

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»



Направление подготовки/специальность
03.04.02 Физика

направленность (профиль)/специализация
«Физика конденсированных сред и сложных систем»

Выпускная квалификационная работа
Филаментация последовательности фемтосекундных лазерных импульсов
в воздухе

Обучающегося 2 курса магистратуры
очной формы обучения
Скорика Сергея Павловича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н, профессор
Косарева Ольга Григорьевна

Москва
2025 г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. Распространение высокоинтенсивного фемтосекундного импульса в воздухе	7
§ 1.1. Зависимость показателя преломления от интенсивности.	7
§ 1.2. Плотность тока электронов индуцированной лазерной плазмы	11
§ 1.3. Концентрация свободных электронов	13
§ 1.4. Модель ионизации	13
§ 1.5. Поглощение энергии при ионизации	16
§ 1.6. Волновое уравнение	17
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ	18
§ 2.1. Безразмерные переменные	18
§ 2.2. Метод расщепления по физическим факторам	20
§ 2.3. Решение уравнения дифракции	21
§ 2.4. Решение уравнения дисперсии	25
§ 2.5. Уравнение нелинейного набега фазы	27
§ 2.6. Результат моделирования для одиночного пучка	29
ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ	33
§ 3.1. Модель релаксации плазмы	33
§ 3.2. Филаментация последовательности из шести одинаковых импульсов с различными временами задержки	34
3.2.1. Время задержки между импульсами 10нс (частота повторения 100МГц)	34
3.2.2. Время задержки 20нс (частота повторения 50МГц)	37
3.2.3. Время задержки 30нс (частота повторения 33МГц)	40
3.2.4. Время задержки 50нс (частота повторения 20МГц)	43
3.2.5. Время задержки 100нс (частота повторения 10МГц)	46
§ 3.3. Влияние релаксационной динамики плазмы на импульс с начальной пиковой мощностью $2P_{cr}$, следующий с временной задержкой	49

3.3.1. Время задержки между импульсами 20нс	49
3.3.2. Время задержки между импульсами 100нс	53
§ 3.4. Благодарности.	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	55

ВВЕДЕНИЕ

Распространение интенсивных фемтосекундных лазерных импульсов в прозрачных средах приводит к возникновению явления филаментации - локализации излучения в малой области, вблизи оси распространения, в результате динамического равновесия между эффектом самофокусировки и дефокусировки в самонаведенной импульсом лазерной плазме [2, 5, 7, 12]. Филаментация в газах атмосферной плотности сопровождается рядом явлений, в том числе, генерацией терагерцового излучения, генерацией третьей гармоники и другими, имеющими широкое применение в различных областях исследований. Это вызывает значительный интерес к методам управления фемтосекундной филаментацией. Одним из них является использование последовательности импульсов, каждый из которых имеет достаточное превышение пиковой мощности над критической мощностью самофокусировки для создания филамента в воздухе [14, 22]. Задержка каждого последующего импульса относительно предыдущего может варьироваться путем изменения частоты повторения импульсов лазера.

В настоящее время работы в этой области сконцентрированы на изучении влияния изменения локальной плотности газа в результате энерговысвобождения в среду при рекомбинации электронов и ионов, генерируемых фемтосекундным импульсом [18, 20]. В результате рекомбинации плазмы, возникает локальное повышение температуры и соответствующее уменьшение давления и плотности воздуха, которое распространяется от плазменного канала в виде акустической волны на временах порядка микросекунд [4]. Таким образом, на месте плазменного канала возникает область пониженной плотности воздуха диаметром около 100 микрон, которая существует на временах порядка нескольких микросекунд, а затем исчезает в результате тепловой диффузии [21]. Вдоль такой области длиной до нескольких десятков и сотен метров может распространяться лазерный импульс малой энергии, несущий сигнальную информацию [21]. На больших расстояниях в атмосфере важна поддержка передачи сигнала с минимальным количеством ошибок [22].

Исследование динамики плазменного канала в реальных условиях генерации последовательности фемтосекундных импульсов является важной

задачей для снятия атмосферного разряда [1] и передачи информации оптическими импульсами в свободном пространстве.

Оптимизация такого канала пониженной плотности определяется частотой повторения импульсов, создающих плазменный канал, геометрией эксперимента, энергией и длиной волны лазерного излучения. В зависимости от временного интервала между импульсами, трансформация излучения определяется на наносекундных временах наличием свободных электронов, сгенерированных предыдущим импульсом. На микросекундных временах основную роль играет изменение плотности воздуха в результате распространения акустической волны. На миллисекундных временах канал последовательности фемтосекундных импульсов определяется термодиффузией. В атмосферных условиях существенный вклад в показатель преломления вносит турбулентность и аэрозоли.

Таким образом, модификация воздушной среды последовательностью фемтосекундных импульсов представляет собой многомерную статистическую задачу, из которой в данной работе мы будем решать часть, связанную с влиянием релаксации плазмы на распространение второго, третьего и так далее импульсов последовательности.

Цели и задачи исследования.

Цель работы. Научная работа нацелена на исследование филаментации фемтосекундного лазерного импульса в воздухе при наличии возмущений показателя преломления газовых компонент в результате распространения предыдущего импульса той же лазерной системы. Задача решается методом численного моделирования уравнения для медленно меняющейся амплитуды светового поля в условиях дифракции, дисперсии, керровской нелинейности, ионизации и поглощения. Рассматривается аксиально-симметричная геометрия распространения коллимированного пучка.

Задачи исследования.

1. Получить пространственно-временную трансформацию фемтосекундного излучения в воздухе в режиме одиночного импульса, пиковая мощность которого выше критической мощности самофокусировки. Определить пространственное распределение плазменного

канала, созданного одиночным импульсом, при пиковой мощности в несколько раз (менее десяти) превышающей критическую.

2. Получить плазменный канал после прохождения двух фемтосекундных импульсов, при временной задержке между импульсами малой по сравнению с временем рекомбинации плазменного канала. Определить влияние уменьшения и увеличения пиковой мощности второго импульса по сравнению с пиковой мощностью первого на пространственное распределение свободных электронов.
3. Определить влияние частоты повторения фемтосекундных импульсов в последовательности на форму и длину плазменного канала при временной задержке между импульсами сравнимой с временем рекомбинации плазменного канала.

ГЛАВА 1. Распространение высокоинтенсивного фемтосекундного импульса в воздухе

§ 1.1. Зависимость показателя преломления от интенсивности.

Для теоретического описания филаментации и взаимодействия лазерного импульса с воздухом воспользуемся нерелятивистским пределом. В этом случае, учитывая магнитную нейтральность воздуха, магнитную составляющую из рассмотрения можно исключить. Тогда распространение лазерного импульса будет описываться изменением в пространстве и времени вектора напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\text{inf}} \vec{A}_n(\vec{r}, t) e^{-i(\omega_n t + \vec{k}_n \cdot \vec{r})} + c.c.$, где $|\vec{k}_n| = n_0 \omega_n / c_0$, n_0 - линейный показатель преломления воздуха. При этом амплитуды $\vec{A}_n(\vec{r}, t)$ считаются медленно меняющимися по сравнению с быстро осциллирующим множителем $e^{-i(\omega_n t + \vec{k}_n \cdot \vec{r})}$.

Будем считать, что в начальный момент времени лазерный импульс линейно поляризован вдоль оси x и распространяется вдоль оси z . Молекулы, содержащиеся в воздухе, анизотропны, однако из-за случайности их расположения и взаимной ориентации воздух рассматривают как однородную изотропную среду. Что приводит к сохранению ориентации вектора напряженности.

Учитывая выше перечисленное и воспользовавшись приближением медленно меняющихся амплитуд, напряженность поля можно описать как

$$E(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{-i(\omega_0 t + k_0 z)} + c.c., \quad (1.1)$$

где $k_0 = n_0 \omega_0 / c_0$, ω_0 - несущая частота. В этом случае медленно меняющаяся амплитуда $A(\vec{r}, t)$ является огибающей поля.

Однако, для применимости метода медленно меняющихся амплитуд необходимо выполнение условий:

$$\lambda_0 \ll d_{fil} \quad (1.2)$$

$$T_0 \ll \tau_0, \quad (1.3)$$

где τ_0 - длительность импульса, T_0 - период излучения, λ_0 - центральная длина волны, d_{fil} - диаметр филамента. Для широко используемого титан-сапфирового лазера $\lambda_0 = 800\text{нм}$, а $d_{fil} 100\text{мкм}$, что означает выполнение условия 1.2. В то же время $T_0 = 2.7\text{фс}$ и τ_0 , измеренное в различных экспериментах, составляет $5 - 10\text{фс}$ [8]. Поэтому условие 1.3 выполняется слабо, в работе [11] было показано, что представление 1.1 приводит к корректным результатам даже для импульсов, состоящих из нескольких колебаний светового поля.

Распространение лазерного импульса в воздухе приводит к возникновению поляризации, описываемой материальным уравнением

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}), \quad (1.4)$$

которое отражает структуру и свойства среды. Это материальное уравнение в случае нелинейной среды может быть разложено по степеням поля

$$P = \epsilon_0(\chi E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots) \quad (1.5)$$

Коэффициенты $\chi, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \dots$, зависят от свойств среды и называются оптическими восприимчивостями, которые в общем случае являются тензорами. [27]

В случае воздуха, который рассматривается как изотропная среда, не обладающая центром симметрии, отклик среды будет одинаковым во всех направлениях, кроме того, все части разложения, зависящие от четных степеней поля, обращаются в ноль. [3] Так же считается, что вклад членов разложения быстро убывает с увеличением степени зависимости поля, поэтому ограничимся в разложении только членом третьего порядка.

Предположим, что линейная и нелинейная часть вектора поляризации так же, как и напряженность, могут быть представлены в виде суммы с медленно меняющимися амплитудами

$$\vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^{(1)}(\omega_n) e^{-i(\omega_n t + k_n z)}, \quad (1.6)$$

$$\vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^{(3)}(\omega_n) e^{-i(\omega_n t + k_n z)}. \quad (1.7)$$

Тогда медленно меняющуюся амплитуду линейной поляризации можно связать с медленно меняющейся амплитудой поля. С учётом изотропности воздуха это отношение примет вид

$$\vec{p}(\omega_i) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{A}(\omega_i). \quad (1.8)$$

Принимая во внимание, что в нашем случае напряженность электрического поля имеет только x компоненту, которая может быть представлена в виде 1.1, осциллируя на частоте ω_0 , $p^{(1)}$ будет иметь только одну компоненту - x , соответствующую частоте ω_0 :

$$p^{(1)}(\omega_0) = \epsilon_0 \chi^{(1)} A(\omega_0). \quad (1.9)$$

Аналогично линейной поляризации можно выразить связь медленно меняющейся амплитуды $p^{(3)}(\omega_n)$ с медленно меняющейся амплитудой электрической напряженности:

$$p_{\alpha}^{(3)}(\omega_i + \omega_j + \omega_k) = \epsilon_0 \sum_{\beta\gamma\delta} \sum_{(ijk)} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\omega_i + \omega_j + \omega_k; \omega_i, \omega_j, \omega_k) A_{\beta}(\omega_i) A_{\gamma}(\omega_j) A_{\delta}(\omega_k). \quad (1.10)$$

Здесь индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ означают одну из декартовых осей, а (ijk) означает, что суммирование ведется по всем частотам $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ таким, что сумма этих частот остается постоянной. Учитывая, что напряженность электрического поля может быть представлена в виде 1.1, получаем, что нелинейная поляризация может осциллировать только на частотах ω_0 и $3\omega_0$. Однако эффективность генерации третьей гармоники в воздухе мала, поэтому мы ей пренебрегаем.

Воспользовавшись рядом свойств тензора восприимчивости третьего порядка, изотропностью среды и тем, что мы считаем импульс линейно поляризованным вдоль оси x получим, что единственный ненулевой ком-

понент вектора $p^{(3)}$ определяется как:

$$p^{(3)}(\omega_0) = 3\epsilon_0\chi^{(3)}|A(\omega_0)|^2A(\omega_0). \quad (1.11)$$

Обобщая вышесказанное, вектор поляризации содержит только x компоненту, которая равна:

$$P(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t)e^{-i(\omega_0 t + k_0 z)} + c.c., \quad (1.12)$$

где медленно меняющаяся амплитуда $p(\vec{r}, t)$ имеет вид

$$p(\vec{r}, t) = \epsilon_0(\chi^{(1)}A(\vec{r}, t) + 3\chi^{(3)}|A(\vec{r}, t)|^2A(\vec{r}, t)). \quad (1.13)$$

Далее вспомним, что $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 n^2 E = \epsilon_0(\chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|A(\vec{r}, t)|^2)A(\vec{r}, t) + \epsilon_0 A(\vec{r}, t)$. Откуда следует, что

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|A(\vec{r}, t)|^2. \quad (1.14)$$

Что означает, что показатель преломления зависит от напряженности электрического поля и может быть записан в виде

$$n = n_0 + \bar{n}_2 \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle, \quad (1.15)$$

где n_0 - линейный показатель преломления, а \bar{n}_2 - коэффициент нелинейности. Если напряженность поля определяется выражением 1.1, то

$$\langle E^2(\vec{r}, t) \rangle = 2|A(\vec{r}, t)|^2. \quad (1.16)$$

Подставив 1.15 с учетом 1.16 в 1.14 с точностью до членов порядка $|A(\vec{r}, t)|^2$, получим:

$$n_0^2 + 4n_0\bar{n}_2|A(\vec{r}, t)|^2 = 1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|A(\vec{r}, t)|^2. \quad (1.17)$$

Отсюда видно, что линейный и нелинейный показатели преломления связаны с восприимчивостью следующими отношениями[27, 31]:

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \quad (1.18)$$

$$\bar{n}_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4n_0}. \quad (1.19)$$

Основными физическими процессами, приводящими к возникновению нелинейности, являются электронная поляризация, вынужденное комбинационное рассеяние на вращательных переходах, ориентация молекул, электрострикция и тепловые эффекты. Все эти процессы характеризуются собственным временем отклика. При этом, если время установления механизма существенно превышает длительность импульса, то их вкладом можно пренебречь. Если время отклика много меньше времени взаимодействия с излучением, то процесс можно считать установившимся, а отклик мгновенным. В случае же, когда время установления процесса сравнимо с длительностью излучения, то для описания эффекта необходимо учитывать его инерционность.

Механизм электронной поляризации имеет время отклика порядка 1фс, что существенно больше, чем длительность фемтосекундного импульса (~ 100 фс), поэтому его отклик можно считать мгновенным. Вынужденное комбинационное рассеяние на вращательных переходах характеризуется временем отклика порядка 100фс, поэтому этот процесс является инерционным. Остальные процессы имеют время отклика больше 1000фс и, соответственно, не учитываются.[3, 13, 16, 23, 31]

Однако ввиду затруднительности точной оценки нелинейной восприимчивости, часто вводят эффективный коэффициент мгновенной керровской нелинейности, который определяется экспериментально.[24]

§ 1.2. Плотность тока электронов индуцированной лазерной плазмы

Интенсивность мощного лазерного импульса при распространении в воздухе благодаря эффекту самофокусировки оказывается достаточной

для ионизации молекул среды, что приводит к образованию свободных электронов. Ток свободных электронов определяется как:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -eN_e(\vec{r}, t)\vec{v}_e(\vec{r}, t), \quad (1.20)$$

где e - заряд электрона, N_e - плотность свободных электронов плазмы, а \vec{v}_e - их скорость. В нерелятивистском случае скорость электронов определяется из второго закона Ньютона. Предполагая, что начальная скорость электронов равна нулю, получим

$$\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) - e \vec{v}_e \frac{\partial N_e(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.21)$$

где $\omega_p^2(\vec{r}, t) = \frac{e^2 N_e(\vec{r}, t)}{\epsilon_0 m_e}$ - квадрат плазменной частоты.

Считается, что под воздействием поля лазерного импульса изменение концентрации свободных электронов происходит адиабатически медленно по сравнению с изменением поля, а потому его можно устремить к нулю. Также учтем, что поле линейно поляризовано вдоль оси x . Тогда $\vec{J}(\vec{r}, t)$ будет содержать только одну ненулевую компоненту x , равную:

$$\frac{\partial J(\vec{r}, t)}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2(\vec{r}, t) E(\vec{r}, t). \quad (1.22)$$

Аналогично напряженности электрического поля и поляризации, выразим плотность тока через медленно меняющуюся амплитуду:

$$J(\vec{r}, t) = j(\vec{r}, t) e^{-i(\omega_0 t + K_0 z)} + c.c. \quad (1.23)$$

Тогда выражение 1.22 примет вид

$$\left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) j = i \frac{\epsilon_0}{\omega_0} \omega_p^2(\vec{r}, t) A(\vec{r}, t), \quad (1.24)$$

что формально можно записать как[dis onl]

$$j(\vec{r}, t) = i \frac{\epsilon_0}{\omega_0} \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \omega_p^2(\vec{r}, t) A(\vec{r}, t). \quad (1.25)$$

§ 1.3. Концентрация свободных электронов

Полученное ранее уравнение 1.25 содержит величину $\omega_p^2(\vec{r}, t)$, представляющую собой квадрат плазменной частоты. Для её вычисления требуется знать концентрацию свободных электронов в заданной точке пространства и времени $N_e(\vec{r}, t)$, получить которую можно, решив систему кинетических уравнений.

В данной работе воздух рассматривается как двухкомпонентная среда, состоящая на 78% из молекул азота и 22% молекул кислорода.

