ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра общей физики

# Метод многочастичной квантовой гидродинамики в задачах теоретического описания магнитоэлектрического эффекта в мультиферроиках второго рода

Выполнил студент 405 группы:
Скорик Сергей Павлович

____________________

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Труханова Мария Ивановна

____________________

Допущен к защите
Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. М. Салецкий

____________________

*(подпись зав. кафедрой)*

Москва 2023

# Оглавление

# Введение

В последние годы наблюдается подъем интереса к исследованию мультиферроиков и сегнетоэлектриков, что в основном обусловлено разработкой новых методов синтеза, в особенности наноразмерных структур, тонких пленок и гетероструктур, и возможным потенциалом обширного практического применения во всех областях жизни. Создание более эффективных методов и устройств на их основе, а также поиск новых материалов, позволяющих хранить и воспроизводить информацию, является, в настоящее время, важной проблемой на пути развития информационных технологий. Мультиферроики, уникальные материалы, в которых существуют одновременно магнитные и электрические дипольные состояния упорядоченности. В мультифероиках возможна реализация магнитоэлектрического эффекта, связанного с возникновением электрической дипольной поляризации под влиянием магнитного поля и намагниченности под действием электрического поля. Особый интерес представляют мультиферроики второго рода, в которых возможна реализация сильного магнитоэлектрического эффекта, в результате появления сегнетоэлектрического упорядочения в нетривиальных магнитных структурах.

Одним из механизмов взаимосвязи неколлинеарной магнитной структуры вещества с появлением электрической дипольной поляризации, является антисимметричный обмен, основанный на обратном взаимодействии Дзялошинского-Мория. Антисимметричный обмен возникает за счет спин-орбитальной поправки к суперобмену Андерсона [1]. Для объяснения микроскопического механизма появления электрической поляризации и описания её взаимосвязи с нетривиальной магнитной структурой, были предложены различные теоретические подходы и построены модели описания магнитоэлектрического эффекта, причиной возникновения которого является определенная спиновая структура вещества. Например, феноменологическая модель описания поляризации в спиральных магнитных структурах, развитая в работе М. Мостового [2] или спин-токовая модель Катсуры–Нагаоши–Балатского [3]. Важно понимать, что теоретические модели описания поляризации в спиральных магнетиках носят либо феноменологический характер, либо основаны на моделировании одночастичной динамики в локальных полях, а в спин-токовой модели взаимосвязь спинового тока со спин-орбитальным взаимодействием не определена однозначно. Можно выделить важное направление развития теоретических подходов для описания магнитоэлектрического эффекта, причиной возникновения которого является спиновая структура. В первую очередь, это **построение макроскопической не феноменологической модели описания взаимосвязи поляризации с нетривиальной магнитной структурой образца, которая будет обладать предсказательной силой.**

**Цели и задачи исследования**

**Цели исследования**. Научная работа нацелена на изучение и построение теоретической модели описания системы многих частиц со спин-орбитальным взаимодействием и дипольными моментами, а также на описание взаимосвязи спинового тока со спин-орбитальным взаимодействием в рамках метода много - частичной квантовой гидродинамики в приближении самосогласованного поля Хартри.

**Задачи исследования**

1. Развитие метода многочастичной квантовой гидродинамики для систем частиц со спин-орбитальным взаимодействием и электрическими дипольными моментами.

2. Построение новой теоретической модели спин-токового описания возникновения электрической дипольной поляризации в мультиферроиках второго рода со спин-орбитальным взаимодействием.

3. В рамках предложенной модели, вывод взаимосвязи электрической по-

ляризации со спиновым током.

## Методы и подходы

Используется метод квантовой многочастичной гидродинамики, позволяющий исследовать физические коллективные неравновесные свойства систем. Первым шагом данного метода является введение многочастичного уравнения Шредингера, учитывающего вклад взаимодействий в системе и действия внешних полей. Второй шаг заключается в определении макроскопических функций наблюдаемых физических величин с помощью задания операторов плотности числа частиц, плотности магнитных моментов и плотности электрического дипольного момента. Данный метод позволяет перейти от описания большого числа частиц в многомерном конфигурационном пространстве к описанию в реальном физическом пространстве на языке полевых функций различной тензорной размерности.

