Здесь представлены слайды, которые показывались на лекциях по курсу «*Введение в квантовую физику*». Представленные на слайдах материал не является исчерпывающим и не отражает полного содержания курса! Поэтому данные слайды не могут являться основой для подготовки к экзамену!!! На слайдах могут быть опечатки, будьте внимательны.

Список литературы (часть 1 и 2):

- Вихман Э. Квантовая физика. (Берклеевский курс физики, т.4.) М: Наука. 1974.
- Иродов И.Е. Квантовая физика. Основные законы. М: Бином, 2004. 256 с.
- Матвеев А.Н. Атомная физика. М: Высшая школа, 1989. 439 с.
- Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике, т.8, М: Мир, 1967. 272 с.
- Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике, т.9, М: Мир 1967. 260 с.

Излучение абсолютно черного тела

Формула Планка:

$$\rho_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1} \qquad \rho_\lambda(T) = \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)-1}$$

Постоянная Планка: $\hbar = 1{,}054\cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с

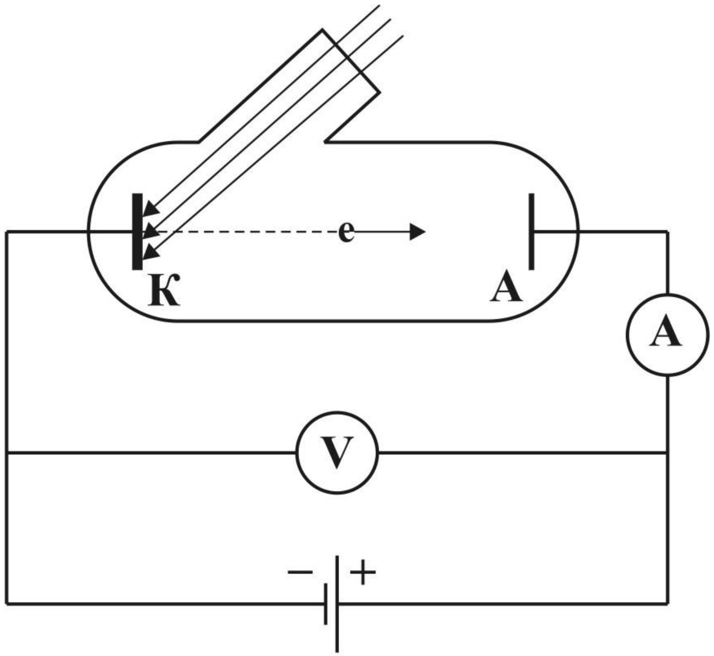
Закон смещения Вина:

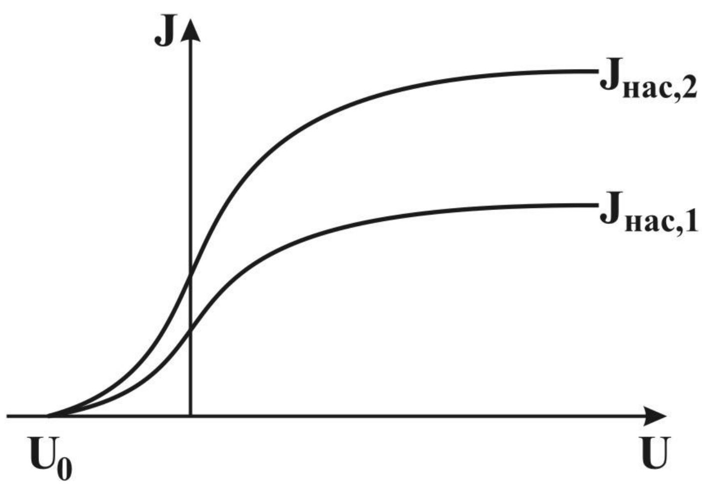
$$\lambda_{\max} T = b = 0.2014\frac{2\pi\hbar c}{k} = 2{,}897\cdot 10^{-3}\ \text{м}\cdot K$$

Закон Стефана-Больцмана:

$$\rho = \alpha T^4 \qquad \alpha = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} = 7{,}57\cdot 10^{-16}\ \text{Дж}\cdot\text{м}^{-3}\cdot\text{К}^{-4}$$

Внешний фотоэффект





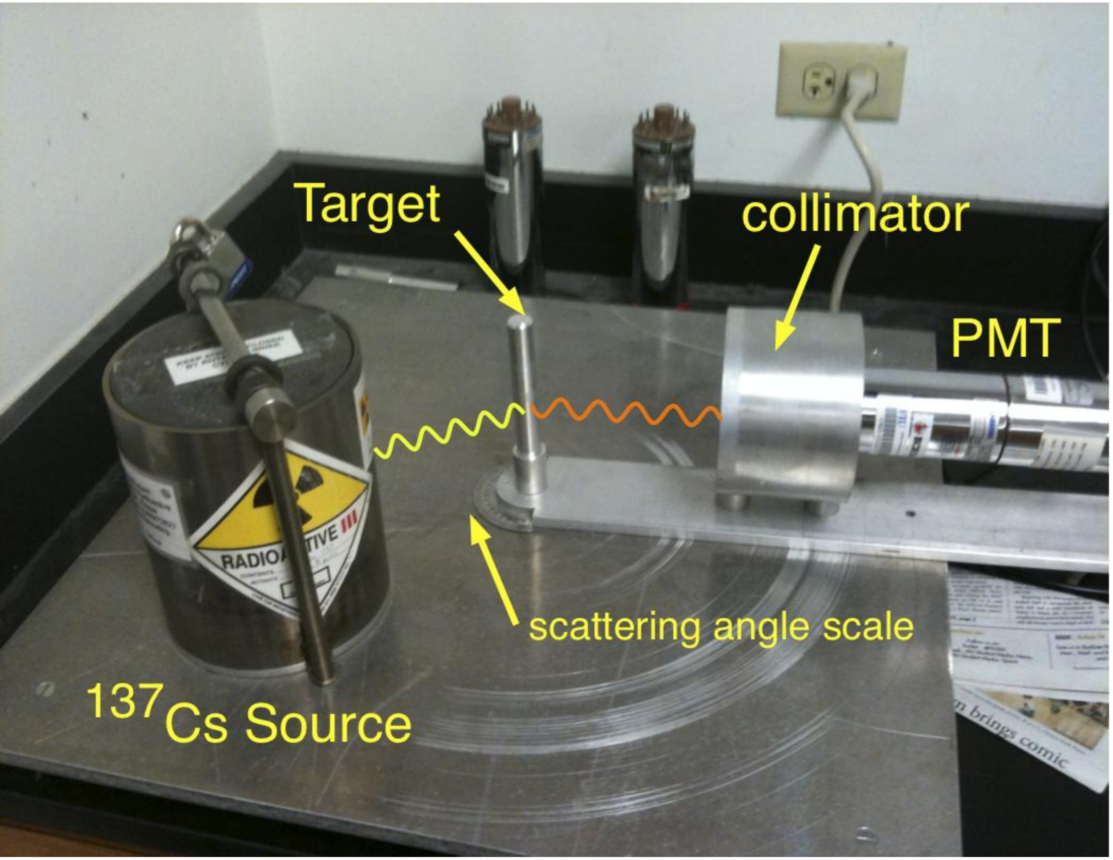
Законы фотоэффекта:

1. Существует граничная частота света, ниже которой для данного материала катода фотоэффект отсутствует, независимо от интенсивности падающего света и продолжительности облучения катода.
2. Электроны покидают поверхность катода с кинетическими энергиями от нуля до максимальной энергии , которая не зависит от интенсивности падающего света и линейно зависит от частоты.
3. При фиксированной частоте излучения фототок насыщения прямо пропорционален интенсивности падающего света.

Формула Эйнштейна:

$$\hbar\omega = T_{\max} + A_{вых}$$

Эффект Комптона



Если электрон покоится:

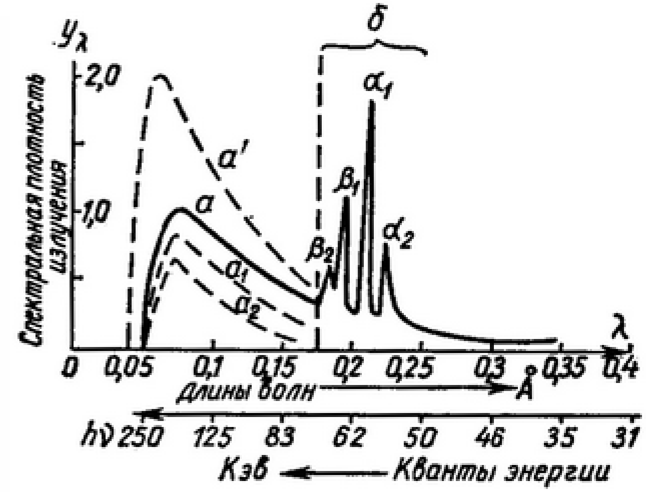
$$\Delta\lambda = \lambda_K \left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\lambda_K = \frac{h}{mc} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Если электрон движется:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{\left(p_{e0} + \dfrac{h}{\lambda_0}\right)c}{\sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(p_{e0}c\right)^2} - p_{e0}c} \left(1 - \cos\theta\right)$$

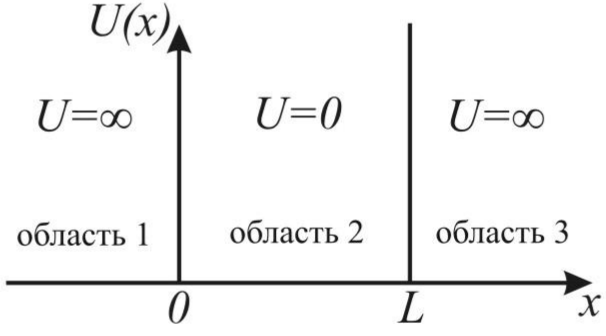
Тормозное рентгеновское излучение



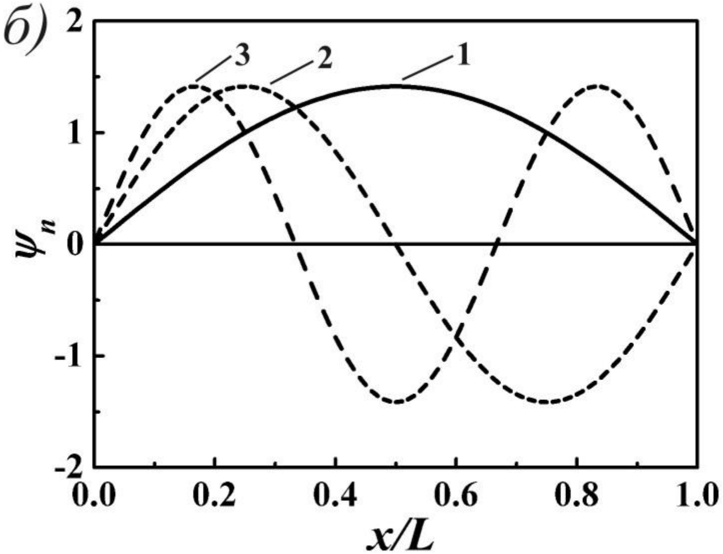
$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_i - mc^2}\left[1 + \frac{1}{Mc^2}\left(E_i - p_i c\cos\theta\right)\right] \approx \frac{hc}{eU}$$

Частица в прямоугольной бесконечно глубокой яме

а)



б)



$$\psi'' + \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad \psi_{1,3}(x) \equiv 0$$

$$\psi_2'' + k^2\psi_2 = 0 \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

$$\psi_2(0) = \psi_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kL) = 0$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \qquad \boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2} \qquad \boxed{n = 1, 2, 3, \ldots}$$

$$\psi_{2,n}(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}n\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = |C_1|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot e^{i\alpha}$$

$$\boxed{\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}n\right)\exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)}$$