С учетом того, что рекомбинацией за время прохождения импульса можно пренебречь, кинетические уравнения могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial N_e^{N_2}(\vec{r}, t)}{\partial t} = R_{N_2}(I)[0.78N_0 - N_e^{N_2}(\vec{r}, t)], \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial N_e^{O_2}(\vec{r}, t)}{\partial t} = R_{O_2}(I)[0.22N_0 - N_e^{O_2}(\vec{r}, t)], \quad (1.27)$$

$$N_e(\vec{r}, t) = N_e^{N_2}(\vec{r}, t) + N_e^{O_2}(\vec{r}, t). \quad (1.28)$$

В этих выражениях $N_e^{N_2}(\vec{r}, t)$ и $N_e^{O_2}(\vec{r}, t)$ - концентрации свободных электронов, образовавшихся в результате ионизации азота N_2 и кислорода O_2 соответственно, $R_{N_2}(I)$ и $R_{O_2}(I)$ - скорости ионизации азота и кислорода, зависящие от интенсивности, N_0 - концентрация нейтральных молекул воздуха. Скорости ионизации определяются в конкретной модели ионизации.[31]

§ 1.4. Модель ионизации

По физической природе явление ионизации можно разделить на полевую и лавинную.[30] Полевую ионизацию обычно описывают с помощью теории Келдыша.[25] Согласно ей ионизация атомов в переменном поле лазерного импульса может быть как многофотонной, так и туннельной. Границей между этими двумя режимами определяется параметром Келдыша:

$$\gamma = \frac{\omega_0 \sqrt{2m_e W_I}}{eE_0}, \quad (1.29)$$

где W_I - потенциал ионизации, E_0 является амплитудой электрического поля вида $E = E_0 \cos(\omega_0 t)$. Сравнивая это выражение с 1.1, получим $E_0 = 2A$, где A - медленно меняющаяся амплитуда поля. Тогда, переходя к длине волны, выражение для параметра Келдышева преобразуется к:

$$\gamma = \frac{\pi c_0 \omega_0 \sqrt{2m_e W_I}}{\lambda e A}. \quad (1.30)$$

При параметре Келдыша $\gamma \ll 1$ преобладает туннельная ионизация, при $\gamma \gg 1$ - многофотонная.[19]

Энергия ионизации молекулы азота равна 2.50×10^{-18} Дж, кислорода 1.93×10^{-18} Дж [15] Экспериментально установлено, интенсивность в филаменте на длине волны 800нм достигает величин порядка 10^{14} Вт/см². [17] При таких параметрах параметр Келдыша для азота равен 1.142, а для кислорода - 1.005. Это означает, что в филаменте реализуется промежуточный режим, учитывающий оба вида полевой ионизации.

Экспериментальные исследования показали, что при филаментации на длине волны 800нм, лучшее соответствие достигается при расчете скоростей ионизации по модели Переломова - Попова - Теренььева (ППТ). [6]

Согласно модели ППТ[29] :

$$R(I) = \frac{W_I}{\hbar} |C_{nl}|^2 f_{lm} \sqrt{\frac{6}{\pi}} (2\xi)^{2n^* - 3/2} (1 + \gamma^2)^{3/4} A_m(\gamma) \exp(-\frac{2}{3}\xi g(\gamma)), \quad (1.31)$$

где $\xi = (W_I/W_I^H)^{1.5} E_a / (2A)$, E_a - внутриатомное поле, равное $5.14 * 10^{11}$ В/м.

Константа $|C_{nl}|^2$ имеет вид

$$|C_{nl}|^2 = \frac{2^{4n^* - 2}}{n^* \Gamma(n^* + l + 1) \Gamma(n^* - l)}, \quad (1.32)$$

где $n^* = Z_{eff} \sqrt{W_I^H / W_I}$ - эффективное главное квантовое число, Z_{eff} - эффективный заряд атомного остатка, W_I^H - энергия ионизации атома водорода.

Константа f_{nl} равна

$$f_{nl} = \frac{(2l+1)(l+|m|)!}{2^{|m|}|m|!(l-|m|)!}, \quad (1.33)$$

где l - орбитальный момент. m - его проекция на направление поля.

Другие функции, входящие в выражение для скорости ионизации, определяются выражениями:

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} \left[\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \operatorname{arsh}(\gamma) - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma} \right) \right], \quad (1.34)$$

$$A_m(\gamma) = \frac{4}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{|m|!} \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} \sum_{n \geq K}^{\infty} \exp(-\alpha(n-K)) W_m(\sqrt{\beta(n-K)}), \quad (1.35)$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arsh}(\gamma) - \beta, \quad (1.36)$$

$$\beta = \frac{2\gamma}{\sqrt{1+\gamma}}, \quad (1.37)$$

$$W_m(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(y^2) (x^2 - y^2)^{|m|} dy - \text{функция Доусона.} \quad (1.38)$$

$$K = \operatorname{int} \left[\frac{W_I}{\hbar\omega_0} + 1 \right] \quad (1.39)$$

Величины Z_{eff} для модели ППТ являются подгоночными параметрами, которые наилучшим образом описывают ионизацию при $Z_{eff}^{O_2} = 0.53$ и $Z_{eff}^{N_2}$. [6]

Расчёт выполняется в предположении, что до момента ионизации электрон в водородоподобном атоме, моделирующем молекулы азота и кислорода, находился в основном состоянии с орбитальным моментом $l = 0$ и его проекцией на направление поля $m = 0$. [31]

При этом лавинная ионизация не вносит заметного вклада в скорость ионизации, так как можно показать, что время между неупругими столкновениями между электронами и нейтральными атомами или ионами в воздухе составляет порядка 200фс, что существенно превышает длительность подымпульсов в филаменте (5 – 20фс). Это позволяет утверждать,

что число столкновений невелико, и, следовательно, электронная лавина не образуется.[24]

§ 1.5. Поглощение энергии при ионизации

При многофотонной ионизации газовых компонент воздуха поглощается энергия, что приводит к падению интенсивности в процессе распространения. Предположим, что ослабление интенсивности происходит по экспоненциальному закону:

$$I(z + \Delta z) = I(z)e^{-\alpha\Delta z}. \quad (1.40)$$

Если считать потери энергии на ионизацию малыми (немногим более 10 квантов на одну молекулу), экспоненту можно разложить в ряд, ограничившись только первыми двумя членами:

$$I(z + \Delta z) = I(z) - I(z)\alpha\Delta z. \quad (1.41)$$

При этом $I(z)\alpha$ определяет уменьшение объёмной энергии на единице длины. Так как на ионизацию одной молекулы тратится $K\hbar\omega_0$ энергии, то уменьшение объёмной плотности энергии будет описываться выражением:

$$I(z)\alpha = K\hbar\omega_0 \frac{\partial N_e}{\partial t}. \quad (1.42)$$

Учитывая, что каждая газовая компонента имеет свой порядок многофотонности K и свою скорость ионизации, то и коэффициент поглощения α для них будет разный. Однако общее количество поглощаемой энергии можно определить путём суммирования частных коэффициентов поглощения, что приводит к итоговому коэффициенту:

$$I(z)\alpha = \frac{1}{I}K_{N_2}\hbar\omega_0 \frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} + \frac{1}{I}K_{O_2}\hbar\omega_0 \frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t}. \quad (1.43)$$

§ 1.6. Волновое уравнение

Волновое уравнение, описывающее распространение высокоэнергетических фемтосекундных импульсов, выводится из уравнений Максвелла стандартной процедурой получения волнового уравнения с помощью взятия ротора от уравнения закона индукции Фарадея. В конечном итоге, учитывая ранее обговорённые свойства среды и величины, в приближении медленно меняющейся амплитуды оптического поля в пространстве и времени, волновое уравнение примет вид[31]:

$$2ik_0 \frac{\partial A(\vec{r}, t)}{\partial z} = \Delta_{\perp} A(\vec{r}, t) - k_0 k_2 \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{4k_0^2}{n_0^2} \bar{n}_2 |A(\vec{r}, t)|^2 A(\vec{r}, t) - \frac{k_0^2}{n_0^2} \frac{\omega_p^2(\vec{r}, t)}{\omega_0^2} A(\vec{r}, t) - ik_0 \alpha(\vec{r}, t) A(\vec{r}, t). \quad (1.44)$$

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

§ 2.1. Безразмерные переменные

При численном моделировании явления филаментации характерные масштабы задачи могут варьироваться на несколько порядков, что приводит к существенному влиянию ошибок округления на конечный результат. Одним из способов борьбы с этим является переход к безразмерным переменным. В общем случае, переход к новым величинам часто осуществляется по выражениям:

$$x \rightarrow \frac{x}{x_u} \quad (2.1)$$

$$y \rightarrow \frac{y}{y_u} \quad (2.2)$$

$$z \rightarrow \frac{z}{z_u} \quad (2.3)$$

$$t \rightarrow \frac{t}{t_u} \quad (2.4)$$

$$A \rightarrow \frac{A}{A_u} \quad (2.5)$$

$$N_e^{O_2} \rightarrow \frac{N_e^{O_2}}{N_u} \quad (2.6)$$

$$N_e^{N_2} \rightarrow \frac{N_e^{N_2}}{n_u}. \quad (2.7)$$

Здесь величины x_u, y_u, z_u, t_u, A_u и N_u выполняют роль новых единиц измерения. Применяя эти преобразования, получим:

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial A}{\partial z} &= R_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + R_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - R_t \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \\ &+ R_k |A|^2 A - R_p (N_e^{N_2} + N_e^{O_2}) A - i R_a \left(K_{N_2} \frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} + K_{O_2} \frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} \right) \frac{1}{|A|^2} A, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} = t_u R_{N_2} |A|^2 \left(0.78 \frac{N_0}{N_u} - N_e^{N_2} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} = t_u R_{O_2} |A|^2 \left(0.78 \frac{N_0}{N_u} - N_e^{O_2} \right), \quad (2.10)$$

где

$$R_x = \frac{z_u}{k_0 x_u^2}, \quad (2.11)$$

$$R_y = \frac{z_u}{k_0 y_u^2}, \quad (2.12)$$

$$R_t = z_u \frac{k_2}{t_u^2}, \quad (2.13)$$

$$R_k = \frac{4k_0 z_u \bar{n}_2 A_u^2}{n_0}, \quad (2.14)$$

$$R_p = \frac{k_0 z_u \omega_{pu}^2}{n_0^2 \omega_0^2}, \quad (2.15)$$

$$R_a = \frac{z_u}{2\epsilon_0 n_0 c_0 A_u^2} \frac{N_u}{t_u} \hbar \omega_0. \quad (2.16)$$

Здесь $\omega_{pu}^2 = e^2 N_u / (\epsilon_0 m_e)$ - квадрат нормированной плазменной частоты.

Тогда начальное условие для амплитуды поля примет вид:

$$A|_{z=0} = \frac{A_0}{A_u} \exp \left(-\frac{x^2 x_u^2 + y^2 y_u^2}{2a_0^2} - \frac{t^2 t_u^2}{2\tau_0^2} \right). \quad (2.17)$$

Обычно для нормировки поперечных координат используют радиус пучка a_0 , для нормировки продольной координаты z - дифракционную длину, для времени - τ_0 - начальную длительность импульса, для комплексной амплитуды поля - её начальное значение A_0 и для концентрации электронов - количество нейтральных молекул воздуха $N_0 = 2.68 * 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

В этом случае безразмерные коэффициенты примут вид:

$$R_x = 1, \quad (2.18)$$

$$R_y = 1, \quad (2.19)$$

$$R_t = \frac{L_d}{L_{disp}}, \quad (2.20)$$

$$R_k = \frac{2k_0^2 n_2}{\pi n_0} P_0, \quad (2.21)$$

$$R_p = \frac{k_0 L_d \omega_{pu}^2}{n_0^2 \omega_0^2}, \quad (2.22)$$

$$R_a = \frac{L_d N_0}{I_0 \tau_0} \hbar \omega_0. \quad (2.23)$$

При этом, $P_0 = \pi a_0^2 I_0$ - начальная пиковая мощность импульса, $I_0 = 2\epsilon_0 n_0 c_0 |A_0|^2$ - начальная пиковая интенсивность.

§ 2.2. Метод расщепления по физическим факторам

Обычно при моделировании задачи филаментации мощных фемтосекундных импульсов применяется метод расщепления по физическим факторам.[28] В этом случае, вместо решения волнового уравнения, решается цепочка уравнений, в которую включаются по отдельности все физические процессы исходного уравнения: дифракция, дисперсия, нелинейный набег фазы и поглощение энергии при ионизации.

Таким образом последовательно решаются:

- Уравнение дифракции

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = R_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + R_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Начальным условием для решения данного уравнения будет $A|_{z=z_m}$ - значение амплитуды, полученное в конце предыдущего шага $A|_{z=z_{m-1}}$. Результатом будет амплитуда A_d . Это уравнение решается для каждого временного слоя локально времени независимо от других.

- Уравнение дисперсии

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = -R_t \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Начальным условием для решения данного уравнения будет A_d . Это уравнение решается для каждой отдельной точки (x, y) . Результатом решения этого уравнения является амплитуда поля A_t .

- Уравнение, включающее нелинейный набег фазы

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = \left[R_k |A|^2 - R_p (N_e^{N_2} + N_e^{O_2}) - \right. \\ \left. -i R_a \left(K_{N_2} \frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} + K_{O_2} \frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} \right) \frac{1}{|A|^2} \right] A \quad (2.26)$$

Начальным условием для решения данного уравнения будет A_t . Это уравнение решается для каждой точки (x, y, t) . Результатом решения этого уравнения является амплитуда поля A_{nl} .

- В результате, итоговым значением решения волнового уравнения на шаге z_m является амплитуда A_{nl} . То есть, $A|_{z=z_{m+1}}$, которая является начальным условием для цепочки уравнений на следующем шаге.

§ 2.3. Решение уравнения дифракции

Напишем ещё раз уравнение дифракции, на этот раз с учётом выбора безразмерных переменных, приводящих к безразмерным коэффициентам (ссылка на коэф. $R_x = R_y = 1$):

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \Delta_{\perp} A. \quad (2.27)$$

Данное уравнение можно было бы решать в двумерной области XU , однако можно заметить, что данная задача обладает осевой симметрией. Следовательно, для уменьшения сложности вычислений логично перейти

в цилиндрическую систему координат:

$$x = r * \cos(\phi) \quad (2.28)$$

$$y = r * \sin(\phi) \quad (2.29)$$

$$z = z' \quad (2.30)$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.32)$$

Тогда уравнение дифракции запишется в виде:

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right). \quad (2.33)$$

Для численного решения данного уравнения необходимо ввести расчетную сетку, заменив непрерывные координаты r и z совокупностью узлов сетки. Важно отметить, что филаменту будет соответствовать область у оси, существенно меньшая начального радиуса пучка, поэтому к сетке по координате r предъявляются требования высокого разрешения. Однако в этом случае число точек сетки будет чрезвычайно велико. Из-за чего обычно для решения уравнения дисперсии вводят неравномерную сетку, причем так, чтобы:

- в области, вблизи оси, шаг сетки был постоянным;
- вне области равномерного шага, расстояние между узлами монотонно возрастало.

В данной работе соответствующая сетка была построена следующим образом:

- в области $r \leq a_0$ (a_0 - начальный радиус пучка) шаг по сетке равнялся $h_0 = 0.001a_0$;
- в области $r > a_0$ расстояние между узлами увеличивалось в $1+0.005$ раз

Приведем уравнение 2.33 к виду:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{i}{2} \frac{\partial A}{\partial r} \right). \quad (2.34)$$

Тогда для его решения можно будет воспользоваться схемой, предложенной в [26]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta z} (\hat{A}_n - A_n) = & \frac{\sigma}{V_n} (r_{n-1/2} \hat{W}_{n-1/2} - r_{n+1/2} \hat{W}_{n+1/2}) + \\ & + \frac{1-\sigma}{V_n} (r_{n-1/2} W_{n-1/2} - r_{n+1/2} W_{n+1/2}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$W_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{A_n - A_{n+1}}{h_n}, \quad W_{n-1/2} = \bar{\chi}_{n-1/2} \frac{A_{n-1} - A_n}{h_{n-1}}, \quad (2.36)$$

$$h_n = r_{n+1} - r_n, \quad k(r, t) = -\frac{i}{2}, \quad (2.37)$$

$$\bar{\chi}_{n+1/2} = \left[\frac{1}{h_n} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{dr}{k(r, t)} \right]^{-1}, \quad (2.38)$$

$$\bar{\chi}_{n-1/2} = \left[\frac{1}{h_{n-1}} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{dr}{k(r, t)} \right]^{-1}, \quad (2.39)$$

$$V_n = \frac{1}{2} (r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2), \quad (2.40)$$

$$r_{n+1/2} = \frac{r_{n+1} + r_n}{2}, \quad r_{n-1/2} = \frac{r_n + r_{n-1}}{2}. \quad (2.41)$$

Взяв вес $\sigma = 1/2$, данная численная схема сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$a_n \hat{A}_{n-1} + b_n \hat{A}_n + c_n \hat{A}_{n+1} = F_n, \quad (2.42)$$

где

$$a_n = \frac{1}{r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2} \frac{ir_{n-1/2}}{2h_{n-1}}, \quad (2.43)$$

$$b_n = \frac{1}{\Delta z} - \frac{1}{r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2} \frac{ir_{n-1/2}}{2h_{n-1}} - \frac{1}{r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2} \frac{ir_{n+1/2}}{2h_n} = \frac{1}{\Delta z} - a_n - c_n, \quad (2.44)$$

$$c_n = \frac{1}{r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2} \frac{ir_{n+1/2}}{2h_n}, \quad (2.45)$$

$$F_n = a_n^* A_{n-1} + b_n^* A_n + c_n^* A_{n+1}. \quad (2.46)$$

Чтобы решить эту систему, её необходимо дополнить начальными и граничными условиями. В качестве начального условия выступает распределение амплитуды поля A , полученное в конце предыдущего шага вдоль оси z . На внешней границе условием будет равенство нулю амплитуды A . То есть

$$A|_{z_m} = A|_{z_{m-1}}, \quad (2.47)$$

$$A|_{r_{end}} = 0. \quad (2.48)$$

Для построения граничного условия в нуле можно использовать радиальную симметрию, добавив фиктивную точку $n = 0$, в которой $r_0 = -r_2$ ($r_1 = 0$) и $A_0 = A_2$. Важно отметить, что в чистом виде схема 2.35 не может быть использована для построения этого граничного условия из-за неопределенности при расчете коэффициентов. Однако можно заметить, что на равномерной сетке, а именно такая сетка применяется в нуле и его окрестностях, 2.35 тождественно совпадает со схемой Кранка - Николсона. Также отметим, что в нуле $\lim(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial}{\partial r})) = 2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}$. Тогда оказывается, что

$$\frac{2i}{\Delta z} (\hat{A}_1 - A_1) = 2\sigma \frac{\hat{A}_0 - 2\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{h^2} + 2(1 - \sigma) \frac{A_0 - 2A_1 + A_2}{h^2}. \quad (2.49)$$

Это позволяет записать в качестве граничного условия в 0 уравнение:

$$\left(\frac{1}{\Delta z} - \frac{i}{h^2}\right) \hat{A}_1 + \frac{i}{h^2} \hat{A}_2 = \left(\frac{1}{\Delta z} + \frac{i}{h^2}\right) A_1 - \frac{i}{h^2} A_2 \quad (2.50)$$

Таким образом, совокупность 2.42, 2.47, 2.48 и 2.50 образуют систему уравнений, решение которой будет удовлетворять уравнению дифракции на данном шаге. Система решается методом LU - разложения. LU - разложение — это способ разложения матрицы на верхнюю треугольную матрицу U , нижнюю треугольную матрицу L и является модификацией метода Гаусса.