# Обзор литературы

## Мультиферроики

Мультифероики, вещества, в которых существуют одновременно хотя бы два вида упорядочения: ферромагнетизм, сегнетоэлектричество, сегнетоэластичность. В определение дополнительно включают и антиферромагнитное упорядочение, а также композитные материалы, хотя чаще всего под мультиферроиками понимают вещества сочетающие сегнетоэлектрическое и магнитное поведение [4], [5]. Мультиферроики принято разделять на два основных типа. Мультифероики I рода, вещества, в которых сегнетоэлектрические и магнитные свойства проявляются независимо. Наиболее известным представителем этой группы материалов является $BiFeO_3$, в котором температура сегнетоэлектрического перехода $T_{FE} \sim 1100K$, а температура магнитного перехода $T_N \sim 100K$. В мультиферроиках II рода сегнетоэлектрические и магнитные свойства сильно связаны, и электрическая дипольная поляризация появляется в результате определенного магнитного упорядочения. При этом температура сегнетоэлектрического перехода ниже или совпадает с температурой магнитного упорядочения. Ярким примером такого мультиферроика является оксид перовскита с орторомбической структурой, $TbMnO_3$, магнитоэлектрический эффект в котором был открыт в 2003 году [6]. Эксперименты Кимуры с коллегами показали, что образец приобретает антиферромагнитный порядок при температурах $T_N \sim 41K$ со структурой магнитных моментов ионов марганца $Mn^{3+}$ синусоидального типа. При температурах около $T_{FE} \sim 28K$ магнитная структура ионов $Mn^{3+}$ трансформируется в циклоидную спираль, что сопровождается появлением электрической дипольной поляризации.

# Магнитоэлектрический эффект

Предположение о возможности возникновения намагниченности под действием электрического поля и поляризации под действием магнитного поля было впервые высказано Пьером Кюри [7]. Теоретически магнитоэлектрический эффект (МЭ) был предсказан И. Е. Дзялошинским [8], и обнаружен годом позднее (1960 г.) в антиферромагнетике $Cr_2O_3$ Д. Астровым [9]. В своей работе Дзялошинский применил феноменологический подход Л.Д. Ландау [10]. После этого, В. Фолен и Г. Радо [11] измерили электрическую поляризацию в образцах $Cr_2O_3$, наведенную магнитным полем.

Для возникновения магнитоэлектрического эффекта необходимо, чтобы в материале была нарушена пространственная и временная четности. Поскольку электрический дипольный момент $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ пропорционален пространственной производной, то он изменяет знак при инверсии пространства (всех координат) $\vec{r} \to -\vec{r}$ ($P$-нечетный), но остаётся постоянным при инверсии времени $t \to -t$ ($T$-четный). Магнитный момент, наоборот, является $P$-четным и $T$-нечётным аксиальным вектором.

В 1956 году Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц [10] охарактеризовали магнитоэлектрические материалы, как среды, симметрия которых допускает существование линейного магнитоэлектрического эффекта. В этом случае, электрическая поляризация пропорциональна магнитному полю и намагниченность пропорциональна электрическому полю

$$P_\alpha = a_{\alpha\beta} H^\beta, \qquad M_\beta = a_{\beta\alpha} E^\alpha, \tag{1.1}$$

где $a_{\alpha\beta}$ - магнитоэлектрический тензор, $P^\alpha$ - поляризация среды, $M^\beta$ - намагниченность, $E^\alpha, H^\alpha$ - напряженности электрического и магнитного полей. Здесь и далее пространственные координаты представлены греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$.

Нужно обратить внимание на то, что формулы магнитоэлектрического эффекта (1.1) связывают полярный и аксиальный векторы, т.е. они обладают различными трансформационными свойствами относительно операций инверсии пространства $P$ и времени $T$. Таким образом, для того чтобы магнитоэлектрический тензор был отличен от нуля в кристалле должна существовать определённая симметрия, при которой нарушается $P$ и $T$- четности, но сохраняется комбинация $PT$- четности [10, 4].

Выражения (1.1) описывают только линейный МЭ эффект и, в общем случае, следуют из выражения для свободной энергии системы в однородном электромагнитном поле

$$F(E,H) = F_0 - P^s_\alpha E^\alpha - M^s_\alpha H^\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{\alpha\beta}E^\alpha E^\beta - \frac{1}{2}\mu_0\mu_{\alpha\beta}H^\alpha H^\beta - \\ - \alpha_{\alpha\beta}E^\alpha H^\beta - \frac{1}{2}\beta_{\alpha\beta\gamma}E^\alpha H^\beta H^\gamma - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta\gamma}H^\alpha E^\beta E^\gamma - ..., \quad (1.2)$$