Частица в прямоугольной бесконечно глубокой яме

$$\boxed{\Psi_1(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right)} \qquad x\in(0,\mathrm{L}) \qquad \boxed{E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

Вычисление среднего значения и дисперсии координаты:

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{x}\Psi dx=\frac{L}{2} \qquad \langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{x}^2\Psi dx=L^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$$

$$D_x=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=L^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$$

Вычисление среднего значения и дисперсии импульса:

$$\overline{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{p}\Psi dx=0 \qquad \langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{p}^2\Psi dx=\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2} \qquad D_p=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2}$$

Проверка соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\delta x\delta p=\sqrt{D_x D_p}=\hbar\sqrt{\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}}\approx 0{,}57\hbar>\frac{\hbar}{2}$$

Частица в прямоугольной бесконечно глубокой яме

Переход к импульсному представлению:

$$\psi(p)=\langle p|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_p^*(x)\psi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)dx=\frac{2\hbar\sqrt{\pi L\hbar}}{\left(\pi^2\hbar^2-p^2L^2\right)}\cos\left(\frac{pL}{2\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{pL}{2\hbar}\right)$$

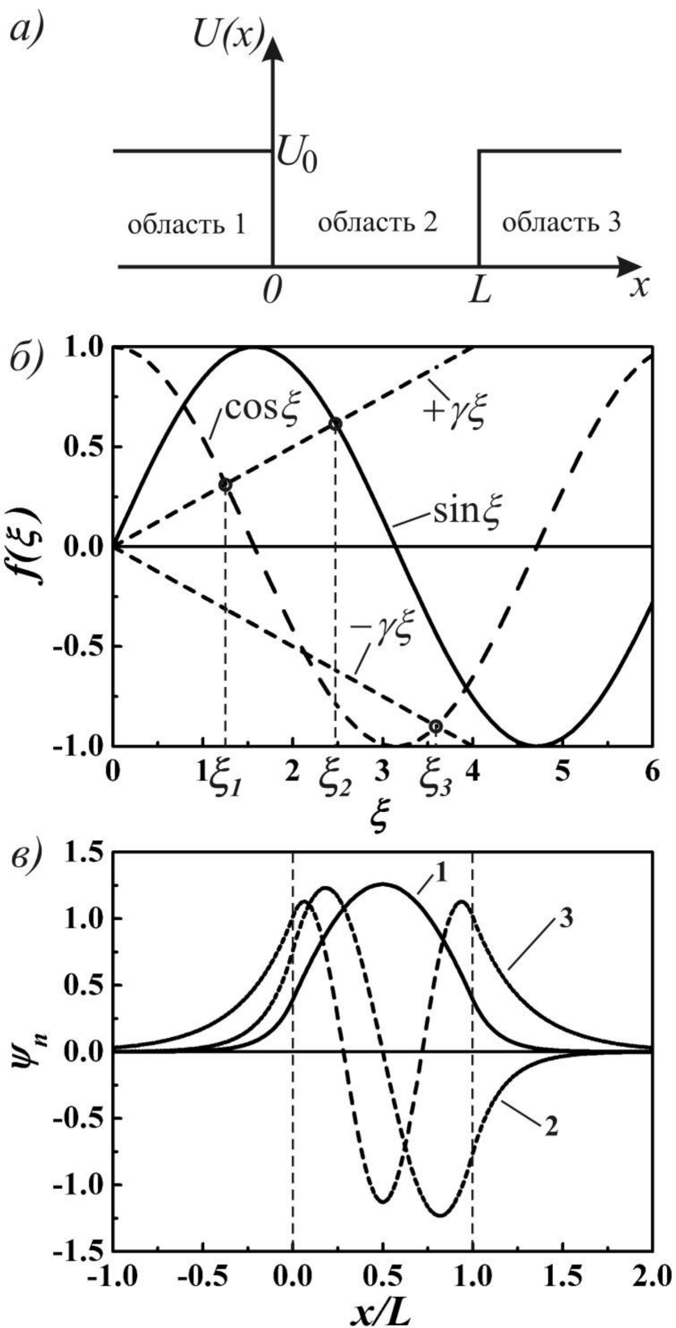
$$\boxed{\rho(p)=|\psi(p)|^2=\frac{4\pi\hbar^3L}{\left(\pi^2\hbar^2-p^2L^2\right)^2}\cos^2\left(\frac{pL}{2\hbar}\right)}$$

Частица в нестационарном состоянии:

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1t\right)+\frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2t\right)$$

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{x}\Psi dx \qquad \boxed{\overline{x}(t)=L\left[\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\sin\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right]}$$

Частица в прямоугольной яме конечной глубины



$$\psi''_{1,3} - q^2\psi_{1,3} = 0 \qquad q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x) = C_1 e^{qx} \qquad \psi_3(x) = C_3 e^{-qx}$$

$$\psi''_2 + k^2\psi_2 = 0 \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C_2 \sin(kx + \delta)$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \sin\delta$$

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) \quad \Rightarrow \quad C_3 e^{-qL} = C_2 \sin(kL + \delta)$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) \quad \Rightarrow \quad qC_1 = kC_2 \cos\delta$$

$$\psi'_2(L) = \psi'_3(L) \quad \Rightarrow \quad -qC_3 e^{-qL} = kC_2 \cos(kL + \delta)$$

$$\cos\xi = \pm\gamma\xi \qquad \xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \ldots$$

$$\sin\xi = \pm\gamma\xi \qquad \xi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \cup \ldots$$

$$\xi = \frac{kL}{2} \qquad \gamma = \frac{\hbar}{L}\sqrt{\frac{2}{mU_0}} \qquad \boxed{E_n = \frac{2\hbar^2\xi_n^2}{mL^2}} \quad \boxed{n = 1, \ldots, n_{\max}}$$

Частица в прямоугольной яме конечной глубины

Предельный случай бесконечно глубокой ямы:

$$U_0 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \gamma \to 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_n \to \frac{\pi n}{2} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{2\hbar^2 \xi_n^2}{mL^2} \to \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

Предельный случай «мелкой» ямы:

$$\gamma \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad U_0 \ll \frac{2\hbar^2}{mL^2}$$

$$\gamma\xi = \cos\xi \qquad\qquad \gamma\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma\xi = \cos\left(\frac{1}{\gamma}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \xi \approx \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma^3}$$

Единственный уровень энергии: $\boxed{E \approx U_0 \left(1 - \frac{mL^2}{2\hbar^2} U_0\right)}$

Частица в прямоугольной яме конечной глубины

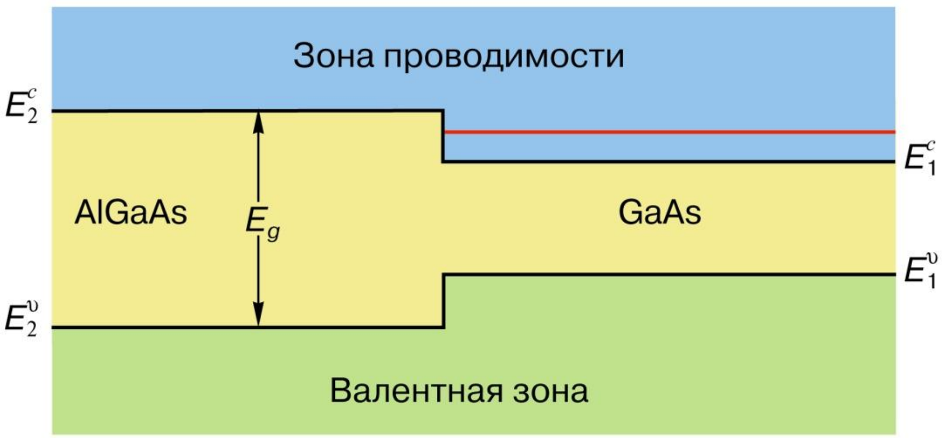


Рис. 2. Энергетические зоны на границе двух полупроводников – гетероструктуре. E^c и E^υ – границы зоны проводимости и валентной зоны, E_g – ширина запрещенной зоны. Электрон с энергией меньше E_2^c (уровень показан красным цветом) может находиться только справа от границы

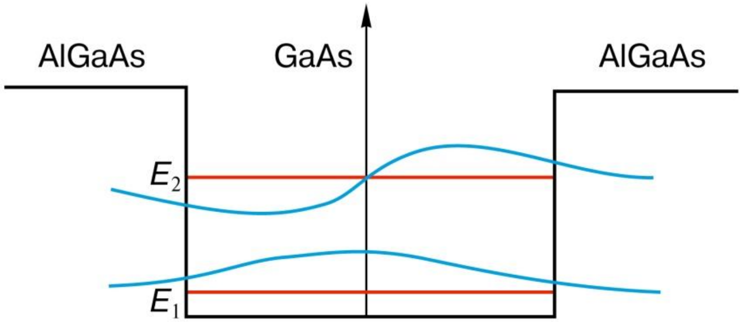


Рис. 3. Квантовая яма, сформированная в слое полупроводника с узкой запрещенной зоной, заключенном между двумя полупроводниками, обладающими более широкой запрещенной зоной

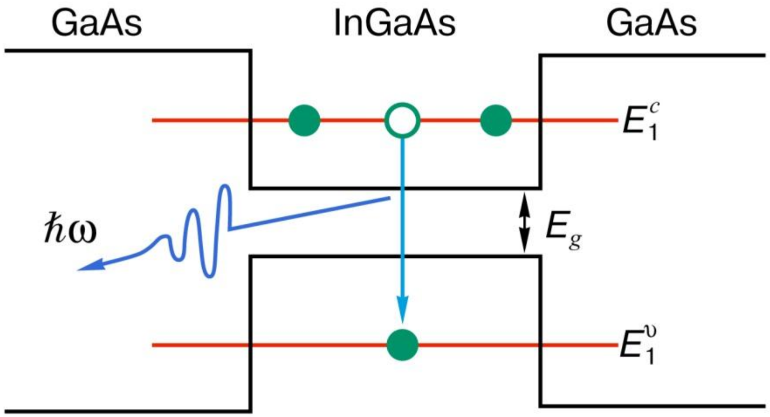
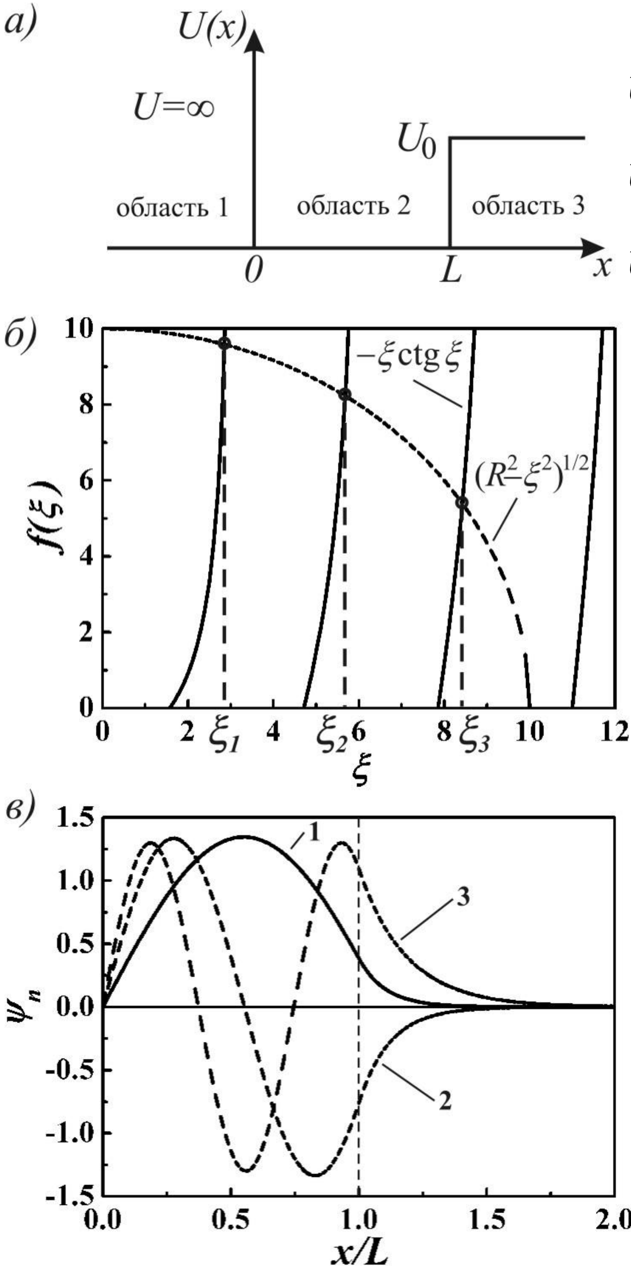


