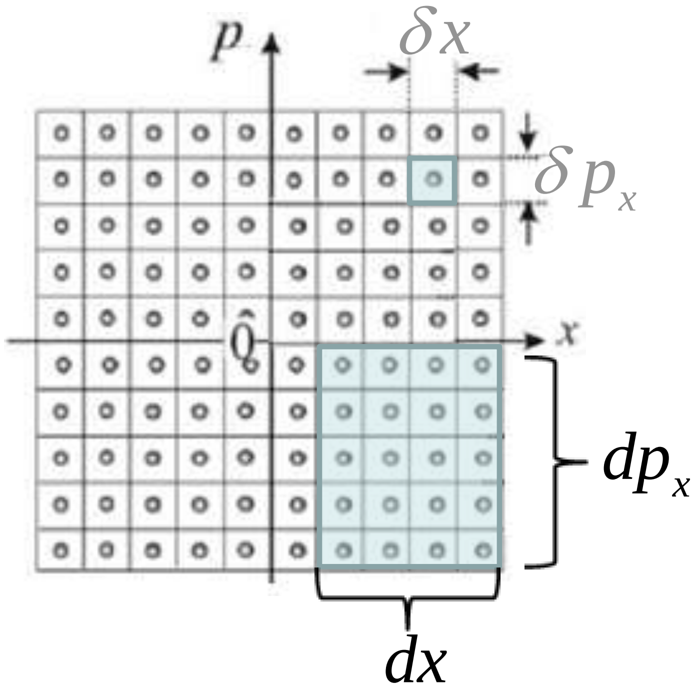
Фазовое пространство

В фазовом пространстве с координатами (x, y, z, p_x, p_y, p_z)
квантовому состоянию частицы соответствует фазовая ячейка объемом

$$\delta\Phi = \delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z = h^3 = (2\pi\hbar)^3$$



Число квантовых состояний dZ
в объеме фазового пространства

$$d\Phi = dxdydzdp_x dp_y dp_z$$

$$dZ = (2S+1)\frac{dxdydzdp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$$

$2S+1$ – *кратность вырождения по спину*

Число частиц с энергией E_i

$$dN = \langle n_i \rangle dZ$$

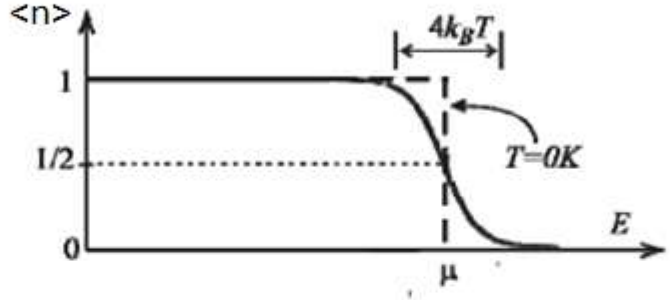
где $\langle n_i \rangle$ **среднее число частиц в ячейке с энергией** E_i

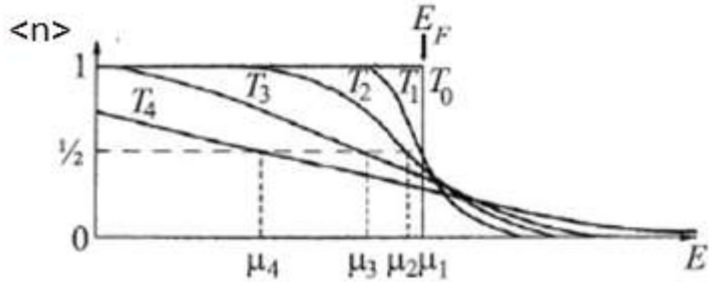
Распределения Ферми-Дирака

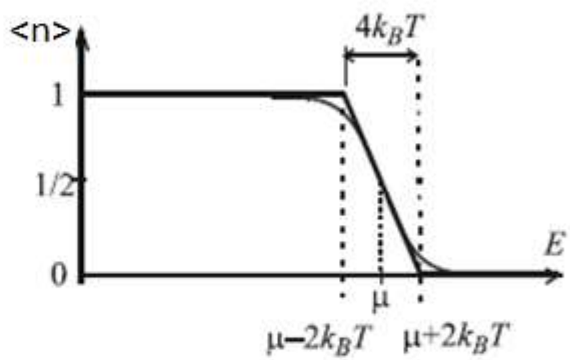
$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT}+1}$$

