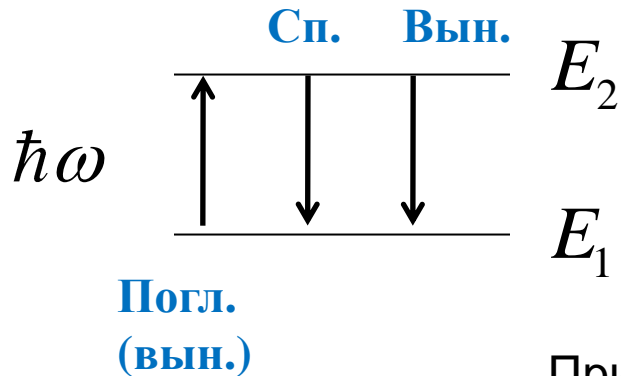
Вероятность перехода  
с уровня  $i$  на  $j$

$$P_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^3}{3\hbar c^3} d_{ij}^2 \quad \text{где}$$

матричный  
элемент

$$d_{ij} = \langle \Psi_i | \hat{d} | \Psi_j \rangle = \int \Psi_i^* \hat{d} \Psi_j dV$$

# Суперпозиция двух состояний



В стационарном состоянии  $\langle d \rangle$  не зависит от времени и атом не излучает.

При переходе из состояния 2 в состояние 1 атом находится в суперпозиции состояний

$$\psi(x, t) = C_1(t)\psi_1(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_1 t\right) + C_2(t)\psi_2(x, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_2 t\right)$$

Вероятность его обнаружить в первом или втором состоянии, зависит от времени и определяется квадратом модуля соответствующего коэффициента  $C(t)$ .

# Нестационарные состояния

суперпозиция двух состояний для частицы в яме

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_1(x) \exp(-\frac{i}{\hbar} E_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_2(x) \exp(-\frac{i}{\hbar} E_2 t)$$

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} |\varphi_1(x)|^2 + \frac{1}{2} |\varphi_2(x)|^2 + \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cos(\omega t)$$

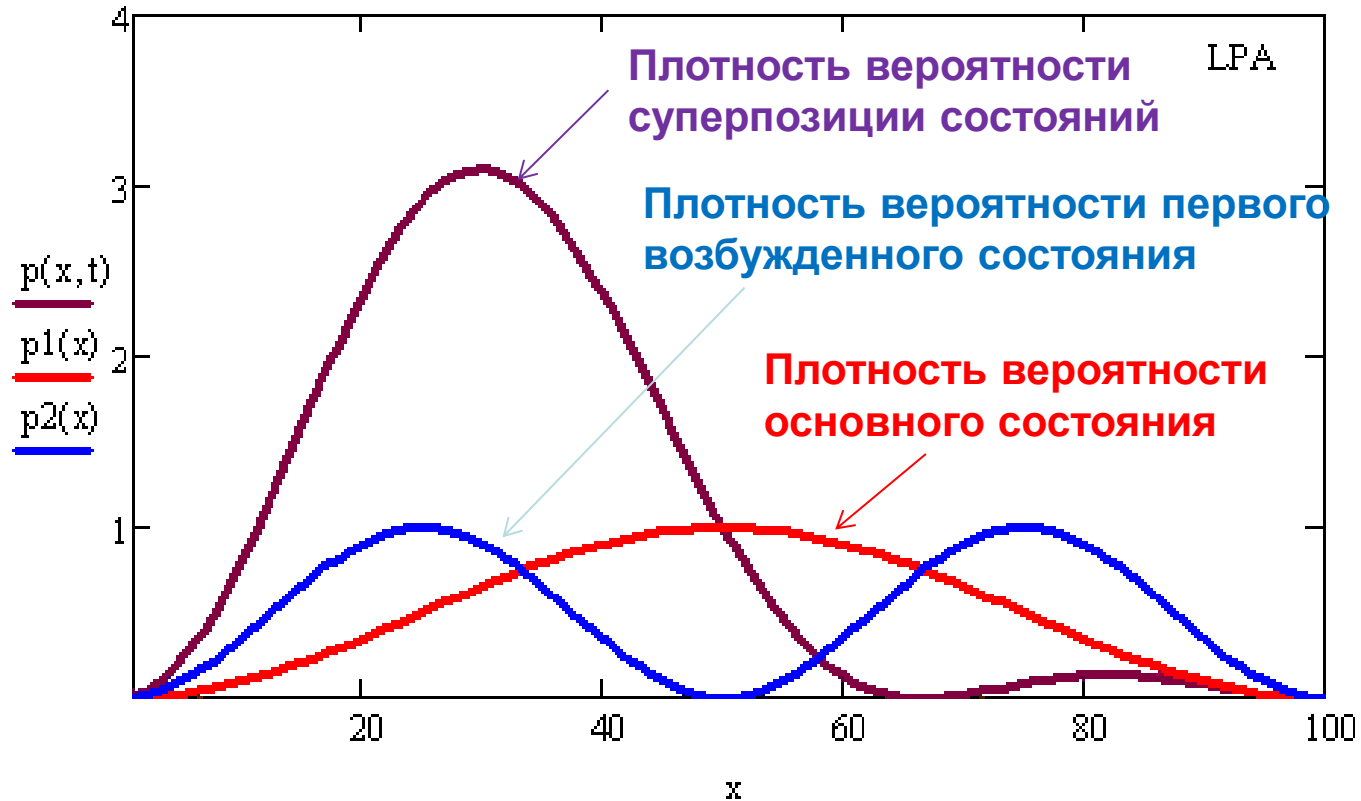
Плотность вероятности и  
среднее значение дипольного момента  
осциллируют с разностной частотой