где $P^s$ и $M^s$ - спонтанные поляризация и намагниченность, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ - тензоры диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости, $\varepsilon_0$ и $\mu_0$ - электрическая и магнитная постоянные; $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta\gamma}$ и $\gamma_{\alpha\beta\gamma}$ - тензоры МЭ эффектов. Продифференцировав функционал свободной энергии (1.2) по электрическому полю $E_\alpha$ и магнитному полю $H_\alpha$, приходим к следующим выражениям для поляризации [12]

$$P_i(E,H) = -\frac{\partial F}{\partial E_\alpha} = \\ = P^s_\alpha + \varepsilon_0\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta + \alpha_{\alpha\beta}H_\beta + \frac{1}{2}\beta_{\alpha\beta\gamma}H_\beta H_\gamma + \gamma_{\alpha\beta\gamma}H_\beta E_\gamma - ... \quad (1.3)$$

и намагниченности

$$M_\alpha(E,H) = -\frac{\partial F}{\partial H_\alpha} = \\ = M^s_\alpha + \mu_0\mu_{\alpha\beta}H_\beta + \alpha_{\alpha\beta}E_\beta + \beta_{\alpha\beta\gamma}E_\beta H_\gamma + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta\gamma}E_\beta E_\gamma - .... \quad (1.4)$$

Таким образом, линейный МЭ эффект является приближением магнитоэлектрического эффекта в случае малости последующих членов.

# Механизмы теоретического описание магнитоэлектрического эффекта в мультиферроиках II рода

Для мультиферроиков второго рода микроскопические механизмы возникновения электрической поляризации можно разделить на три типа: симметричное обменное взаимодействие или обменно-стрикционный механизм; антисимметричное обменное взаимодействие, описываемое на основе спин-токовой модели или модели обратного взаимодействия Дзялошинского-Мория; и спин-зависимая $p-d$ гибридизация $\vec{P}_{ij} \propto (\vec{e}_{il} \cdot \vec{S}_i)^2 \vec{e}_{il}$ [13] (рисунок (1.1).

Симметричное или кулоновское обменное взаимодействие может быть описано гамильтонианом Гейзенберга $H = -\sum J_{ij}(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)$, и его результатом является выстраивание спинов параллельно или антипараллельно друг другу [14]. Обменное взаимодействие, действующее между соседними магнитными ионами со спинами $\vec{S}_i$ и $\vec{S}_j$, может вызвать сдвиг ионов вдоль определённого кристаллографического направления $\vec{\Pi}_{ij}$. Важным условием для возникновения поляризации является наличие неэквивалентных магнитных ионов с различными зарядами. Для того чтобы сдвиг ионов привел к возникновению макроскопической поляризации $\vec{P}$, спиновая модуляция должна быть соизмерима с кристаллической решёткой, и индуцированная стрикция не должна компенсироваться после суммирования по всей кристаллической решётке. Например, в системе спинов магнитных ионов $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ вдоль чередующейся атомарной решетки $A-B$, благодаря кулоновскому обменному взаимодействию, может произойти смещение между парой спинов $\uparrow\uparrow$ (или $\downarrow\downarrow$) с образованием димеров, что в свою очередь, приводит к индуцированию электрической поляризации (или правильнее, дипольного момента ячейки кристалла) вдоль кристаллографического направления (рисунок

