

## Задачи к экзамену по курсу «Введение в квантовую физику» 2016 год

**Задача 1.** Исходя из формулы Планка для спектральной плотности  $\rho_\omega(T)$ , получить выражение для спектральной плотности  $\rho_\lambda(T)$ .

**Задача 2.** Оценить число фотонов равновесного электромагнитного излучения  $n$  в единице объема при комнатной температуре.

**Задача 3.** Считая, Солнце и Землю абсолютно черными телами, находящимися в состоянии теплового равновесия, оценить температуру Земли  $T_1$ . Средний радиус земной орбиты  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  м, температура на поверхности Солнца  $T = 6000$  К, радиус Солнца  $R = 7 \cdot 10^8$  м.

**Задача 4.** Свет в виде плоской волны, имеющей интенсивность  $I$ , падает из вакуума на отражающий шар. Коэффициент отражения по энергии равен  $R$ . Радиус шара  $r$ . Определить силу  $F$  светового давления на шар.

**Задача 5.** Найдите угол отдачи  $\phi$  электрона в экспериментах Комптона, считая известными энергию падающего фотона  $\hbar\omega_0$  и угол рассеяния  $\theta$ .

**Задача 6.** При аннигиляции нерелятивистской электрон-позитронной пары образовалось два фотона. Определить направления их вылета и длины волн.

**Задача 7.** При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в  $\eta = 1,5$  раза длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на  $\Delta\lambda = 26$  пм. Найти первоначальное напряжение на трубке.

**Задача 8.** Свободная частица массы  $m$  движется со скоростью  $v$ . Найти фазовую и групповую скорость волнового пакета, характеризующего эту частицу. Рассмотреть релятивистский и нерелятивистский случай.

**Задача 9.** Ширина волнового пакета, описывающего свободный нерелятивистский электрон, увеличилась в  $n = 10$  раз за время  $\tau \approx 10^{-15}$  секунды. Используя соотношение неопределенностей, найти начальную ширину волнового пакета.

**Задача 10.** Параллельный пучок электронов, движущихся со скоростью  $v = 1,5 \cdot 10^6$  м/с, через коллиматорную щель падает нормально на экран, расположенный на расстоянии  $L = 0,1$  м от щели. Определить ширину щели  $d$ , при которой ширина её изображения на экране будет минимальной.

**Задача 11.** Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $U = 500$  кВ, попадает на тонкую поликристаллическую фольгу. На экране, отстоящем на  $L = 20$  см от фольги, наблюдается дифракционная картина в виде колец. Определить период решетки в материале фольги, если известно, что радиус первого кольца равен  $r_1 = 0,8$  мм.

**Задача 12.** Считая атом водорода гармоническим осциллятором с частотой  $\omega_0$  (модель Томсона), определить частоты  $\omega$  излучения атома во внешнем однородном стационарном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Считать, что магнитное поле слабое  $|q_e|B \ll m\omega_0$ .

**Задача 13.** Найдите минимальное расстояние  $r_{\min}$ , на которое может приблизиться  $\alpha$ -частица  ${}^4_2\text{He}^{++}$  с кинетической энергией  $T_\alpha = 6$  МэВ при лобовом столкновении с ядром золота  ${}^{197}_{79}\text{Au}$ .

**Задача 14.** Считая электрон релятивистским, вычислить в рамках теории Бора радиусы  $r_n$  круговых орбит электрона, его скорости  $v_n$ , энергии  $E_n$  водородоподобного иона. Массу ядра считать бесконечно большой.

**Задача 15.** Найдите разность длин волн  $\Delta\lambda$  между головными линиями серии Бальмера для водорода и дейтерия.

**Задача 16.** Найти собственные значения и собственные функции операторов координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}_x$ .

**Задача 17.** Пусть волновая функция частицы в некоторый момент времени имеет в сферических координатах вид  $\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r, \theta) \cos^3(2\varphi)$ . Какие значения проекции момента импульса  $L_z$  частицы могут быть измерены, и с какой вероятностью? Чему равно среднее значение  $\langle L_z \rangle$ ?

**Задача 18.** Вычислить коммутатор оператора момента импульса  $\hat{L}$  и оператора кинетической энергии  $\hat{T}$ .

**Задача 19.** Волновая функция частицы в некоторый момент времени имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{L}{2}\right] \cup \left[\frac{L}{2}, \infty\right) \end{cases}. \text{ Найти волновую функцию частицы в импульсном}$$

представлении  $\psi(p)$  в тот же момент времени.

**Задача 20.** Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид

$$\psi(r) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right), \text{ где } a_B \text{ – боровский радиус, } r \text{ – расстояние между электроном и}$$

протоном. Найти произведение среднеквадратичных отклонений  $\delta p \delta r$ .