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$\begin{aligned} \langle q_e x \rangle &= q_e \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ x \frac{1}{2} |\varphi_1(x)|^2 + x \frac{1}{2} |\varphi_2(x)|^2 + \varphi_1(x) x \varphi_2(x) \cos(\omega t) \right\} dx = \\ &= q_e \int_{-a/2}^{a/2} \varphi_1^*(x) x \varphi_2(x) \cos(\omega t) dx = \langle \varphi_1 | q_e x | \varphi_2 \rangle = q_e x_{12} - \text{матричный элемент } d_{12} \end{aligned}$$

Правило отбора для дипольных переходов ( $\mathbf{d} = q_e \langle \mathbf{x} \rangle$ ): (правило Лапорта)  
возможны переходы только между состояниями с разной четностью.

# Суперпозиция двух нижних состояний электрона в бесконечной яме



[Смотреть видео](#)

# Вынужденное излучение

В стационарном состоянии частица находится бесконечно долго. Для ее перехода в другое состояние (например, под действием электромагнитного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ ) в гамильтониан надо включить добавку, описывающую “возмущение”  $\hat{V}(t) = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E})$  и решать нестационарное уравнение Шредингера  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))\Psi$ , где  $H_0$  – гамильтониан атома в отсутствие электромагнитной волны.

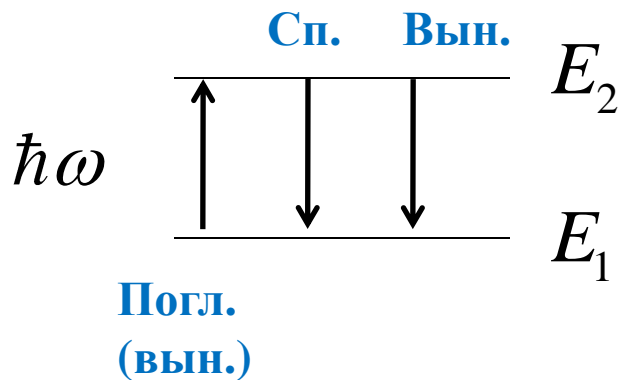
Таким образом в дипольном приближении вероятность вынужденного излучения с уровня  $E_2$  на уровень  $E_1$  будет зависеть от значения матричного элемента  $\mathbf{d}_{12} = e\mathbf{r}$  дипольного момента атома  $d_{12} = \langle \Psi_1 | e\mathbf{r} | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^*(r) e\mathbf{r} \Psi_2(r) dr$ . (1)

Если  $\mathbf{d}_{12} = 0$ , то излучение в дипольном приближении не возможно. Это не означает, что излучение не возможно вообще, однако вероятность таких переходов оказывается существенно более низкой. В атомной физике такие переходы принято называть *запрещенными*. Вычисление матричного элемента  $\mathbf{d}_{12}$  позволяет определить условия, при которых  $\mathbf{d}_{12} \neq 0$ , эти условия называются *правилами отбора*.