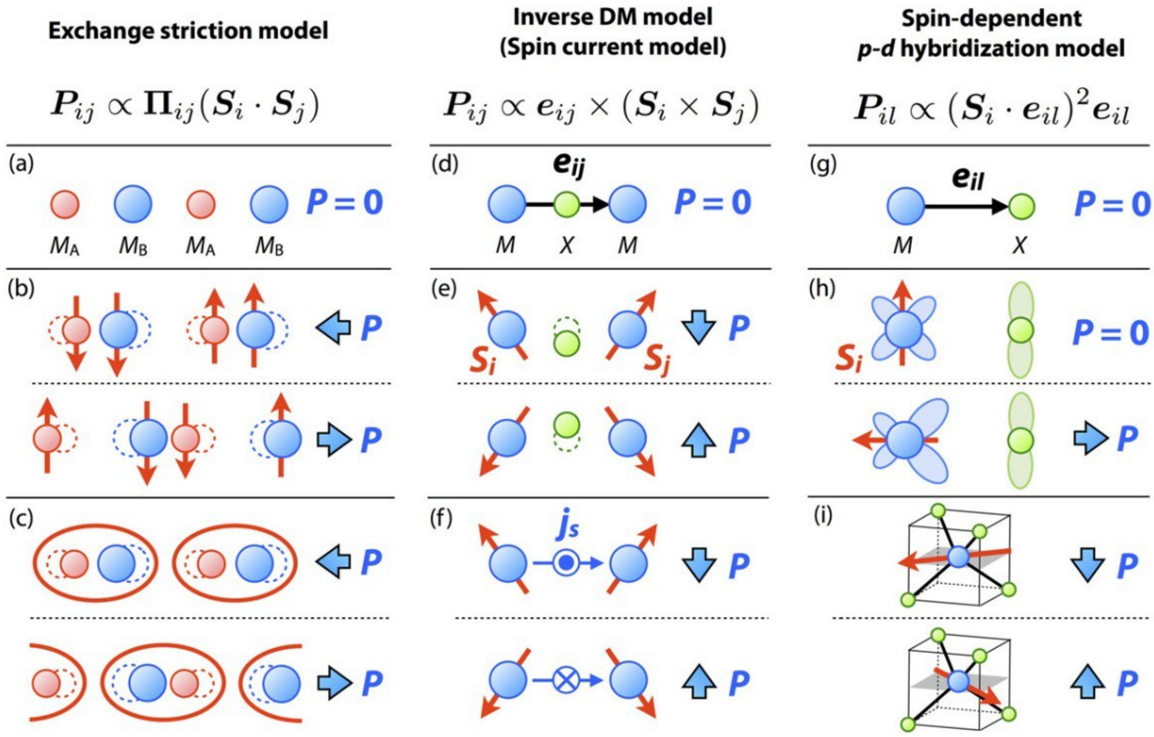


Рис. 1.1: *Три основных механизма сегнетоэлектричества спинового происхождения [13]. (a) - (c) расположение магнитных ионов в магнитострикционном механизме (красными стрелками указана ориентация спинов, синими стрелками, направление индуцированной электрической поляризации $P$. Обменно-стрикционный механизм предсказывает появление поляризации вдоль направления связи для решетки $M_AM_B$ (т.е. массива из двух разных магнитных ионов). (d) - (f) возникновение поляризации в спин-токовой модели. Кластеры $M - X - M$ из трех ионов кристаллической решетки, и поляризация появляется перпендикулярно к направлению связи между магнитными ионами со спинами $S_i$ и $S_j$. (e) сдвиг распределения заряда, чтобы максимизировать выигрыш в энергии за счет взаимодействия Дзялошинского-Мория. (f) появление поляризации на основе спин-токовой модели, где эффективное электрическое поле вызвано спиновым током $j_s$, протекающим между двумя магнитными ионами. (g) - (i) спин-зависимая $p - d$ гибридизация.*

(1.1) (a) - (c))

$$\vec{P}_{ij} \propto \vec{\Pi}_{ij}(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j). \tag{1.5}$$

В качестве примера можно рассмотреть образец $Ca_3CoMnO_6$, который состоит из квазиодномерных цепей $Co - Mn$ вдоль кристаллографической оси $c$. Ниже температуры $16,5$ К спины образуют особый $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ порядок. Вследствие этого, расстояние между ионами $Co - Mn$ уменьшается или удлиняется для соседних параллельных и антипараллельных спиновых пар (рисунок (1.2)). Поскольку валентности ионов $Co^{2+}$ и $Mn^{4+}$ различны, ионные смещения вдоль цепочки $Co - Mn$ согласованно выровнены, вызывая суммарную поляризацию вдоль оси $c$.