§ 2.4. Решение уравнения дисперсии

Перейдём к решению уравнения дисперсии, которое с учётом выбора безразмерных параметров запишется как

$$2i \frac{\partial A}{\partial z} = -R_t \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (2.51)$$

Данное уравнение можно решить двумя способами.

Один из них - метод Фурье преобразования. Представим функцию $A(r, z, t)$ в виде обратного Фурье преобразования:

$$A(r, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(r, z, k_t) e^{ik_t t} dk_t, \quad (2.52)$$

где

$$\bar{A}(r, z, k_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(r, z, t) e^{-ik_t t} dt. \quad (2.53)$$

Подставив 2.52 в 2.51 и внося операции дифференцирования под интеграл, уравнение сводится к

$$\bar{A}(r, z, k_t) = -\frac{i}{2} R_t k_t^2 \bar{A}(r, z, k_t) \quad (2.54)$$

и его решением будет

$$\bar{A}(r, z, k_t) = \bar{A}_0(r, z, k_t) e^{-\frac{i}{2} R_t k_t^2 \Delta z}. \quad (2.55)$$

Данное выражение показывает эволюцию Фурье образа функции $A(r, z, t)$ за шаг Δz . Тогда решение уравнения 2.51 можно найти по алгоритму:

1. Найти Фурье образ функции $A(r, z, t)$ в начальной точке;

2. Определить изменение Фурье образа по 2.55;
3. Вычислить обратное Фурье преобразование.

Второй способ решения уравнения дифракции предполагает численное решение с помощью разностной схемы[26].

$$\frac{1}{\Delta z}(\hat{A}_n - A_n) = \frac{\sigma}{\hbar_n}(\hat{W}_{n-1/2} - \hat{W}_{n+1/2}) + \frac{1-\sigma}{\hbar_n}(W_{n-1/2} + W_{n+1/2}), \quad (2.56)$$

$$W_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{A_n - A_{n+1}}{h_n}, \quad \hat{W}_{n+1/2} = \bar{\chi}_{n+1/2} \frac{\hat{A}_n - \hat{A}_{n+1}}{h_n}, \quad (2.57)$$

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad \hbar_n = \frac{1}{2}(h_{n-1} + h_n) = t_{n+1/2} - t_{n-1/2}, \quad (2.58)$$

$$\bar{\chi}_{n+1/2} = \left[\frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dt}{k(t, \bar{z})} \right]^{-1}, \quad \bar{z} = z + \Delta z/2, \quad (2.59)$$

$$k(t, z) = \frac{iR_t}{2}, \quad \sigma = 1/2. \quad (2.60)$$

Для численного решения данного уравнения необходимо ввести расчетную сетку, заменив непрерывные координаты t и z совокупностью узлов сетки. Также, как и в случае уравнения дифракции, импульс будет сосредоточен в окрестности нуля локального времени. Тогда сетка может быть построена следующим образом:

- в области $|t| \leq 1.5\tau_0$ ($2\tau_0$ - начальная длительность пучка) шаг по сетке равнялся $h_0 = 0.003\tau_0$;
- в области $|t| > 1.5\tau_0$ расстояние между узлами увеличивалось в $1 + 0.01$ раз

В таком случае уравнение может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений:

$$a_n \hat{A}_{n-1} + b_n \hat{A}_n + c_n \hat{A}_{n+1} = a_n^* A_{n-1} + b_n^* A_n + c_n^* A_{n+1}, \quad (2.61)$$

$$a_n = -\frac{iR_t}{4\hbar_n h_{n-1}}, \quad (2.62)$$

$$b_n = \frac{1}{\Delta z} + \frac{iR_t}{4\hbar_n h_{n-1}} + \frac{iR_t}{4\hbar_n h_n} = \frac{1}{\Delta z} - a_n - c_n, \quad (2.63)$$

$$c_n = -\frac{iR_t}{4\hbar_n h_n}. \quad (2.64)$$

Для доопределения этой системы необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве начального условия выступает решение уравнения дисперсии A_{disp} , а на границах значение A полагается равным нулю:

$$A|_{t=-T_{end}, t=T_{end}} = 0, \quad (2.65)$$

$$A|_{z=z_m} = A_{disp}. \quad (2.66)$$

Полученная система, так же как и в случае уравнения дифракции, решается с помощью LU - разложения.

§ 2.5. Уравнение нелинейного набега фазы

$$2i\frac{\partial A}{\partial z} = \left[R_k |A|^2 - R_p (N_e^{N_2} + N_e^{O_2}) - iR_a \left(K_{N_2} \frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} + K_{O_2} \frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} \right) \frac{1}{|A|^2} \right] A \quad (2.67)$$

Это уравнение описывает нелинейный набег фазы, приобретаемый мощным фемтосекундным импульсом в процессе распространения в воздухе. Для решения данного уравнения используется приближение заданного поля, согласно которому нелинейный отклик среды можно считать мало меняющимся. Это означает, что на данном шаге по z выражение в квадратных скобках можно считать не зависящим от z и полностью определяемым начальной амплитудой поля A_t , полученной в результате решения уравне-

ния дисперсии.[31] Тогда решение уравнения 2.67 можно записать как:

$$A_{nl} = A_t \exp \left\{ \left[-\frac{i}{2} R_k |A_t|^2 + \frac{i}{2} R_p (N_e^{N_2} + N_e^{O_2}) - \frac{1}{2} R_a \left(K_{N_2} \frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} + K_{O_2} \frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} \right) \frac{1}{|A_t|^2} \right] \Delta z \right\}. \quad (2.68)$$

Для определения концентрации свободных электронов необходимо решить кинетические уравнения. Для этого аппроксимируем их разностными схемами, учитывая равенство нулю количества свободных электронов до прихода импульса и выбор безразмерных параметров, в результате чего получим:

$$\frac{\partial N_e^{O_2}}{\partial t} = \tau_0 R_{I_{O_2}} (0.22 - N_e^{O_2}) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial N_e^{N_2}}{\partial t} = \tau_0 R_{I_{N_2}} (0.78 - N_e^{N_2}) \quad (2.70)$$

и накопление свободных электронов на шаге по времени n

$$(N_e^{O_2})_n = (N_e^{O_2})_{n-1} + \tau_0 R_{I_{O_2}} (0.22 - N_e^{O_2}) \quad (2.71)$$

$$(N_e^{N_2})_n = (N_e^{N_2})_{n-1} + \tau_0 R_{I_{N_2}} (0.78 - N_e^{N_2}) \quad (2.72)$$

Важно учесть, что приближение постоянного поля требует малости нелинейности среды. Это означает, набег фазы, вызванный этой нелинейностью на каждом шаге по z должен быть мал. На практике это означает необходимость ограничить сверху величину шага Δz , что было достигнуто установлением Δz на каждом шаге по z с помощью выражения:

$$\Delta z = \min\left(\frac{\pi}{200} / \left(\frac{1}{2} * R_k * A_{max}^2\right), \frac{\pi}{200} / \left(\frac{1}{2} * R_p * (N_e^{O_2} + N_e^{N_2})_{total}\right)\right), \quad (2.73)$$

где A_{max} - максимальная амплитуда поля во всем импульсе, $(N_e^{O_2} + N_e^{N_2})_{total}$ - сумма свободных электронов, полученных при ионизации кислорода и азота, после прохождения импульса.

§ 2.6. Результат моделирования для одиночного пучка

В результате моделирования филаментации лазерного импульса, обладающего следующими начальными характеристиками:

$$a_0 = 0.5\text{мм} \quad (2.74)$$

$$\tau_0 = 60\text{фс} \quad (2.75)$$

$$P_0 = 3P_{cr} \quad (2.76)$$

где $P_{cr} = R_{cr} \frac{\lambda^2}{8\pi n_0 n_2}$, для Гауссова пучка $R_{cr} = 3.79$ [9], были получены различные характеристики. В первую очередь была проверена формула Марбургера [10], которая позволяет оценить расстояние z_f , на котором при стационарной самофокусировке лазерного пучка его интенсивность обращается в бесконечность:

$$z_f = \frac{0.367k_0 a_0^2}{\left\{ \left[\left(\frac{P_0}{P_{cr}} \right)^{1/2} - 0.852 \right]^2 - 0.0219 \right\}^{1/2}}. \quad (2.77)$$

Как видно из рисунка 1, результаты моделирования хорошо совпадают с эмпирической формулой Марбургера, что свидетельствует об общей корректности модели.

В результате численного расчета был построен плазменный канал рис.2, чья длина составляет примерно $0.75L_d$, а также определена зависимость амплитуды поля и концентрации свободных электронов рис.3. Как видно, максимумы концентрации и амплитуды не совпадают точно, что связано с тем, что количество ионизованных атомов определяется не только интенсивностью, но и продолжительностью импульса. Как можно видеть на рисунке 5 в процессе филаментации импульс разделяется, в начале, на два сжимающихся импульса. Впоследствии, ближе к концу филамента каждая из частей разделяется ещё раз, образуя последовательность из четырех импульсов. Отдельно следует заметить, что зависимость максимальной амплитуды каждого подимпульса имеет сложный характер, и в разные моменты времени максимум по всему импульсу может переме-

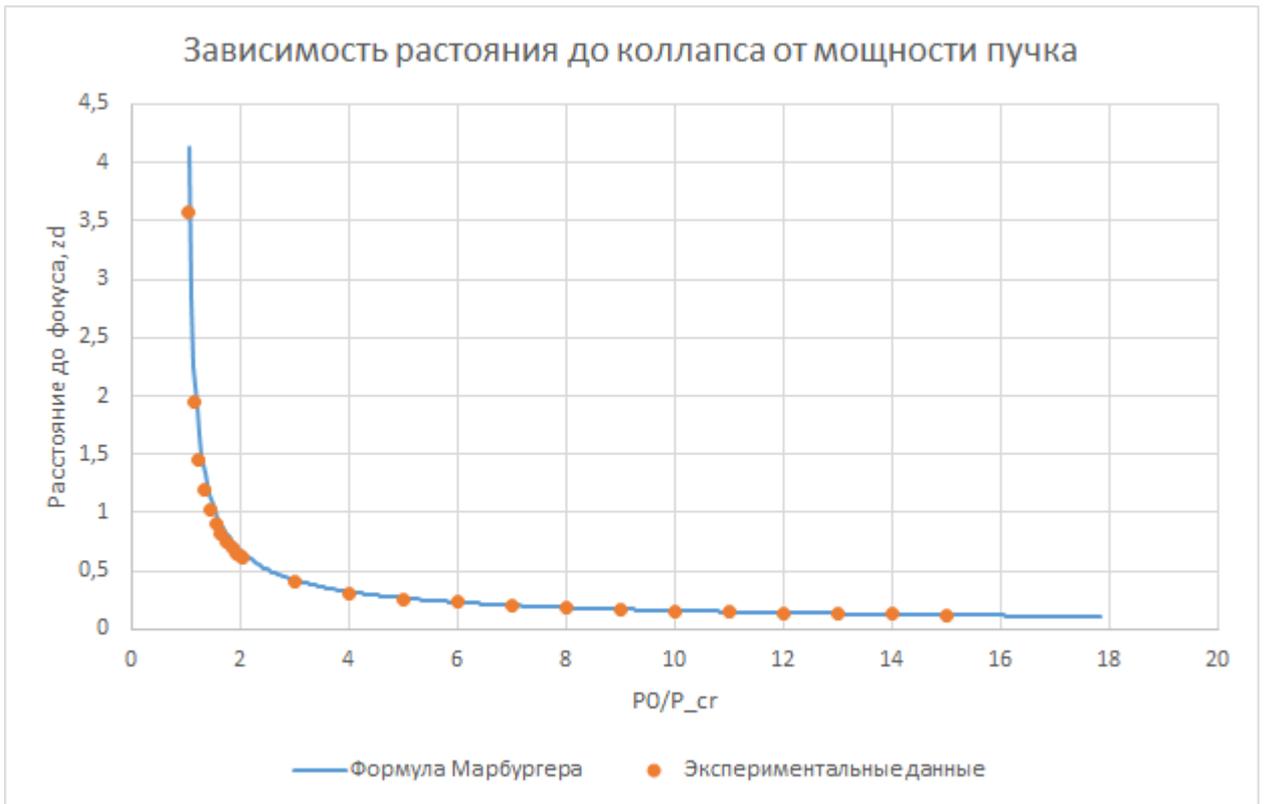


Рис. 1. Формула Марбургера

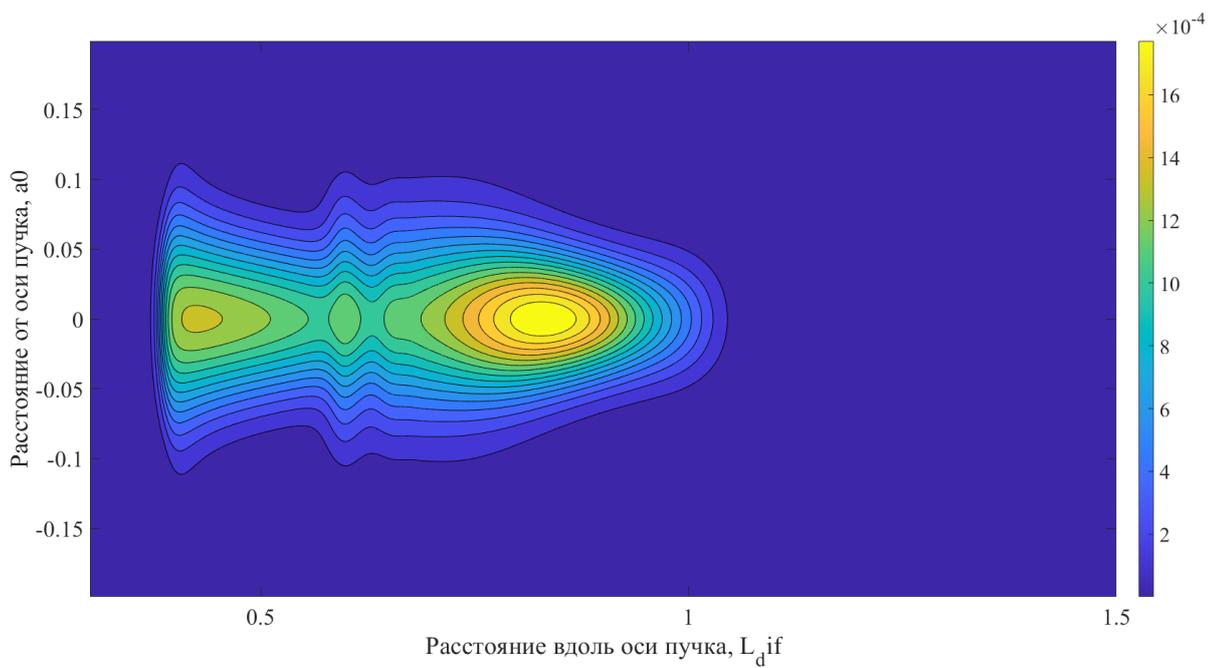


Рис. 2. Плазмменный канал

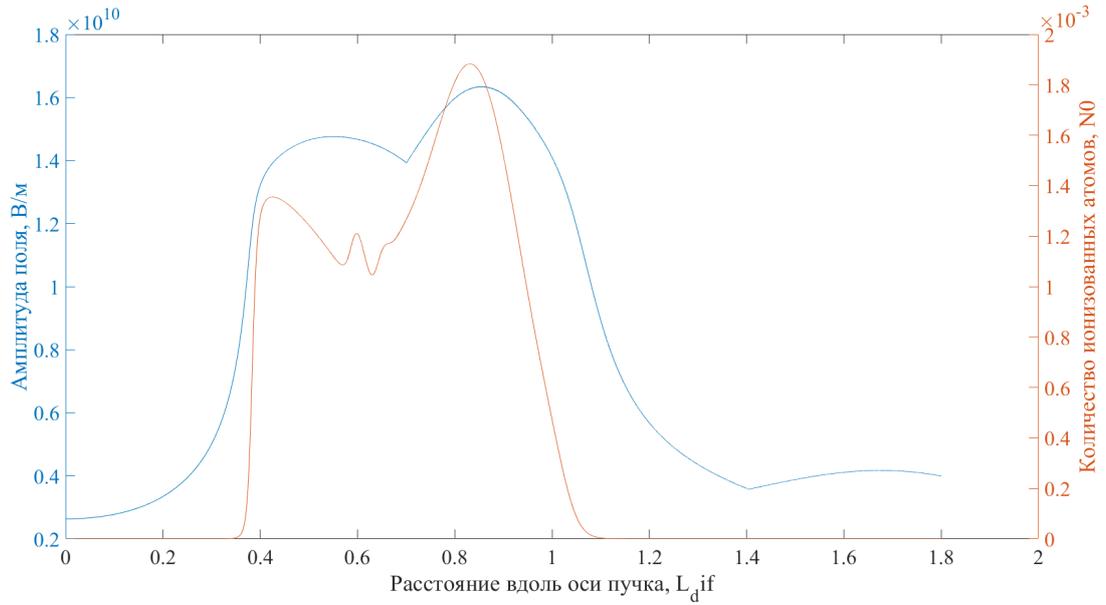


Рис. 3. Зависимость амплитуды поля и концентрации свободных электронов от расстояния, пройденного в среде

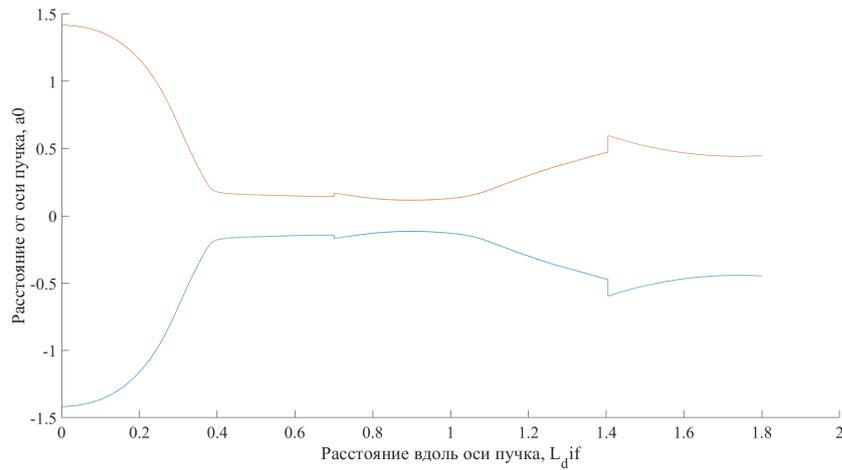


Рис. 4. Изменение ширины пучка по уровню $1/e$ по амплитуде поля

щаться. В частности, изменение характера поведения амплитуды на рис.3 вблизи $z = 0.75L_d$ связано, как раз, с переходом максимума от одного подымпульса к другому, то есть амплитуда первого подымпульса уменьшается, в то время как второго - увеличивается.