Рис. 6. Энергетическая схема лазера на квантовой яме

Частица в прямоугольной яме с одной бесконечно высокой стенкой



$$\psi_1(x) \equiv 0, \qquad x \in (-\infty, 0]$$

$$\psi_2(x) = C_2 \sin(kx + \delta), \qquad x \in (0, L)$$

$$\psi_3(x) = C_3 e^{-qx}, \qquad x \in [L, \infty)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(0) = \psi_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) \quad \Rightarrow \quad C_2 \sin(kL) = C_3 e^{-qL}$$

$$\psi_2'(L) = \psi_3'(L) \quad \Rightarrow \quad kC_2 \cos(kL) = -\mathrm{q}\mathrm{C}_3\, e^{-qL}$$

$$\xi = kL \qquad R = \frac{L\sqrt{2mU_0}}{\hbar}$$

$$-\xi \operatorname{ctg}(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2}$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \xi_n^2}{2mL^2}}$$

$$\boxed{n = 1, 2, 3, \ldots, n_{\max} < \infty}$$

В «мелкой» яме уровней нет!

Гармонический осциллятор

$$U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi(x) = 0}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$$\psi''(\xi) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right)\psi(\xi) = 0$$

Сначала ищем асимптотическое решение при $\xi \to \pm\infty$

$$\psi''_{ass}(\xi) = \xi^2 \psi_{ass}(\xi)$$

$$\boxed{\psi_{ass}(\xi) = e^{-\xi^2/2}}$$

Теперь ищем решение в виде $\psi(\xi) = \chi(\xi) e^{-\xi^2/2}$

$$\boxed{\chi'' - 2\xi\chi' + 2n\chi = 0}$$

$$2n = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1$$

Это уравнение имеет решения в виде полиномов только если

$\boxed{n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$ **Тогда**

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right)}$$

Гармонический осциллятор

Основное состояние:

$$\chi_0(\xi) = a_0 = \text{const} \qquad \left(\frac{2E_0}{\hbar\omega} - 1\right)a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(\mathrm{x})|^2\, dx = a_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a_0^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]}$$

$$\rho_0(x) = |\psi_0(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]$$ **– распределение Гаусса с**

$$\overline{x} = 0 \qquad \sigma^2 = \hbar/(2m\omega)$$

Частица в δ-образном потенциале

$$U(x) = A\delta(x) \qquad A = \mathrm{const} < 0 \qquad E = -|E|$$

$$\boxed{\psi'' + 2q\delta(x)\psi - k^2\psi = 0} \qquad k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \qquad q = \frac{m|A|}{\hbar^2}$$

$$x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) \qquad \psi'' - k^2\psi = 0 \qquad \psi_1(x) = C_1 e^{kx} \qquad \psi_3(x) = C_3 e^{-kx}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) \qquad C_1 = C_3 \equiv C \qquad \psi_2(0) = C$$

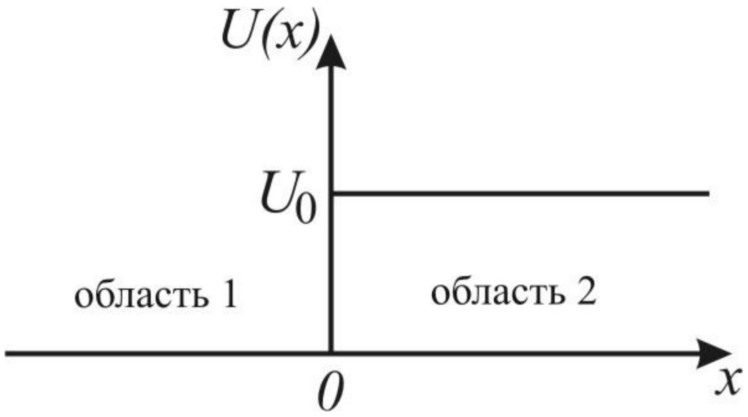
$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} = Cke^{-k\varepsilon} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\varepsilon} = -Cke^{-k\varepsilon} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\varepsilon}$$

$$x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'' \mathrm{d}x + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2q\delta(x)\psi_2(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k^2\psi_2(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad k = q$$

$$\boxed{E = -\frac{mA^2}{2\hbar^2}} \qquad \psi(x) = Ce^{-q|x|} \qquad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2\,\mathrm{d}x = 2|C|^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2qx}\mathrm{d}x = \frac{|C|^2}{q} = \frac{|C|^2\hbar^2}{m|A|}$$

$$\boxed{\psi(\mathrm{x}) = \frac{\sqrt{m|A|}}{\hbar}\exp\left(-\frac{m|A|}{\hbar^2}|x|\right)}$$

Рассеяние на прямоугольной ступеньке



Случай $\boxed{E > U_0}$

$$\psi_1'' + k_1^2 \psi_1 = 0 \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\boxed{\psi_1(x) = e^{ik_1 x} + A_{\text{отр}} e^{-ik_1 x}}$$

$$\psi_2'' + k_2^2 \psi_2 = 0 \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = A_{\text{прош}} e^{ik_2 x}}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \Rightarrow \quad 1 + A_{\text{отр}} = A_{\text{прош}}$$

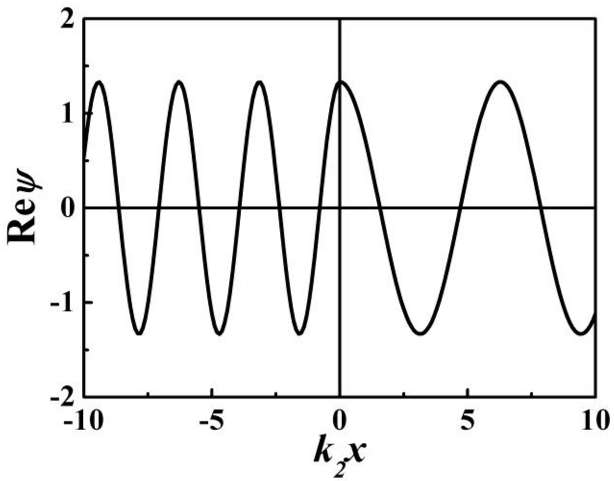
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \quad \Rightarrow \quad 1 - A_{\text{отр}} = \frac{k_2}{k_1} A_{\text{прош}}$$

$$\boxed{A_{\text{отр}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} \qquad \boxed{A_{\text{прош}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}}$$

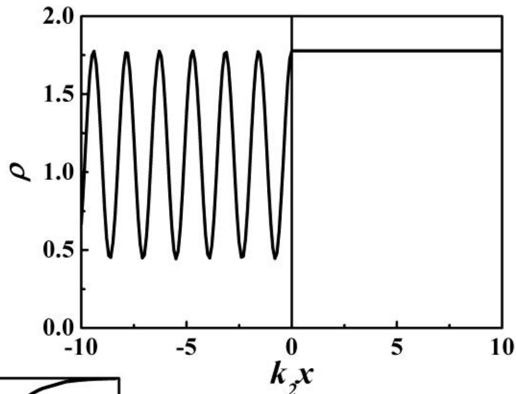
Рассеяние на прямоугольной ступеньке

Случай $\boxed{E > U_0}$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1x}, & \text{при} \quad x < 0; \\ \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2x}, & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

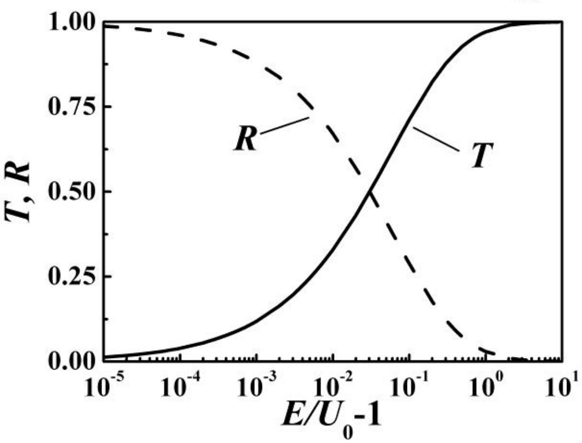


$$\rho(x) = \begin{cases} 1 + 2\left(\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)\cos(2k_1x) + \left(\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, & \text{при} \quad x < 0; \\ \dfrac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2}, & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$



$$R = \left|\frac{j_x^{\text{отр}}}{j_x^{\text{пад}}}\right| = \left|A_{\text{отр}}\right|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

$$T = \left|\frac{j_x^{\text{прош}}}{j_x^{\text{пад}}}\right| = \frac{k_2}{k_1}\left|A_{\text{прош}}\right|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$



Рассеяние на прямоугольной ступеньке

Случай $\boxed{0 < E < U_0}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_1'' + k_1^2 \psi_1 = 0 \qquad \boxed{\psi_1(x) = e^{ik_1 x} + A_{\text{отр}} e^{-ik_1 x}}$$

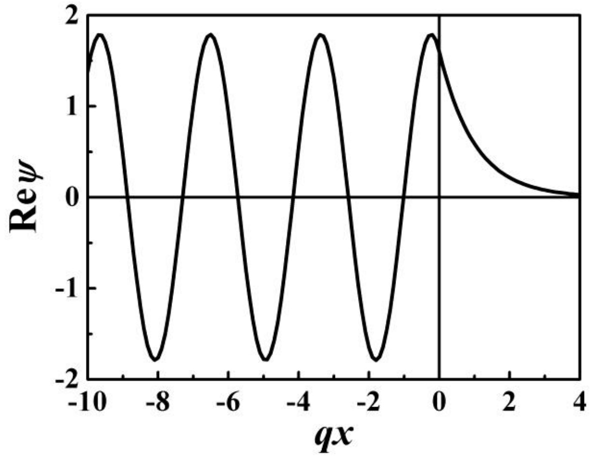
$$\psi_2'' - q^2 \psi_2 = 0 \qquad \boxed{\psi_2(x) = A_{\text{прош}} e^{-qx}}$$