Кроме излучательных квантовых переходов, возможны безизлучательные переходы, при которых квантовая система отдает или получает энергию при взаимодействии с другими системами. Например, атомы или молекулы газа могут получать или терять энергию при столкновениях друг с другом, или со стенками сосуда. Если возможны как излучательные, так и безизлучательные переходы, то полная вероятность перехода равна сумме вероятностей переходов обоих типов.

# Взаимодействие двухуровневой системы с излучением

Типы радиационных переходов:  
Спонтанное и вынужденное излучение  
Эйнштейн (1916)



$N_{1,2}$  - число атомов на уровнях 1 и 2

$$N_i = \text{const} \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (1)$$

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \quad (2)$$

# Типы радиационных переходов

1) Спонтанное излучение: самопроизвольное испускание кв. света.

Число переходов в единицу времени  $\sim N_2$  :

$$\left( -\frac{\Delta N_2}{\Delta t} \right)^{\text{спонт}} = AN_2$$

$A$  - коэффициент Эйнштейна [ $\text{сек}^{-1}$ ] (вероятность перехода одного атома в ед. времени)



2) **Вынужденное поглощение:** атом поглощает квант света и переходит  $1 \longrightarrow 2$

Число переходов в единицу времени  $\sim N_1 \rho$  :

$$\left( -\frac{\Delta N_1}{\Delta t} \right)^{\text{вын}} = B_{12} \rho(\omega, T) N_1$$

$B_{12}$  - коэффициент Эйнштейна,

$\rho$  - спектральная плотность излучения [Дж/(м<sup>3</sup>сек<sup>-1</sup>)],

$B_{12} \rho$  - вероятность перехода одного атома в ед. времени в поле со спектральной плотностью  $\rho$ .

3) **Вынужденное излучение:** переход  $2 \longrightarrow 1$  происходит под действием резонансного кванта света и сопровождается *излучением точно такого же кванта*

$$\left( -\frac{\Delta N_2}{\Delta t} \right)^{\text{вын}} = B_{21} \rho(\omega, T) N_2$$

В ТД равновесии число переходов  $\downarrow = \uparrow$  :

$$\Delta N_{21}^{\text{спонт}} + \Delta N_{21}^{\text{вын}} = \Delta N_{12}^{\text{вын}}$$

$$\Rightarrow AN_2 + B_{21}\rho N_2 = B_{12}\rho N_1 \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует:

$$\rho = \frac{A / B_{21}}{(B_{12} / B_{21})N_1 / N_2 - 1} = \frac{A / B_{21}}{(B_{12} / B_{21})e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (4)$$

т.к.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_2}{kT}}} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

$$\rho = \frac{A_{21} / B_{21}}{(B_{12} / B_{21}) e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (4)$$

Найдем отношения коэффициентов Эйнштейна из предельных случаев.

Если

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{N_1}{N_2} \Big|_{T \rightarrow \infty} = 1$$

$$B_{12} = B_{21} = B \quad (5)$$

В классическом низкочастотном пределе ( $\hbar\omega \ll kT$ ) из (4),(5):

$$\rho = \frac{A kT}{B \hbar\omega} \quad (6)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  выполняется формула Рэля-Джинса

$$\rho = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad (7)$$

Тогда из (6), (7)

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (8)$$

Подставляя (5),(8) в (4):

$$\rho_{\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}$$

Формула Планка

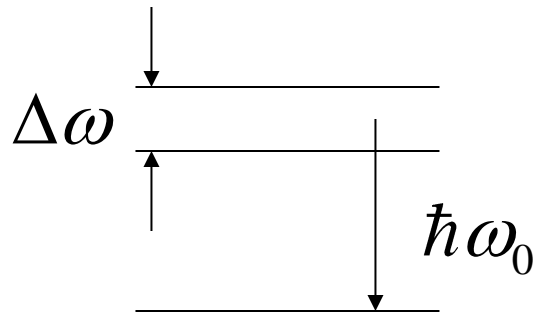
# Ширина спектральной линии

Соотношение неопределенности Гейзенберга

$$\Delta E \tau \sim \hbar \Rightarrow \Delta \omega \tau \sim 1$$

$\Delta E$  - неопределенность энергии состояния, или ширина энергетического уровня