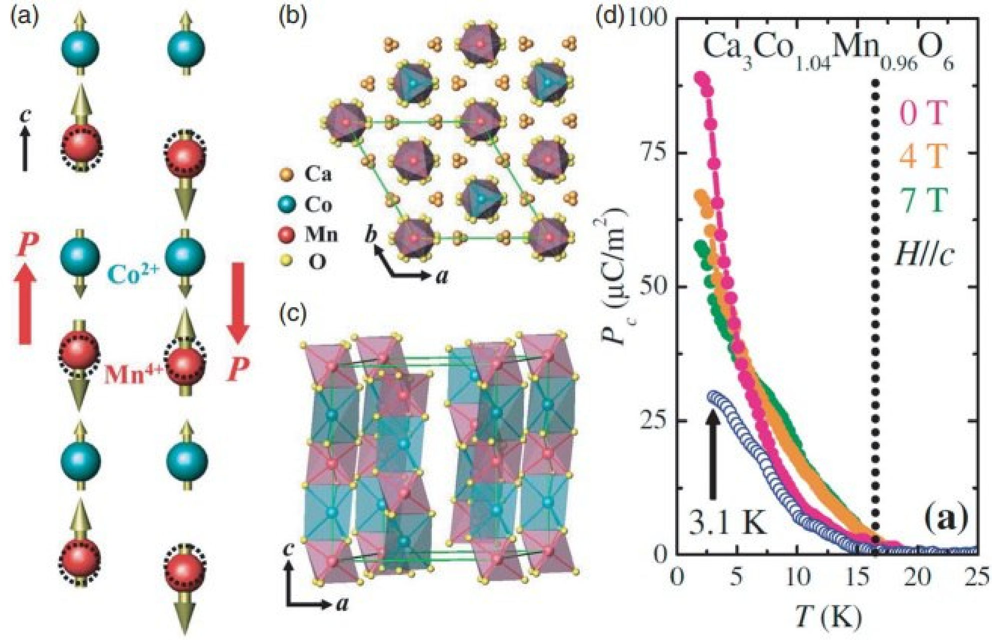


Рис. 1.2: *Структура и свойства $Ca_3CoMnO_6$ [13]. (a) кристаллографическая структура образца. (d) зависимость индуцированной электрической поляризации от температуры для различных значений внешнего магнитного поля.*

Антисимметричное обменное взаимодействие, в отличие от симметричного, является релятивистским эффектом, в котором поляризация индуцируется в результате спин-орбитального взаимодействия. Существуют две модели описания антисимметричного обменного взаимодействия: спин-токовая модель и модель обратного взаимодействия Дзялошинского-Мория.

Феноменологическая спин-токовая модель была разработана Катсурой, Нагаоши и Балатским [3]. Причиной появления поляризации, в данной модели, является косвенное обменное взаимодействие между двумя соседними положительно заряженными магнитными ионами через отрицательно заряженный ион лиганда (например, кислорода $O^{2-}$), в результате ковалентной связи $d-$ и $p-$ электронов. Обязательным условием является не коллинеарность спинов электронов на $d$-орбиталях магнитных ионов, между которыми, в результате, возникает спиновый ток. Согласно данной модели, спиновый ток отвечает за прецессию спина $\vec{S}_i$ в обменном поле соседнего спина $\vec{S}_j$ [14].

Модель обратного взаимодействия Дзялошинского-Мория была развита в работе Сергиенко и Даготто [15], [16]. Для системы неколлинеарных спинов, для выигрыша в энергии, оказывается выгодным искажение кристаллической решетки. Энергетически выгодно, чтобы отрицательно заряженный немагнитный ион лиганда сместился из положения центра масс на расстояние, перпендикулярное связи положительно заряженных магнитных ионов переходных металлов. В такой ячейке возникает дипольный момент

$$\vec{P}_{ij} \propto \vec{r}_{ij} \times (\vec{S}_i \times \vec{S}_j), \tag{1.6}$$

где $\vec{r}_{ij}$ - расстояние между соседними положительно заряженными магнитными ионами.

# Механизмы, основанные на спин-орбитальном взаимодействии

На данный момент существуют две основных теоретических модели, объясняющие появление сегнетоэлектричества в магнитных структурах с неколлинеарными спинами. Прежде всего, это феноменологическая модель, развитая в статье М. Мостового [2]. В работе представлена простая феноменологическая теория, описывающая направление наведенной электрической поляризации для различных магнитных состояний, ее зависимость от температуры и магнитного поля, а так же аномалии диэлектрической восприимчивости при магнитных переходах. Мостовой показал, что электрическая дипольная поляризация $\vec{P}$, в спиральных магнитах, связана с намагниченностью $\vec{M}$ соотношением

$$\vec{P} \sim \vec{M} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}). \tag{1.7}$$

Во второй модели, развитой И. Сергиенко [15], показано, что взаимодействие Дзялошинского-Мория лежит в основе микроскопического механизма сильной связи между сегнетоэлектричеством и магнетизмом.

## Модель обратного взаимодействия Дзялошинского-Мория

Обменная энергия представляет собой добавку к энергии системы взаимодействующих частиц со спинами, обусловленную перекрытием их волновых функций. Прямой обмен Гейзенберга характеризуется непосредственным перекрытием волновых функций электронов. Непрямой обмен реализуется, когда в системе из двух частиц появляется частица-посредник, через которую осуществляется взаимодействие [17, 18]. В некоторых мультиферроиках электрический диполь индуцируется в кластере или ячейке, состоящей из двух положительно заряженных магнитных ионов с частично заполненными $d$-орбиталями, и разделенными диамагнитным ионом, например ионом кислорода $O^{2-}$ (рисунок (1.3)). Поскольку расстояние между электронами $d$-орбиталей магнитных ионов достаточно велико, обменное взаимодействие осуществляется в результате ковалентной связи между электронами $d$-орбиталей магнитных ионов и $p$ -орбиталей диамагнитного иона-посредника, иными словами, их волновые функции перекрываются [15]. Такое взаимодействие получило название супер-обменного. Микроскопическим механизмом происхождения данного обмена является вклад обменных эффектов в спин-орбитальное взаимодействие.