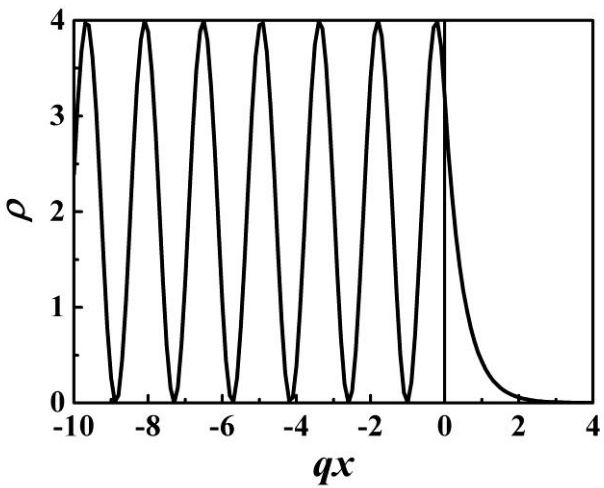
$$A_{\text{отр}} = e^{i\delta_{\text{отр}}} \qquad \delta_{\text{отр}} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2k_1 q}{k_1^2 - q^2}\right)$$

$$A_{\text{прош}} = \frac{2k_1}{\sqrt{k_1^2 + q^2}} e^{i\delta_{\text{прош}}} \qquad \delta_{\text{прош}} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{q}{k_1}\right)$$

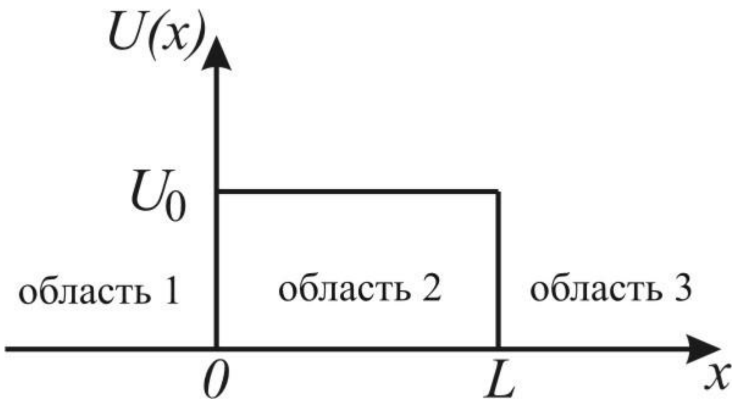
$$\boxed{\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1 x} + e^{-ik_1 x + i\delta_{\text{отр}}}, & \text{при} \quad x < 0; \\ \dfrac{2k_1}{\sqrt{k_1^2 + q^2}} e^{-qx + i\delta_{\text{прош}}}, & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}}$$

$$\boxed{\rho(x) = \begin{cases} 2 + 2\cos(2k_1 x - \delta_{\text{отр}}), & \text{при} \quad x < 0; \\ \dfrac{4k_1^2}{k_1^2 + q^2} e^{-2qx}, & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}}$$





Рассеяние на прямоугольном барьере



Случай $\boxed{E > U_0}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi''_{1,3} + k_1^2 \psi_{1,3} = 0$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

$$\psi''_2 + k_2^2 \psi_2 = 0$$

$$\boxed{\psi_1(x) = e^{ik_1 x} + A_{\text{отр}} e^{-ik_1 x}} \qquad \boxed{\psi_2(x) = Be^{ik_2 x} + Ce^{-ik_2 x}} \qquad \boxed{\psi_3(x) = A_{\text{прош}} e^{ik_1 x}}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \Rightarrow \quad 1 + A_{\text{отр}} = B + C$$

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) \quad \Rightarrow \quad Be^{ik_2 L} + Ce^{-ik_2 L} = A_{\text{прош}} e^{ik_1 L}$$

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) \quad \Rightarrow \quad k_1(1 - A_{\text{отр}}) = k_2(B - C)$$

$$\psi'_2(L) = \psi'_3(L) \quad \Rightarrow \quad k_2(Be^{ik_2 L} - Ce^{-ik_2 L}) = k_1 A_{\text{прош}} e^{ik_1 L}$$

$$A_{\text{прош}} = \frac{4k_1 k_2 e^{i(k_2 - k_1)L}}{(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 e^{2ik_2 L}}$$

$$\boxed{T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2 L)}}$$

Заметим, что $T = 1$ **при** $k_2 L = \pi n$**, где** $n = 1, 2, 3\ldots$

Рассеяние на прямоугольном барьере

Случай $\boxed{0 < E < U_0}$

$$\boxed{\psi_2(x) = Be^{-qx} + Ce^{qx}}$$

$$q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

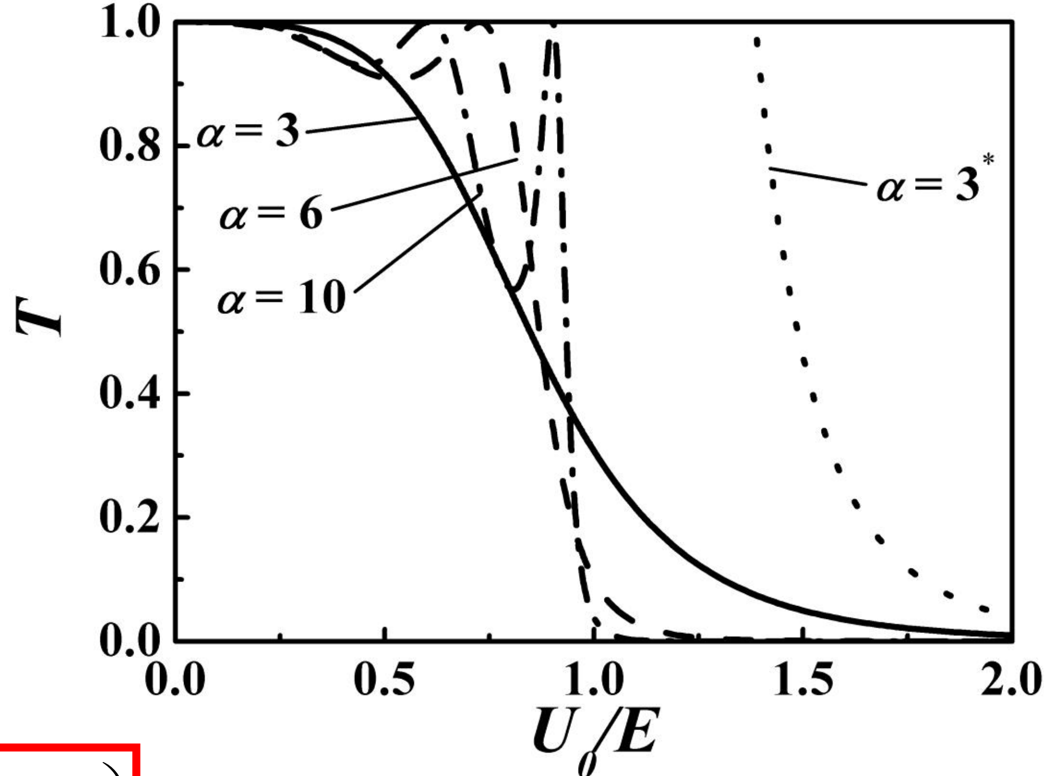
$$k_2 \to iq$$

$$\boxed{T = \frac{4k_1^2 q^2}{4k_1^2 q^2 + (k_1^2 + q^2)^2 \,\mathrm{sh}^2(qL)}}$$

При $q \gg k_1$ **и** $qL \gg 1$

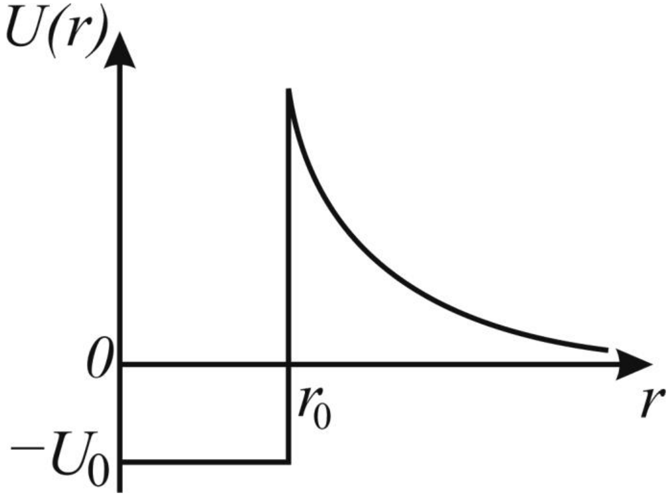
получим

$$\boxed{T \approx \frac{16E}{U_0 - E}\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot L\right)}$$



$$\alpha = \sqrt{2mE} \cdot L/\hbar$$

α-распад ядра



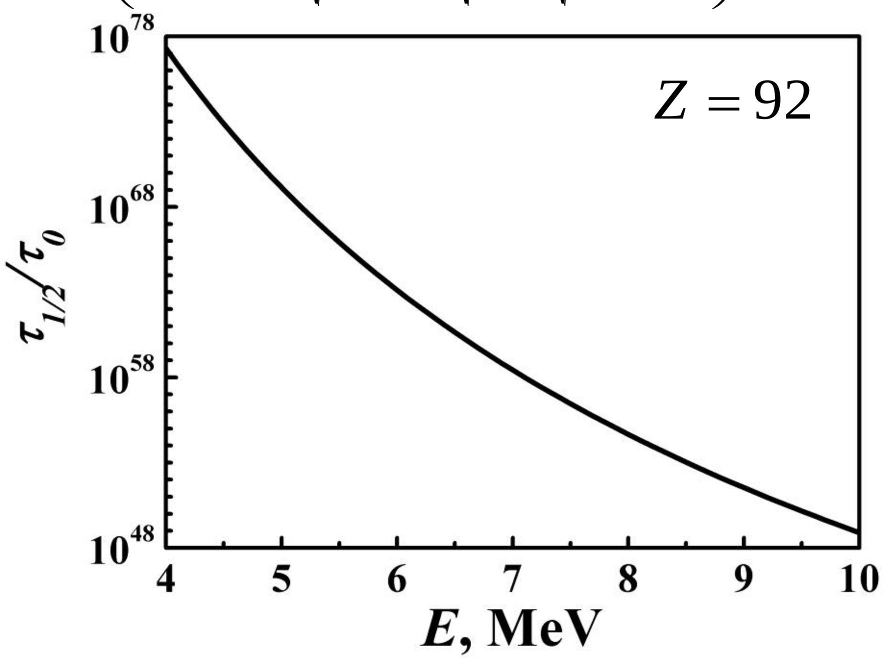
$$U(r)=\begin{cases}-U_0 & \text{при } r\le r_0\\ \dfrac{\alpha}{r} & \text{при } r>r_0\end{cases}\qquad \alpha=\frac{2(Z-2)q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$T=T_0\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2m(U(r)-E)}\,dr\right)\qquad r_1=\frac{\alpha}{E}$$