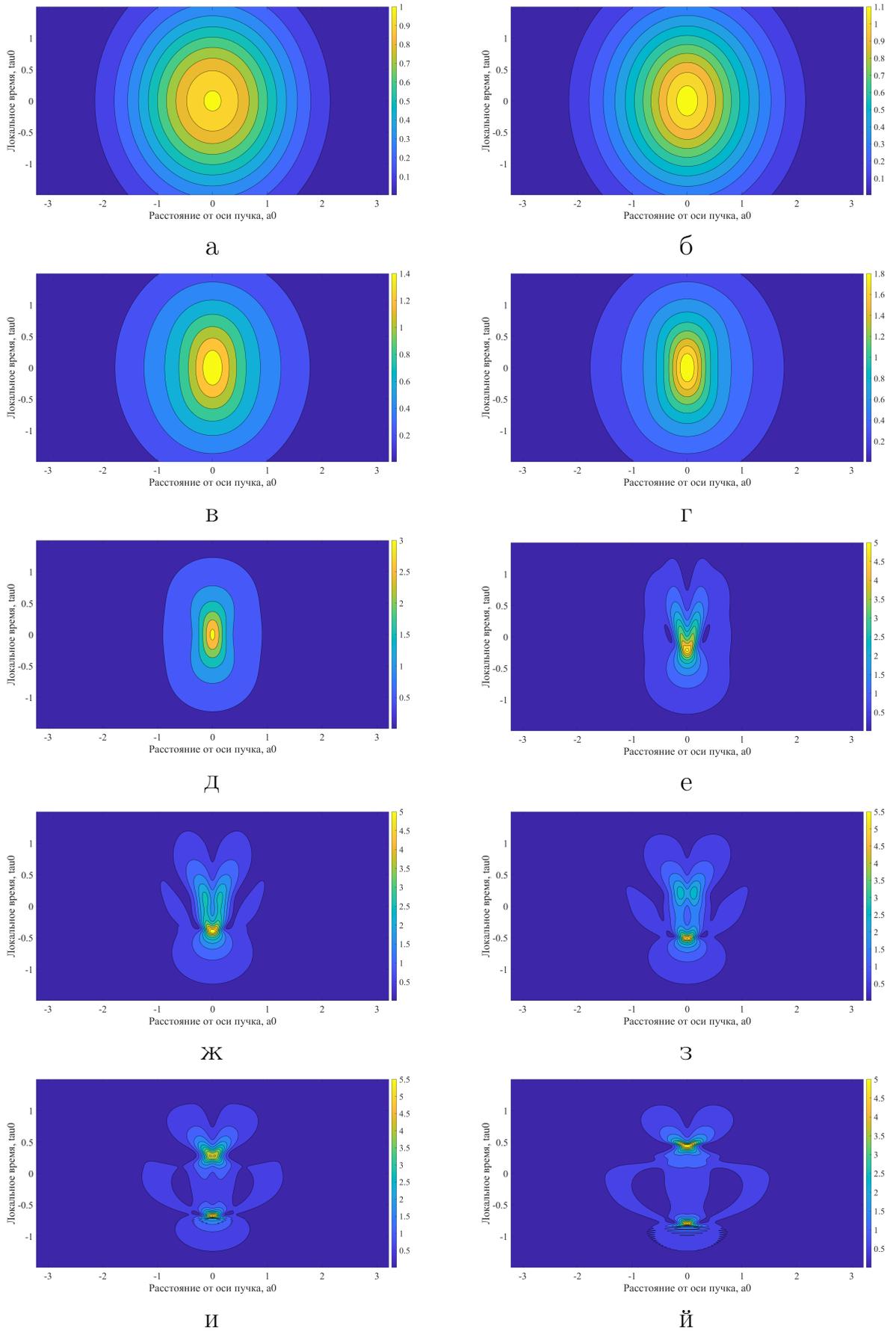


Рис. 5. Распределение амплитуды в пространстве радиус - локальное время на расстоянии от входа в среду в L_d : а - 0.05, б - 0.15, в - 0.26, г - 0.31, д - 0.36, е - 0.41, ж - 0.46, з - 0.51, и - 0.61, й - 0.71

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 3.1. Модель релаксации плазмы

В настоящее время отсутствует четкое понимание того, как происходит рекомбинация плазмы в филаменте. В данной работе, на основе экспериментальных данных, делается предположение о том, что количество свободных электронов с течением времени изменяется в соответствии с уравнением

$$n_e(t) = n_e^0 e^{-\frac{t}{\nu}}, \quad (3.1)$$

где время ν будет иметь смысл времени жизни плазменного канала. Согласно [14] время жизни плазмы составляет порядка 10нс, а температура плазмы - 6000К. Если считать, что основным механизмом рекомбинации плазмы в филаменте является ударно - радиационная рекомбинация, проходящая по схеме $A^+ + e + e \rightarrow A + e$, то можно сравнить релаксацию по этим моделям. Таким образом, вероятнее всего, что скорость экспонен-

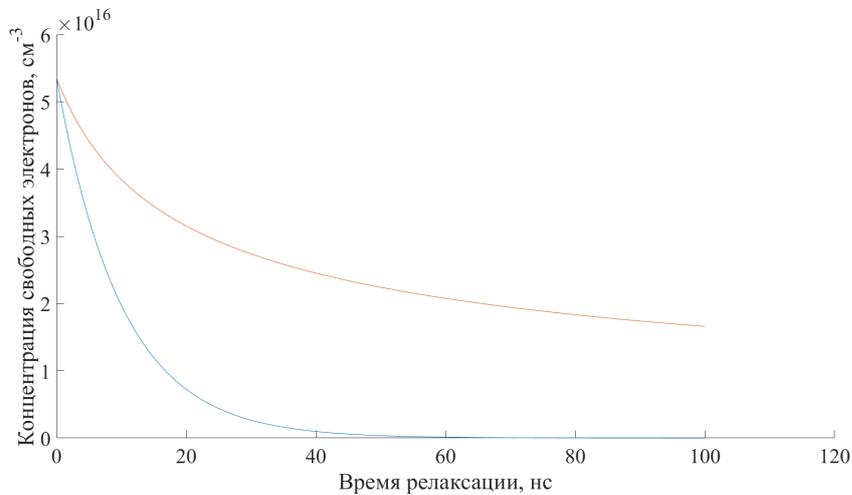


Рис. 6. Релаксация свободных электронов

циальной релаксации окажется выше экспериментальной, благодаря чему наблюдаемые далее результаты моделирования окажутся справедливы для больших времен задержки между импульсами.

§ 3.2. Филаментация последовательности из шести одинаковых импульсов с различными временами задержки

В результате численного моделирования был определен ряд характеристик плазменного канала серии следующих друг за другом импульсов с разным временем задержки между импульсами для каждой серии.

3.2.1. Время задержки между импульсами 10нс (частота повторения 100МГц)

Одной из таких характеристик является положение максимума концентрации свободных электронов в филаменте и значение концентрации в нём, так как они могут указать на дальнейшие изменения в плазменном канале.

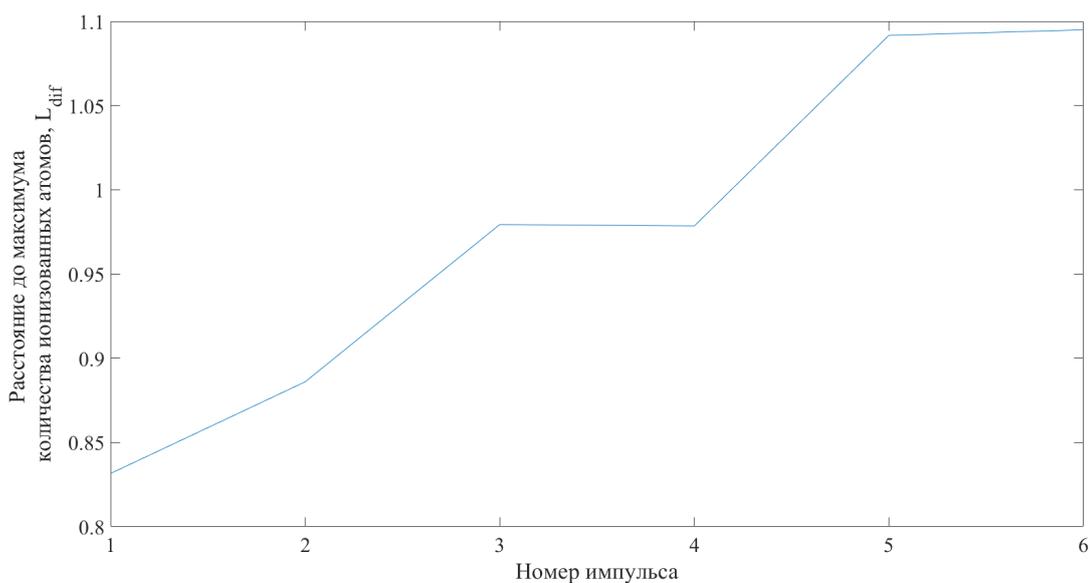


Рис. 7. Изменение координаты вдоль оси распространения импульса максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

По данным зависимостям можно сказать, что из-за малого промежутка времени между импульсами плазменный канал не успевает достаточно релаксировать, что препятствует самофокусировке и приводит к более медленному увеличению интенсивности, что в свою очередь приводит к уменьшению количества ионизуемых атомов в области остаточной ионизации и смещению максимума плазменного канала в удаленные области локальных

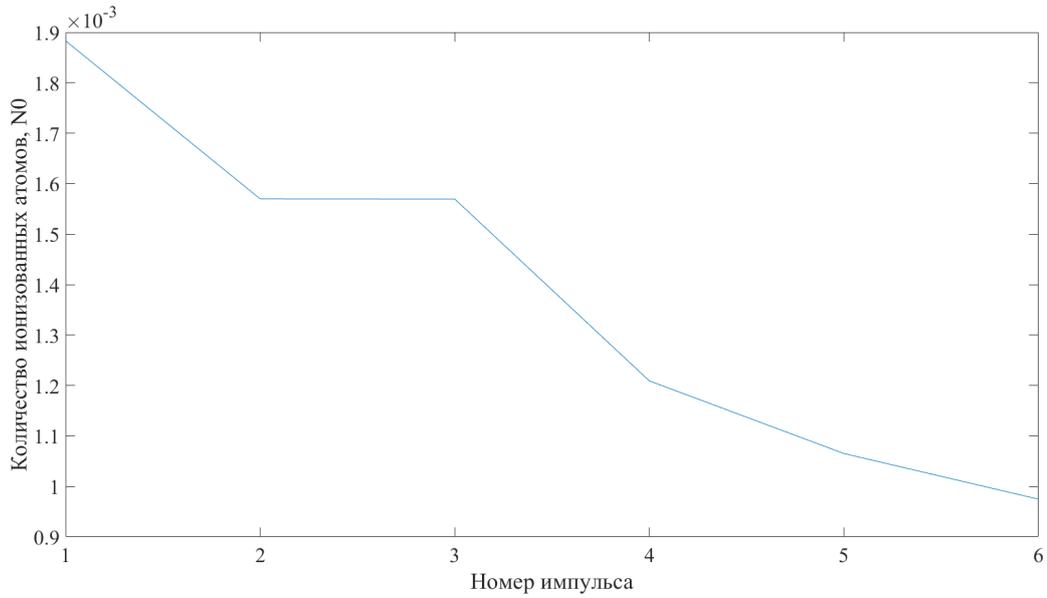
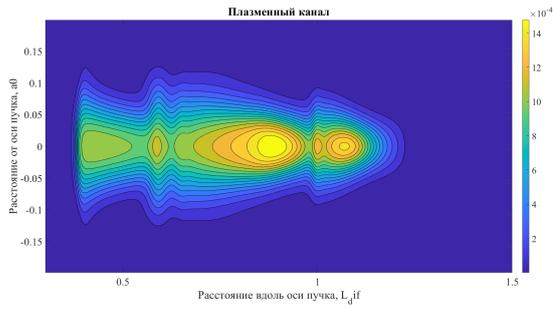


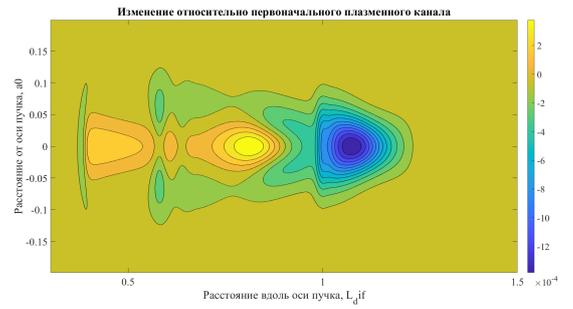
Рис. 8. Изменение максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости от номера импульса

минимумов. Именно это и наблюдается на рисунках. В дальнейшем можно ожидать продолжения такого поведения.

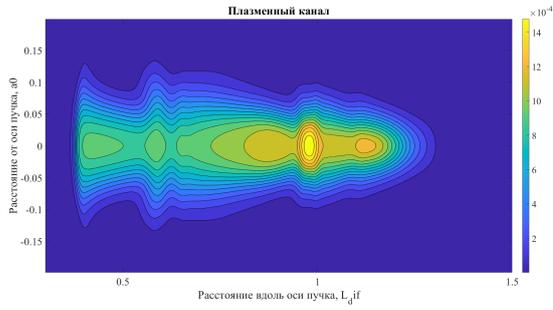
Из рисунков 9 видно, что остаточная ионизация приводит не только к смещению главного максимума, но и к увеличению длины плазменного канала до $1.15L_d$. Также можно наблюдать постепенное выравнивание концентрации свободных электронов вдоль филамента, что отчетливо можно увидеть на рисунке 10. Таким образом, возникают протяженные области с относительно равномерной концентрацией электронов.



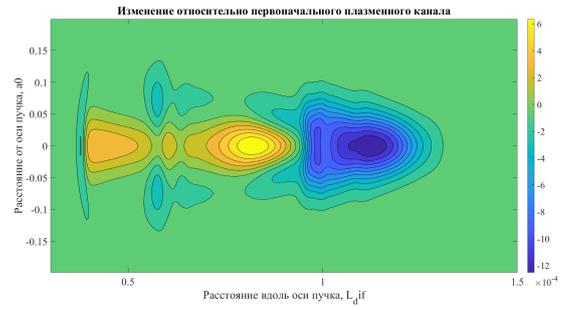
2а)



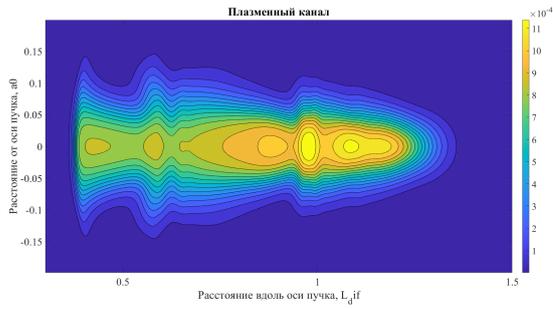
2б)



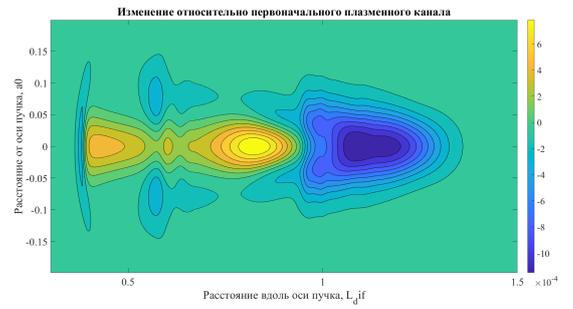
3а)



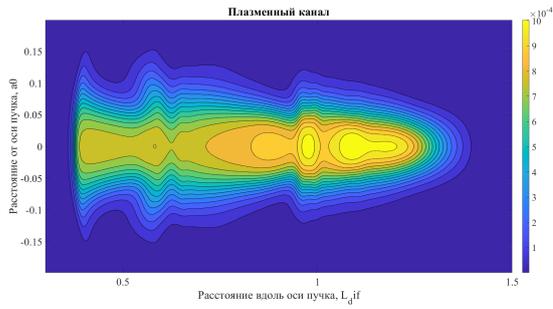
3б)



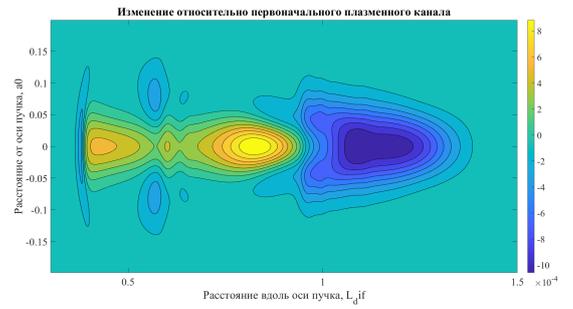
4а)



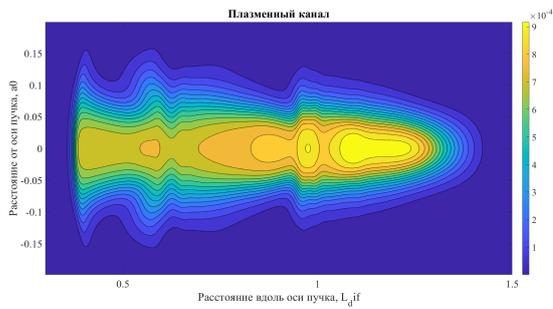
4б)



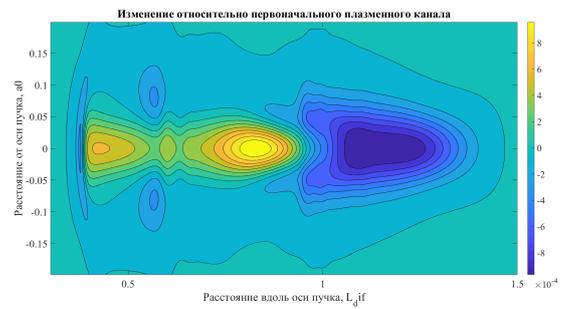
5а)



5б)



6а)



6б)

Рис. 9. Номер импульса: а) Плазменный канал, б) Изменение относительно первоначального плазменного канала

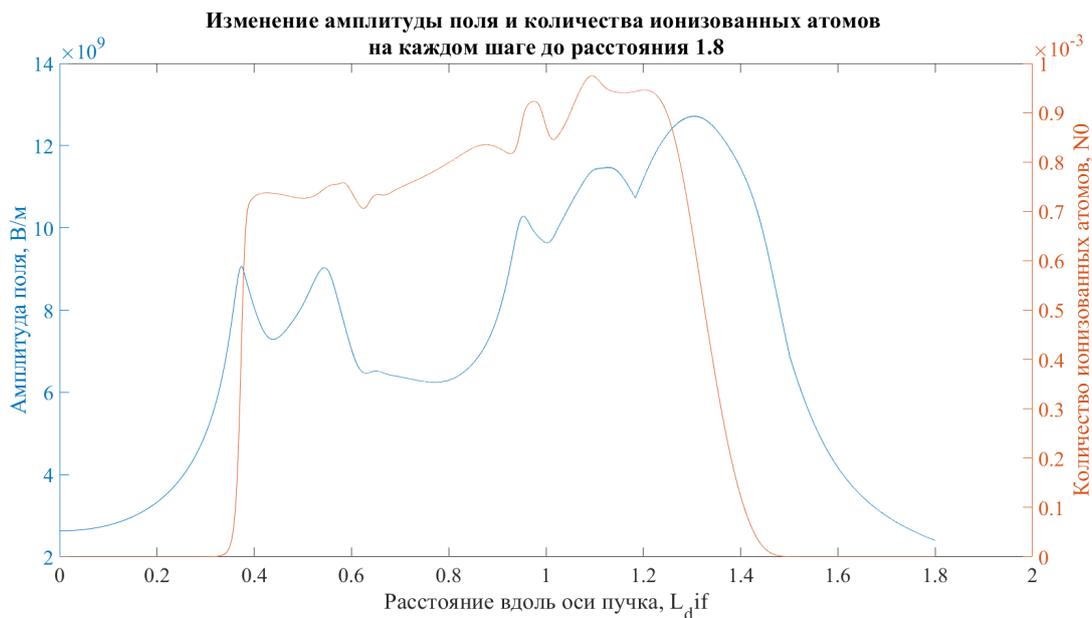


Рис. 10. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси, импульс №6.