$\Gamma_0 \equiv \Delta \omega \sim \frac{1}{\tau}$  - ширина спектральной линии

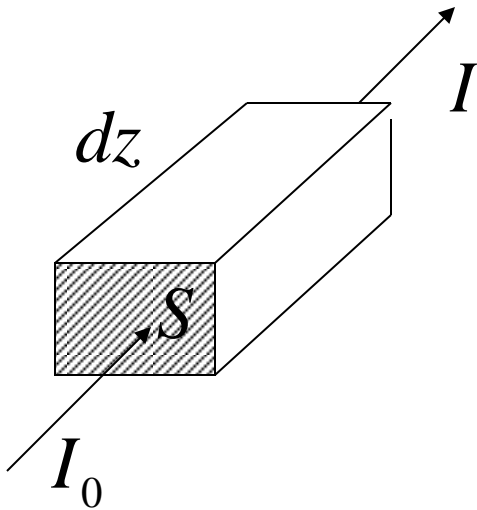


# Резонансное усиление света

Линейные коэффициенты поглощения и усиления среды.

Инверсная заселенность

Рассмотрим взаимодействие света с резонансной частотой  $\omega$  с системой двухуровневых атомов



$$dV = dzS$$

$n_{1,2}$  - концентрация атомов на нижнем (1) и верхнем (2) уровнях

$$n = n_1 + n_2$$

$dN_i = n_i dV$  - число атомов в объеме  $dV$  в  $i$ -ом состоянии

Испускаемая и поглощаемая мощность излучения в объеме  $dV$ :

$$dP_{21}^{cn} = \hbar \omega A dN_2,$$

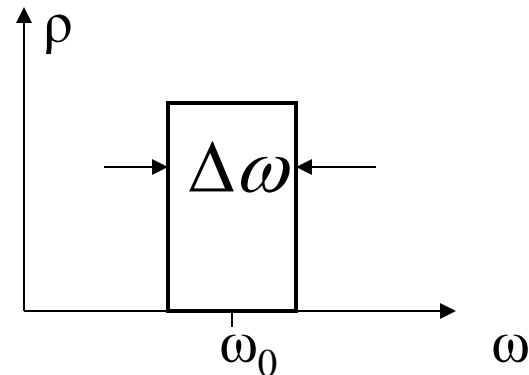
$$dP_{21}^{бвн} = \hbar \omega B \rho dN_2,$$

$$dP_{12}^{бвн} = \hbar \omega B \rho dN_1.$$

Полная мощность, излучаемая/поглощаемая в объеме  $dV$ :

$$dP = dP_{21}^{cn} + dP_{21}^{бвн} - dP_{12}^{бвн}$$

Пусть  $\rho$  имеет вид:



Найдем связь  $\rho$  с интенсивностью  $I$ .

Энергия, прошедшая через  $S$  за время  $\Delta t$  :

$$I \Delta t S$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{I \Delta t S}{\Delta V \Delta \omega} \stackrel{|\Delta V = c \Delta t S|}{=} \frac{I}{c \Delta \omega}$$

Подставляем в выражение для мощности

$$dP = \left[ A n_2 + B(n_2 - n_1) \frac{I}{c \Delta \omega} \right] \hbar \omega S dz$$

Пусть  $I_0$  достаточно велико, чтобы пренебречь спонтанным излучением, тогда



$$\frac{dP}{S} = dI = B(n_2 - n_1) \frac{I}{c\Delta\omega} \hbar\omega dz,$$

$$dI = -\alpha I dz,$$

$$\alpha = -B(n_2 - n_1) \frac{\hbar\omega}{c\Delta\omega}$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

