

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Андреев Павел Александрович

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ЭВОЛЮЦИИ
КОЛЛЕКТИВНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ**

Специальность: 1.3.3 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2023

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы диссертационной работы

Теория коллективных процессов в квантовых системах является основой современного понимания фундаментальных макроскопических процессов в твердых, жидких и газообразных фазовых состояниях материи. Методы систематического вывода таких моделей из микроскопической динамики квантовых частиц является одной из актуальных задач современной теоретической физики. Важность таких исследований обусловлена необходимостью обоснования макроскопических моделей. Также вывод моделей с микроскопической точки зрения позволяет точнее понять область применимости модели и физический смысл входящих в неё параметров. Кроме того открывается возможность для обобщения этих моделей. В работе представлен вывод моделей квантовых плазмopodobных сред, где динамика вырожденного электронного газа играет основную роль. Рассмотрены модели, описывающие коллективную динамику спинов электронов. Такие системы, играют основную роль в современной нано-электронике и спинтронике. Они также проявляются в астрофизических объектах находящихся в экстремальных условиях, которые содержат вырожденный электронный газ, находящийся в сильных магнитных полях. Следовательно, исследование квантовых коллективных эффектов и моделей их описания в квантовых плазмopodobных средах является актуальной проблемой, как с фундаментальной точки зрения, так и основа современных технологических применений. Вторым классом физических объектов, рассмотренным в работе, являются квантовые газы ультра холодных нейтральных атомов. При этом основной акцент сделан на моделях атомов с полуцелым спином. Наряду с динамикой фермионов рассмотрены атомарные бозон-фермионные смеси и модели их описания для различных типов атомов. После экспериментального открытия конденсата Бозе-Эйнштейна в парах щелочных металлов в 1995 году, за что, в 2001 году была присуждена Нобелевская премия по физике, сформировалось и продолжает активно

развиваться научная область по теоретическому и экспериментальному исследованию ультрахолодных бозонов, фермионов и их смесей.

Цель и задачи работы

Основная цель диссертационной работы – получение, исследование и применение макроскопических моделей квантовых систем выведенных исходя из микроскопической динамики квантовых частиц. Для достижения основной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать аналитический метод описания макроскопических квантовых процессов, где макроскопические функции определены через многочастичную микроскопическую волновую функцию, что позволит получить макроскопические уравнения, основанные на точной микроскопической динамике. *Простейшей макроскопической функцией является распределение частиц в трёхмерном физическом пространстве координат -- скалярное поле концентрации частиц (числа частиц в единице объёма).* Это приводит к тому, что искомые системы уравнений имеют формальное сходство с уравнениями гидродинамики.

2. Получить замкнутые системы макроскопических уравнений для квантовых плазмоподобных сред, *в форме уравнений эволюции макроскопических полей различной тензорной размерности, принимающих вид уравнений квантовой гидродинамики,* в которых динамика спина проявляется наряду с взаимодействием зарядов частиц системы.

3. Дать вывод систем уравнений для коллективных эффектов в ультра-холодных атомарных квантовых газах в форме уравнений квантовой гидродинамики. Рассмотреть различные приближения для моделей описания фермионов, бозонов и бозон-фермионных смесей.

4. Изучить коллективные эффекты в квантовых газах и в квантовых плазмоподобных средах:

* рассмотреть вклад квантовых эффектов в волновые процессы в плазмоподобных средах;

- * исследовать спиновую динамику в вырожденном спин-поляризованном электронном газе при рассмотрении системы электронов как двух подсистем частиц с различными проекциями спина и вычислить характеристики объёмных и поверхностных волн;
- * рассмотреть солитоны в частично спин-поляризованных вырожденных плазмоподобных средах;
- * исследовать волны в квантовых газах, спектры коллективных возбуждений;
- * рассмотреть возможность возникновения новых волновых эффектов (новых типов солитонов) в квантовых газах при рассмотрении обобщенных моделей квантовых газов учитывающих эффекты, не описываемые в приближении среднего (главного) поля.

Объект и предмет исследования

Объектами исследования являются ультра-холодные атомарные квантовые газы фермионов, бозонов и бозон-фермионных смесей, а также вырожденные плазмоподобные среды. **Предметами** исследования являются волновые процессы в ультра-холодных атомарных квантовых газах и вырожденных плазмоподобных средах, методы описания коллективных процессов в этих средах и методика систематического получения моделей с различной требуемой степенью точностью.

Методология диссертационного исследования заключается в проведении аналитических и численных расчетов, разработке математических моделей, их верификации на известных теоретических моделях и предсказаниях, получении и интерпретации результатов. Численный анализ получаемых аналитических выражений проводился на основе пакета Wolfram Mathematica.

Научная новизна

В диссертационной работе впервые получены следующие научные результаты:

1. Развита квантово-гидродинамический метод для ультрахолодных газовых систем нейтральных Ферми атомов на основе их детерминированной микроскопической динамики описываемой многочастичным уравнением

Шредингера в координатном представлении. Построенный метод переводит эволюцию системы из абстрактного многомерного конфигурационного пространства, где система частиц описывается волновой функцией, в трехмерное физическое пространство, где динамика системы представлена набором материальных полей различной тензорной размерности, определенных через волновую функцию. В рамках предложенного формализма получена цепочка гидродинамических уравнений, представляющая собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Разработана процедура разложения по малому параметру, равному отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами, в интегральных слагаемых позволяющая внести информацию о радиусе взаимодействия в предложенный математический аппарат. В рамках данной процедуры получен вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих собой моменты потенциала взаимодействия между частицами. Которые являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Разработана процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых основанная на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми позволяющая получить функциональную зависимость многочастичных функций через одночастичные гидродинамические функции. В рамках данной процедуры получена замкнутая система уравнений для спин-поляризованных фермионов состоящая из уравнений эволюции концентрации, поля скоростей и давления, содержащие взаимодействие с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

4. Предложен метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных фермионов

построенный из уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса.

5. Показано, что при кинетическом описании коллективных процессов в плазмоподобных средах, эволюция спина приводит к существованию векторной функции распределения, которая входит в уравнение Власова, через слагаемое описывающее действие самосогласованного магнитного поля на магнитный момент частиц. Так же возникает уравнение эволюции векторной функции распределения, которое вместе с уравнением Власова, даёт замкнутую систему кинетических уравнений и уравнений поля.

6. Аналитически показано, что коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн как волны с относительной динамикой частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Обнаружено, что реальная часть спектра объёмных и поверхностных спин-электрон-акустических волн имеет линейную зависимость в длинноволновом пределе. Получено, что спин-электрон-акустические волны являются слабозатухающими в следствии бесстолкновительного затухания.

7. Получено, что эволюция спинов электронов в вырожденном электронном газе при учете аномального магнитного момента электрона приводит к возникновению тонкой структуры циклотронных волн состоящей из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Также получено, что возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Свойства циклотронных волн рассчитаны разработанным методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

8. Показано, что нелокальное бозон-бозонное и бозон-фермионное короткодействующее взаимодействие в бозон-фермионных смесях нейтральных

частиц находящихся при близкой к нулю температуре создает условие для уменьшения частоты акустических волн по отношению к линейному спектру. Компенсация этой дисперсии отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона как области с повышенной концентрацией в бозонной подсистеме находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

Теоретическая и практическая значимость работы

Развитые в диссертации методы могут быть использованы для построения новых замкнутых теоретических моделей коллективных процессов в квантовых системах, на пути дальнейшего обобщения развитых моделей, так и при изучении других физических систем. Разработанные в диссертации кинетические и гидродинамические модели квантовых физических систем могут широко применяться для расчета стационарных и нестационарных физических процессов в системах большого числа взаимодействующих частиц. Предсказанные явления, полученные для их описания аналитические соотношения и численные решения полученных уравнений, могут непосредственно использоваться при разработке технологий создания приборов и устройств, функционирующих на основе учета поляризации спинов в плазмоподобных средах, в частности спинтроники, а также при применении квантовых газов для развития новых методов передачи информации.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-32-00886 и 20-02-00476). Полученные результаты могут представлять научный и практический интерес для ряда научно-исследовательских организаций и институтов РАН, таких как МФТИ, ИОФАН, МИРЭА, ФИАН, МИЭТ и т.д.