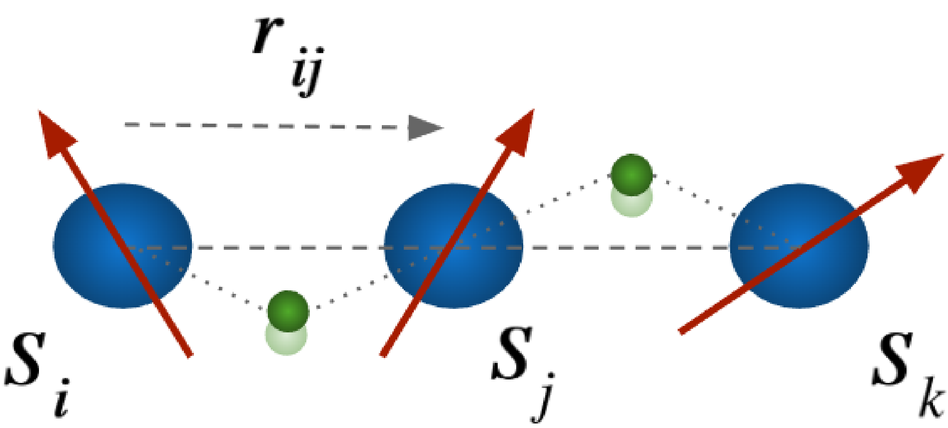


Рис. 1.3: *Неколлинеарная структура спинов частиц (ячейка/кластер), состоящая из положительно заряженных ионов металла (синие сферы) и отрицательно заряженного иона лиганда (зеленые сферы).*

Возьмём оксиды перовскита в качестве примеров, чтобы проиллюстрировать, как взаимодействие Дзялошинского-Мория обеспечивает связь между магнетизмом и сегнетоэлектричеством. Рассмотрим перовскит $ABO3$ с идеальной кубической структурой связи, где ионы $B - O - B$ расположены на прямой. Каждая из таких связей имеет симметрию вращения относительно одной $B - B$-оси. Однако, в большинстве случаев, несоответствие размеров между ионами A и B обычно заставляет кислородные октаэдры наклоняться и вращаться, что приводит к искажению кристаллической структуры. Следовательно, каждый ион кислорода, зажатый между двумя соседними ионами B, может удаляться от точки центра масс, создавая изогнутую связь $B-O-B$ и нарушая симметрию вращения оси $B-B$. Эта изогнутая связь $B-O-B$ будет индуцировать взаимодействие Дзялошинского-Мория (ДМ). Гамильтониан такого взаимодействия может быть получен в виде [6]

$$H_{DM} = \vec{D}_{ij} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j), \tag{1.8}$$

где $\vec{D}_{ij}$ - коэффициент взаимодействия ДМ между соседними спинами $\vec{S}_i$ и $\vec{S}_j$. Для структуры с изогнутыми $B-O-B$ связями вектор $\vec{D}_{ij}$ должен быть перпендикулярен плоскости $B - O - B$. В приближении первого порядка величина $\vec{D}_{ij}$ пропорциональна смещению иона кислорода ($d_0$) от “исходной” средней точки

$$\vec{D}_{ij} = \zeta \vec{r}_{ij} \times \vec{d}_o, \tag{1.9}$$

где - $\zeta$ коэффициент; $\vec{r}_{ij}$ - вектор, проведённый от $i$ к $j$.

## Спин-токовая модель.

Механизм возникновения электрической поляризации в спиральных магнитах может быть описан на основе спин-токовой модели [3, 19] Предполагается, что электрическая поляризация, индуцированная в образце мультиферроика, должна быть связана со спиновым током соотношением [3]

$$P_\alpha \propto \varepsilon_{\alpha\mu\beta} J^{\mu\beta} \tag{1.10}$$

поскольку $P_\alpha \propto \dfrac{\partial L}{\partial E_\alpha}$, где $L$ - функция Лагранжа. Считается, что спиновый ток создаёт электрическую поляризацию в направлении, перпендикулярном как спиновой поляризации, так и направлению спинового тока.