- закон Бугера

В ТД равновесии

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \quad \frac{\hbar\omega}{kT} \sim \frac{10^{-34} 10^{15}}{10^{-23} 10^2} = \frac{10^{-19}}{10^{-21}} = 10^2$$

$$\Rightarrow n_2 \ll n_1$$

$$\Rightarrow \alpha = -B\Delta n \frac{\hbar\omega}{kT} > 0 \text{ - коэффициент поглощения}$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad \text{- закон Бугера}$$

Если  $n_2 > n_1$  - инверсная населенность уровней

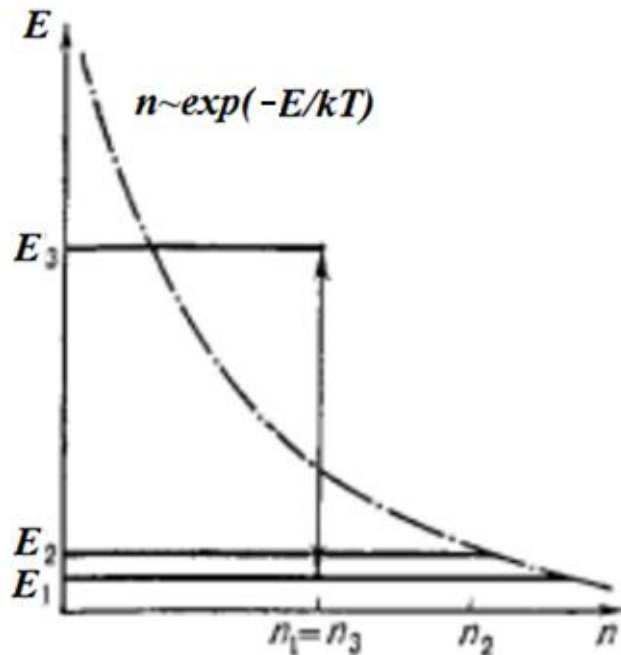
$$\Rightarrow \boxed{\alpha < 0} \text{ - коэффициент усиления света в инвертированной среде}$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

# Лазеры. Резонатор. Стационарная генерация. Моды резонатора

- МАЗЕР (MASER – microwave amplification by stimulated emission of radiation)
- Басов, Прохоров, Таунс (1954, см диапазон)
- ЛАЗЕР (LASER – light amplification by stimulated emission of radiation)
- Мейман рубиновый лазер (1960, 694 нм)

## Лазеры. Трехуровневая схема.

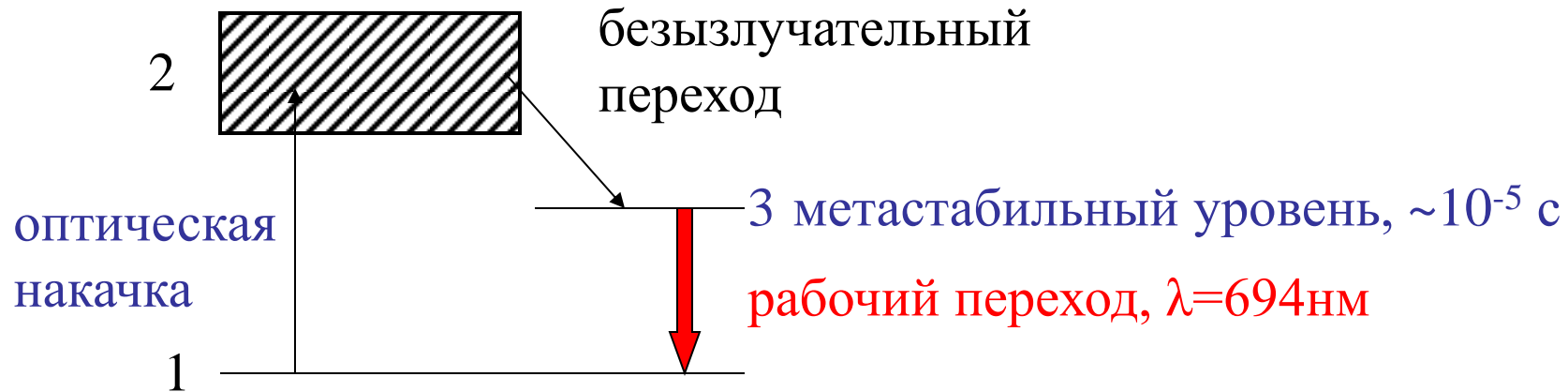


Для двухуровневой системы во внешнем поле достаточно высокой интенсивности (накачка) населенности уровней будут выравниваться до тех пор, пока они почти не сравняются между собой (эффект насыщения). При этом среда становится практически прозрачной и усиление невозможно.