Положения выносимые на защиту

1. Детерминированная микроскопическая динамика, описываемая многочастичным уравнением Шредингера в координатном представлении, приводит к методу описания эволюции системы из абстрактного многомерного конфигурационного пространства, где система частиц описывается волновой функцией, в трехмерное физическое пространство, где динамика системы

представлена набором материальных полей различной тензорной размерности, определенных через волновую функцию. Предложенный формализм возникает в виде цепочки гидродинамических уравнений, представляющей собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Процедура разложения по малому параметру, равному отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами, в интегральных слагаемых позволяет внести информацию о радиусе взаимодействия в предложенный математический аппарат. Вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих собой моменты потенциала взаимодействия между частицами возникает в уравнениях гидродинамики, которые являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых основана на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми приводит к функциональной зависимости многочастичных функций через одночастичные гидродинамические функции. В рамках данной процедуры возникает замкнутая система уравнений для спин-поляризованных фермионов состоящая из уравнений эволюции концентрации, поля скоростей и давления, содержащие взаимодействие с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия.

4. Метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных фермионов построен из уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы

изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса.

5. Коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн как волны с относительной динамикой частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Реальная часть спектра объёмных и поверхностных спин-электрон-акустических волн является линейным в длинноволновом пределе. Спин-электрон-акустические волны демонстрируют бесстолкновительное затухание малое в сравнении с их частотой.

6. Эволюция спинов электронов в вырожденном электронном газе при учете аномального магнитного момента электрона приводит к возникновению тонкой структуры циклотронных волн состоящей из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Свойства циклотронных волн рассчитаны разработанным методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

7. Нелокальное взаимодействие в смесях нейтральных частиц, находящихся при близкой к нулю температуре, создает условие для уменьшения частоты, акустических волн, по отношению к линейному спектру. Компенсация этой дисперсии отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона, как области с повышенной концентрацией в бозонной подсистеме находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

Степень достоверности и апробация результатов

Представленные в диссертационной работе результаты получены с использованием современных методов теоретической и *математической* физики. Часть полученных находится в хорошем согласии с теоретическими исследованиями других научных групп, их достоверность также не вызывает сомнения. Кроме того, в диссертационной работе, предложены новые аналитические модели и предсказан ряд новых эффектов. Эти результаты также

можно считать достоверными, так как они получены в рамках тех же методов и приближений, что и результаты, находящиеся в согласии с исследованиями других научных групп.

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях по проблемам физики плазмы, физики конденсированного состояния и оптики, и научных семинарах. Основные результаты диссертационной работы были представлены лично автором на следующих международных конференциях:

- Andreev P. A., *Hydrodynamic and kinetic modeling of the spin-electron acoustic waves in spin-1/2 quantum plasmas*, Joint ICTP-IAEA College on Plasma Physics, 29 October - 09 November, Trieste, Italy, 2018.
- Andreev P. A., *On a formation of the superconductive state due to Cooper pair formation via the quantum of spin-electron acoustic waves in the partially spin-polarized electron gas*, Conference on Multi-Condensate Superconductivity and Superfluidity in Solids and Ultracold Gases, May 14-18, Trieste, Italy, 2018.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Separated spin evolution of electrons: Which new effects we can find from the Pauli equation?*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Model of spin-1/2 electron-positron plasmas: The role of the annihilation interaction*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Quantum plasmas beyond the quantum Bohm potential*, International Scientific Spring – 2015, March 16-20, Islamabad, Pakistan, 2015.
- Kuz'menkov L. S., Andreev P. A., *Classic hydrodynamic and kinetic formalism as averaging of delta-functional particle images*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Spin waves and spin instabilities in quantum plasmas*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.

- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Ivanov A. Yu., *Semi-relativistic hydrodynamics of three-dimensional and low-dimensional quantum plasmas*, First ICTP-NCP International College on Plasma Physics, November 11-15, Islamabad, Pakistan, 2013.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Mahajan S. M., Asenjo F., *Exchange interaction in quantum hydrodynamics*, Joint ICTP-IAEA College on plasma physics, October 1-12, Miramare - Trieste, Italy, 2012.
- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Fermi spin current contribution in spin wave spectrum of spin-1/2 fermions*, 47th Annual Meeting of The American Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 112, May 23-27, Providence, Rhode Island, United States of America, 2016.
- Андреев П.А., Спин-электрон-акустические волны и их роль в объяснении высокотемпературной сверхпроводимости, "Ломоносовские чтения", секция физики, сс. 84-86, Апрель, Москва, Россия, 2016.
- Andreev P. A., *Spin-electron acoustic waves: Linear and nonlinear regimes, and applications*, 57th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, November 16–20, Savannah, Georgia, United States of America, 2015.
- Andreev P. A., *On mechanisms of BEC stability and fermions instability for electric dipolar quantum gases with the exchange part of dipole-dipole interaction*, 46th Annual Meeting of The American Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 104, June 8-12, Columbus, Ohio, United States of America, 2015.
- Andreev P. A., *Finite size of molecules and the evolution of dipole directions in dipolar BECs*, Quo vadis Bose-Einstein-Condensation? V, December 16 – 20, Bad Honnef, Germany, 2014.
- Andreev P. A., *Separated spin-up and spin-down QHD of electrons in magnetised quantum plasmas*, Joint ICTP-IAEA College On Advanced Plasma Physics, August 18- 29, Miramare - Trieste, Italy, 2014.
- Andreev P. A., Kuzmenkov L. S., *Explicit contribution of molecule radius in dynamical properties of dipolar BECs*, 45th Annual Meeting of The American

Physical Society, Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, p. 152, June 2-6, Madison, Wisconsin, United States of America, 2014.

- Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., *Spin and electric polarization waves in dielectric systems of different dimensions*, PIERS Proceedings, pp. 1055-1059, August 19-23, Moscow, Russia, 2012.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., Труханова М.И., Волны поляризации и методы их возбуждения (*Waves of polarization and methods of their generation*), XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, плазмы и физики твердого тела, оптоэлектроники посвященная столетнему юбилею профессора Я.П. Терлецкого, Май 15-18, Москва, Россия, 2012.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., *Метод квантовой гидродинамики для поляризованного конденсата Бозе-Эйнштейна*, "Ломоносовские чтения", секция физики, с. 128-131, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Андреев П.А., Кузьменков Л.С., *Спиновые волны в плазмоподобных средах*, "Ломоносовские чтения", секция физики с. 80-82, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Андреев П.А., Иванов А.Ю., Кузьменков Л.С., *О слабoreлятивистском нелинейном уравнении Шредингера*, "Ломоносовские чтения", секция физики, с. 131-134, Ноябрь, Москва, Россия, 2011.
- Andreev P. A. and Kuz'menkov L. S., *Generation of waves by a neutron beam in a quantum plasma of nonzero spin. An influence of the spin-orbit interaction*, PIERS Proceedings, pp.1047-1051, March 20-23, Marrakesh, MOROCCO, 2011.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 41 статья в рецензируемых международных научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus. Из них 10 статей опубликованы в журналах из списка Топ-25 по импакт фактору по версии Thomson Reuters, таких как Physical Review E, Applied Physics Letters, Europhysics Letters, Chaos. Это позволяет считать, что

результаты диссертационной работы соответствуют современному мировому уровню исследований в области теоретической физики плазмы, оптики и конденсированного состояния вещества, являются обоснованными и достоверными.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии. Вклад автора в диссертационную работу является определяющим, это касается как постановки решаемых задач, так и основных идей, теоретических моделей, методов и выводов диссертационной работы.

Структура и содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения, включающего обзор литературы, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 336 странице, включает в себя 71 рисунок. Общее число ссылок на литературные источники составляет 326. Каждая глава включает вступительную часть, описывающую основные задачи главы и содержит краткое содержание главы. Каждая глава содержит заключительный параграф посвященный формулировке основных результатов и выводов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, поставлена цель и сформулированы задачи работы, указана её научная новизна, научная и практическая значимость, дана оценка степени достоверности результатов и личного вклада автора, представлена структура и краткое содержание работы. Также представлен обзор литературы, посвященный обзору современного состояния проблемы по теме диссертационной работы. Представлено обсуждение экспериментальных и теоретических работ посвященных физическим принципам получения ультрахолодных атомарных квантовых газов и вырожденных плазмopodobных сред, формирования и эволюции коллективных процессов в таких системах, методов теоретического описания равновесных

структур и волновых процессов. Особое внимание уделяется развитию гидродинамических и кинетических методов описания плазмopodobных сред и квантовых газов и их особенностей для классических и квантовых систем.