3.2.2. Время задержки 20нс (частота повторения 50МГц)

По данным зависимостям, изображенным на рисунках 11 и 12 сложно сказать, как дальше поведет себя филамент, однако наблюдается та же тенденция уменьшения максимума концентрации свободных электронов в главном максимуме, но теперь зависимость концентрации электронов немонотонна.

Характерным отличием от задержки 10нс между импульсами становится выделение двух областей в филаменте, примерно соответствующих первоначальному плазменному каналу и добавленной к нему части, возникающей из-за дефокусировки после выхода из области остаточной ионизации. Данный эффект можно наблюдать на рисунках 13 и 14. Также можно увидеть, что длина плазменного канала растет меньше, чем в случае задержки 10 нс, и составляет всего $1.05L_d$. Заслуживающим внимания является факт, что каждая из двух областей стремится постоянному значению концентрации электронов.

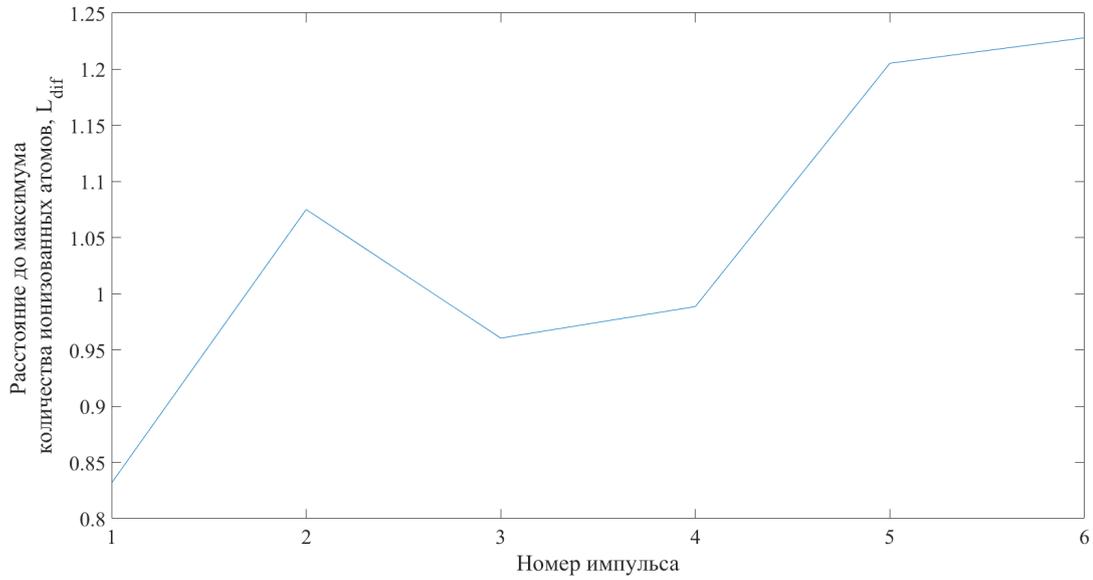


Рис. 11. Изменение координаты вдоль оси распространения импульса максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

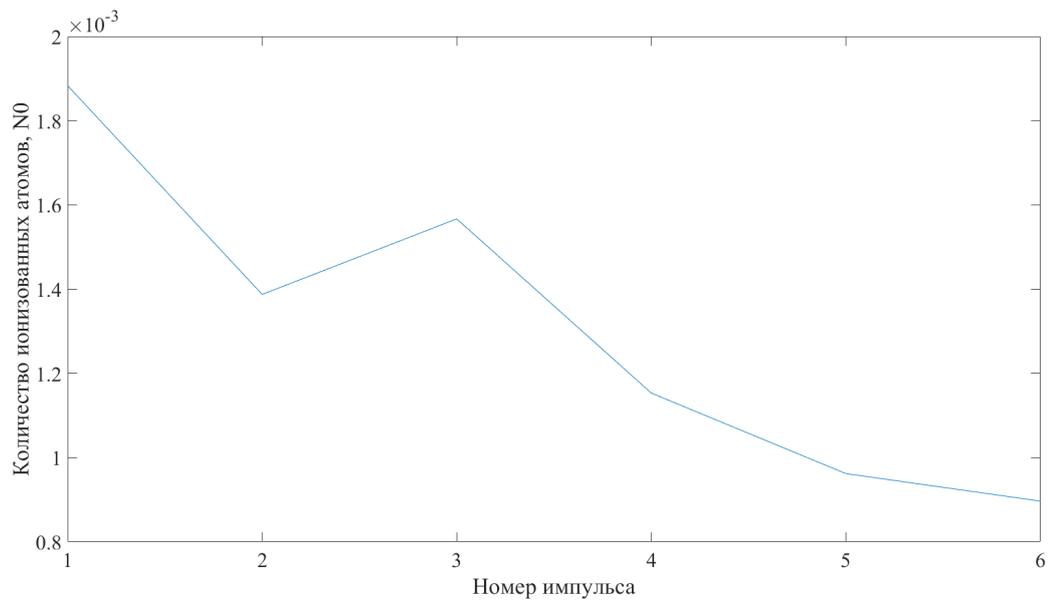


Рис. 12. Изменение максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

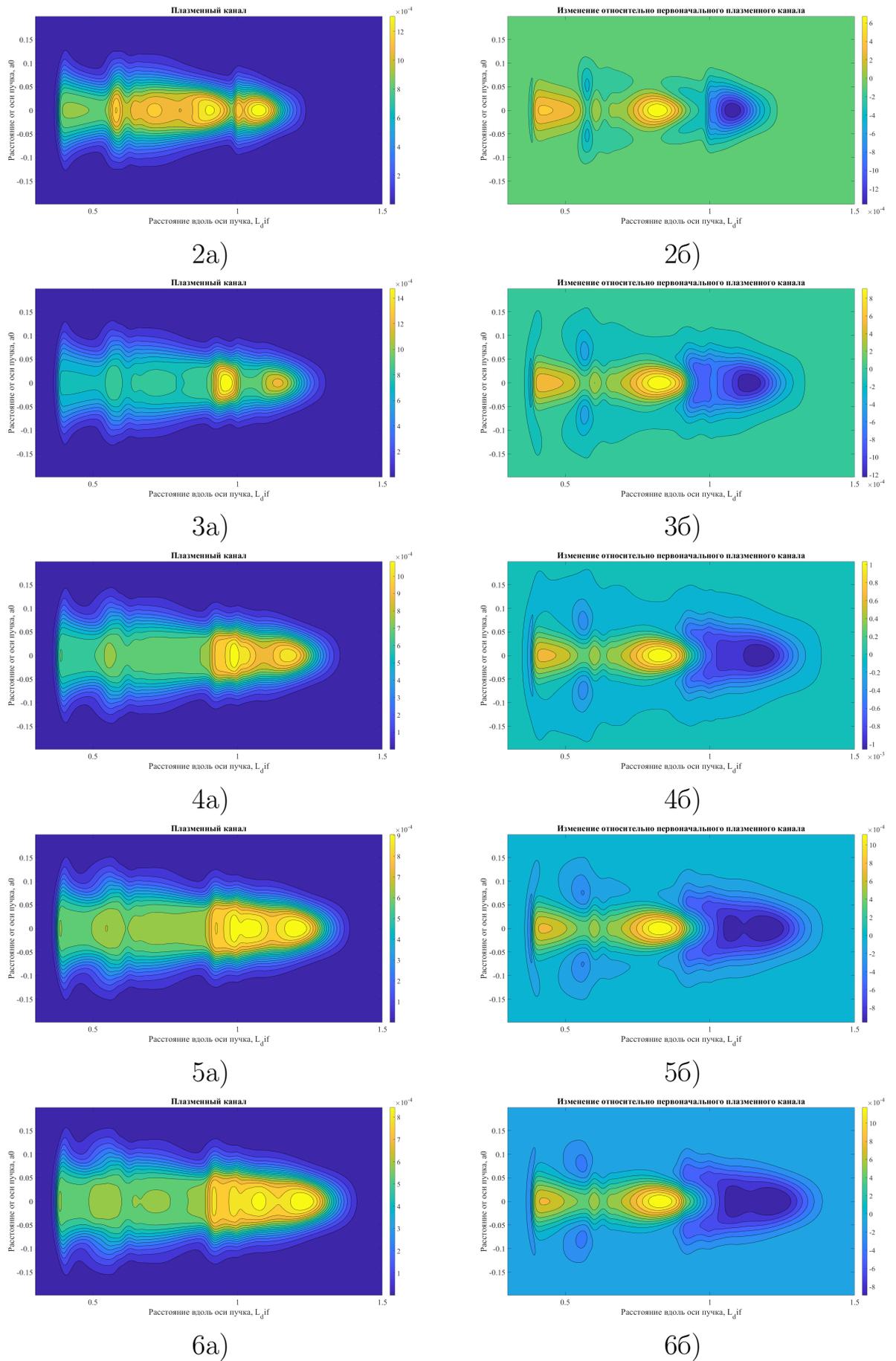


Рис. 13. Номер импульса: а) Плазменный канал, б) Изменение относительно первоначального плазменного канала

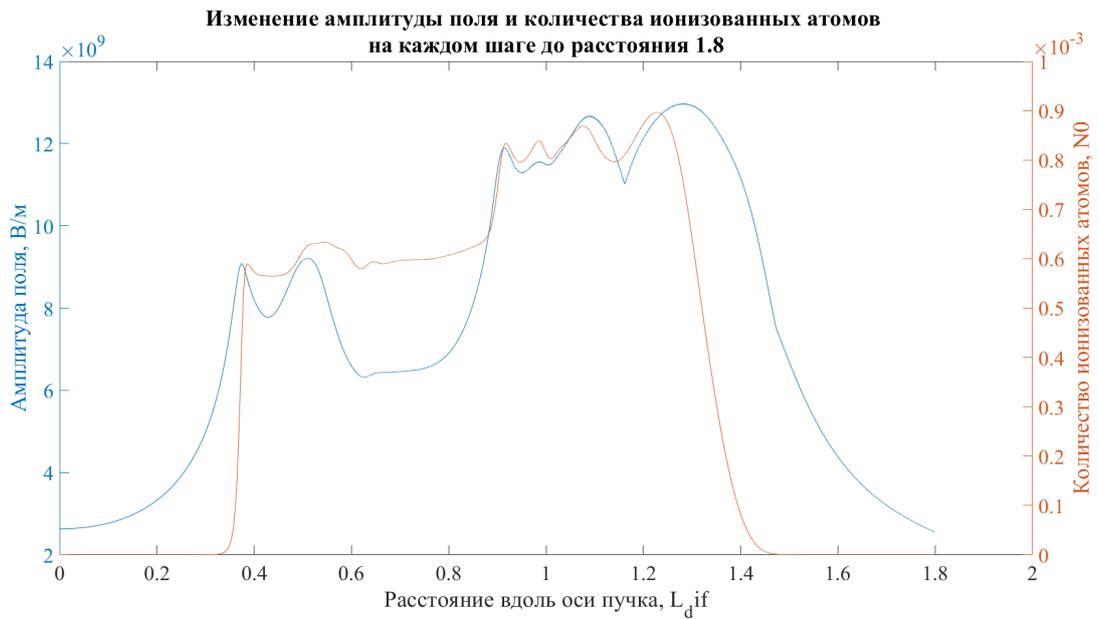


Рис. 14. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси, импульс №6.

3.2.3. Время задержки 30нс (частота повторения 33МГц)

Из зависимостей, изображенных на рисунках 15 и 16 видно, что существенных изменений относительно случая 20нс задержки нет. Однако плазменный канал начинает претерпевать изменения: в дальней от входа в среду области теперь, вместо того чтобы стремиться к некоторому постоянному значению, концентрация свободных электронов начинает образовывать локальные минимумы и максимумы. При этом длина плазменного канала не претерпела изменения и составила те же $1.05L_d$.

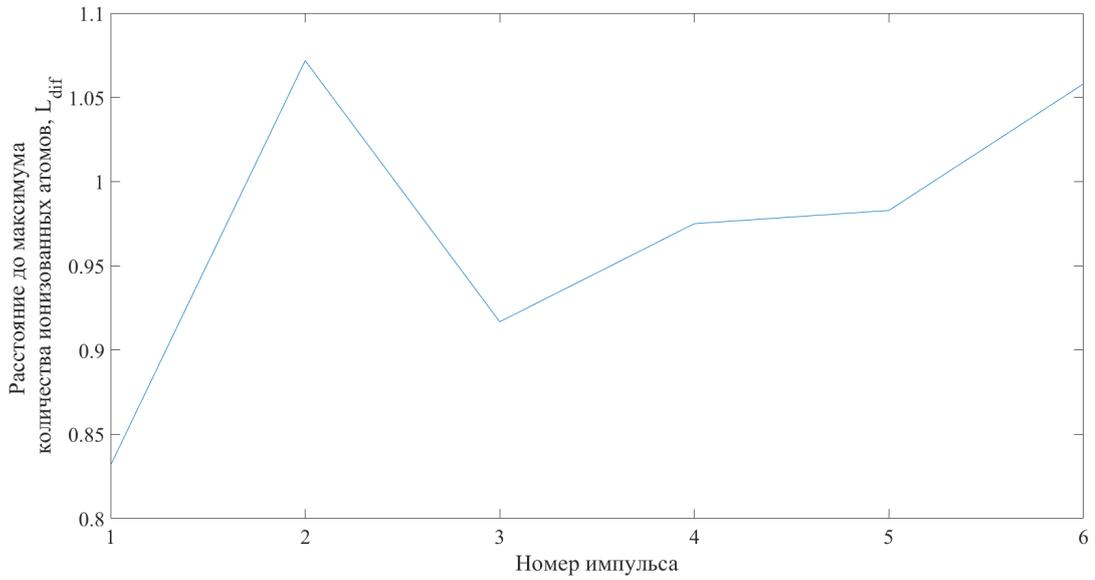


Рис. 15. Изменение координаты вдоль оси распространения импульса максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