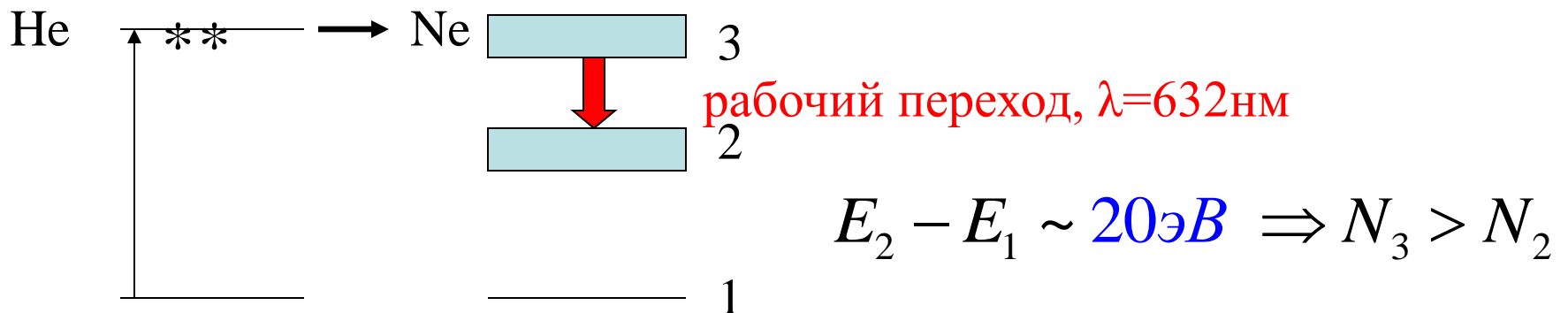
Поэтому используют *метод трёх уровней*, в котором накачка (показана стрелкой), уравнивает населённости уровней  $E_1$  и  $E_3$ , создавая инверсию населённостей уровня  $E_2$  по отношению к уровню  $E_1$ . Сплошными линиями показаны равновесные населенности уровней, соответствующие распределению Больцмана (штрихпунктирная кривая).

# Получение инверсной заселенности с помощью трехуровневой схемы

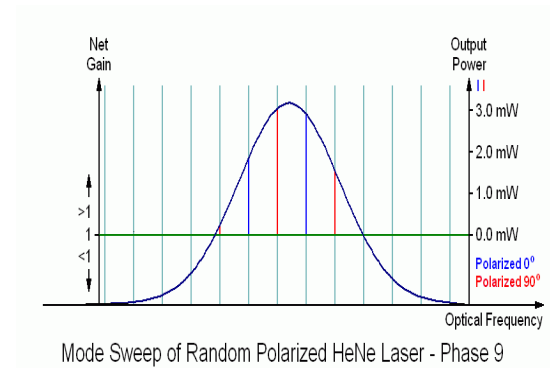
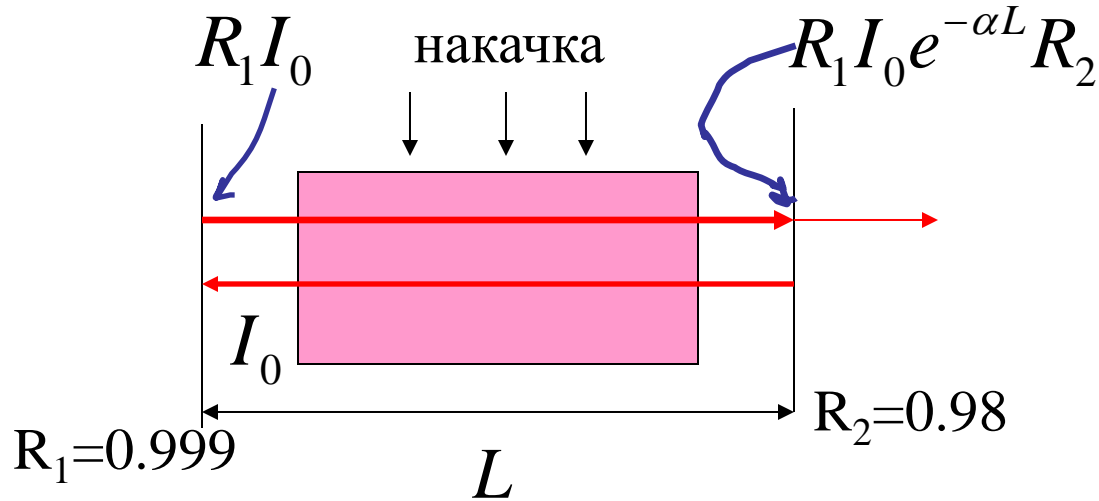
Рубин  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{Cr}^{3+}$  (0,05%)