Первая глава посвящена квантовым моделям коллективных процессов в плазмopodobных средах. Изложение сфокусировано на системах электронов при низких температурах. Особое внимание уделяется спин-поляризованным состояниям системы электронов и динамике спинов электронов. Представленные модели справедливы для произвольной (нерелятивистской) температуры. Однако основные выводы сделаны в режиме, когда тепловыми эффектами можно пренебречь и электронный газ рассматривается как полностью вырожденный газ. Представлены выводы уравнений гидродинамики и уравнений физической кинетики, учитывающие различные квантовые эффекты, включая эволюцию спина. Как к квантовой гидродинамике, так и к квантовой кинетике электронного газа развито два подхода. В одном из них электроны рассмотрены в традиционной манере как единая система или одна “жидкость”. Во втором подходе электроны рассматриваются как совокупность двух подсистем: электроны со спином (проекцией спина) “вверх” и электроны со спином “вниз”. Такой подход получил название гидродинамика/кинетика электронов с отдельной спиновой эволюцией. Модели с отдельной спиновой эволюцией следуют из структуры уравнения Паули, описывающего микроскопическую квантовую динамику электрона и состоящего из двух уравнений записанных в виде одного матричного уравнения.

Глава начинается с изложения основ метода квантовой гидродинамики. Суть метода заключается в формулировке квантовой механике в форме уравнений эволюции макроскопических наблюдаемых функций описывающих коллективную динамику квантовых частиц. При этом макроскопические уравнения эволюции строго следуют из микроскопического многочастичного уравнения Шредингера (Паули) в координатном представлении. Для вывода системы уравнений требуется определить тип рассматриваемой физической системы и записать соответствующий гамильтониан в явном виде. Выбрана

электрон-позитронная плазма, рассмотренная в квазистатическом приближении (взаимодействия содержащие оператор импульса, такие как спин-орбитальное взаимодействие, отбрасываются и рассматриваются отдельно в заключительной части первого параграфа). Т.е. рассмотрены кулоновское и спин-спиновое взаимодействия между частицами. Кроме того, учтено взаимодействие Дарвина, представляющее собой квантово-релятивистскую добавку к кулоновскому взаимодействию и возникающая как квазистатическая часть гамильтониана Брейта. Электрон-позитронное взаимодействие отличается от электрон-электронного взаимодействия, так как дополнительно возможна виртуальная аннигиляция электрон-позитронной пары с последующим распадом виртуального фотона. Это дает дополнительное квазистатическое слагаемое, влияющее, в частности, на спин-спиновое взаимодействие электрон-позитронных пар.

Простейшей функцией описывающей коллективные процессы является распределение частиц, в пространстве представленное концентрацией квантовых частиц. Концентрация частиц каждого сорта (все электроны рассматриваются как единая жидкость) определяется через многочастичную волновую функцию всей системы частиц $\psi(R,t)$ (здесь $R = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$ это вектор в $3N$ мерном конфигурационном пространстве) как квантовое среднее оператора концентрации:

$$n_a(\mathbf{r}, t) = \int \psi^\dagger(R, t) \sum_{i \in \{a\}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi(R, t) dR. \quad (1)$$

Эволюция концентрации определяется эволюцией волновой функции. Очевидно, что эволюция концентрации подчиняется уравнению непрерывности. Однако вывод уравнения непрерывности приводит к определению плотности потока частиц (плотности импульса) в терминах многочастичной волновой функции. Что позволяет получить уравнение баланса импульса, которое преобразуется в уравнение Эйлера после введения поля скоростей. Отметим, что все взаимодействия входящие в исходный гамильтониан дают вклад в уравнение Эйлера. При этом возникает набор новых функций, это тензор плотности потока

импульса и плотность импульса, а также набор двухчастичных корреляционных функций возникающих в слагаемых описывающих взаимодействие. Таким образом, возникает разветвляющаяся цепочка уравнений. Исходная модель имеет $2 \times 3N$ степеней свободы, так как рассматривается трехмерная динамика N частиц, каждая из которых может иметь две проекции спина. Концентрация, три проекции плотности импульса, плотность энергии (след тензора давления) и три проекции плотности спина это восемь основных функций используемых для моделирования основных коллективных процессов в квантовых плазмopodobных средах, что дает обобщение пятимоментного приближения на системы частиц со спином. Для этого выведены уравнения эволюции плотности спина. Выделена квантовая часть спинового тока, получен вклад спин-спинового и аннигиляционного взаимодействия в эволюцию плотности спина. Рассмотрение дальнедействующего взаимодействия позволяет ограничиться приближением самосогласованного поля и представить двухчастичные функции в виде произведения соответствующих одночастичных функций.

Уравнения гидродинамики использованы для получения уравнений эволюции гидродинамической завихренности. Завихрённость включает в себя ротор скорости для материальной части завихрёлности, индукцию магнитного поля для завихрёлности электромагнитного поля, и спиновую завихрёлность. Их сумма дает обобщенную завихрёлность. Получен вклад спиновой части аннигиляционного взаимодействия в эволюцию обобщенной завихрёлности. Показано сохранение гидродинамической спиральности для идеальной квантовой жидкости с описанными взаимодействиями.

Исследованы условия для получения макроскопического нелинейного уравнения Шредингера/Паули исходя из уравнений квантовой гидродинамики.

Сформулирована квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией. Это модель электронного газа, в которой электроны с различной проекцией спина рассмотрены как две различные жидкости. Получена пара уравнений непрерывности, в которых правая часть отлична от нуля в силу того,

что парциальные числа электронов с определенным значением спина не сохраняется:

$$\partial_t n_u + \nabla(n_u \mathbf{v}_u) = \frac{\mu_e}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x), \quad (2)$$

и

$$\partial_t n_d + \nabla(n_d \mathbf{v}_d) = -\frac{\mu_e}{\hbar} (S_x B_y - S_y B_x). \quad (3)$$

Система уравнений, очевидно, включает в себя пару уравнений Эйлера (уравнений баланса импульса). Для электронов каждого сорта имеют следующий вид:

$$m n_s (\partial_t + \mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla p_s - \frac{\hbar^2}{4m} n_s \nabla \left(\frac{\Delta n_s}{n_s} - \frac{(\nabla n_s)^2}{2n_s^2} \right) = e_s n_s \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s, \mathbf{B}] \right) + \mathbf{F}_{S,s}, \quad (4)$$

где сила спин-спинового взаимодействия

$$\mathbf{F}_{S,s} = \pm \mu n_s \nabla B_z + \frac{\mu}{2} (S_x \nabla B_x + S_y \nabla B_y) \pm \frac{m\mu}{\hbar} [(\mathbf{J}_{Mx} - \mathbf{v}_s S_x) B_y - (\mathbf{J}_{My} - \mathbf{v}_s S_y) B_x], \quad (5)$$

содержит тензор спинового тока

$$J_M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} S^\alpha (v_\uparrow^\beta + v_\downarrow^\beta) - \varepsilon^{\alpha\gamma z} \frac{\hbar}{4m} \left(\frac{\partial^\beta n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\partial^\beta n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) S_\gamma. \quad (6)$$

Эволюция спина требует наличия уравнения эволюции плотности спина. Парциальные концентрации электронов и парциальные поля скоростей относятся к частицам с определенной проекцией спина. Однако, плотность спина не содержит индексов относящихся к проекции спина так как плотность спина описывает все электроны одновременно. Одна из проекций спиновой плотности полностью выражается через парциальные концентрации $S_z = n_u - n_d$. Две другие проекции спиновой плотности являются независимыми переменными и для них получены уравнения эволюции в приближении самосогласованного поля

$$\partial_t S_x + \frac{1}{2} \nabla [S_x (\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)] - \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_y \left(\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\downarrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_z S_y - B_y (n_\uparrow - n_\downarrow)), \quad (7)$$

и

$$\partial_t S_y + \frac{1}{2} \nabla [S_y (\mathbf{v}_\uparrow + \mathbf{v}_\downarrow)] + \frac{\hbar}{4m} \nabla \left(S_x \left(\frac{\nabla n_\uparrow}{n_\uparrow} - \frac{\nabla n_\downarrow}{n_\downarrow} \right) \right) = \frac{2\gamma_e}{\hbar} (B_x (n_\uparrow - n_\downarrow) - B_z S_x). \quad (8)$$

Рассмотрены уравнения физической кинетики для систем частиц со спином. Получено обобщение уравнения Власова содержащее спин-спиновой взаимодействие электронов. Векторная функция распределения $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, представлена наряду с традиционной скалярной функцией распределения $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, для кинетического описания коллективной спиновой динамики:

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f + \nabla_{\mathbf{r}}^\alpha B^\beta \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^\alpha S^\beta = 0, \quad (9)$$

и

$$\partial_t S^\alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} S^\alpha + q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} S^\alpha + \nabla_{\mathbf{r}}^\beta B^\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^\beta f - \frac{2\mu_e}{\hbar} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S^\beta B^\gamma = 0. \quad (10)$$

Дан их микроскопический вывод исходя из уравнения Паули. Также рассмотрен режим отдельной спиновой эволюции для квантовой кинетики. Этот режим приводит к соответствующей модификации представленных здесь кинетических уравнений.