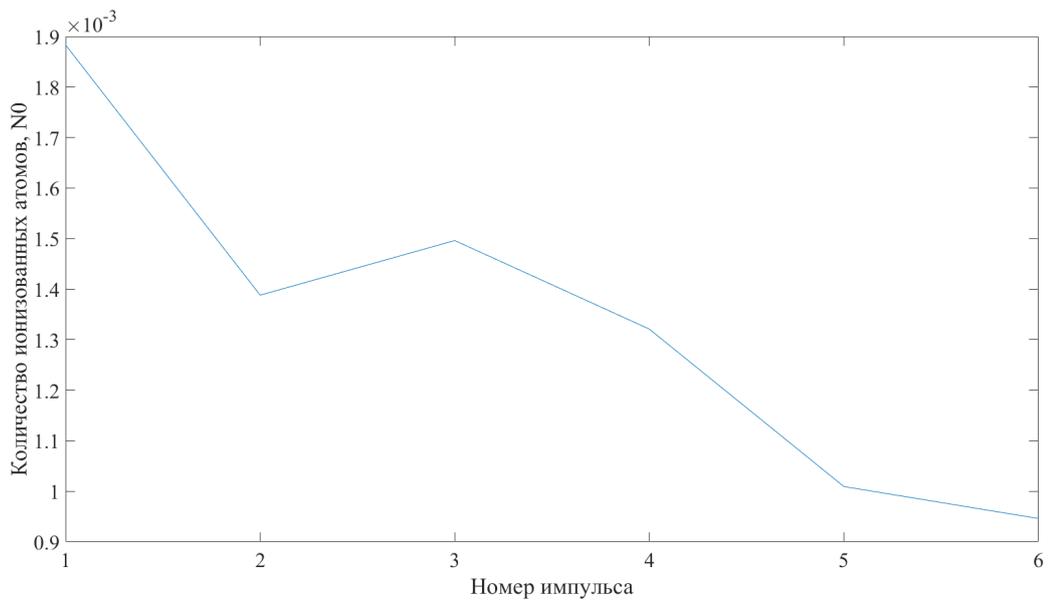


Рис. 16. Изменение максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

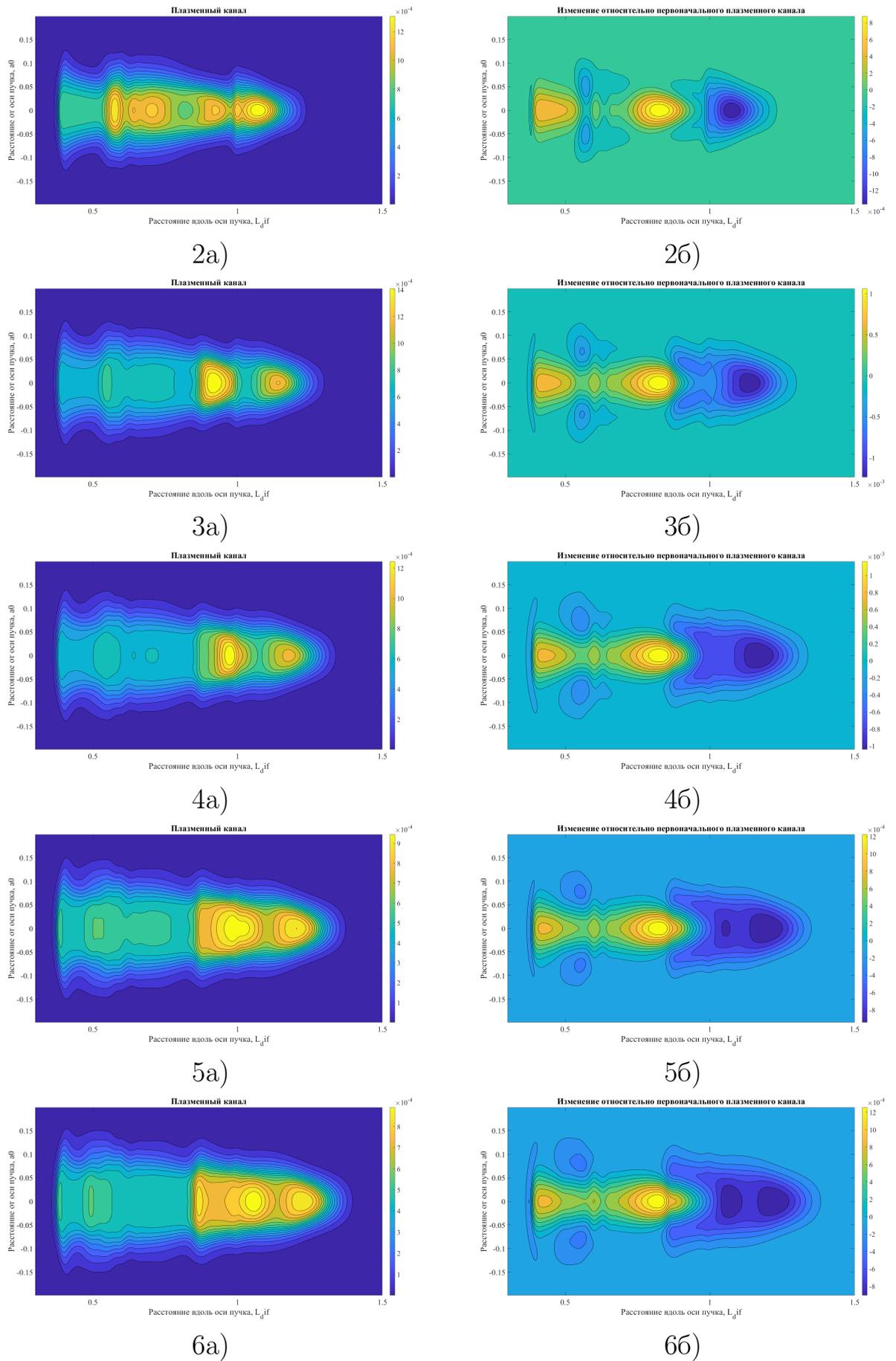


Рис. 17. Номер импульса: а) Плазменный канал, б) Изменение относительно первоначального плазменного канала

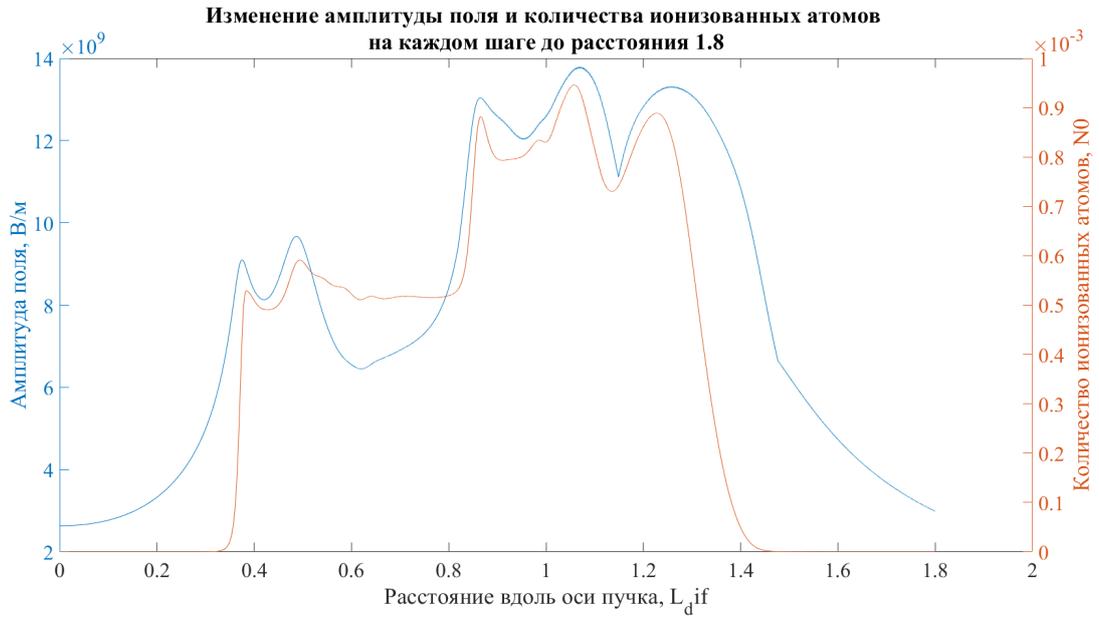


Рис. 18. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси, импульс №6.

3.2.4. Время задержки 50нс (частота повторения 20МГц)

Из зависимостей, изображенных на рисунках 23 и 24 видно, что после начального процесса установления, примерно до четвертого импульса, положение главного максимума замирает около точки $z = 0.95L_d$ и нет оснований предполагать его дальнейшее смещение, так как плазменные каналы импульсов с 4 по 6 слабо отличаются друг от друга. При этом наблюдаются слабые колебания значения максимума, которые соответственно должны уменьшиться.

Характерным отличием от задержек 10нс и 20нс между импульсами становится постепенное выделение единственного максимума при незначительном преобладании дальней от входа в среду области филамента. При этом длина плазменного канала не претерпела изменения и составила те же $1.05L_d$.

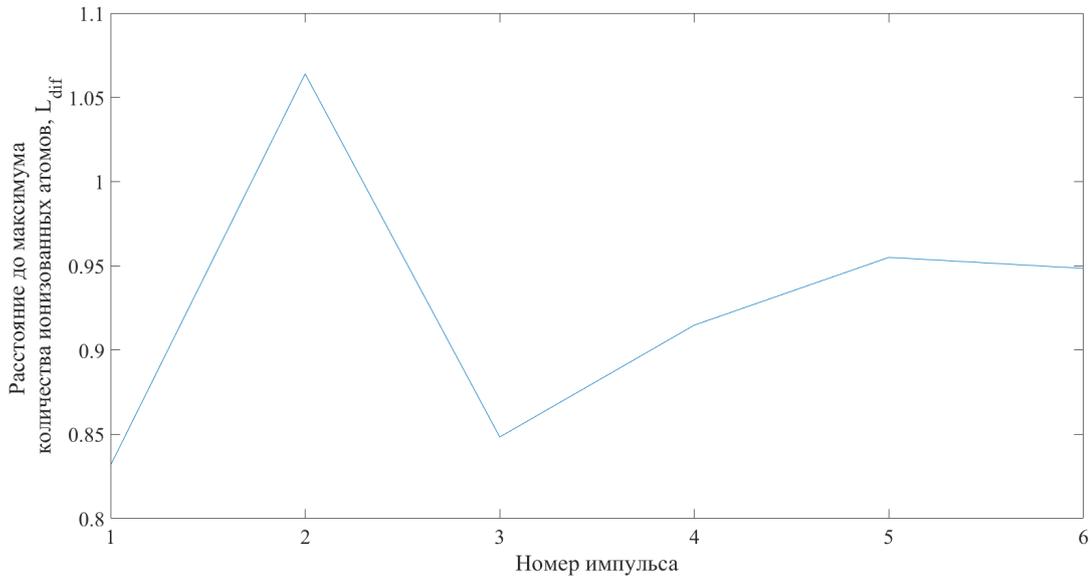


Рис. 19. Изменение координаты вдоль оси распространения импульса максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

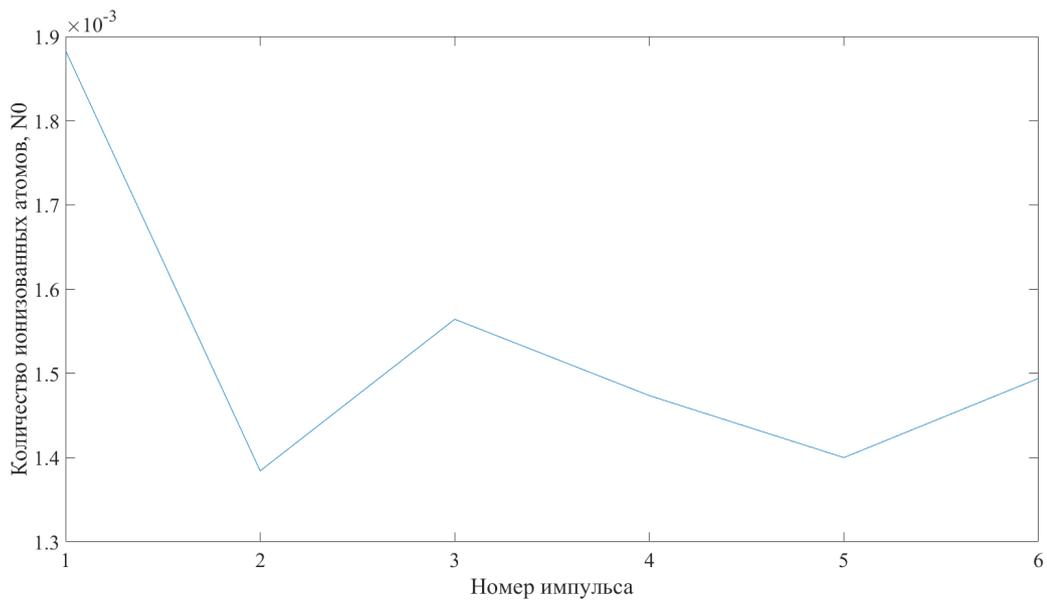


Рис. 20. Изменение максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

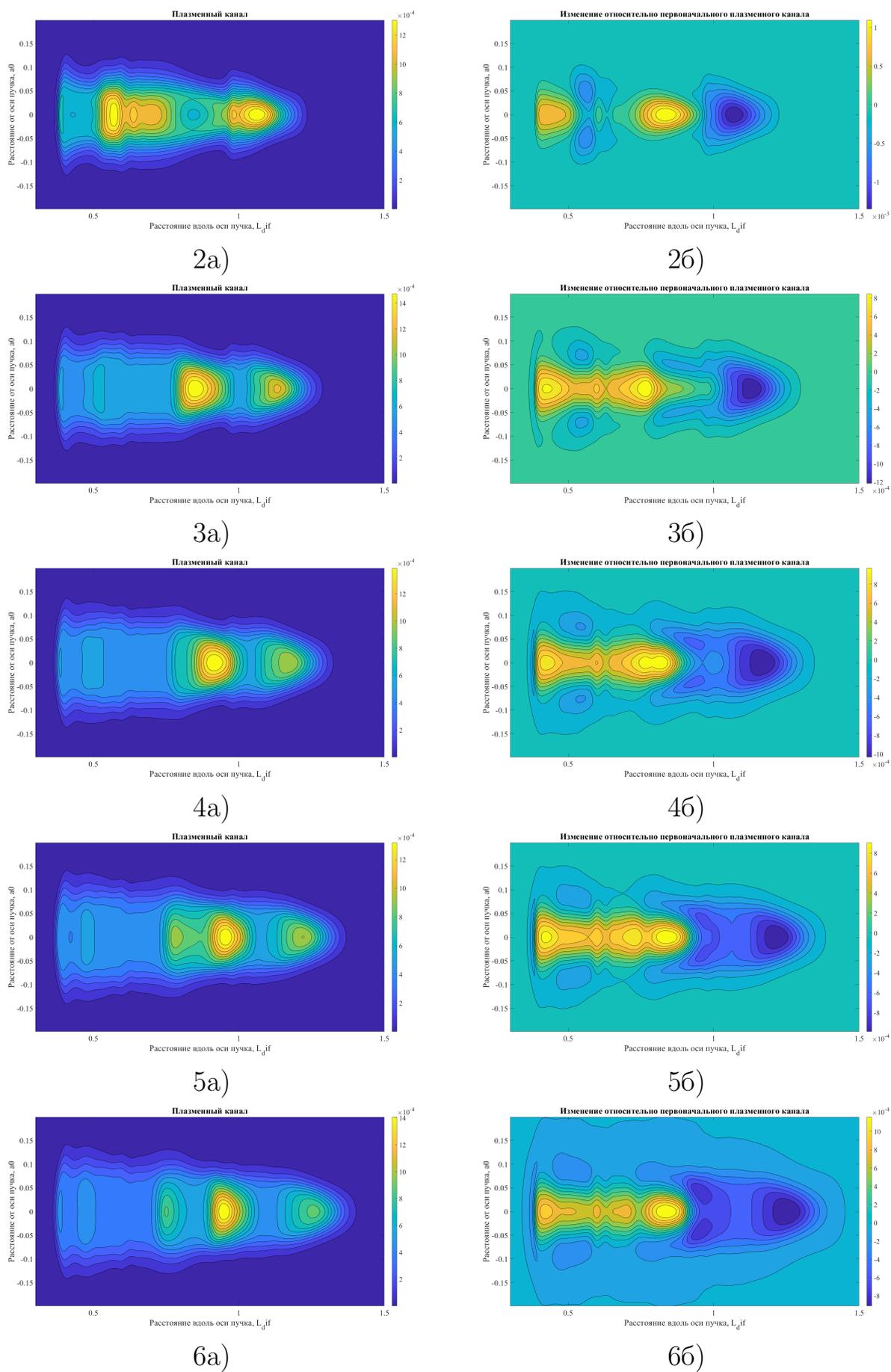


Рис. 21. Номер импульса: а) Плазменный канал, б) Изменение относительно первоначального плазменного канала

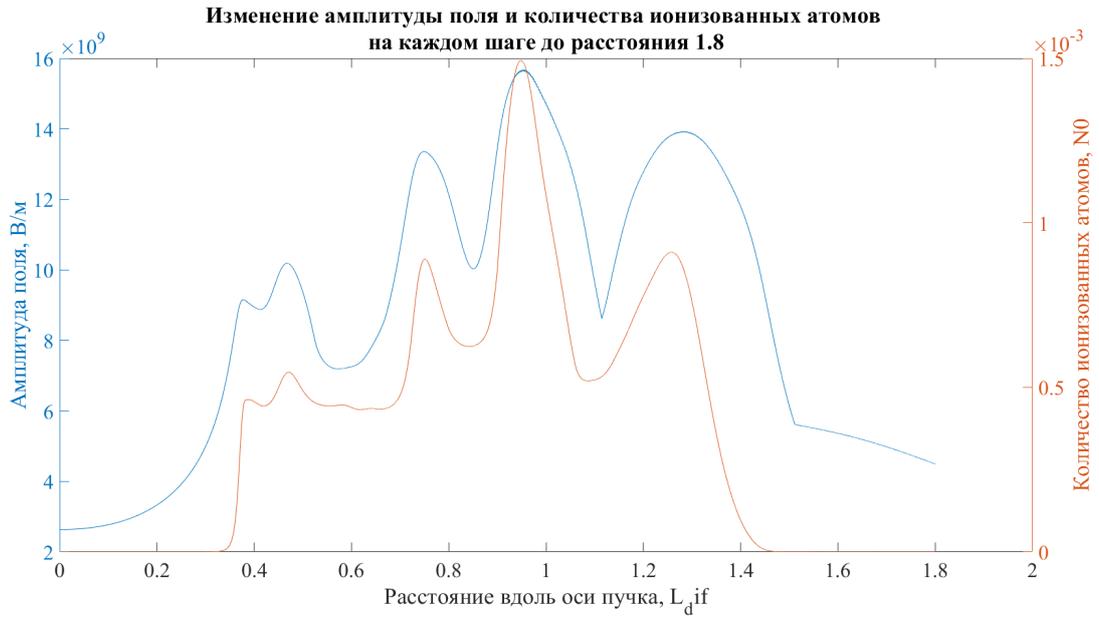


Рис. 22. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси, импульс №6.

3.2.5. Время задержки 100нс (частота повторения 10МГц)

По данным зависимостям, изображенным на рисунках 23 и 24 сложно сказать, как дальше поведет себя филамент, однако наблюдается та же тенденция уменьшения максимума концентрации сводных электронов в главном максимуме, но теперь зависимость концентрации электронов немонотонна.

Характерным отличием от задержки 10нс между импульсами становится выделение двух областей в филаменте, примерно соответствующих первоначальному плазменному каналу и добавленной к нему части, возникающей из-за дофокусировки после выхода из области остаточной ионизации. Данный эффект можно наблюдать на рисунках 25 и 33. Также можно увидеть, что увеличение уменьшилось, в результате чего длина плазменного канала составила только $1.05L_d$. Заслуживающим внимания является факт, что каждая из двух областей стремится постоянному значению концентрации электронов.