**Задача 21.** Рассмотрим нерелятивистскую частицу массы  $m$  в прямоугольной потенциальной яме ширины  $L$  с бесконечно высокими стенками. Известно, что частица находится в основном состоянии. Найти волновую функцию частицы в импульсном представлении  $\psi(p)$  и плотность вероятности  $\rho(p)$ .

**Задача 22.** Нерелятивистская частица массы  $m$  находится в прямоугольной потенциальной яме ширины  $L$  с бесконечно высокими стенками. Известно, что частица находится в нестационарном состоянии, описываемом волновой функцией

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_1 t\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \psi_2(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_2 t\right), \text{ где } \psi_1(x) \text{ и } \psi_2(x) \text{ – волновые функции}$$

стационарных состояний, а  $E_1$  и  $E_2$  – энергии частицы в этих состояниях. Найти среднее значения энергии  $\bar{E}$  и координаты  $\bar{x}$  частицы.

**Задача 23.** Частица массы  $m$  в одномерной прямоугольной яме конечной глубины с одной бесконечно высокой стенкой занимает единственный слабосвязанный уровень. Среднее значение координаты частицы  $\bar{x} = \alpha L$  много больше ширины ямы  $L$  ( $\alpha \gg 1$ ). Оцените энергию связи частицы  $E_{\text{св}}$ .

**Задача 24.** Найти волновую функцию  $\psi_0(p)$  основного состояния гармонического осциллятора в импульсном представлении.

**Задача 25.** Частица массы  $m$  находится в двумерном потенциале  $U(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ . Найти уровни энергии  $E$  частицы и кратности их вырождения  $g$ .

**Задача 26.** Нерелятивистская частица массы  $m$  находится в потенциале  $U(x) = A\delta(x)$ , где  $A = \text{const} < 0$ . Найти среднее значение её координаты  $\bar{x}$  и дисперсию  $D_x$ .

**Задача 27.** Свободная нерелятивистская частица массы  $m$  с энергией  $E$  движется из минус бесконечности в положительном направлении оси  $x$ . В точке  $x=0$  потенциальная энергия частицы скачком увеличивается на величину  $U_0$ . Вычислить коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $T$  частицы.

**Задача 28.** Свободная нерелятивистская частица массы  $m$  с энергией  $E$  движется из минус бесконечности в положительном направлении оси  $x$ . В точке  $x=0$  потенциальная энергия частицы скачком увеличивается на величину  $U = E$ , а в точке  $x=L > 0$  спадает до значения  $U = U_0 < E$ . Вычислить коэффициенты прохождения  $T$  и отражения  $R$  частицы.

**Задача 29.** Свободная нерелятивистская частица массы  $m$  с энергией  $E > 0$  движется из минус бесконечности в положительном направлении оси  $x$ . Найти вероятность туннелирования  $T$  через потенциальный барьер  $U(x) = A\delta(x)$ , где  $A = \text{const} > 0$ .

**Задача 30.** Найти коэффициент прохождения нерелятивистской частицы массы  $m$  через треугольный потенциальный барьер, высота которого  $V_0$ , а ширина основания  $a$ . Энергия частицы  $0 < E \ll V_0$ . Вычислить только экспоненциальный множитель.

**Задача 31.** Определить коэффициент прохождения  $T$  нерелятивистской частицы массы  $m$  через потенциальный барьер  $U(x) = U_0 - \alpha x^2$  ( $0 < E \ll U_0$ ). Вычислить только экспоненциальный множитель.

**Задача 32.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора проекции спина  $\hat{s}_z$ .

**Задача 33.** Найти расщепление  $\Delta E$  уровней энергии свободного электрона в однородном стационарном магнитном поле  $B$ .

**Задача 34.** Свободный электрон находится в однородном стационарном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направление которого не совпадает с направлением оси  $z$ :  $\mathbf{B} = \{B \cos \varphi \sin \theta, B \sin \varphi \sin \theta, B \cos \theta\}$ .

Найти амплитуды вероятности обнаружения электрона в состояниях  $\chi^\pm$ .

**Задача 35.** Свободный электрон находится в однородном стационарном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направление которого совпадает с направлением оси  $z$ :  $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ . В начальный момент времени  $t = 0$  спин электрона направлен по направлению оси  $x$ , т.е. проекция спина на ось  $x$  равна  $\hbar/2$ . Какова вероятность  $P_{+x}(t)$  обнаружения электрона со спином направленным по направлению оси  $x$  в момент времени  $t$ ?

**Задача 36.** Концентрация свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n$ . Найти энергию  $\varepsilon_F$  и импульс  $p_F$  Ферми электронного газа, а также его среднюю кинетическую энергию  $\bar{E}$  при нулевой температуре ( $T = 0$  К).