Во **второй главе** рассмотрены квантово-гидродинамические модели ультрахолодных нейтральных атомарных фермионов и бозон-фермионных смесей. Вывод модели начинается с определения концентрации частиц в терминах многочастичной волновой функции. Однако система нейтральных атомов описывается сравнительно простым гамильтонианом, состоящим из суммы операторов кинетической энергии отдельных частиц, суммы потенциальных энергий нейтральных частиц во внешнем поле, и суммы потенциальных энергий парного взаимодействия. Однако, явный вид потенциала взаимодействия остается неопределенным. Уравнение Шредингера позволяет определить уравнение эволюции концентрации, которым очевидно является уравнение непрерывности. При выводе уравнения непрерывности выводится определение плотности импульса системы частиц в терминах многочастичной волновой функции. Используя это определение можно получить уравнение эволюции плотности импульса. Фактически, эволюция импульса вызвана двумя

группами слагаемыми. Первое, это дивергенция плотности потока импульса. Второе, это плотность силы взаимодействия с внешним полем и взаимодействия между частицами. Плотность импульса использована для введения поля скоростей. Построены функции описывающее отклонение скоростей частиц от локального среднего значения. Принципиальное значение имеет рассмотрение плотности силы взаимодействия фермионов.

Так как явный вид потенциала не известен, то нет возможности получить “уравнения поля”. Однако, возникает необходимость рассмотреть ключевую особенность потенциала взаимодействия нейтральных частиц, это короткодействие этого взаимодействия. Таким образом, представлен анализ поля силы

$$\mathbf{F} = -\int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (\nabla_i U(\mathbf{r}_{ij})) \psi^+(R,t) \psi(R,t). \quad (11)$$

Это общее выражение, записанное через многочастичную волновую функцию. Так как потенциал отличен от нуля только при малых расстояниях между частицами. Следовательно, всё подынтегральное выражение отлично от нуля при малых расстояниях между частицами. Это дает возможность выполнить разложение функций находящихся под интегралом по малому параметру – относительному расстоянию между частицами (безразмерным малым параметром выступает радиус взаимодействия, отнесенный к среднему расстоянию между частицами существующий в достаточно разреженных системах). Аргумент дельта функции и соответствующие аргументы волновой функции требуют предварительной замены переменной для выделения относительного расстояния между частицами. Такое разложение справедливо как для бозонов, так и для фермионов, а также для парного взаимодействия частиц разного сорта, включая различные изотопы одного химического элемента. Однако, свойства симметрии различны для описанных случаев. Все три режима изучены и представлены при вычислении поля силы взаимодействия ультрахолодных атомов. Более того, при анализе Бозе атомов находящихся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна учтена возможность анизотропии

потенциала короткодействующего взаимодействия. Численный анализ спектра резонансов Фешбаха выполненный в литературе для конденсата Бозе-Эйнштейна атомов редкоземельных элементов показывает, что такая анизотропия необходима для описания экспериментально наблюдаемых результатов.

Отметим, ключевые детали разработанной методики вычисления поля силы на примере системы полностью спин-поляризованных вырожденных фермионов со спином 1/2. В результате разложения получается, что поле силы оказывается дивергенцией симметричного тензора – тензора квантовых напряжений. В нулевом порядке по малому параметру получено, что поле силы и соответствующий тензор напряжений равны нулю. Такой же результат справедлив для всех четных членов разложения. Поэтому рассмотрены первые два нечетных члена разложения возникающих в первом и в третьем порядках по радиусу взаимодействия. Прежде всего, представим тензор квантовых напряжений, возникающий в первом порядке по радиусу взаимодействия

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j,i \neq j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{|\mathbf{r}_{ij}|} \frac{\partial U(\mathbf{r}_{ij})}{\partial |\mathbf{r}_{ij}|} \psi^+(R, t) \psi(R, t). \quad (12)$$

Отметим справедливость этого выражения как для бозонов так и для фермионов. Тем более, что для фермионов находящихся в одном спиновом состоянии, это выражение обращается в ноль. Отметим, что при рассмотрении бозонов дальнейший анализ показанного слагаемого приводит к уравнению Гросса-Питаевского. Возвращаясь к фермионам, получим, что нетривиальный вклад взаимодействия возникает в третьем порядке по радиусу взаимодействия и имеет следующий вид

$$\sigma_{ff}^{\alpha\beta} = \frac{m_f}{2\hbar^2} \Upsilon_{2,ff} \left(\delta^{\alpha\beta} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m_f} n_f^{\frac{8}{3}} \right). \quad (13)$$

В этом выражении уже использовано уравнение состояния для давления в виде давления Ферми. Кроме того, выражение содержит константу взаимодействия

$$\Upsilon_2 = \frac{4\pi}{15} \int r^5 \frac{\partial U(r)}{\partial r} dr. \quad (14)$$

В каждом порядке по радиусу взаимодействия возникает своя константа взаимодействия. Таким образом, неизвестность потенциала взаимодействия редуцируется к набору неизвестных констант взаимодействия которые можно рассмотреть как экспериментально определяемые параметры.

Система частично спин-поляризованных вырожденных фермионов может быть рассмотрена как система двух сортов частиц. Выше рассмотрена квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией в системах электронов, где дальнедействующее взаимодействие играет основную роль. Используя результаты вычисления поля силы, была построена квантовая гидродинамика нейтральных атомарных фермионов с отдельной спиновой эволюцией на примере фермионов со спином $1/2$. При рассмотрении поля силы взаимодействия получено, что поле силы имеет ненулевые значения, как в первом, так и в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

При выводе уравнений эволюции функций описывающих коллективные процессы в квантовых системах возникают уравнение структурно похожие на уравнения гидродинамики. Основные черты многих явлений в системах бозонов и фермионов могут быть описаны на основе двух первых уравнений гидродинамики. Это уравнение непрерывности и уравнение баланса импульса. Различные классы физических систем приводят к различным приближениям использованных для замыкания системы уравнений. Так, при анализе динамики систем заряженных частиц, использовано приближение самосогласованного поля, охватывающее главные эффекты в системах частиц с дальнедействующим взаимодействием. В случае разреженных систем нейтральных частиц выполнено разложение по радиусу взаимодействия. Это приближения позволяют рассмотреть поле силы. Однако замыкание системы уравнений на уровне уравнения Эйлера требует дополнительных приближений для рассмотрения уравнения состояния для давления. К примеру, при исследовании вырожденного электронного газа используется уравнение состояния в виде давления Ферми полученного для равновесного состояния. Однако такой подход приводит к фазовой скорости, в частности для ленгмюровских волн, отличной от

результатов получаемой из кинетической теории. Существуют модифицированные уравнения состояния, корректирующие коэффициент, определяющий фазовые скорости волн. Такая корректировка справедлива в линейном по малой амплитуде приближении. Систематическое описание линейных и нелинейных процессов требует наличия уравнения эволюции давления, что расширяет систему уравнений гидродинамики. Поэтому соответствующая модель получена для вырожденного газа атомарных фермионов, что потребовало вычисления соответствующего выражения для тензора потока силы.

Ультрахолодные бозоны, находящиеся в состоянии конденсате Бозе-Эйнштейна проявляют явление, названное квантовыми флуктуациями. Оно выражается в появлении частиц в возбужденных состояниях вследствие взаимодействия между частицами. Так что малая доля частиц находится в возбужденных состояниях малой энергии. Последовательное развитие квантовой гидродинамики бозонов позволяет получить модель, учитывающую квантовые флуктуации и также является примером расширенной гидродинамической модели. Наличие частиц в возбужденных состояниях приводит к отличному от нуля кинетическому давлению, тогда как строго для системы частиц в конденсате Бозе-Эйнштейна кинетическое давление равно нулю. Так как отличное от нуля давление вызвано взаимодействием частиц находящихся в состоянии с наименьшей энергией, то было получено уравнение эволюции давления системы бозонов и рассмотрен предел нулевой температуры. Было показано, что вклад взаимодействия, вычисленный в первом порядке по радиусу взаимодействия, равен нулю. Однако в уравнение входит дивергенция тензора потока давления. Поэтому вычислено уравнение эволюции тензора потока давления и вычислен вклад взаимодействия в первом порядке по радиусу взаимодействия.