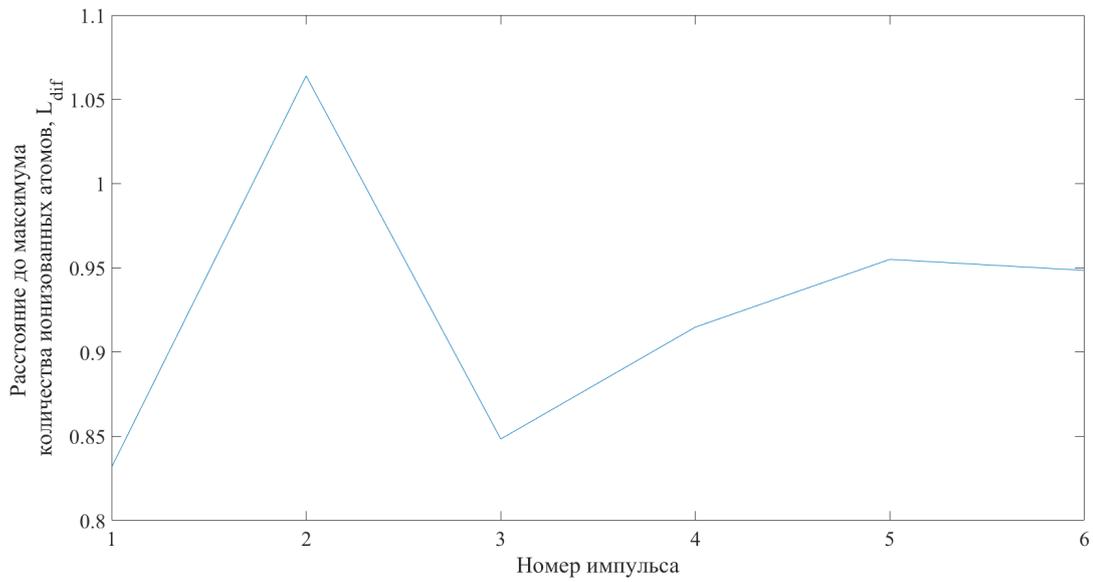


Рис. 23. Изменение координаты вдоль оси распространения импульса максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

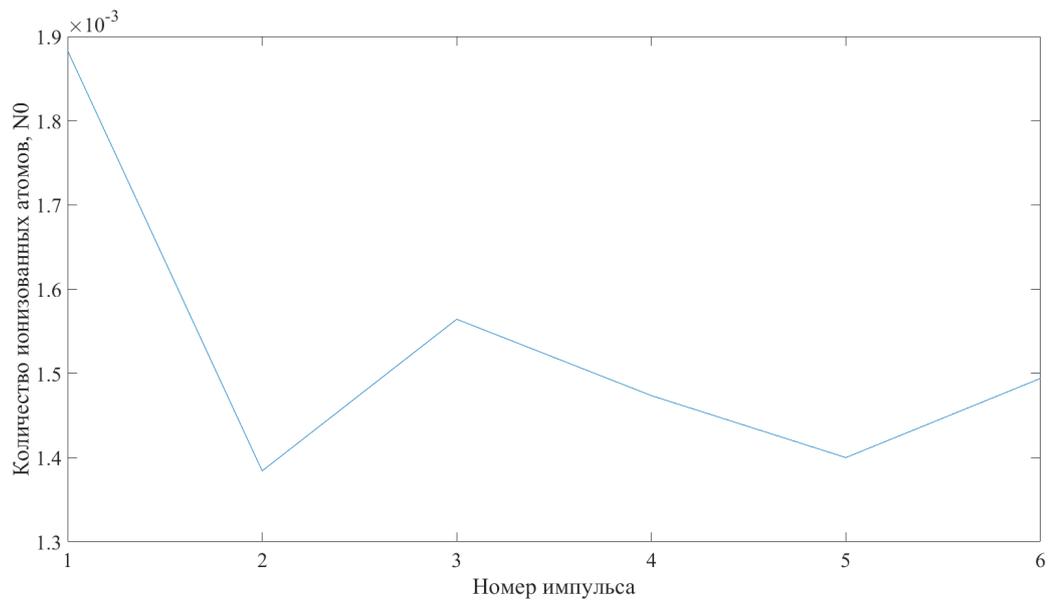


Рис. 24. Изменение максимальной концентрации свободных электронов в филаменте в зависимости номера импульса

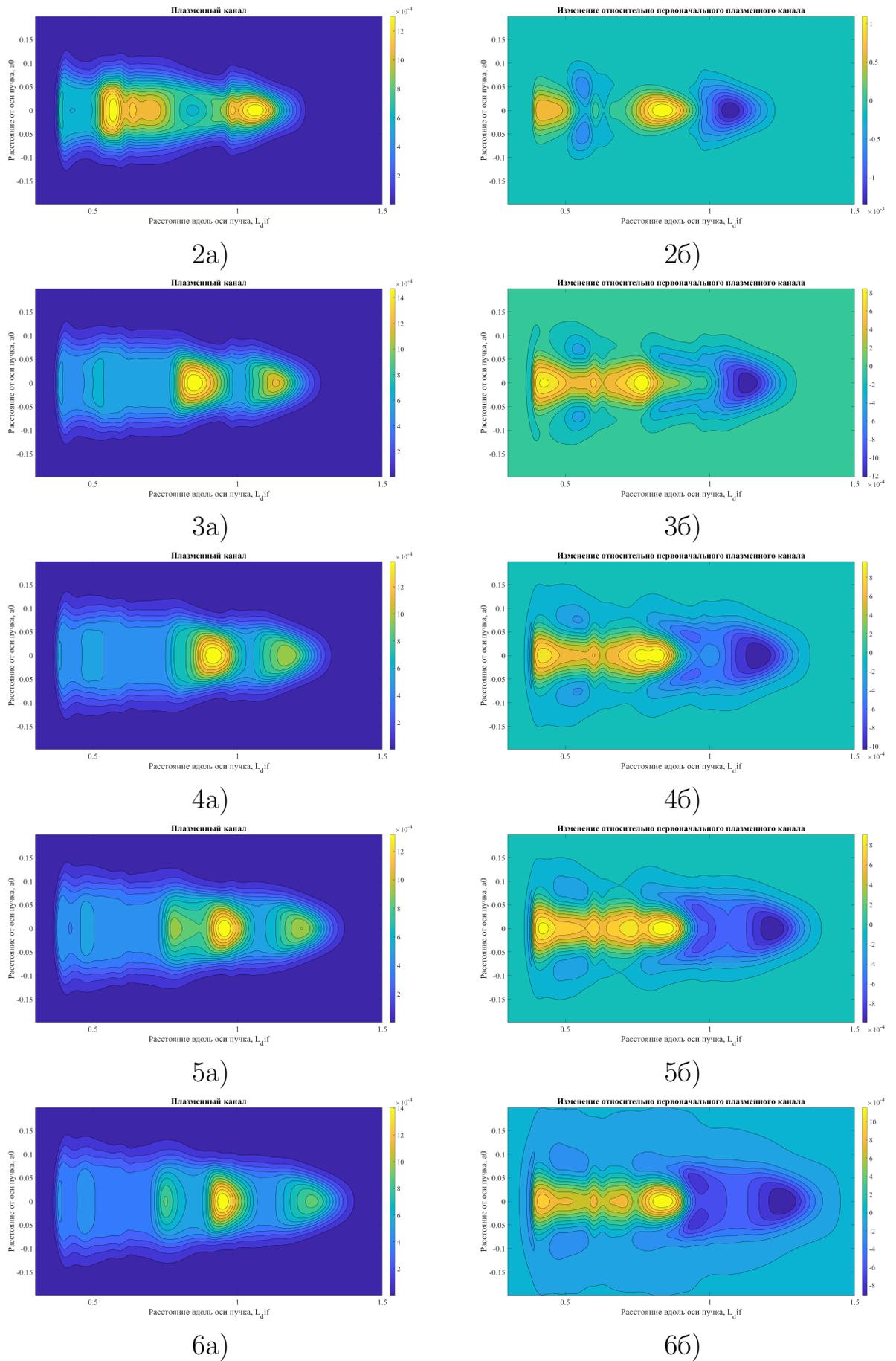


Рис. 25. Номер импульса: а) Плазменный канал, б) Изменение относительно первоначального плазменного канала

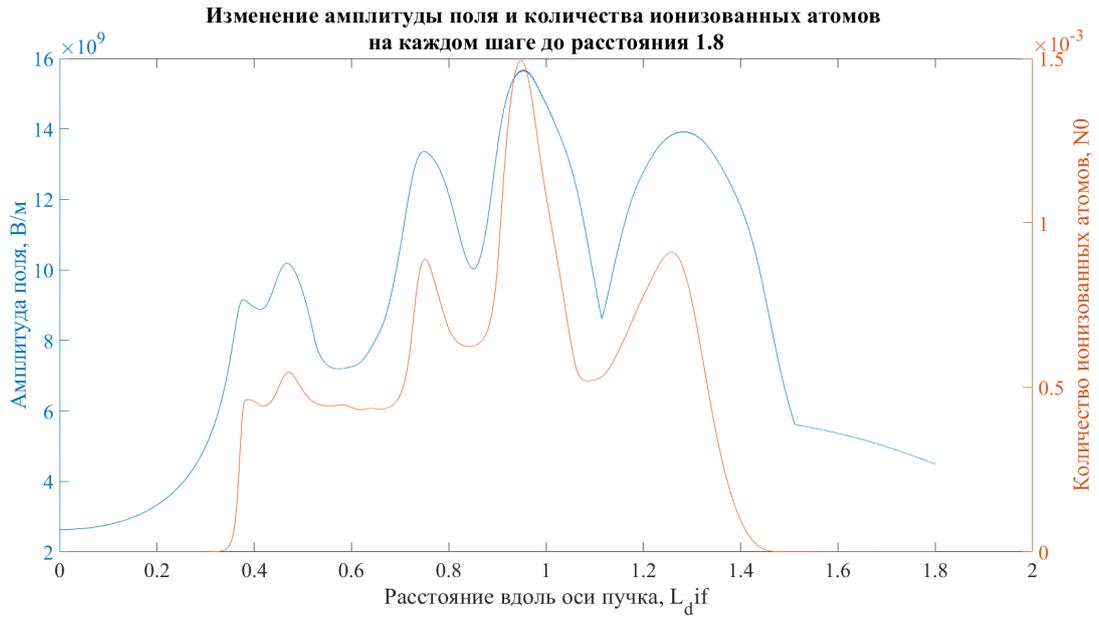


Рис. 26. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси, импульс №6.

§ 3.3. Влияние релаксационной динамики плазмы на импульс с начальной пиковой мощностью $2P_{cr}$, следующий с временной задержкой

Этот раздел посвящен рассмотрению влияния на импульс меньшей интенсивности входящей в среду с остаточной ионизацией более мощного импульса.

3.3.1. Время задержки между импульсами 20нс

Как видно из рисунка 1, снижение начальной пиковой мощности приводит к увеличению расстояния до начала плазменного канала от входа в среду. Это приводит к невозможности достижения интенсивности, при которой возможна заметная ионизация, делая её возможной только после выхода в область без ионизации. Следствиями этого является симметричность пространственно-временного распределения амплитуды относительно нуля локального времени, которое нарушается при филаментации, что можно проследить на рисунке 27.

Всё вышесказанное приводит к тому, что плазменный канал, добавленный филаментацией второго импульса, по форме совпадает с первым,

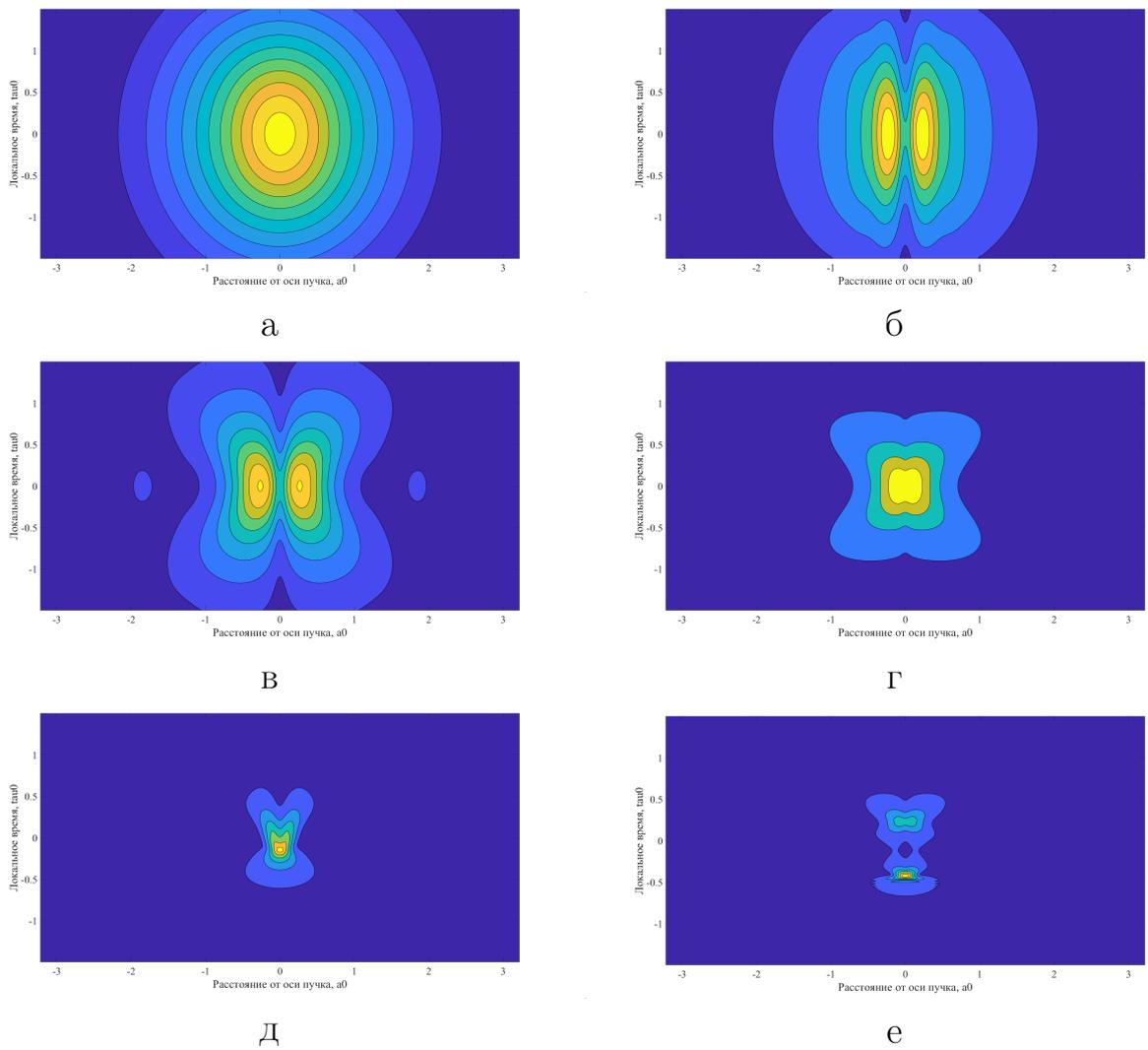


Рис. 27. Распределение амплитуды в пространстве радиус - локальное время на расстоянии от входа в среду в L_d : а - 0.21, б - 0.41, в - 0.71, г - 1.01, д - 1.11, е - 1.26

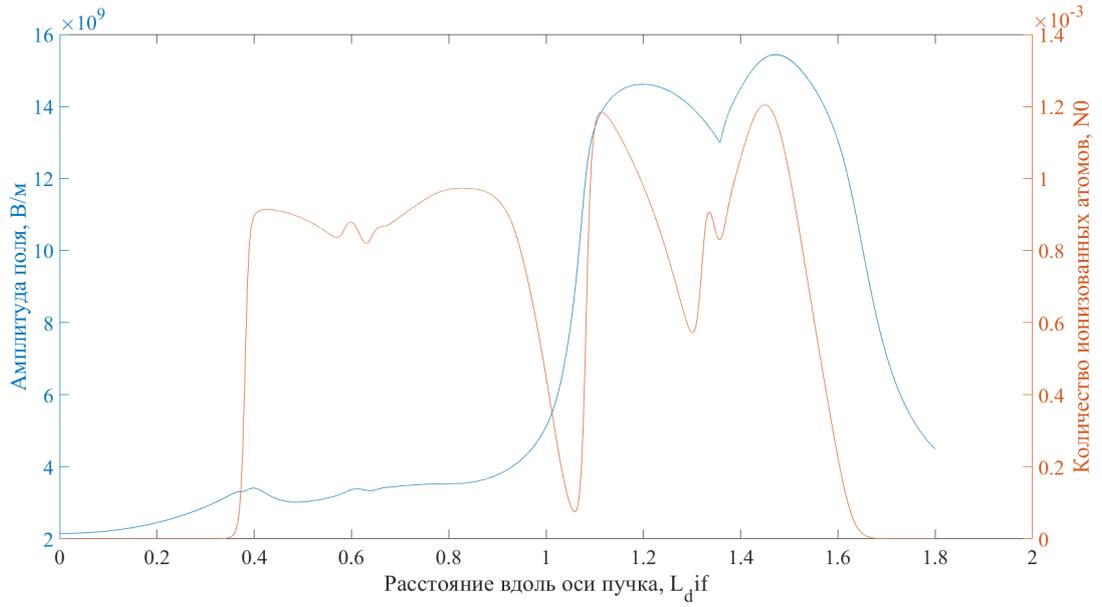


Рис. 28. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси.

однако обладает меньшими размерами из-за меньшей начальной энергии, и возникает после области остаточной ионизации. Ещё одной особенностью можно назвать то, что поведение максимумов концентрации свободных электронов по рисунку 30 ведут себя зеркально, относительно первого импульса.