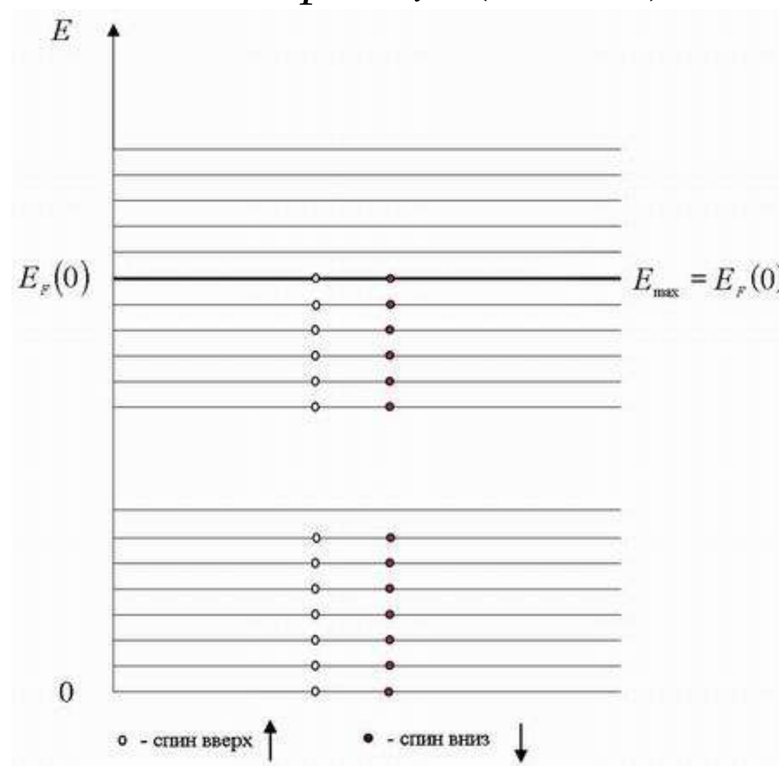
$$\langle n_i(E=\mu) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$E_F = \mu(T=0)$$









μ - **химический потенциал находится из условия нормировки:**

$$\int dN(E) = N$$ **где** N **- полное число частиц**

(берем интеграл , т.к. уровни E_i **распределены квазинепрерывно)**

Или: $$\int \frac{dN}{N} = \int \frac{dN}{NdE} dE = \int F(E) dE = 1$$ **где**

$F(E)$ **– функция плотности вероятности распределения частиц по энергиям**

Квантовые распределения переходят в классические при малых числах заполнения

$$\langle n_i \rangle << 1 \quad \Rightarrow \quad e^{(E_i - \mu)/kT} >> 1 \Rightarrow$$

$$\langle n_i \rangle \approx \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT}} = Ae^{-E_i/kT} \qquad A = e^{\mu_i/kT}$$

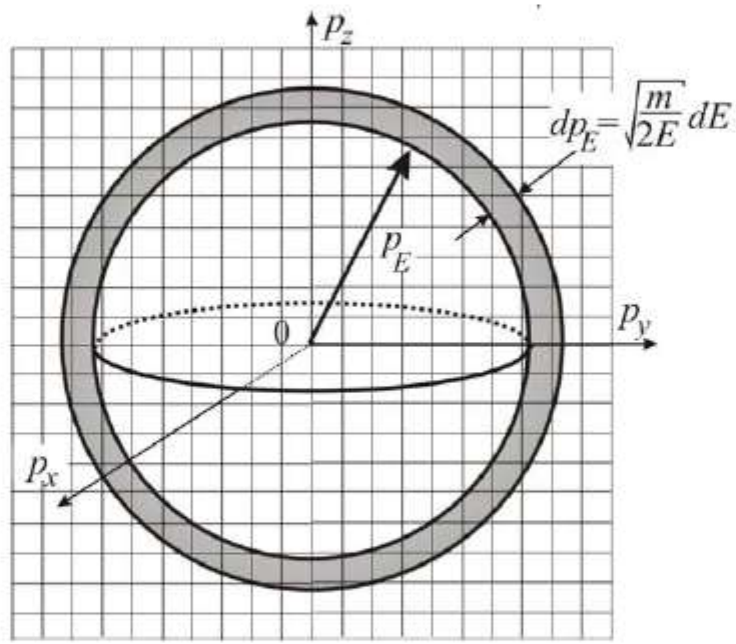
Плотность квантовых состояний

Число квантовых состояний с энергией от *E* до *E+dE* (в единице объема *dV=dxdydz=1*)

$$dZ = (2S+1)\frac{4\pi}{h^3}p^2dp$$

Число частиц с энергией от *E* до *E+dE*

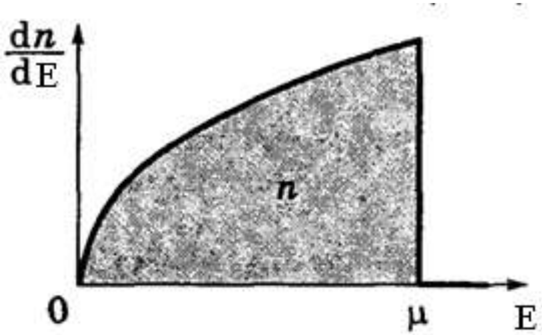
$$dn = \langle n_i \rangle dZ = \langle n_i \rangle \frac{dZ}{dE}dE = F(E)dE$$