Диполь-дипольное взаимодействие находится в центре теоретических и экспериментальных исследований квантовых газов, как бозонов, так и фермионов. Представлен анализ уравнений коллективной динамики для

точечных частиц с дипольным моментом. Также рассмотрены модели, представленные в литературе для исследования дипольных квантовых газов относящиеся к системам частиц конечного радиуса (атомов и молекул). Выведены уравнения гидродинамики для конденсата Бозе-Эйнштейна учитывающие дипольную часть квантовых флуктуаций, которая проявляется в уравнении эволюции потока давления.

Таким образом, в главе II разработан широкий класс моделей ультрахолодных газов дополняющих и уточняющих друг друга.

Третья глава посвящена коллективным процессам в квантовой плазме и плазмоподобных средах. Основное внимание уделено отдельной спиновой эволюции электронов. Квантовая гидродинамика с отдельной спиновой эволюцией и квантовая кинетика с отдельной спиновой эволюцией выведенные в главе I использованы для обнаружения и исследования новых волновых процессов в системах заряженных частиц.

Нетривиальное проявление отдельной спиновой эволюции возникает, когда система частиц поляризована по спину. Таким образом, электроны со спином вверх и электроны со спином вниз имеют разные равновесные концентрации. При гидродинамическом анализе это также приводит к различным значениям парциальных давлений. Тепловые эффекты нарушают ориентацию спина электронов. Поэтому, здесь рассмотрен вырожденный электронный газ и давление Ферми рассмотрено в качестве парциальных давлений. Изучение волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю приводит к появлению двух новых волновых решений по сравнению с безспиновой плазмой. Возникает дополнительная поперечно поляризованная (по напряженности электрического поля) электромагнитная волна с циркулярной поляризацией. Такая волна может быть получена в одножидкостной модели электронов плазмы с учетом уравнения эволюции плотности спина. Оригинальное решение, связанное с отдельной спиновой эволюцией возникает как продольная волна. В рассматриваемом случае, при неподвижных ионах, существует только одна безспиновая продольная волна, это

ленгмюровская волна. Наряду с ней появляется волна, названная спин-электрон-акустическая волна. Это волна с линейной дисперсионной зависимостью в пределе малых значений волнового вектора. Однако, фазовая скорость этой волны значительно больше фазовой скорости ионного звука, что позволяет анализировать её в пределе неподвижных ионов.

Вопрос о возможности существования спин-электрон-акустических волн включает в себя вычисление значения декремента бесстолкновительного затухания, аналогичного затуханию Ландау для ленгмюровских волн. С этой целью получено решение системы кинетических уравнений с отдельной спиновой эволюцией для продольных волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Получен декремент бесстолкновительного затухания спин-электрон-акустических волн и показано, что декремент затухания мал по сравнению с частотой спин-электрон-акустических волн.

Полученный результат показывает возможность наблюдения спин-электрон-акустических волн. Поэтому возникает необходимость дальнейшего их исследования. Получены спектры спин-электрон-акустических волн распространяющихся под углом к внешнему магнитному полю. В этом случае возникает пара решений существующих наряду с ленгмюровской волной и волной Трайвелписа-Гоулда. Одна спин-электрон-акустическая волна (остающаяся в пределе волн распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю) имеет частоты в диапазоне от нуля до электронной циклотронной частоты. Её спектр выходит линейно из нулевого значения частоты при нулевом волновом векторе. Вторая спин-электрон-акустическая волна имеет частоты, превышающие электронную циклотронную частоту. Её частота равна электронной циклотронной частоте при нулевом значении волнового вектора. Далее, при малых значениях волнового вектора идет линейный участок спектра. Эта волна остается в пределе распространения волн перпендикулярно магнитному полю. Также рассмотрен вклад спиновой поляризации в спектры ленгмюровской волны и волны Трайвелписа-Гоулда.

Свойства спин-электрон-акустических волн были изучены для квазинейтральной вырожденной электрон-позитрон-ионной плазмы. Таким образом, концентрации электронов и позитронов различны. Что, в частности, приводит к различной спиновой поляризации электронов и позитронов. Такая система рассмотрена как четырех компонентная система частиц, при условии неподвижности ионов. Так как спин-электрон акустическая волна возникает в системе позитронов, наряду с системой электронов, то количество волн возрастает. Так, при распространении волн параллельно внешнему магнитному полю получаем четыре решения. Два из них существуют при условии пренебрежения отдельной спиновой эволюции и рассмотрении электронов как одной жидкости, а позитронов как второй единой жидкости. Эти волны это ленгмюровская волна и позитрон-акустическая волна, которые хорошо изучены в литературе. Отдельная спиновая эволюция приводит к двум спин-электрон-акустическим волнам. Аналогичная картина получается при распространении волн перпендикулярно внешнему магнитному полю. Число волновых решений удваивается при распространении волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю.

Исследована возможность возникновения поверхностных спин-электрон-акустических волн. Получено соответствующее решение и изучен спектр. Показана возможность «пересечения» ветвей спектра поверхностной ленгмюровской волны и поверхностной спин-электрон-акустической волны и соответствующей гибридизации спектра в области больших значений волнового вектора.

Известно, что спектр ленгмюровской волны в двумерном электронном газе значительно отличается от её спектра в трехмерном электронном газе. В двумерном случае вместо постоянной частоты при малых значениях волнового вектора получаем линейную зависимость квадрата частоты от волнового вектора. Такое значительное влияние «геометрии» системы на свойства коллективных процессов в электронном газе приводит к вопросу о спектре спин-электрон-акустических волн в двумерном электронном газе. Вычислен соответствующий

спектр и показано, что в двумерном случае дисперсионная зависимость линейна в пределе малых волновых векторов. Вычислена фазовая скорость и её зависимость от спиновой поляризации. Также изучен вклад спиновой поляризации в спектр ленгмюровских волн двумерного электронного газа.

Представленные выше волновые процессы рассмотрены в линейном приближении по малой амплитуде волнового возмущения. Поэтому, также рассмотрены нелинейные процессы, в трехмерном электронном газе. С этой целью использован метод масштабирования переменной, который позволяет рассмотреть нелинейную эволюцию возмущений малой амплитуды. Показана возможность существования нового солитонного решения обусловленного относительной динамикой электронов с различной проекцией спина. Скорость распространения возмущения, возникающая в первом порядке по малой амплитуде, совпадает с длинноволновой частью спектра спин-электрон-акустических волн. Таким образом, обнаружен спин-электрон-акустический солитон. Представленные выше результаты главы III получены на основе уравнений гидродинамики, за исключением затухания Ландау спин-электрон-акустических волн описанного в параграфе 2.

Спин-электрон-акустическая волна возникает как продольная волна, которая может быть описана в квазиэлектростатическом приближении, т.е. используя уравнение Пуассона в качестве уравнения для электрического поля. Такая модель является полноценной при распространении продольных волн параллельно внешнему магнитному полю, где магнитное поле не оказывает влияния на движение частиц участвующее в распространении волны. Однако при распространении волн перпендикулярно внешнему магнитному полю электрическое поле волны направляет частицы перпендикулярно внешнему магнитному полю. Магнитное поле искривляет их траекторию, что в свою очередь вызывает поперечное электрическое поле. В итоге возникает продольно-поперечная необыкновенная волна. Такой механизм имеет место при пренебрежении спиновыми эффектами. Он же дает вклад в свойства спин-электрон-акустических волн распространяющихся перпендикулярно внешнему

магнитному полю. Дано описание свойств необыкновенных спин-электрон-акустических волн посредством гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией и кинетики с отдельной спиновой эволюцией.

Кинетика с отдельной спиновой эволюцией разработана как дальнейшее развитие кинетической модели заряженных частиц со спином. Где спин-спиновое взаимодействие приводит к дополнительному слагаемому в уравнении Власова (для скалярной функции распределения) которое, в частности, содержит векторную функцию распределения (функцию распределения спина). Соответственно, модель содержит второе кинетическое уравнение для векторной функции распределения. Такая модель позволяет исследовать значительную часть спиновых явлений, оставляя спин-электрон акустические волны при соответствующем выборе равновесной функции распределения.