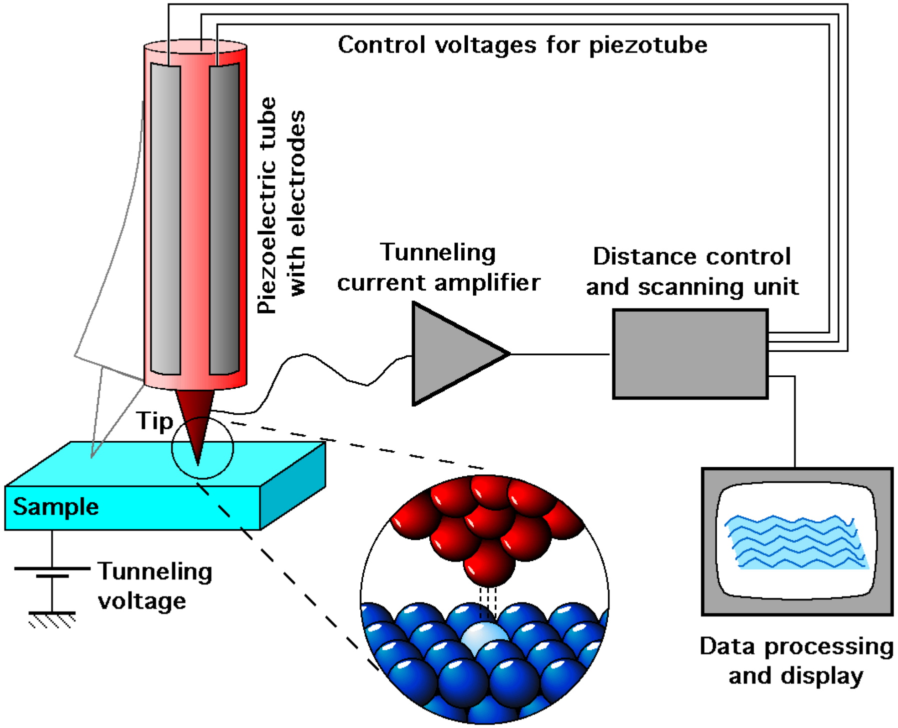
$$I=\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2m\left(\frac{\alpha}{r}-E\right)}dr=r_1\sqrt{2mE}\left(\arccos\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}-\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\sqrt{1-\frac{r_0}{r_1}}\right)\approx\frac{\pi\alpha}{2}\sqrt{\frac{2m}{E}}$$

$$T=T_0\exp\left(-\frac{\pi\alpha}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\right)$$

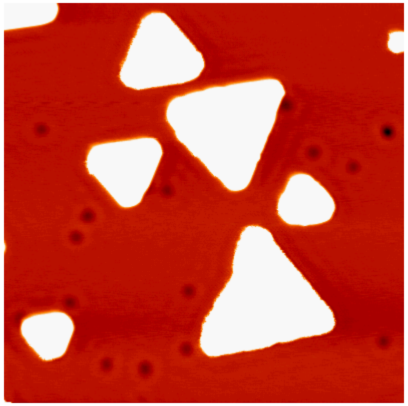
$$\boxed{\tau_{1/2}=\tau_0\exp\left(\frac{\pi\alpha}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\right)}$$



Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ)

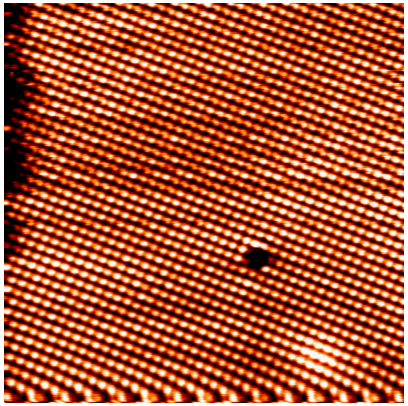


Co islands on Cu(111)

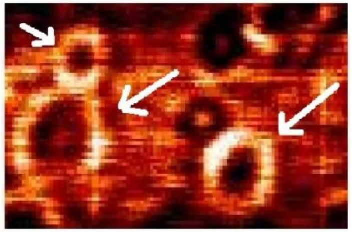


42 x 42 nm^2

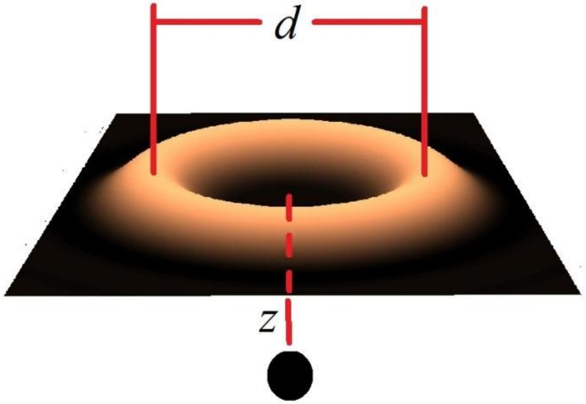
Cu(001)



10 x 10 nm^2



(a)



(b)

Рассеяние на δ-образном потенциале

$$U(x) = A\delta(x) \qquad A = \text{const} > 0 \qquad E > 0$$

$$\boxed{\psi'' - 2q\delta(x)\psi + k^2\psi = 0} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad q = \frac{mA}{\hbar^2}$$

$$x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) \qquad \psi'' + k^2\psi = 0 \qquad \begin{cases} \psi_1(x) = e^{ikx} + A_{\text{отр}} e^{-ikx} & \text{при } x < -\varepsilon \\ \psi_3(x) = A_{\text{прош}} e^{ikx} & \text{при } x > \varepsilon \end{cases}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) \qquad \boxed{1 + A_{\text{отр}} = A_{\text{прош}} = \psi_2(0)}$$

$$\psi_1'(-0) = ik\left(1 - A_{\text{отр}}\right) = \psi_2'(-0) \qquad \psi_3'(+0) = ikA_{\text{прош}} = \psi_2'(+0)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'' \mathrm{d}x - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2q\delta(x)\psi_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k^2\psi_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \boxed{1 - A_{\text{отр}} = A_{\text{прош}}\left(1 - \frac{2q}{ik}\right)}$$

$$A_{\text{прош}} = \left(1 + \frac{iq}{k}\right)^{-1} \qquad \boxed{T = \frac{1}{1 + \dfrac{mA^2}{2\hbar^2 E}}}$$

Квазистационарное состояние

$$U(x)=\begin{cases} A\delta(x), & |x|\le a, \\ U_0, & |x|>a, \end{cases} \qquad A<0 \qquad U_0<0 \qquad |U_0|>\frac{mA^2}{2\hbar^2} \qquad \frac{m^2A^2a^2}{\hbar^4}\gg 1$$

$$k=\frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar} \qquad q=\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \qquad \eta=\frac{m|A|}{\hbar^2}$$

$$\psi''_{1,5}+k^2\psi_{1,5}=0$$

$$\psi''_{2,4}-q^2\psi_{2,4}=0$$

$$\psi''_3+2\eta\delta(x)\psi_3-q^2\psi_3=0$$

$$\psi_1(x)=C_1e^{-ikx} \qquad \psi_2(x)=C_{21}e^{qx}+C_{22}e^{-qx}$$

$$\psi_5(x)=C_5e^{ikx} \qquad \psi_4(x)=C_{41}e^{qx}+C_{42}e^{-qx}$$

$$q-\eta=(q+\eta)\frac{q^2-k^2+2ikq}{q^2+k^2}e^{-2qa}$$

$$\boxed{E=-|E_0|+E_1-iE_2} \qquad \boxed{E_0=-\frac{mA^2}{2\hbar^2}}$$

$$\boxed{E_1=-8\frac{|E_0|^2}{|U_0|}\left(1-\frac{1}{2}\frac{|U_0|}{|E_0|}\right)\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m|E_0|}a\right)}$$

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$$

$$\boxed{E_2=8\frac{|E_0|^2}{|U_0|}\sqrt{\frac{|U_0|}{|E_0|}-1}\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m|E_0|}a\right)}$$

$$\rho(x,t)=|\psi(x)|^2\exp\left(-\frac{2E_2t}{\hbar}\right)$$

Время жизни частицы

$$\boxed{\tau=\frac{\hbar}{2E_2}=\frac{\hbar|U_0|}{16|E_0|^2}\left(\left|\frac{U_0}{E_0}\right|-1\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m|E_0|}a\right)}$$

Список литературы (часть 3):

- Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы. М: Бином, 2001. 196 с.
- Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М: Высшая школа, 1981. 400 с.
- Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике, т.9, М: Мир, 1967. 260 с.
- Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М: Наука, 1978. 792 с.

Квантовое описание системы многих частиц

$$\hat{H}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + U(x_1, x_2)$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + U(x_1)$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} + U(x_2)$$

$$U(x_1, x_2)$$

энергия взаимодействия

Невзаимодействующие частицы

$$U(x_1, x_2) = 0$$

$$\psi(x_1, x_2) = \cancel{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)}$$

$$\psi(x_2, x_1) = \psi_a(x_2)\psi_b(x_1) \neq \psi(x_1, x_2)$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right\}$$

Бозоны S=0, 1, 2…

$$\psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right\}$$

Фермионы S=1/2, 3/2,…

Фермионы

FERMIONS

matter constituents
spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

Leptons spin =1/2

Flavor	Mass GeV/c^2	Electric charge
ν_L lightest neutrino*	$(0-0.13)\times10^{-9}$	0
e electron	0.000511	–1
ν_M middle neutrino*	$(0.009-0.13)\times10^{-9}$	0
μ muon	0.106	–1
ν_H heaviest neutrino*	$(0.04-0.14)\times10^{-9}$	0
τ tau	1.777	–1

Quarks spin =1/2

Flavor	Approx. Mass GeV/c^2	Electric charge
u up	0.002	2/3
d down	0.005	–1/3
c charm	1.3	2/3
s strange	0.1	–1/3
t top	173	2/3
b bottom	4.2	–1/3

Бозоны

BOSONS force carriers
spin = 0, 1, 2, ...

Unified Electroweak spin = 1

Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
γ photon	0	0
W^-	80.39	–1
W^+ W bosons	80.39	+1
Z^0 Z boson	91.188	0

Strong (color) spin =1

Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
g gluon	0	0

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна

Частицы с полуцелым спином (фермионы) подчиняются статистике Ферми-Дирака с распределением

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/kT}+1} \qquad 0 \le \langle n_k \rangle \le 1 \qquad \mu > 0$$

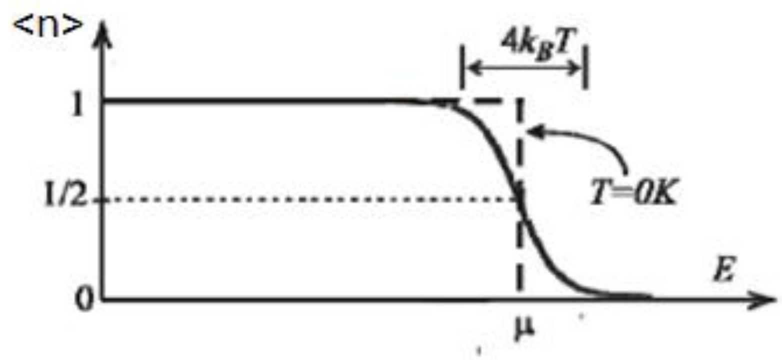
Частицы с целым спином (бозоны) подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна с распределением

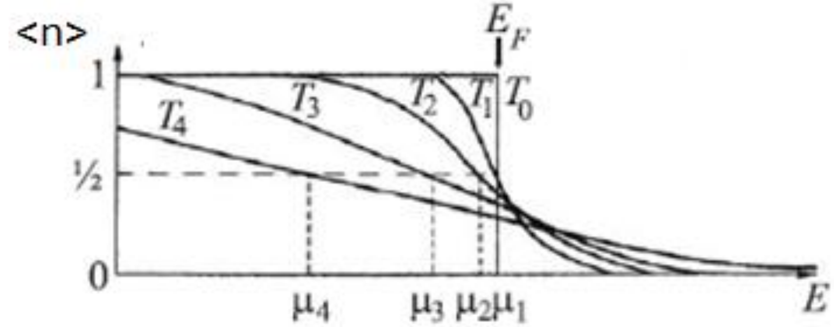
$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/kT}-1} \qquad \langle n_k \rangle \ge 0 \qquad \mu \le 0$$