He-Ne газовая смесь. Возбуждение He в электрическом разряде.



# Лазеры. Резонатор. Условия генерации. Моды резонатора



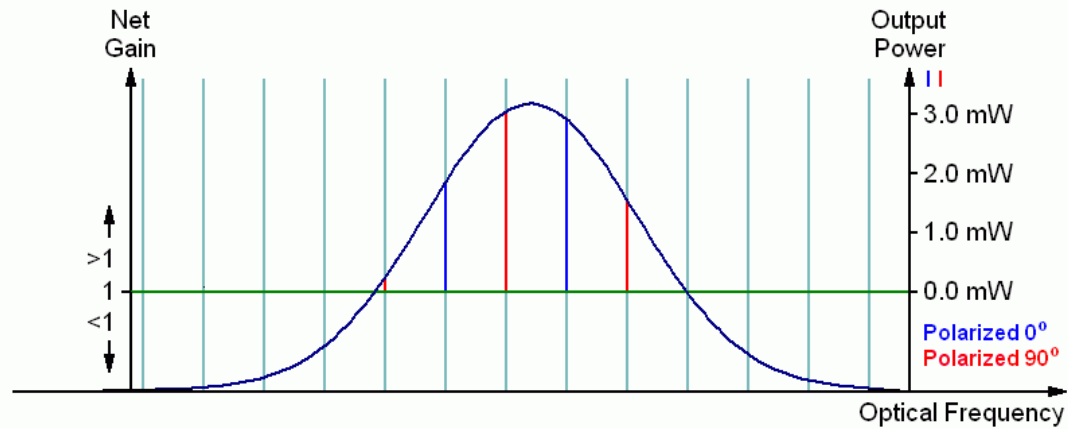
Спектр He-Ne лазера

$$R_1 R_2 I_0 e^{-\alpha L} \geq I_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 R_2 e^{-\alpha L} \geq 1} \quad - \text{условие генерации}$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad - \text{фазовое условие генерации}$$

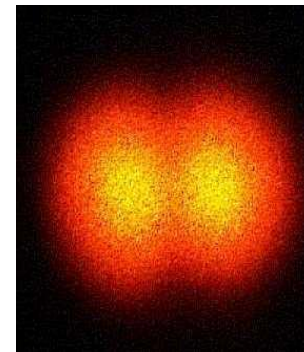
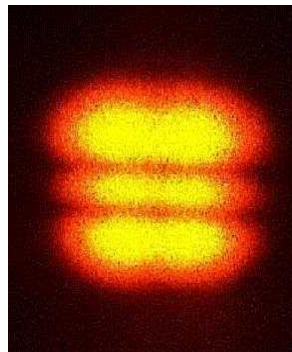
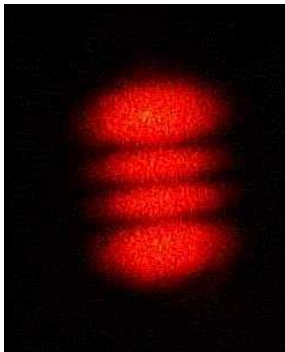
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{2L} \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{\pi c}{L}}$$

# Моды резонатора



Mode Sweep of Random Polarized HeNe Laser - Phase 9

• продольные моды He-Ne лазера



• поперечные моды He-Ne лазера