Получен общий вид тензора диэлектрической проницаемости для волн, распространяющихся под произвольным углом по отношению к внешнему магнитному полю. Дисперсионные уравнения получены в предельных случаях волн распространяющихся параллельно и перпендикулярно внешнему магнитному полю. Показано, что наиболее значительный вклад спиновая динамика дает в свойства линейно поляризованных волн распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю. В этом режиме, при отсутствии спиновой динамики, возникают циклотронные волны. Отметим, чтобы не возникло неопределенности, что продольно-поперечные волны, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю, включающее необыкновенные волны, также включают в себя знаменитые моды Бернштейна. Моды Бернштейна и циклотронные волны имеют частоты близкие к $n|\Omega_e|$ (частоты кратные электронной циклотронной частоте $|\Omega_e| = eB_0 / m_e c$). Для каждого значения натурального числа n существует ветвь циклотронных волн и волн Бернштейна. Однако эти волны отличаются поляризацией и деталями спектра.

Вернемся к влиянию спиновой динамики на спектр циклотронных волн. Эффект проявляется при учете аномального магнитного момента электрона. Выделим два ключевых проявления.

Первое, возникновение “тонкой структуры” циклотронных волн. Т.е. каждая циклотронная волна перестраивается в группу трех волн. Рассмотрим структуру каждого триплета. Одна, центральная мода, представляющая собой, модифицированную спиновыми эффектами, циклотронную волну, локализована в окрестности частоты кратной циклотронной частоте. Две дополнительные волны возникают около значений частоты смещенных относительно $n|\Omega_e|$. Величина смещения связана с аномальной частью магнитного момента электрона $|\Omega_e - \Omega_\mu| = 0.001 \cdot |\Omega_e|$, где $\Omega_\mu = 1.001 \cdot \Omega_e$ это циклотронная частота вращения магнитного момента в магнитном поле. Одна смещена в положительном, а вторая смещена в отрицательном направлении.

Второе, это возникновение “спиновой-циклотронной” волны нулевого порядка. Она локализована в окрестности частоты $0.001 \cdot |\Omega_e|$. Таким образом, это решение можно рассматривать как новое самостоятельное решение. Так как нет классической циклотронной волны в этом диапазоне частот.

Таким образом, различные спиновые эффекты, в вырожденных плазмopodobных системах, рассмотрены на основе разработанных и описанных выше квантово-гидродинамической и квантово-кинетических моделей.

В четвертой главе представлено описание волновых процессов в атомарных квантовых газах. Рассмотрена линейная и нелинейная эволюция коллективных возбуждений в системах фермионов, бозонов, и бозон-фермионных смесей.

Получен спектр коллективных возбуждений полностью спин-поляризованных фермионов. Рассмотрены различные режимы. Представлен режим, когда для давления использовано уравнение состояния в виде давления Ферми. Рассмотрен случай, когда возмущения давления получены из уравнения эволюции давления. Для полностью спин поляризованных фермионов взаимодействие проявляется, начиная с третьего порядку по радиусу

взаимодействия, как в уравнении Эйлера, так и в уравнении эволюции давления. Рассмотрен случай, когда тензор равновесного давления изотропен и пропорционален скаляру, умноженному на символ Кронекера. Отдельно представлено вычисление спектра, когда равновесное давление является анизотропным. Соответственно тензор давления, будучи диагональным, имеет разные значения на диагонали. Вклад взаимодействия частиц, выраженный через константу взаимодействия, в спектры коллективных возбуждений оказывается различным в перечисленных режимах. Рассмотрена неограниченная среда ультрахолодных фермионов наряду с системой фермионов находящейся в квазиодномерной параболической ловушке.

Представлено вычисление спектра коллективных возбуждений в бозон-фермионных смесях. Взаимодействие между всеми типами частиц рассмотрено до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Система бозонов находится в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна и предполагается, что квантовые флуктуации отсутствуют. Эффекты, связанные с диполь-дипольным взаимодействием, не учитываются в данном случае. Однако принимается во внимание анизотропия короткодействующего взаимодействия между Бозе атомами. Эта анизотропия проявляется в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

Вырожденные фермионы рассматриваются в спин поляризованном состоянии. При описании фермионов учитывается, что давление удовлетворяет уравнению баланса давления содержащее взаимодействие между фермионами в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Взаимодействие с бозонами не входит в уравнение баланса давления. Давление фермионов в равновесном состоянии предполагается изотропным. В этом случае спектр коллективных возбуждений состоит из двух акустических волн, дисперсионные закономерности которых получены. При этом продемонстрирован вклад описанных выше взаимодействий в полученные дисперсионные зависимости.

Диполь-дипольное взаимодействие между магнитными моментами атомов или электрическими дипольными моментами молекул рассматривается как

дальнодействующее взаимодействие и поэтому к описывающим его слагаемым применяется приближение самосогласованного поля. Показано влияние диполь-дипольного взаимодействия на спектры коллективных возбуждений ультрахолодных бозонов и фермионов. Особенностью вклада диполь-дипольного взаимодействия в спектры является его анизотропия.

При рассмотрении нелинейных возбуждений в конденсате Бозе-Эйнштейна или в вырожденных фермионах существует небольшой набор фундаментальных солитонных решений. При описании бозонов нелинейность в нелинейном уравнении Шредингера (уравнении Гросса-Питаевского) в первом порядке по радиусу взаимодействия возникает вследствие взаимодействия между атомами. Соответственно притяжение и отталкивание приводит к различным знакам константы взаимодействия. Что проявляется в различных типах солитонных решений. При притяжении между бозонами в конденсате Бозе-Эйнштейна возникает солитон повышенной концентрации, называемый ярким солитон. При отталкивании между Бозе атомами коллективная динамика приводит к тёмному солитону, что означает солитон пониженной концентрации.

При рассмотрении фермионов находящихся в одном спиновом состоянии можно приближенно вывести нелинейное уравнение Шредингера для эффективной макроскопической волновой функции. Нелинейность возникает из-за принципа Паули, выражающимся в давлении Ферми. Таким образом, знак коэффициента в нелинейном слагаемом фиксирован. Давление Ферми дает эффективное отталкивание, что выражается в существовании темного солитона.

Показано, что наличие дополнительных слагаемых описывающих взаимодействие в конденсате Бозе-Эйнштейна за рамками приближения Гросса-Питаевского приводит к существованию нового типа солитона. Приближение Гросса-Питаевского соответствует первому порядку по радиусу взаимодействия. Тогда как поле силы в третьем порядке по радиусу взаимодействия, обобщающее приближение Гросса-Питаевского, создает условия для существования нового решения. Оно имеет вид солитона сжатия (области повышенной концентрации) в конденсате Бозе-Эйнштейна с отталкивающим взаимодействием между

атомами. Такое решение, называемое яркоподобный солитон, возникает из-за преобладания поля силы в третьем порядке по радиусу взаимодействия над квантовым потенциалом Бома. Исследовано влияние анизотропии короткодействующего взаимодействия Бозе атомов на свойства яркоподобного солитона. Кроме того, исследованы характеристики яркоподобного солитона в бозон-фермионных смесях. Изучено влияние бозон-фермионного и фермион-фермионного взаимодействий на свойства этого солитона.

Показано существование яркого солитона в атомарном конденсате Бозе-Эйнштейна с отталкивающим взаимодействием между частицами возникающее из-за квантовых флуктуаций в системе бозонов. Как было описано в Главе II, квантовые флуктуации в конденсате Бозе-Эйнштейна могут быть учтены через ненулевое давление и поток давления, обусловленные взаимодействием частиц находящихся в состоянии конденсата. В частности диполь-дипольное взаимодействие приводит к возникновению квантовых флуктуаций. В этом случае возникает механизм формирования солитона. А именно, при условии, что вклад флуктуаций, в уравнение Эйлера, проявляющийся через эффективное кинетическое давление превышает вклад квантового потенциала Бома и короткодействующего взаимодействия возникающего в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

Наряду с отдельной спиновой эволюцией заряженных фермионов со спином $1/2$, которая описана выше, рассмотрена отдельная спиновая эволюция нейтральных вырожденных фермионов. Взаимодействие между фермионами с разной проекцией спина рассмотрено в первом порядке по радиусу взаимодействия. Представлено соответствующее нелинейное уравнение Паули и следующие из него уравнения квантовой гидродинамики. Рассмотрены возможные равновесные состояния такой системы под влиянием эффективного магнитного поля создающего спиновую поляризацию. Изучены дисперсионные характеристики звуковых и спиновых волн в системе частично спин-поляризованных фермионов.