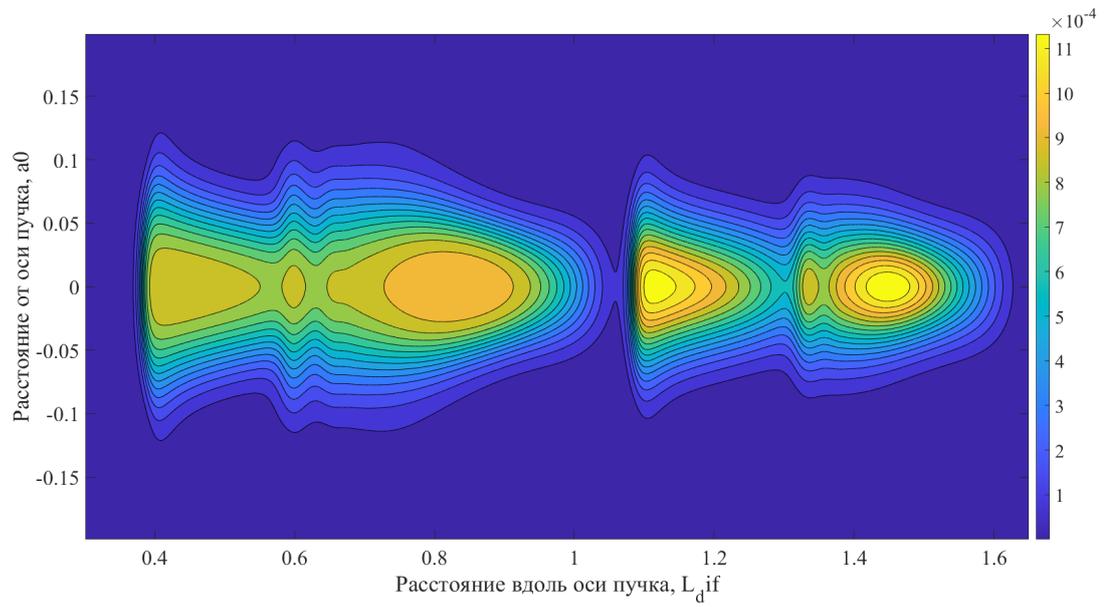


Рис. 29. Плазменный канал.

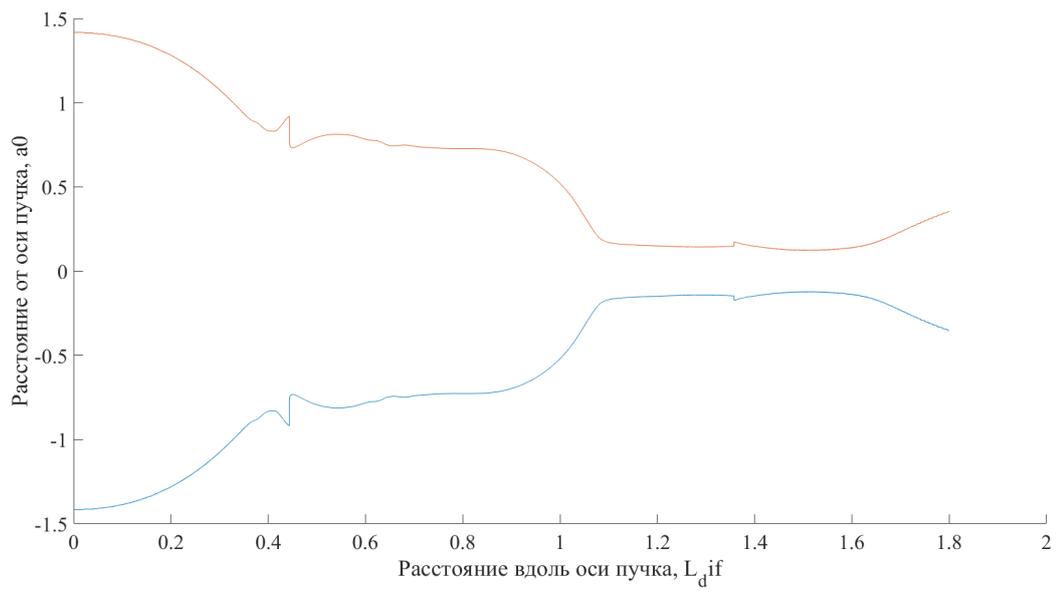


Рис. 30. Изменение ширины пучка по уровню $1/e$ по амплитуде поля.

3.3.2. Время задержки между импульсами 100нс

Увеличение времени задержки между импульсами, как видно, не внесло существенных изменений в поведение филамента, однако привело к более быстрой фокусировке в области остаточной ионизации, из-за чего остаток плазменного канала первого импульса слился с плазменным каналом второго импульса.

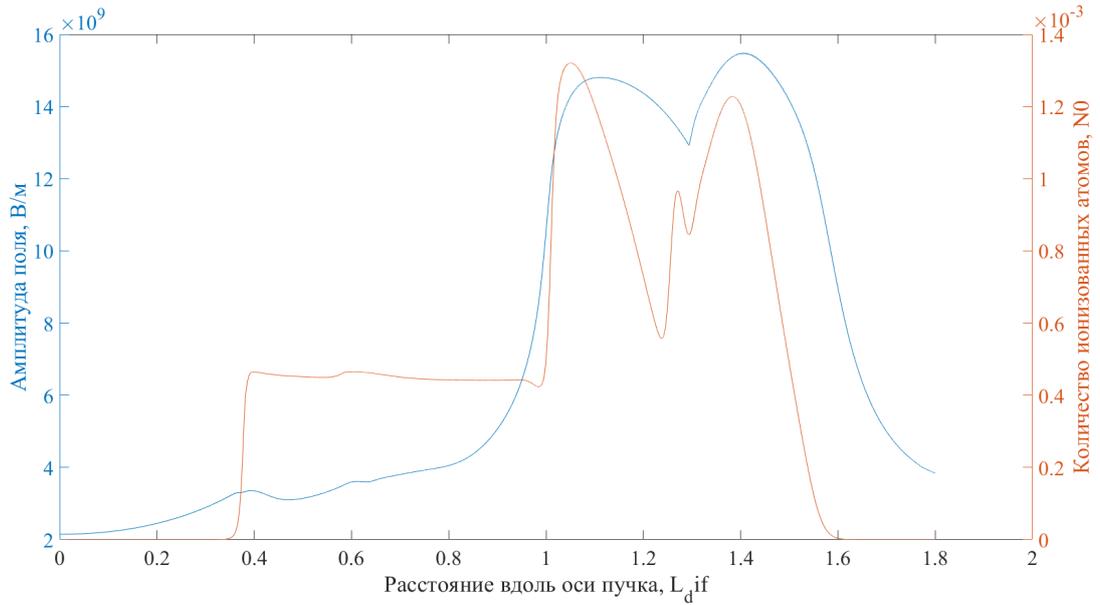


Рис. 31. Изменение амплитуды поля и концентрации свободных электронов на оси.

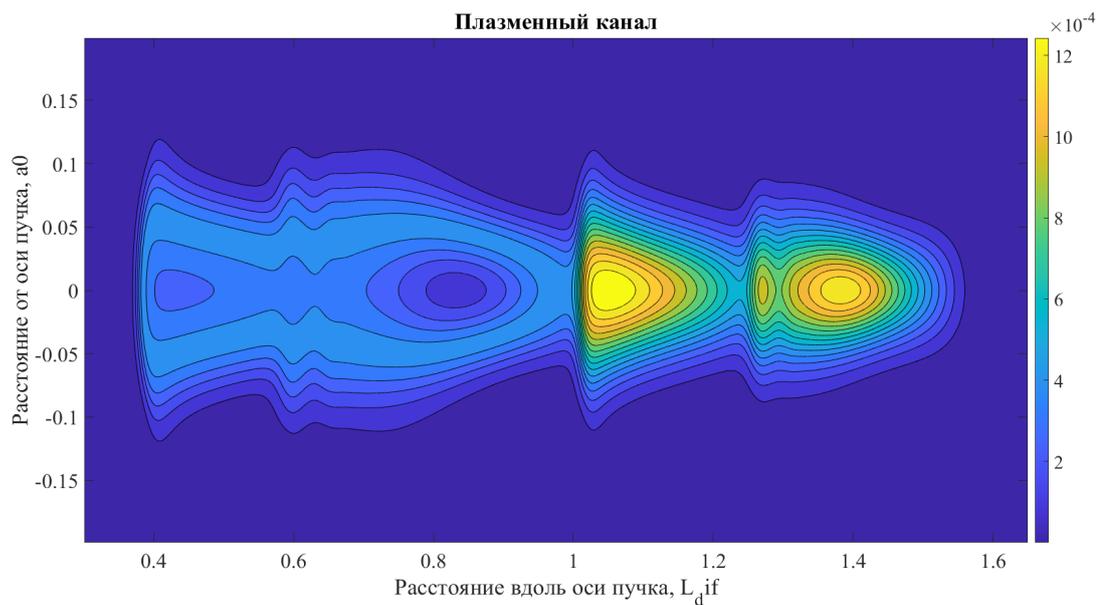


Рис. 32. Плазменный канал.

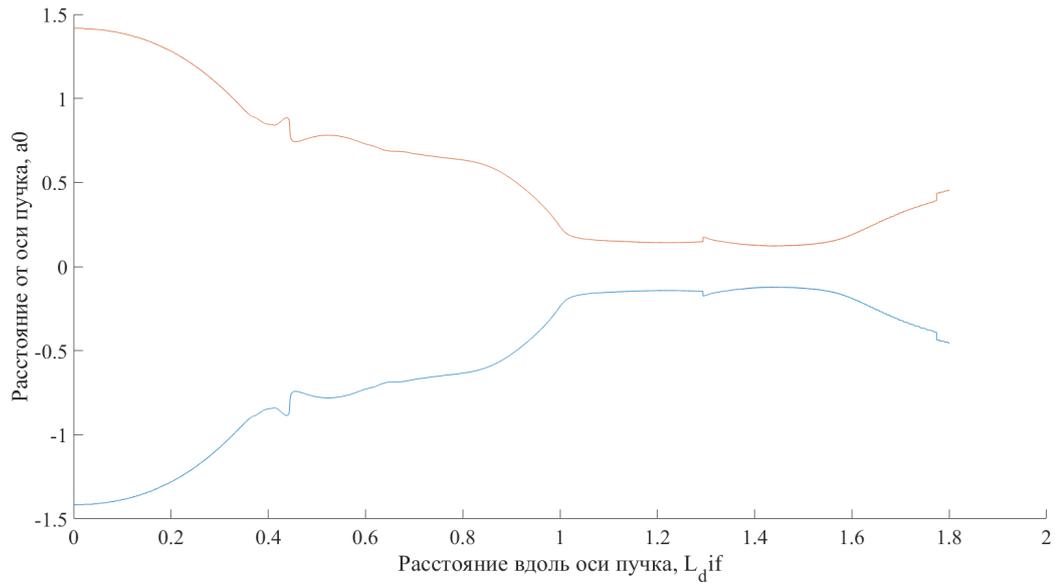


Рис. 33. Изменение ширины пучка по уровню $1/e$ по амплитуде поля.

§ 3.4. Благодарности.

Выражаю благодарность Шипилу Даниилу Евгеньевичу за помощь при написании работы и обсуждение результатов, которые расширили мои познания и внесли существенный вклад в написание диплома.

Так же выражаю свою благодарность научному руководителю, Косаревой Ольге Григорьевне, за руководство и наставления, без которых данная работа никогда не могла бы быть осуществлена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе реализован численный алгоритм задачи о распространении фемтосекундного лазерного импульса в воздухе в режиме одного филамента. Модель на основе однонаправленного волнового уравнения в приближении медленно меняющихся амплитуд учитывает дифракцию, материальную дисперсию, мгновенную керровскую нелинейность и самосогласованную ионизацию азота и кислорода в течение импульса. Энергия входного импульса уменьшается при образовании свободного электрона на энергию равную потенциалу ионизации соответствующей молекулы воздуха. Нелинейное уравнение решается методом расщепления по физическим факторам, предполагается аксиально-симметричная геометрия пучка. Уравнение дифракции решается на радиальной сетке с переменным шагом по поперечным координатам схемой типа Кранка - Николсона. Уравнение для материальной дисперсии решается в Фурье-пространстве. На каждом шаге вдоль направления распространения комплексная амплитуда поля пересчитывается с учетом нелинейного фазового набег. Создан ряд оригинальных программ на MatLab для реализации разработанного алгоритма и получено соответствие аналитическим формулам для Гауссова пучка и импульса в линейном режиме а также в режиме самофокусировки соответствие формуле Марбугера в диапазоне превышения пиковой мощности над критической от 1 до 15 раз.

Получены следующие основные результаты:

1. . Одиночный импульс длительностью 60 фс, с пиковой мощностью 30 ГВт ($3P_{cr}$), плоским волновым фронтом и поперечным размером пучка 0.5 мм создает в воздухе атмосферной плотности плазменный канал протяженностью около 1.5 м и имеющий область рефокусировки и расщепления импульса на два субимпульса.
2. С учетом релаксационной динамики плазмы получен плазменный канал после прохождения последовательности из двух импульсов, при этом пиковая мощность второго импульса ($2P_{cr}$) меньше первого ($3P_{cr}$), а задержка второго импульса примерно соответствует времени рекомбинации плазменного канала и составляет 20 нс. Длина

плазменного канала оказывается больше длины канала одиночного импульса и достигает 3 м. Таким образом, получено увеличение области энерговклада в среду.

3. Последовательность из шести импульсов с интервалом равным времени релаксации плазмы приводит к монотонному уменьшению пиковой плотности плазмы с ростом номера импульса в последовательности и удалению максимума плазмы от лазерного источника. Вместе с этим, после прохождения последовательности из многих импульсов возникают протяженные области с относительно постоянной концентрацией электронов, по сравнению со случаем одиночного филамента.

Список литературы

- [1] Forestier Benjamin и др. “Triggering, guiding and deviation of long air spark discharges with femtosecond laser filament”. В: AIP Advances 2.1 (2012), с. 012151.
- [2] L. Bergé и др. “Ultrashort filaments of light in weakly ionized, optically transparent media”. В: Rep. Prog. Phys. 70 (2007), с. 1633.
- [3] Robert W. Boyd. “Nonlinear optics.” В: (2008).
- [4] Y.-H. Cheng и др. “The effect of long timescale gas dynamics on femtosecond filamentation”. В: Opt. Express 21.4 (февр. 2013), с. 4740—4751.
- [5] S. L. Chin и др. “The propagation of powerful femtosecond laser pulses in optical media: physics, applications, and new challenges”. В: Can. J. Phys. 83 (2005), с. 863.
- [6] A. Talebpour J. Yang S. L. Chin. “Semi-empirical model for the rate of tunnel ionization of N₂ and O₂ molecule in an intense Ti:sapphire laser pulse”. В: Optics Communications 163 (1999), с. 29—32.
- [7] A. Couairon и A. Mysyrowicz. “Femtosecond filamentation in transparent media”. В: Phys. Rep. 441 (февр. 2007), с. 47—189.

- [8] Uryupina Daria и др. “Few-cycle optical pulse production from collimated femtosecond laser beam filamentation”. В: J. Opt. Soc. Am. B JOSAB 27.4 (апр. 2010), с. 667—674. ISSN: 1520-8540. DOI: 10.1364/JOSAB.27.000667.
- [9] Gadi Fibich и Alexander L. Gaeta. “Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides”. В: Opt. Lett. 25.5 (март 2000), с. 335—337. ISSN: 1539-4794. DOI: 10.1364/OL.25.000335.
- [10] Marburger J. H. “Self-focusing: Theory // Progress in Quantum Electronics”. В: Opt. Lett. 4.1 (1975), с. 35—110.
- [11] C. V. Hile. “Comparisons between Maxwell’s equations and an extended nonlinear Schrodinger equation.” В: (1996).
- [12] V. P. Kandidov, S. A. Shlenov и O. G. Kosareva. “Filamentation of high-power femtosecond laser radiation”. В: 39.3 (2009), с. 205—228.
- [13] Y.-H. Kao и др. “Raman effect in AlGaAs waveguides for subpicosecond pulses”. В: J. Appl. Phys. 78.4 (сент. 1995), с. 2198—2203. ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.360135.
- [14] Anastasios D. Koulouklidis и др. “Impact of gas dynamics on laser filamentation THz sources at high repetition rates”. В: Opt. Lett. 45.24 (дек. 2020), с. 6835—6838. ISSN: 1539-4794. DOI: 10.1364/OL.413538.
- [15] David R. Lide. “CRC Handbook of Chemistry and Physics, 87th Edition (Crc Handbook of Chemistry and Physics) by David R. Lide | Open Library”. В: Open Library (). URL: https://openlibrary.org/books/OL8258655M/CRC_Handbook_of_Chemistry_and_Physics_87th_Edition_%28Crc_Handbook_of_Chemistry_and_Physics%29.
- [16] M. Mlejnek, E. M. Wright и J. V. Moloney. “Dynamic spatial replenishment of femtosecond pulses propagating in air”. В: Opt. Lett. 23.5 (март 1998), с. 382—384. ISSN: 1539-4794. DOI: 10.1364/OL.23.000382.
- [17] E. T. J. Nibbering и др. “Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air”. В: Opt. Lett. 21.1 (январь 1996), с. 62—64. ISSN: 1539-4794. DOI: 10.1364/OL.21.000062.

- [18] Guillaume Point и др. “Energy deposition from focused terawatt laser pulses in air undergoing multifilamentation”. В: 24.6 (март 2016), с. 6271—6282.
- [19] Vladimir S. Popov. “Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (Keldysh theory)”. В: Phys.-Usp. 47.9 (сент. 2004), с. 855—885. ISSN: 1063-7869. URL: <https://ufn.ru/en/articles/2004/9/a>.
- [20] D Pushkarev и др. “Transverse structure and energy deposition by a subTW femtosecond laser in air: from single filament to superfilament”. В: 21.3 (2019), с. 033027.
- [21] E. W. Rosenthal и др. “Collection of remote optical signals by air waveguides”. В: Optica 1.1 (июль 2014), с. 5—9.
- [22] Guillaume Schimmel и др. “Free space laser telecommunication through fog”. В: Optica 5.10 (окт. 2018), с. 1338—1341.
- [23] Чин С.Л. Кандидов В.П. Косарева О.Г. Бродюр А. “Состояние исследований по филаментации мощных субпикосекундных лазерных импульсов в газах”. В: Оптика атмосферы и океана 10.12 (1997), с. 1539—1551.
- [24] Ольга Григорьевна Косарева. “ФИЛАМЕНТАЦИЯ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРОЗРАЧНЫХ СРЕДАХ”. В: (2011).
- [25] Келдыш Л.В. “Ионизация в поле сильной электромагнитной волны”. В: Журнал экспериментальной и теоретической физики 47 (1964), с. 1307.
- [26] Калиткин Н. Н. “Численные методы”. В: (2011).
- [27] С.А. Ахманов СЮ. Никитин. “ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА”. В: (2004).
- [28] С. К. Годунов В. С. Рябенький. “Разностные схемы”. В: (1977).

- [29] А. М. Переломов В. С. Попов М. В. Терентьев. “Ионизация атомов в переменном электрическом поле”. В: Журнал экспериментальной и теоретической физики 50 (1966), с. 1393.
- [30] Райзер Ю.П. “Физика газового разряда”. В: (1992).
- [31] Фёдоров Владимир Юрьевич. “Влияние параметров фемтосекундного лазерного импульса на филаментацию в атмосфере”. В: (2010).