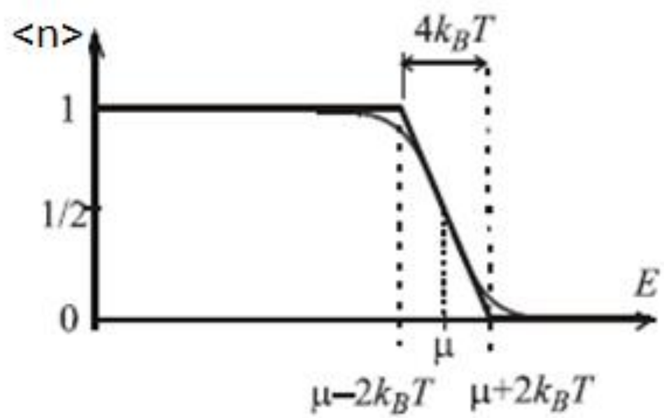
μ **- химический потенциал, находится из условия нормировки**

$$\sum_k \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/kT}\pm 1} = N$$ **где** N **- полное число частиц**

Свойства распределения Ферми-Дирака







$$\left\langle n_k \right\rangle = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/kT}+1}$$

$$\left\langle n_k(E=\mu) \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$E_F = \mu(T=0)$$

для электронного газа в металлах:

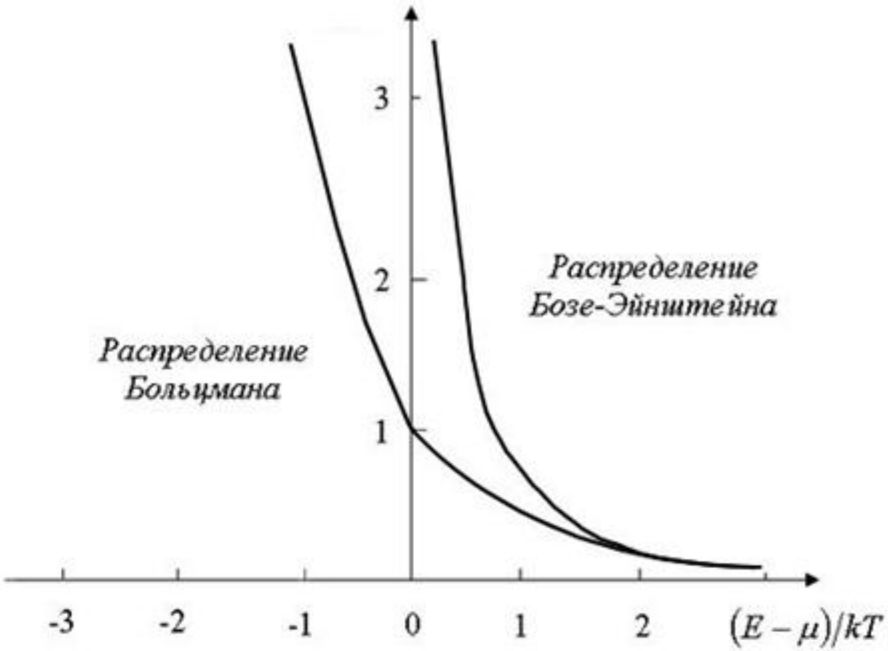
$$E_F \sim 5\text{эВ} >> kT_k = \frac{1}{40}\text{эВ}$$

$$T_F = \frac{E_F}{k} \sim 200T_k \sim 60000K$$

Свойства распределения Бозе-Эйнштейна

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/kT} - 1}$$

$$\mu \le 0$$



для фотонного газа :

$$\mu = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Характеристики электронного газа в металле при T=0

$$\boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}} \qquad n = 5\cdot 10^{22}\,см^{-3} \quad \Rightarrow \quad E_F = 5эВ$$

$$< E >= \frac{\int\limits_0^{E_F} E\sqrt{E}dE}{\int\limits_0^{E_F} \sqrt{E}dE} = \frac{3}{5}E_F = 3 \text{ эВ}$$

Классический газ:

$$T \sim 4\cdot 10^4 \;\; K$$

$$\upsilon_{\max} \equiv \upsilon_F = \sqrt{2E_F / m} = 1.3\cdot 10^3\,км / сек \neq 0 \qquad \upsilon_F \ll c$$

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F} = \frac{h}{m\upsilon_F} = \frac{6.63\cdot 10^{-34}\,Дж\cdot c}{1.3\cdot 10^6 (м / c) 0.9\cdot 10^{-30}\,кг} = 5.5\cdot 10^{-10}\,м = 5.5 A^0$$

Электронный газ в металле при $0 < T \ll T_F$

Асимптотическое разложение интегралов вида

$$I = \int_0^\infty \frac{F(E)dE}{e^{(E-\mu)/kT}+1}$$ **при** $kT \ll \mu$ **имеет вид:**

$$I = \int_0^\mu F(E)dE + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 F'(\mu) + \dots$$

Химический потенциал

$$\boxed{\mu(T) = E_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]}$$

Средняя энергия

$$\langle E\rangle = \frac{3}{5}E_F + \frac{\pi^2}{4}\frac{(kT)^2}{E_F}$$

Теплоемкость

$$\boxed{C_V = \frac{\pi^2}{2}R\left(\frac{kT}{E_F}\right)}$$

Конденсация Бозе-Эйнштейна

При температуре $T = T_{BEC}$ **химический потенциал бозонов становится равным нулю.**

Распределение бозонов по энергии принимает вид:

$$f(E) = (2s+1)\frac{1}{n}\frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\frac{\sqrt{E}}{\exp\left(\frac{E}{kT_{BEC}}\right)-1}$$

Из условия нормировки получим:

$$\boxed{T_{BEC} = \frac{3,31}{(2s+1)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk}n^{2/3}}$$

Концентрация конденсата при $T < T_{BEC}$ **равна**

$$\boxed{n_{BEC} = n\left[1-\left(\frac{T}{T_{BEC}}\right)^{3/2}\right]}$$

Фотонный газ

Для фотонов 2S+1=2 из-за поперечности электромагнитной волны

$$dN_{\text{сост}} = 2\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \qquad dN = \langle n \rangle dN_{\text{сост}} \qquad \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

$$E = \hbar\omega = cp \Rightarrow dE = cdp$$

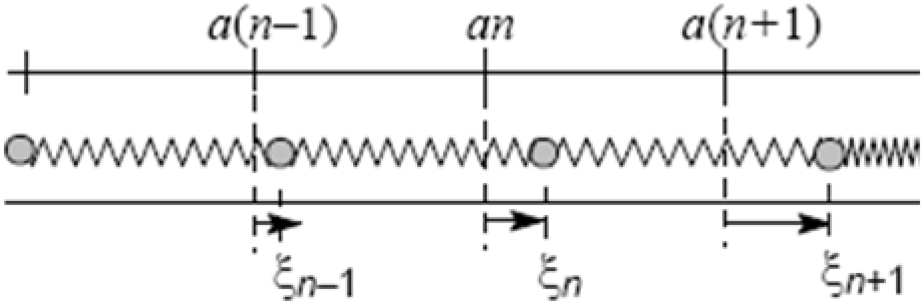
$$dN_{\text{сост}} = 2\frac{4\pi E^2}{(2\pi\hbar)^3 c^3} dE = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

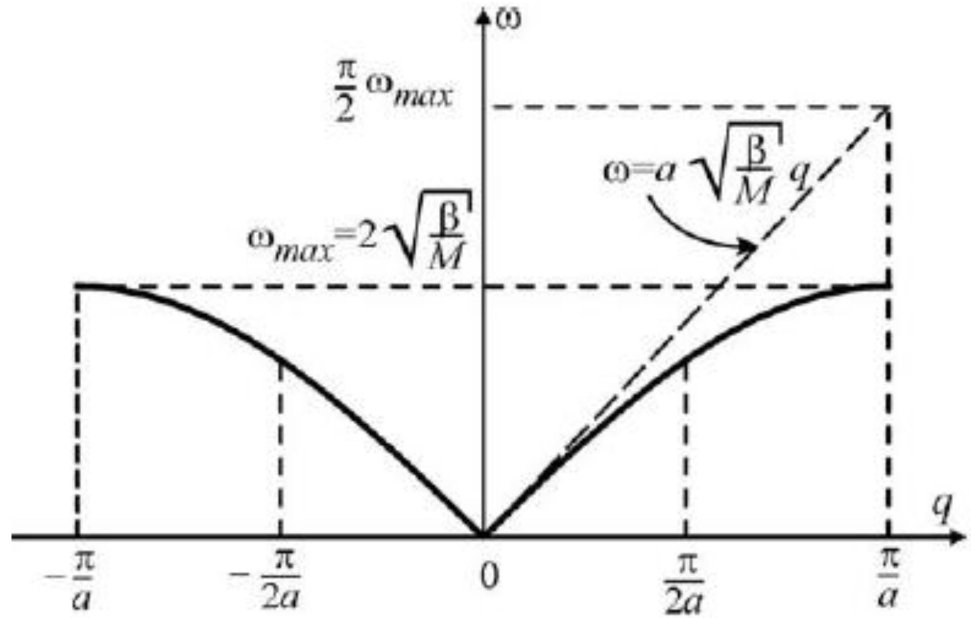
Спектральная плотность энергии (для единицы объема):

$$\rho(\omega, T) = \hbar\omega \langle n \rangle \frac{dN_{\text{сост}}}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Формула Планка !

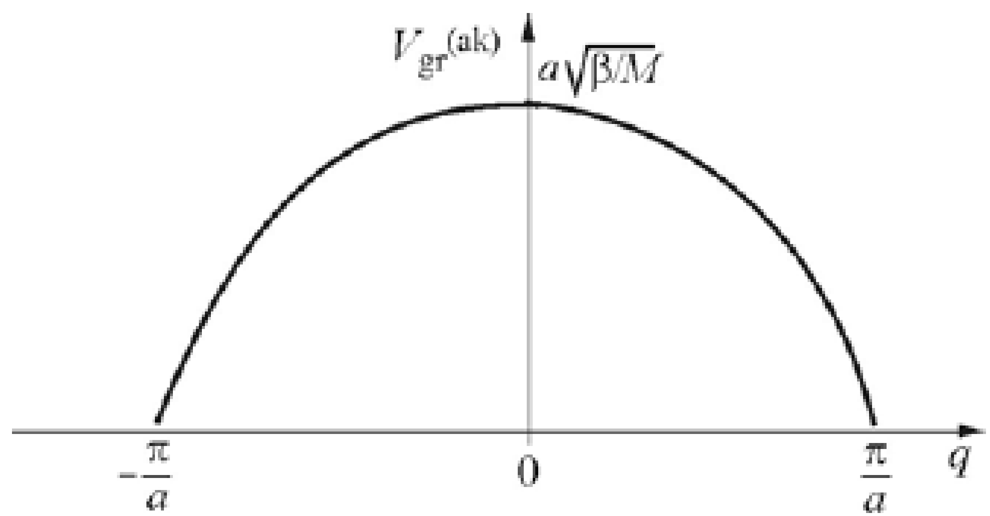
Колебания цепочки из одинаковых шариков





$$M\ddot{\xi}_n = \beta\left(\xi_{n+1}-\xi_n\right)-\beta\left(\xi_n-\xi_{n-1}\right)$$