Для электронного газа $S = 1/2$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dp = \sqrt{\frac{m}{2E}}dE$$

$$dn = \langle n_i \rangle dZ \qquad dn = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{E}dE$$



$$\boxed{n = \int_0^{E_F} dn \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}$$

$$\boxed{F(E) \sim \sqrt{E}}$$

Оценки энергии Ферми и средней энергии при T=0

$$\boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}} \qquad n = 5\cdot 10^{22}\,см^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad E_F = 5эВ$$

$$< E >= \frac{\int_0^{E_F} EF(E)dE}{\int_0^{E_F} F(E)dE} = \frac{3}{5}E_F = 3эВ$$

Классический газ $\quad < E >= \frac{3}{2}kT = 3эВ$

$T \sim 4\cdot 10^4\ K >>$ температуры плавления металла $\sim 10^3\ K$

Оценки скорости Ферми и длины волны электрона при T=0

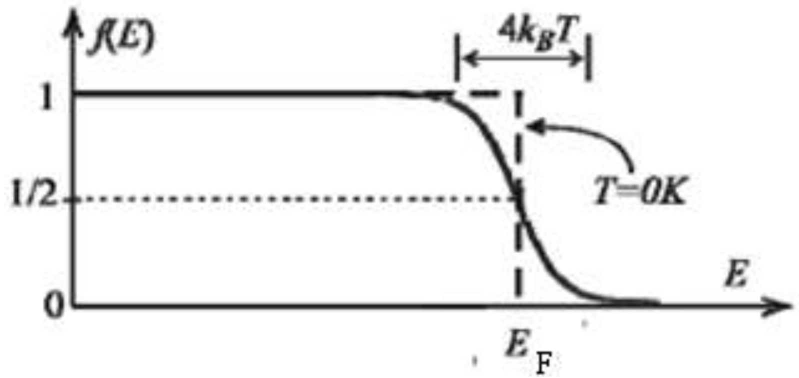
$$v_{\max} \equiv v_F = \sqrt{2E_F / m} =$$

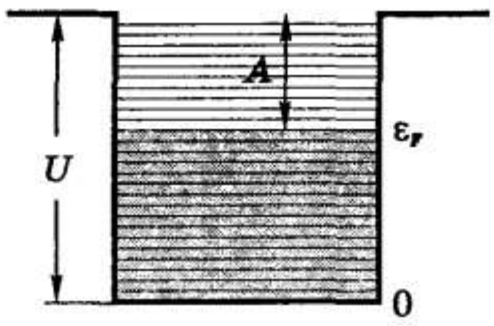
$$= 1.3 \cdot 10^3 \, км / сек \neq 0$$

$$\hbar k_F = p_F , \quad \hbar \frac{2\pi}{\lambda_F} = v_F m \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_F = \frac{h}{v_F m} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \, Дж \cdot c}{1.3 \cdot 10^6 (м / c) 0.9 \cdot 10^{-30} \, кг} = 5.5 \cdot 10^{-10} \, м = 5.5 A^0$$

Распределение электронов при $T \neq 0$





$$E_F \sim 5эВ >> kT = 0.025эВ$$

- Электронный *газ сильно вырожден* при любых температурах
- Только *электроны в области* $\sim kT$ (вблизи поверхности Ферми) могут перераспределяться при различных физических процессах

Теплоемкость электронного газа

при $T \geq 3\,^0K$

Теплоемкость только решеточная (формула Дюлонга и Пти)

$$U = 3N_A kT \qquad C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R$$

Почему нет вклада электронов в теплоемкость ТТ?

$kT << |E_i - E_F|$ глубокие заполненные уровни вырожденных электронов

$E_i \sim E_F$ энергии «подвижных» электронов вблизи поверхности Ферми

Доля электронов вблизи поверхности Ферми

$$\approx \frac{4\pi p_F^2 dp_F}{(4/3)\pi p_F^3} = 3\frac{dp_F}{p_F}$$

$$E_F = p_F^2 / 2m, \quad dE_F \approx 2kT$$

$$3\frac{dp_F}{p_F} = 3\frac{1}{2}\frac{dE_F}{E_F} \approx 3\frac{kT}{E_F}$$

При $T = 300\ {}^0K \quad 3kT / E_F \sim 10^{-2}$

Оценка теплоемкости электронного газа

$\frac{3}{2}k$ - теплоемкость, приходящаяся на один «подвижный» электрон

$N_A \cdot 3kT / E_F$ - число таких электронов в моле

Молярная теплоемкость электронов:

$$\boxed{C_{эл} \approx \frac{9}{2}\frac{kT}{E_F}R \sim T}$$

$$T = 300K \Rightarrow C_{эл} \approx \frac{9}{2}\frac{kT}{E_F}R \approx 0.025R \ll 3R$$