Обменное взаимодействие между соседними спинами может быть описано на основе Гамильтониана Гейзенберга $H = -\sum\limits_{ij} J_{i,j} S_i \cdot S_j$. В спин-токовой модели спиновый ток может быть определён из закона сохранения спина [3, 6], который может быть получен из уравнения движения Гейзенберга для $S_i^z$ в поле соседних ионов

$$\frac{dS_i^z}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[S_i^z, H] = -2\sum_\delta J_{i,i+\delta} \varepsilon^{z\alpha\beta} S_{i+\delta}^\alpha S_i^\beta. \tag{1.11}$$

Оператор так называемого спинового тока $j_\delta^z(i)$ может быть определен в процессе вывода уравнения (1.11) в виде [6]

$$j_\delta^z(i) = 2J_{ii+\delta}(S_{i+\delta}^x S_i^y - S_{i+\delta}^y S_i^x). \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) можно записать в виде $\dfrac{dS_i^z}{dt} + \sum\limits_\delta j_\delta^z(i) = 0$. Подставляя выражение (1.12) в соотношение (1.10), приходим к определению электрической поляризации, индуцированной спиновым током

$$P^{\alpha} \propto \sum_{i} \varepsilon_{\alpha a \beta} \varepsilon^{abc} S_{i+\delta}^{b} S_{i}^{c} \propto \sum_{i} [e_{\beta} \times (S_{i+\delta} \times S_{i})]^{\alpha}, \tag{1.13}$$

где $e_{\delta}$ - единичный вектор в направлении иона $\delta$.

**Несмотря на первоначальную простоту, спин-токовая модель имеет ряд недостатков и противоречий. В первую очередь, зависимость поляризации от спинового тока (1.10) задается из общих соображений, и, вообще говоря, должна быть выведена из основ теоретической модели. Во-вторых, нет четкого понимания связи спинового тока со спин-орбитальным взаимодействием, а спиновый ток, который получают из уравнения непрерывности для спина, не является спиновым током в общепринятом понимании.**

## Метод многочастичной квантовой гидродинамики

Метод квантовой гидродинамики представляет собой эффективный метод исследования процессов в неравновесных системах взаимодействующих частиц. В работе [20], на основе многочастичного уравнения Шредингера с Гамильтонианом взаимодействий, включающим взаимодействие заряженных частиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле, была выведена система уравнений баланса (локальных законов сохранения): уравнение баланса числа частиц (уравнение непрерывности), уравнение баланса импульса и уравнение баланса энергии. Для систем частиц с собственными магнитными моментами и спин - спиновым взаимодействием, наряду с кулоновским взаимодействием, теоретическое описание, на основе метода многочастичной квантовой гидродинамики, было представлено в работах [21, 22].

Для систем фермионов с короткодействующим потенциалом взаимодействия, в третьем порядке по радиусу взаимодействия, исследована динамика на основе данного метода [23, 24]. Рассмотрен случай вырожденной

Ферми жидкости и выведено нелинейное уравнение Шредингера. Авторами выведены выражения для поля сил взаимодействия между различными компонентами смеси, для бозон- фермионной, бозон-бозонной, фермион-фермионной систем. На основе развитой модели и полученных уравнений исследована дисперсия волн в ультрахолодной бозон-фермионной системе частиц в третьем порядке по радиусу взаимодействия.

В статье [25] рассмотрено возбуждение собственных волн в двухсортной вырожденной системе заряженных частиц, локализованных во внешнем однородном магнитном поле. Показано, что данный тип волн может возбуждаться как моноэнергитическим, так и имеющим конечную температуру, пучком нейтронов.

Таким образом, для изучения физических эффектов, в которых исследуется динамика пространственно-временных распределений частиц и полей, очень полезен метод многочастичной квантовой гидродинамики [26]. В основе метода лежат уравнения квантовой гидродинамики, в которых физические характеристики системы взаимодействующих частиц представлены в виде материальных полей в трёхмерном физическом пространстве. Данный метод может быть применен в задачах спинтроники, связаных с движением частиц с собственными магнитными моментами, а также при возбуждении и распространении спиновых волн.

Авторами статьи [27] исследуется влияния спин-орбитального взаимодействия на возмущения зарядовой и спиновой плотности в электронном газе. Системы частиц с электрической дипольной поляризацией были рассмотрены в статье [28] и волны поляризации были предсказаны.