$$\xi_n = Ae^{i(qan-\omega t)}$$

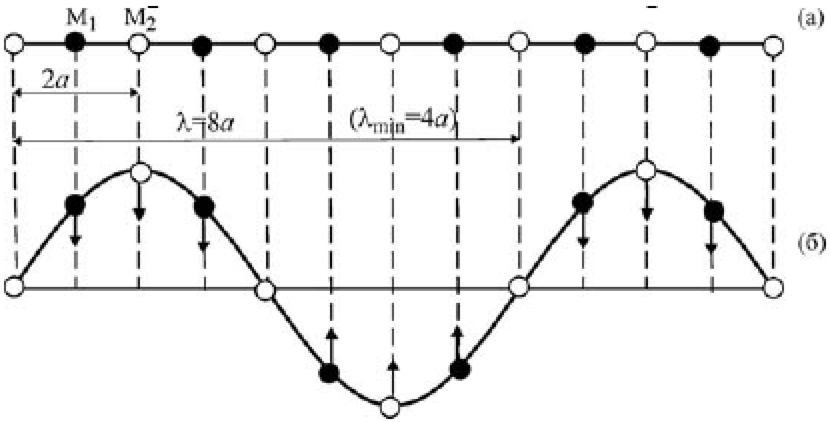


$$\xi(x)=\xi(x+L)$$

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{\beta}{M}}\sin\frac{qa}{2} = \omega_{\max}\sin\frac{\pm qa}{2}$$

$$\omega_{\max} = 2\sqrt{\beta/M}$$

Колебания цепочки из шариков двух сортов



$$M_1\ddot{\xi}_{2n} = \beta\left(\xi_{2n+1} + \xi_{2n-1} - 2\xi_{2n}\right),$$

$$M_2\ddot{\xi}_{2n+1} = \beta\left(\xi_{2n+2} + \xi_{2n} - 2\xi_{2n+1}\right)$$

$$\xi_{2n} = \zeta e^{i(qa2n-\omega t)}$$

$$\xi_{2n+1} = \eta e^{i(qa(2n+1)-\omega t)}$$

$$-\omega^2 M_1\zeta = \beta\eta\left(e^{iqa} + e^{-iqa}\right) - 2\beta\zeta$$

$$-\omega^2 M_2\eta = \beta\zeta\left(e^{iqa} + e^{-iqa}\right) - 2\beta\eta$$

$$\begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 M_1 & -2\beta\cos qa \\ -2\beta\cos qa & 2\beta - \omega^2 M_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_{\pm}^2 = \beta\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \pm \beta\sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - \frac{4\sin^2 qa}{M_1 M_2}}$$

Колебания цепочки из шариков двух сортов

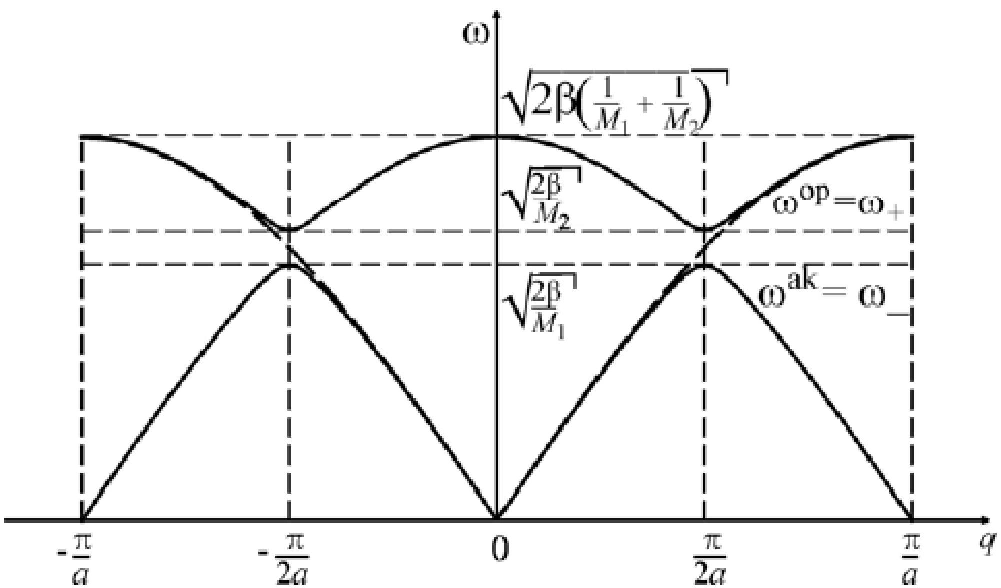
$$qa \ll 1$$

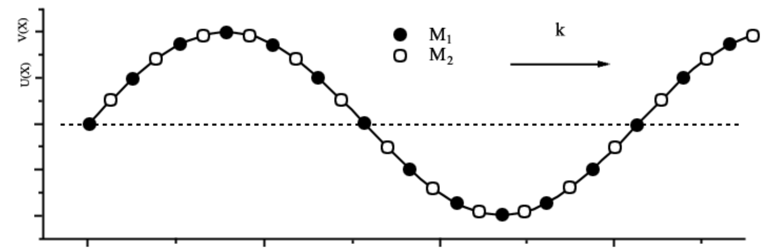
$$\omega_+ \approx \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_2}\right)}$$

$$\omega_- \approx \left(a\sqrt{\frac{2\beta}{M_1+M_2}}\right)q$$

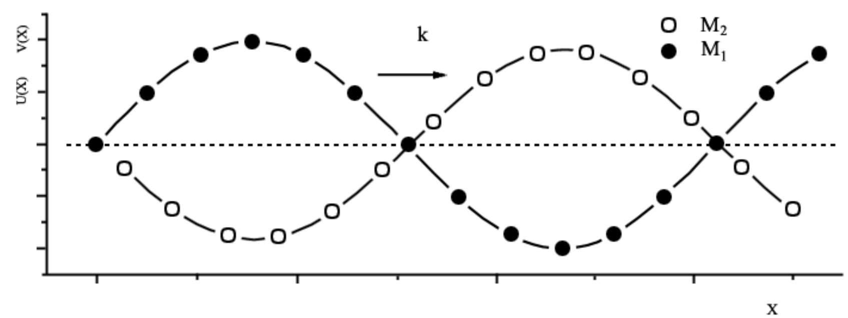
$$\omega_-:\ (\eta/\zeta)_- = 1;$$

$$\omega_+:\ (\eta/\zeta)_+ = -M_1/M_2\ .$$





Акустические колебания



Оптические колебания

Переход от классического описания кристалла к квантовому. Фононы

Фононы – это квазичастицы со следующими характеристиками:

1) Энергия и импульс: $E = \hbar\omega$ $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

2) Масса: $m = 0$

3) Спин: $s = 1$

4) Объем квантового состояния: $$\Delta p = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}$$

Тепловая энергия кристалла:

$$E_{\text{тепл}} = n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2 + \ldots + n_N\hbar\omega_N$$

Температура Дебая

Температура Дебая – это температура, при которой возбуждаются колебания на <u>всех</u> частотах:

$$\boxed{k_B T_D = \hbar\omega_{\max}}$$

Оценим температуру Дебая для фононов одной поляризации:

$\omega = c_{зв} k$ **– закон дисперсии**

$$N_{сост} = N_{ат} = \frac{k_{\max}^3}{6\pi^2} V \qquad \boxed{T_D = \frac{\hbar}{k_B} c_{зв} \left(6\pi^2 n\right)^{1/3}} \qquad n = \frac{N}{V}$$

<u>Температуры Дебая:</u>

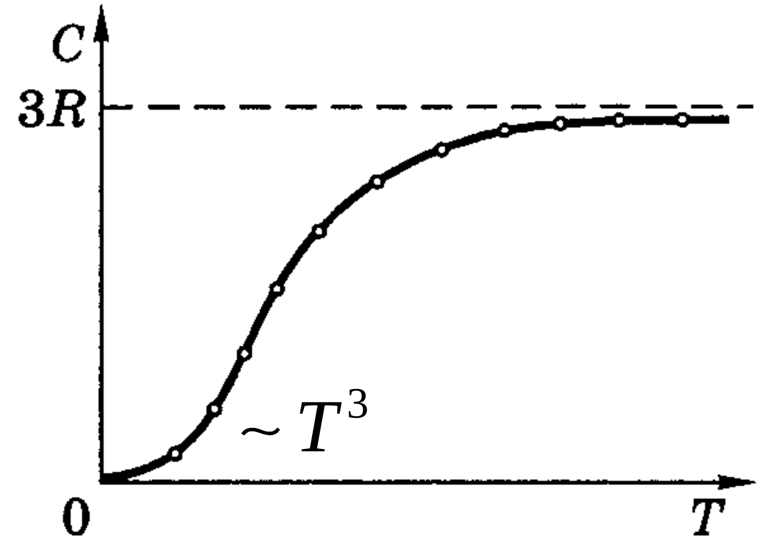
свинец	90К
медь	340К
кремний	650К
алмаз	~2000К

Теплоемкость кристаллической решетки

Общий алгоритм вычисление теплоемкости

вычисляется внутренняя энергия

$$E(T) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\partial E}{\partial T}$$



Классическая модель. Формула Дюлонга и Пти

ТТ – совокупность N независимых атомов, по 3 колебательных степени свободы на атом

$$E(T) = 3N_A \cdot k_B T \qquad \boxed{C(T) = 3R}$$

Модель Эйнштейна

ТТ – совокупность 3N независимых *квантовых* осцилляторов, колеблющихся с *одинаковой частотой* ω **(или свободный газ фононов с законом дисперсии** $\omega = \text{const}$ **)**

$$E = 3N_A\hbar\omega < n >= 3N_A \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

$$\boxed{C = \frac{\partial E}{\partial T} = 3R\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)^2}}$$

При высоких Т: $k_B T >> \hbar\omega \Rightarrow C = 3R$

При низких Т: $k_B T \ll \hbar\omega \qquad C \sim \frac{1}{T^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \to 0$

Модель Дебая

Теплоемкость ТТ определяется как теплоемкость свободного газа фононов с ***линейным законом дисперсии*** $\omega = c_{\text{зв}} k$

Плотность состояний фононов равна

$$\frac{dn_{\text{сост}}}{d\omega} = \frac{3}{2} V \frac{\omega^2}{\pi^2 \overline{c}^3}$$

где $\overline{c}$ **– средняя скорость звука:**

$$\frac{3}{\overline{c}^3} = \frac{1}{c_{\parallel}^3} + \frac{2}{c_{\perp}^3}$$

Число фононов в интервале частот (ω,ω+dω) на один атом кристалла:

$$f(\omega) = \frac{1}{N} \frac{dn_{\text{сост}}}{d\omega} \langle n \rangle = \frac{3}{2n} \frac{\omega^2}{\pi^2 \overline{c}^3} \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_B T} \right) - 1}$$

Модель Дебая (продолжение)

Средняя энергия фононов на один атом кристалла

$$\langle E \rangle = \hbar \langle \omega \rangle = \int_0^{\omega_{\max}} \omega f(\omega) d\omega = 9k \frac{T^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Теплоемкость газа фононов

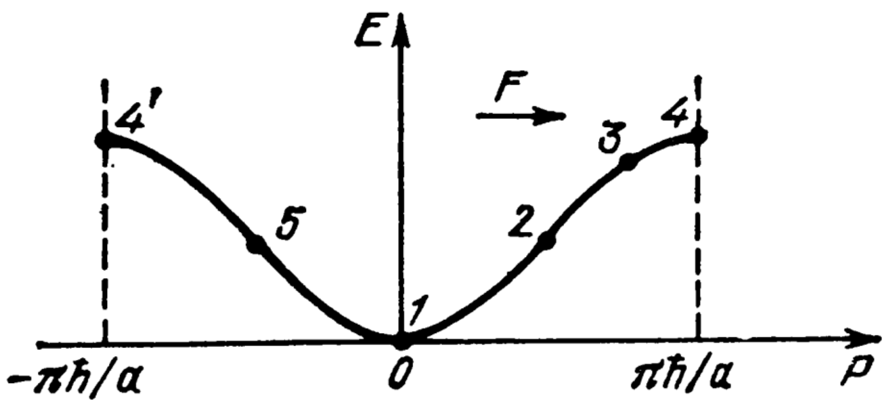
$$C(T) = 36R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - 9R \frac{\left(\frac{T_D}{T} \right)}{\exp\left(\frac{T_D}{T} \right) - 1}$$