**Задача 37.** Концентрация свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n$ . Найти зависимость химического потенциала  $\mu$  от температуры при  $kT \ll \varepsilon_F$ .

**Задача 38.** Концентрация свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n$ . Найти зависимость молярной теплоемкости  $C_V$  электронного газа от температуры при  $kT \ll \varepsilon_F$ .

**Задача 39.** Концентрация свободного нерелятивистского (неполяризованного) газа бозонов массы  $m > 0$  со спином  $s$  равна  $n$ . Найти температуру  $T_0$  конденсации Бозе-Эйнштейна и концентрацию  $n_0$  конденсата.

**Задача 40.** Получить формулу Планка для спектральной плотности энергии  $\rho_\omega(T)$  исходя из распределения Бозе-Эйнштейна.

**Задача 41.** Поверхностная концентрация свободного двумерного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n_2$ . Найти энергию  $\varepsilon_F^{(2D)}$  и импульс  $p_F^{(2D)}$  Ферми электронного газа, а также его среднюю кинетическую энергию  $\bar{E}^{(2D)}$  при нулевой температуре ( $T = 0$  К).

**Задача 42.** Оценить температуру Дебая  $T_D$  для акустических фононов одной поляризации, если известна скорость звука  $c_{зв}$  в кристалле и концентрация атомов  $n$ . Оценить температуру Дебая для свинца, если известно, что плотность свинца  $\rho = 11.3$  г/см<sup>3</sup>, молярная масса  $M = 207.2$  г/моль, скорость звука  $c_{зв} = 1320$  м/с.

**Задача 43.** Найти теплоемкость  $C_V$  кристалла, считая, что фононы имеют линейный закон дисперсии  $\omega = c_{зв}k$ . Рассмотреть случай малых температур  $T \ll T_D$ .

**Задача 44.** Найти среднюю энергию  $\bar{E}_0$  нулевых колебаний кристаллической решетки, приходящуюся на один атом кристалла, считая, что фононы имеют линейный закон дисперсии  $\omega = c_{зв} k$ .

**Задача 45.** Оценить температуру Дебая  $T_D$  двумерного кристалла, считая закон дисперсии фононов в кристалле линейным. Известна скорость звука  $c_{зв}$  в кристалле и поверхностная концентрация атомов  $n$ .

**Задача 46.** Получить выражение, определяющее зависимость теплоемкости одномерного кристалла от температуры, если дебаевская температура кристалла равна  $T_D$ .

**Задача 47.** Закон дисперсии электрона в одномерном кристалле имеет вид  $E(p) = 2A \left[ 1 - \cos\left(\frac{pa}{\hbar}\right) \right]$ . Считая, что на один атом одномерного кристалла приходится в среднем

один электрон проводимости, найти скорость Ферми электронов проводимости.

**Задача 48.** Закон дисперсии электрона в одномерном металле  $E(k) = 2A [1 - \cos(ka)]$ . Металл находится в постоянном однородном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{\epsilon} = \epsilon \mathbf{e}_x$ , направленной вдоль оси металла. Найти закон движения электрона, импульс которого в момент времени  $t_0$  равен нулю. Процессы рассеяния электронов не учитывать.

**Задача 49.** Рассмотрим ферромагнитный кристалл с простой кубической решеткой (постоянная решетки  $a$ ). Будем считать, что спин каждого атома  $s = 1/2$  и энергия взаимодействия атомов друг с другом описывается гамильтонианом Гейзенберга с  $J > 0$ . Тогда в длинноволновом приближении  $ka \ll 1$  закон дисперсии магнонов будет иметь вид  $\omega \approx \frac{Ja^2}{\hbar} k^2$ . Найти относительное

уменьшение намагниченности кристалла  $|\Delta M|/M_0$  при низких температурах  $k_B T \ll \hbar \omega_{\max}$ , где  $\hbar \omega_{\max}$  – максимально возможная энергия магнона в кристалле, а  $M_0$  – намагниченность кристалла при  $T = 0$  К.

**Задача 50.** Рассмотрим ферромагнитный кристалл с простой кубической решеткой (постоянная решетки  $a$ ). Будем считать, что спин каждого атома  $s = 1/2$  и энергия взаимодействия атомов друг с другом описывается гамильтонианом Гейзенберга с  $J > 0$ . Тогда в длинноволновом приближении  $ka \ll 1$  закон дисперсии магнонов будет иметь вид  $\omega \approx \frac{Ja^2}{\hbar} k^2$ . Найти вклад магнонов в теплоемкость  $C_V$  при низкой температуре  $k_B T \ll \hbar \omega_{\max}$ .