В **Заключении** сформулированы следующие основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Разработана методика получения макроскопических систем уравнений для квантовых систем в форме уравнений гидродинамики. Микроскопическая квантовая динамика многочастичных систем описывается уравнением Шредингера в координатном представлении в абстрактном многомерном конфигурационном пространстве. Эта модель использована для построения метода перехода к макроскопическому описанию в терминах набора материальных полей различной тензорной размерности, определенных в трехмерном физическом пространстве. Определения строятся как квантовое средние соответствующих операторов через микроскопическую волновую функцию. Основным определением является простейшая функция гидродинамической модели, а именно плотность числа частиц - концентрация. Остальные функции возникают в процессе вывода уравнений гидродинамики. В итоге, была получена цепочка гидродинамических уравнений в рамках предложенного формализма, представляющая собой систему интегро-дифференциальных уравнений для $2N$ элементов тензоров различной тензорной размерности, где N число частиц системы. Интегральными слагаемыми представлено взаимодействие между частицами среды.

2. Разработана процедура разложения по малому параметру для систем нейтральных частиц на примерах нейтральных Бозе атомов и Ферми атомов. Используемый параметр равен отношению радиуса действия потенциала короткодействующего взаимодействия нейтральных атомов, к характерному размеру макроскопических структур или среднему расстоянию между частицами. Разложение выполнено в слагаемых описывающих взаимодействие между частицами. Разложение выполнено с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия в уравнении баланса импульса, уравнении эволюции давления и, в некоторых случаях, уравнении эволюции потока давления. Рассмотрены случаи изотропного и анизотропного потенциалов взаимодействия между частицами. В каждом порядке по радиусу взаимодействия возникает

слагаемое в виде произведения двух сомножителей: один множитель содержит вклад потенциала взаимодействия, другой множитель содержит вклад многочастичных волновых функций представленный через многочастичную гидродинамическую функцию. Получен вклад взаимодействия в виде констант взаимодействия представляющих собой моменты потенциала взаимодействия между частицами. Получено, что константы взаимодействия являются коэффициентами разложения в возникающий ряд динамических функций.

3. Разработана процедура приближенного вычисления многочастичных гидродинамических функций возникающих в интегральных слагаемых. Для системы вырожденных спин-поляризованных фермионов процедура основана на введении малого параметра равного отношению энергии взаимодействия к энергии Ферми. Эта процедура позволяет получить функциональную зависимость многочастичных гидродинамических функций через одночастичные гидродинамические функции. Для систем заряженных квантовых частиц многочастичные волновые функции представлены в мультипликативном виде в приближении самосогласованного поля. Диполь-дипольное взаимодействие в системах нейтральных и заряженных частиц рассмотрено как дальнедействующее взаимодействие. При его описании использовано приближение самосогласованного поля. Эти методы позволили получить набор замкнутых систем уравнений для нейтральных спин-поляризованных вырожденных фермионов, ультрахолодных бозон-фермионных смесей, конденсата Бозе-Эйнштейна нейтральных частиц с анизотропным короткодействующим взаимодействием, точечных нейтральных частиц бозонов и фермионов обладающих дипольным моментом, квантовых плазмopodobных сред заряженных частиц со спином.

4. Предложен метод квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией для систем заряженных частично спин-поляризованных вырожденных фермионов существующих в плазмopodobных средах. Метод основан на системе уравнений эволюции парциальных концентраций и плотностей импульса частиц с определенной проекцией спина с учетом их

несохранения, вследствие, переворота спина, и уравнения эволюции плотности спина. Уравнение эволюции импульса содержит поле силы пропорциональное потоку момента силы изменяющее проекцию спина частицы и дающее механизм несохранения парциального импульса. Предложен вывод представленных уравнений.

5. Предложен метод квантовой кинетики для описания коллективных процессов в плазмоподобных средах, где эволюция спина описывается векторной функции распределения. Показано, что векторная функция распределения входит в уравнение Власова через слагаемое описывающее действие самосогласованного магнитного поля на магнитный момент частиц. Получено уравнение эволюции векторной функции распределения, которое вместе с уравнением Власова, дает замкнутую систему кинетических уравнений и уравнений поля для систем заряженных частиц со спином. Рассмотрено два варианта квантовой кинетики. Первая основана на рассмотрении каждого сорта частиц как единой системы описываемой функцией распределения. Вторым вариантом это квантовая кинетика с отдельной спиновой эволюцией, где каждый сорт заряженных спин-1/2 фермионов рассмотрен как две подсистемы, каждая из которых описывается своей скалярной функцией распределения, но одна векторная функция распределения описывает динамику спина всех частиц этого сорта.

6. Обнаружено, что коллективная динамика в системах частично спин-поляризованных заряженных вырожденных фермионов приводит к существованию спин-электрон-акустических волн. Этот результат получен в рамках предложенных методов квантовой гидродинамики с отдельной спиновой эволюцией и квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Это волны концентрации частиц одного сорта с различной проекцией спина. Таким образом, это волны материи, сопровождающиеся динамикой спина в которых происходит относительная динамика частиц одного сорта обладающих различными проекциями спина. Получены спектры для реальной части спектра объёмных и поверхностных спин-электрон-акустических волн, которые являются

линейными в длинноволновом пределе. Вычислено бесстолкновительное затухание объемных спин-электрон-акустических волн, которое мало в сравнении с действительной частью частоты. Этот результат получен в рамках предложенного метода квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией. Изучены особенности спектра спин-электрон акустических волн в электрон-позитрон-ионной плазме. Показано существование спин-электрон-акустических солитонов в электрон-ионной и электрон-позитрон-ионной плазме.

7. Показано возникновение тонкой структуры циклотронных волн в вырожденной намагниченной электрон-ионной плазмоподобной среде. Результат получен методом квантовой кинетики с отдельной спиновой эволюцией для системы заряженных спин-поляризованных частиц, где эволюция спинов электронов в вырожденном электронном газе рассмотрена при учете аномального магнитного момента электрона. Получено, что тонкая структура циклотронных волн состоит из трех ветвей для циклотронной волны каждого порядка. Показано, что возникает одиночная ветвь циклотронной волны нулевого порядка, обусловленная динамикой спина. Эта волна имеет частоту порядка одной тысячной от электронной циклотронной частоты, т.е. обусловлена отклонением аномального магнитного момента электрона от магнетона Бора. Величина расщепления тонкой структуры циклотронных волн имеет тот же порядок и проявляет немонотонную зависимость от волнового вектора в указанном диапазоне частот.

8. Продемонстрировано существование солитонов в квантовых газах возникающих исключительно при учете короткодействия с точностью до третьего порядка по радиусу взаимодействия. Это взаимодействие имеет вид нелокального бозон-бозонного и бозон-фермионного взаимодействия в бозон-фермионных смесях нейтральных частиц находящихся при близкой к нулю температуре. При этом получено, что фермион-фермионное взаимодействие в уравнении Эйлера является локальным тензорным взаимодействием, а в уравнении эволюции давления возникают как локальные, так и нелокальные слагаемые. Обнаружено, что нелокальные взаимодействия создают условия для

уменьшения скорости звука акустических волн. Показано, что компенсация этой дисперсии нелинейностью обусловленной отталкивающим взаимодействием приводит к условию формирования яркого солитона как области с повышенной концентрацией в бозонной подсистеме находящейся в состоянии конденсата Бозе-Эйнштейна.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ.

1. *Andreev P. A.*, Two-fluid hydrodynamics of cold atomic bosons under the influence of quantum fluctuations at non-zero temperatures // *Phys. Scripta.* – 2022. – V. 97. – p. 035206. IF=3.081 (Вклад автора 1)
2. *Andreev P. A.*, Quantum hydrodynamic theory of quantum fluctuations in dipolar Bose-Einstein condensate // *Chaos.* – 2021. – V. 31. – p. 023120 IF=3.741 (Вклад автора 1)
3. *Andreev P. A.*, Hydrodynamics of the atomic Bose-Einstein condensate beyond the mean-field // *Laser Physics Letters.* – 2021. – V. 18. – p. 055501 IF=1.704 (Вклад автора 1)
4. *Andreev P. A.*, Novel soliton in dipolar BEC caused by the quantum fluctuations // *Eur. Phys. J. D.* – 2021. – V. 75. – p. 60 IF=1.611 (Вклад автора 1)
5. *Andreev P. A., K. V. Antipin, M. Iv. Trukhanova*, Bosonic bright soliton in the mixture of repulsive Bose-Einstein condensate and polarized ultracold fermions under influence of the pressure evolution // *Laser Physics.* – 2021. – V. 31. – p. 015501 IF=1.38 (Вклад автора 0.6)
6. *Andreev P. A.*, Extended hydrodynamics of the degenerate partially spin polarized fermions with the short-range interaction up to the third order by the interaction radius approximation // *Laser Physics.* – 2021. – V. 31. – p. 045501 IF=1.38 (Вклад автора 1)

7. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, On the equation of state for the “thermal” part of the spin current: The Pauli principle contribution in the spin wave spectrum in a cold fermion system // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2019. – V. 2019. – p. 053J01 (21). IF=2.572 (Вклад автора 0.7)
8. *Andreev P. A.*, Hydrodynamic model of a Bose-Einstein condensate with anisotropic short-range interaction and the bright solitons in a repulsive Bose-Einstein condensate // *Laser Phys.* – 2019. – V. 29. – p. 035502 (12). IF=1.38 (Вклад автора 1)
9. *Andreev P. A., Trukhanova M. I.*, Separated spin evolution quantum hydrodynamics of degenerated electrons with spin-orbit interaction and extraordinary wave spectrum // *J. Plasma Phys.* – 2018. – V. 84. – p. 905840504 (25). IF=2.691 (Вклад автора 0.4)
10. *Andreev P. A.*, Spin current contribution in the spectrum of collective excitations of degenerate partially polarized spin-1/2 fermions at separate dynamics of spin-up and spin-down fermions // *Laser Phys. Lett.* – 2018. – V. 15. – p. 105501 (12). IF=1.704 (Вклад автора 1)
11. *Andreev P. A.*, Extraordinary SEAWs under influence of the spin-spin interaction and the quantum Bohm potential // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 062114. IF=2.357 (Вклад автора 1)
12. *Andreev P. A.*, Radiative corrections to the Coulomb law and model of dense quantum plasmas: Dispersion of waves in magnetized quantum plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 042103 (5). IF=2.357 (Вклад автора 1)
13. *Andreev P. A.*, Kinetic description of the oblique propagating spin-electron acoustic waves in degenerate plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2018. – V. 25. – p. 032116 (8). IF=2.357 (Вклад автора 1)
14. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Dielectric permeability tensor and linear waves in spin-1/2 quantum kinetics with non-trivial equilibrium spin-distribution functions // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 112108. IF=2.357 (Вклад автора 0.7)

15. *Andreev P. A.*, Extraordinary spin-electron acoustic wave // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022123. IF=2.357 (Вклад автора 1)
16. *Andreev P. A.*, Kinetic analysis of spin current contribution to spectrum of electromagnetic waves in spin-1/2 plasma, Part I: Dielectric permeability tensor for magnetized plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022114 (10). IF=2.357 (Вклад автора 1)
17. *Andreev P. A.*, Kinetic analysis of spin current contribution to spectrum of electromagnetic waves in spin-1/2 plasma, Part II: Dispersion dependencies // *Phys. Plasmas.* – 2017. – V. 24. – p. 022115 (9). IF=2.357 (Вклад автора 1)
18. *Iqbal Z., Andreev P. A.*, Nonlinear separate spin evolution in degenerate electron-positron-ion plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 062320. IF=2.357 (Вклад автора 0.5)
19. *Andreev P. A.*, Spin-electron acoustic waves: The Landau damping and ion contribution in the spectrum // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 062103 (12). IF=2.357 (Вклад автора 1)
20. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Surface spin-electron acoustic waves in magnetically ordered metals // *Appl. Phys. Lett.* – 2016. – V. 108. – p. 191605 (4). IF=3.816 (Вклад автора 0.7)
21. *Andreev P. A., Z. Iqbal*, Rich eight-branch spectrum of the oblique propagating longitudinal waves in partially spin-polarized electron-positron-ion plasmas // *Phys. Rev. E.* – 2016. – V. 93. – p. 033209 (8). IF=2.707 (Вклад автора 0.5)
22. *Andreev P. A.*, Spin-electron acoustic soliton and exchange interaction in separate spin evolution quantum plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2016. – V. 23. – p. 012106 (10). IF=2.357 (Вклад автора 1)
23. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Separated spin-up and spin-down evolution of degenerated electrons in two dimensional systems: Dispersion of longitudinal collective excitations in plane and nanotube geometry // *Eur. Phys. Lett.* – 2016. – V. 113. – p. 17001 (6). IF=1.958 (Вклад автора 0.7)
24. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Oblique propagation of longitudinal waves in magnetized spin-1/2 plasmas: Independent evolution of spin-up and spin-down

- electrons // *Annals of Physics*. – 2015. – V. 361. – p. 278-292. IF=3.036 (Вклад автора 0.7)
25. *Andreev P. A.*, Hydrodynamic and kinetic models for spin-1/2 electron-positron quantum plasmas: Annihilation interaction, helicity conservation, and wave dispersion in magnetized plasmas // *Phys. Plasmas*. – 2015. – V. 22. – p. 062113 (20). IF=2.357 (Вклад автора 1)
26. *Ivanov A. Yu., Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Langmuir wave dispersion in semi-relativistic spinless quantum plasma // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2015. – V. 2015. – p. 063102 (15). IF=2.572 (Вклад автора 0.4)
27. *Andreev P. A.*, Separated spin-up and spin-down quantum hydrodynamics of degenerated electrons: Spin-electron acoustic wave appearance // *Phys. Rev. E*. – 2015. – V. 91. – p. 033111 (11). IF=2.707 (Вклад автора 1)
28. *Andreev P. A.*, Quantum kinetics of spinning neutral particles: General theory and Spin wave dispersion // *Physica A*. – 2015. – V. 432. – p. 108-126. IF=3.778 (Вклад автора 1)
29. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Ion acoustic and dust acoustic waves at finite size of plasma particles // *Phys. Plasmas*. – 2015. – V. 22. – p. 032104 (9). IF=2.357 (Вклад автора 0.7)
30. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Waves of spin-current in magnetized dielectrics, *Int. J. of Mod. Phys. B*. – 2015. – V. 29. – p. 1550077 (28). IF=1.422 (Вклад автора 0.7)
31. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Dispersion properties of transverse waves in the electrically polarized BEC // *J. Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. – 2014. – V. 47. – p. 225301(12). IF=1.655 (Вклад автора 0.7)
32. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Exact analytical soliton solutions in dipolar Bose-Einstein condensates // *Eur. Phys. J. D*. – 2014. – V. 68. – p. 270 (14). IF=1.611 (Вклад автора 1)
33. *Ivanov A. Yu., Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Balance equations in semi-relativistic quantum hydrodynamics // *Int. J. of Mod. Phys. B*. – 2014. – V. 28. – p.1450132 (31). IF=1.422 (Вклад автора 0.4)

34. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Self-consistent field theory of polarised Bose-Einstein condensates: dispersion of collective excitations // *Eur. Phys. J. D.* – 2013. – V. 67. – p. 216 (16). IF=1.611 (Вклад автора 0.6)
35. *Zezyulin K. V., Andreev P. A., and Kuz'menkov L. S.*, Soliton appearing in boson-fermion mixture at the third order of the interaction radius // *Eur. Phys. J. D.* – 2013. – V. 67. – p. 140 (9). IF=1.611 (Вклад автора 0.4)
36. *Andreev P. A.*, Non-integral form of the Gross-Pitaevskii equation for polarized molecules // *Mod. Phys. Lett. B.* – 2013. – V. 27. – p. 1350096 (12). IF=1.668 (Вклад автора 1)
37. *Andreev P. A.*, First principles derivation of NLS equation for BEC with cubic and quintic nonlinearities at non zero temperature. Dispersion of linear waves // *Int. J. of Mod. Phys. B.* – 2013. – V. 27. – p. 1350017 (25). IF=1.422 (Вклад автора 1)
38. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Bright-like soliton solution in quasi-one-dimensional BEC in third order by interaction radius // *Mod. Phys. Lett. B.* – 2012. – V. 26. – p. 1250152 (14). IF=1.688 (Вклад автора 0.8)
39. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Trukhanova M. I.*, Quantum hydrodynamics approach to the formation of waves in polarized two-dimension systems of charged and neutral particles // *Phys. Rev. B.* – 2011. – V. 84. – p. 245401 (13). IF=3.908 (Вклад автора 0.3)
40. *Andreev P. A., Trukhanova M. I.*, On the bright soliton in the Bose–Einstein condensate (to the third order in the interaction radius) // *Russ. Phys. J.* – 2010. – V. 53. – N. 11. – p. 1196-1203. [*Андреев П. А., Труханова М. И.*, Об ярком солитоне в конденсате Бозе-Эйнштейна // *Изв. вузов. Физика.* – 2010. – №. 11. – с. 78-84.] IF=0.664 (Вклад автора 0.5)
41. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S.*, Problem with the single-particle description and the spectra of intrinsic modes of degenerate boson-fermion systems // *Phys. Rev. A.* – 2008. – V. 78. – p. 053624 (12). IF=2.971 (Вклад автора 0.7)