При высоких Т: $T \gg T_D \rightarrow C = 3R$

При низких Т: $T \ll T_D \rightarrow$ $\boxed{C(T) = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3}$

Эффективная масса электрона

$$\omega = \omega(k)$$ или $$E = E(p)$$ вместо $$E = \frac{p^2}{2m}$$



$$\upsilon_{\text{гр}} = \left|\frac{d\omega}{dk}\right| = \left|\frac{dE(p)}{dp}\right|$$

$$E = \frac{p^2}{2m_{\text{эфф}}} \qquad m_{\text{эфф}}\frac{d\upsilon_{\text{гр}}}{dt} = F$$

$$\boxed{\left\{\frac{1}{m_{\text{эфф}}}\right\}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}}$$

Фермиевские электроны

Фермиевские электроны – это квазичастицы, описывающие движение электронов в периодической решетке, со следующими характеристиками:

1) Энергия и импульс: $E = \hbar\omega$ $p = \hbar k$

2) Масса: $m = m_{\text{эфф}}$

3) Закон дисперсии:

$$E = \frac{p^2}{2m_{\text{эфф}}}$$

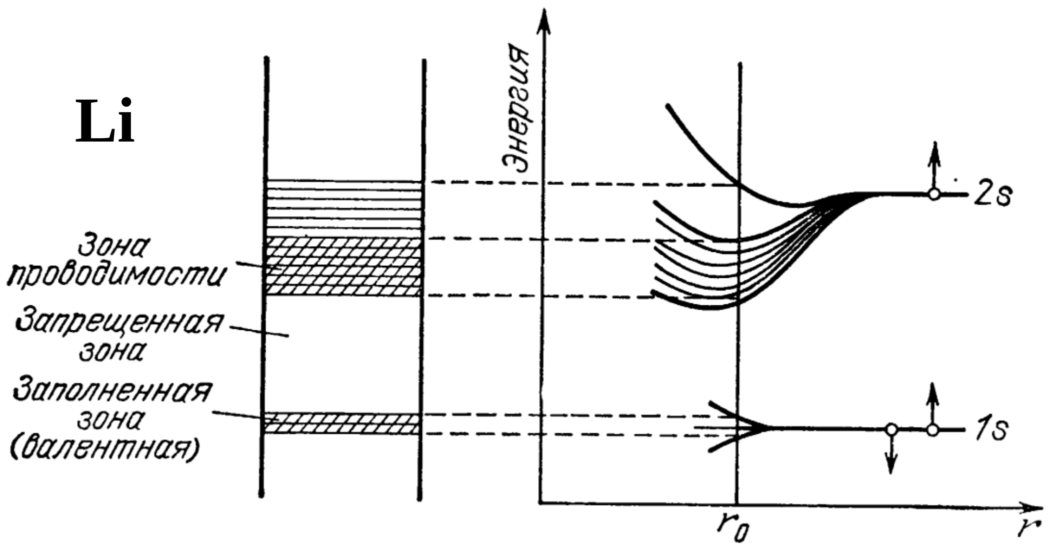
4) Спин: $s = \dfrac{1}{2}$

Фермиевские электроны движутся в кристалле, как свободные электроны с массой $m_{\text{эфф}}$**.**

Энергетические зоны в кристаллах

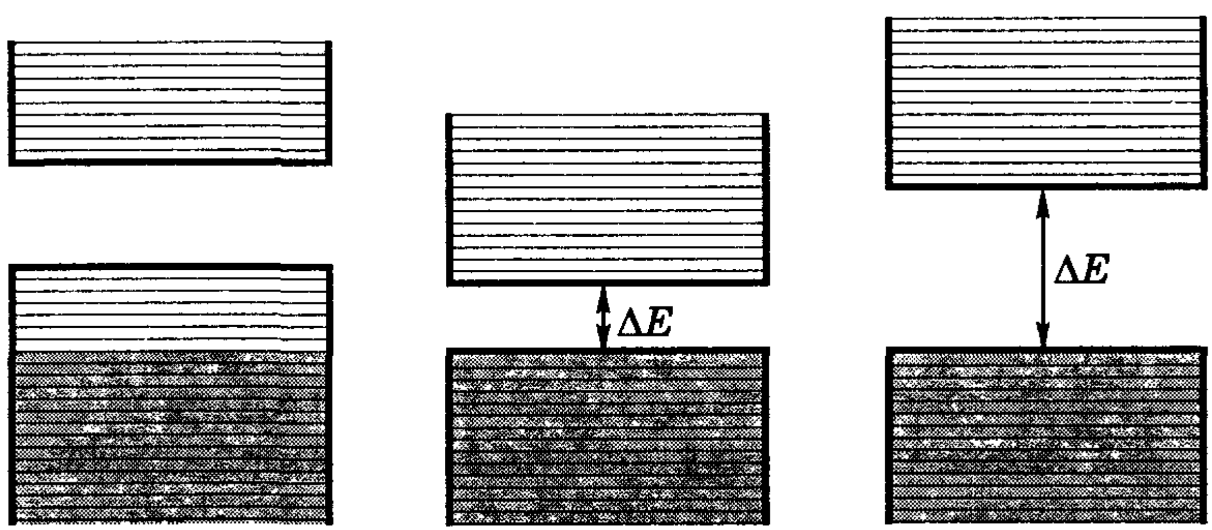
Одновалентные атомы: Li, Na, K, Cu … - проводники

Li



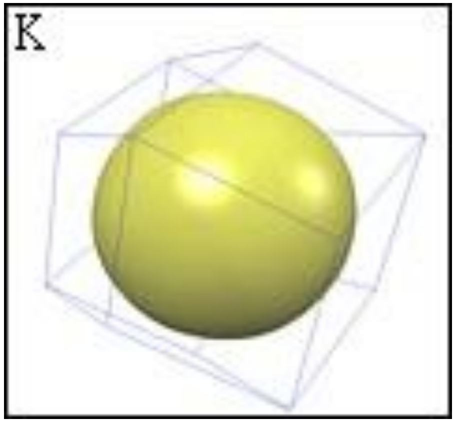
2N уровней
N электронов

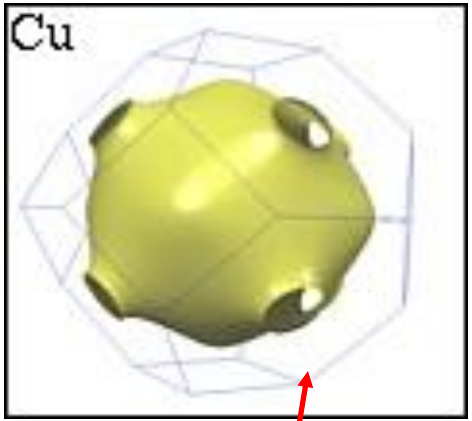
2N уровней
2N электронов



Металл *Полупроводник* *Диэлектрик*

Поверхность Ферми электронов в металлах





1-ая зона Бриллюэна

Спиновые волны в одномерной цепочке

Гамильтониан Гейзенберга: $$H = -\frac{2J}{\hbar^2}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{s}_n\mathbf{s}_{n+1} = -J\sum_{n=1}^{N}\left(\hat{P}_{n,n+1} - 1\right)$$

$$\boxed{J > 0}$$

Уравнение Шредингера в матричной форме:

$$i\hbar\frac{\partial a_n}{\partial t} = -Ja_{n-1} + 2Ja_n - Ja_{n+1}$$

Ищем решение в виде бегущей волны: $$a_n(t) = Ce^{i(kan-\omega t)}$$

Закон дисперсии спиновой волны:

$$\boxed{E(k) = 2J\left[1 - \cos(ka)\right] \approx Ja^2k^2}$$

Эффективная масса спиновой волны:

$$\boxed{m_{\text{эфф}} = \frac{\hbar^2}{2Ja^2}}$$

Магноны в ферромагнетике

Магноны – это квазичастицы, описывающие распространение спиновых волн в ферромагнетике, со следующими характеристиками:

1) Энергия и импульс: $E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k$

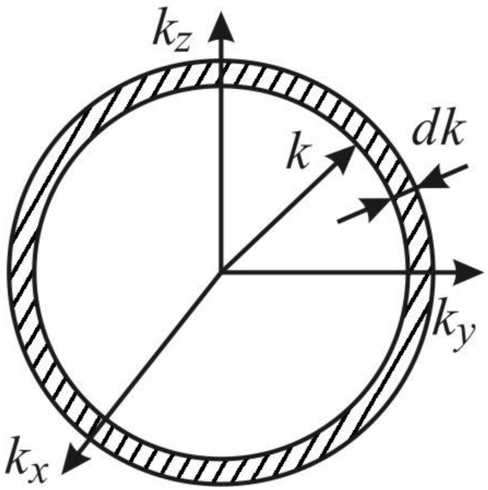
2) Масса: $m = m_{\text{эфф}}$

3) Закон дисперсии: $$E = \frac{p^2}{2m_{\text{эфф}}} \approx Ja^2k^2$$

4) Спин: $s = 0 \qquad \mu = 0$

Магноны движутся в кристалле, как свободные бозоны с массой $m_{\text{эфф}}$

Плотность состояний магнонов



$$\omega \approx \frac{Ja^2}{\hbar} k^2$$

$$dn_s = \frac{V_{\text{сф. слой}}}{V_{\text{кв. сост.}}} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} V = \frac{\sqrt{\omega}\, d\omega}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar}{Ja^2} \right)^{3/2} V$$

Число магнонов в интервале частот (ω,ω+dω) на один атом кристалла:

$$\boxed{f(\omega) = \frac{1}{N} \frac{dn_s}{d\omega} \overline{n} = \frac{\sqrt{\omega}}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar}{Ja^2} \right)^{3/2} \frac{1}{n} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) - 1}}$$

Намагниченность ферромагнетика при низкой температуре

При T = 0 К намагниченность кристалла равна: $M_0 = \mu_B n$

А при температуре отличной от нуля: $M = \mu_B n - 2\mu_B n_{\text{маг}} = M_0 - |\Delta M|$

Тогда

$$\frac{|\Delta M|}{M_0} = 2\frac{n_{\text{маг}}}{n} = 2\int_0^{\omega_{\max}} f(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi^2 n}\left(\frac{\hbar}{Ja^2}\right)^{3/2}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\sqrt{\omega}d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)-1} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\hbar}{J}\right)^{3/2}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{e^x-1} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{k_B T}{J}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{|\Delta M|}{M_0} \approx 0{,}118\left(\frac{k_B T}{J}\right)^{3/2}}$$ **– закон Блоха**

Вклад магнонов в теплоемкость ферромагнетика при низкой температуре

Средняя энергия магнонов на один атом кристалла:

$$\bar{E} = \int_0^{\omega_{\max}} \hbar\omega f(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2}\left(\frac{\hbar}{Ja^2}\right)^{3/2} \frac{1}{n} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^{3/2}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega \approx$$

$$\approx \frac{\hbar}{4\pi^2}\left(\frac{\hbar}{J}\right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} = \frac{k_B T^{5/2}}{4\pi^2}\left(\frac{k_B}{J}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{\bar{E} = 0{,}045 k_B \left(\frac{k_B}{J}\right)^{3/2} T^{5/2}}$$

Тогда

$$C_V = N_A \frac{d\bar{E}}{dT} = \frac{5}{2} N_A \frac{\bar{E}}{T}$$

$$\boxed{C_V = 0{,}113 R \left(\frac{k_B T}{J}\right)^{3/2}}$$