## Спин-орбитальное взаимодействие

**Преобразование Фолди—Вутхайзена**.

Для того чтобы получить поправку к энергии, вызванную спин-орбитальным взаимодействием, необходимо начать с рассмотрения релятивистского электрона в заданном внешнем электромагнитном поле. Такой электрон подчиняется уравнению Дирака, представленному в форме, разрешенной относительно производной по времени

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad \hat{H} = \beta mc^2 + c\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + e\phi, \tag{1.14}$$

где $\phi$, $\vec{A}$ - скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, матрицы $\vec{\alpha}$, и $\beta$ антикоммутируют друг с другом и в стандартном представлении имею вид

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

$\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, которые будут определены ниже. Волновая функция представлена 4-компонентным спинором (би-спинором)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Преобразование Фолди—Вутхайзена представляет собой унитарное преобразование, разделяющее положительные и отрицательные компоненты биспинора

$$\Psi' = U\Psi = e^{iS}\Psi. \tag{1.17}$$

Оператор $S$ разлагается в ряд по $1/m$ и является "малым"в нерелятивистском пределе. После преобразований, подробно описанных в публикациях [29, 30], оператор Гамильтона приобретает вид

$$\hat{H} = e\phi + \beta\left( mc^2 + \frac{(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}^2)}{2m} - \overbrace{\frac{1}{8m^3c^6}\hat{\vec{p}}^4}^{mass-velocity} \right) + \tag{1.18}$$

$$+ \underbrace{\frac{e\hbar^2}{8m^2c^4}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{Darwin-term} + \underbrace{\frac{ie\hbar^2c^2}{8m^2c^2}\hat{\vec{\sigma}}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\hat{\vec{\sigma}}\cdot(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})}_{Spin-orbital\ coupling}.$$

Последние два слагаемых в операторе Гамильтониана представляют собой спин-орбитальное взаимодействие, где $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

# Результаты

## Постановка задачи

Одним из микроскопических механизмов, лежащих в основе появления электрической поляризации спинового происхождения, является механизм, в основе которого лежит спин-орбитальное взаимодействие. Спин-токовая модель, связывающая поляризацию со спиновым током [3], имеет ряд недостатков и противоречий. Первый серьёзный недостаток заключается в том, что зависимость поляризации от спинового тока (1.10) задается из общих соображений, и не выведена из основ теоретической модели. Во-вторых, нет четкого понимания связи спинового тока со спин-орбитальным взаимодействием. Спиновый ток, который получают из уравнения непрерывности для спина, не является спиновым током в общепринятом понимании. Таким образом, в теоретическом описании существует недостаточное определение понятия спинового тока в системе со спин-орбитальной связью. Более того, в известной на сегодняшний день спин-токовой, основанной на описании динамики спина одной частицы во внешнем поле [3], отсутствует возможность количественного прогнозирования результатов. Другие теоретические модели описания поляризации в спиральных магнетиках носят либо феноменологический характер, либо также связаны с изучением одночастичной динамики в локальных полях.

**Важной задачей является построение новой макроскопической теоретической модели, связывающей спиновый ток и электрическую дипольную поляризацию в средах со спин-орбитальным взаимодействием**. Метод многочастичной квантовой гидродинамики выглядит весьма привлекательным для построения такой модели. Используя многочастичное уравнение Шредингера и основные принципы квантовой механики, данный метод позволяет получить замкнутую систему уравнений. В первую очередь, уравнение непрерывности, уравнение баланса импульса, динамики намагниченности, эволюции спинового тока, динамики поляризации и потока поляризации. Метод позволяет учитывать механизмы релаксации импульса, поляризации, спина и энергии, а также позволяет учесть квантовые эффекты, обусловленные квантовым потенциалом Бома и спиновой частью квантового потенциала Бома. Метод позволяет учесть коллективные тепловые эффекты и вклад различных взаимодействий между частицами среды [21, 25].

**Для поставленных целей мы рассматриваем модель системы частиц с Гамильтонианом, содержащим взаимодействие дипольного момента ячейки с электрическим полем и спин-орбитальное взаимодействие. Как следствие, в методе многочастичной квантовой гидродинамики в уравнениях одновременно присутствует динамика электрического дипольного момента и спин-орбитального взаимодействия под действием электрического поля, что должно помочь в анализе их связи. Дополнительный интерес вызван тем, что появляется возможность описания коллективных процессов, что, возможно, в будущем позволит сделать дополнительные интересные выводы.**

# Вывод уравнений

В определенных типах мультиферроиков второго рода, электрический дипольный момент возникает в ячейке/кластере, представляющей собой систему двух соседних положительно заряженных магнитных ионов переходных металлов с неколлинеарными спинами и отрицательно заряженного иона лиганда (Раздел 2.4.1.). Рассмотрим систему $N$ взаимодействующих ячеек, обладающих массами $m_i$, индуцированными дипольными моментами $\vec{d}_i$, в которой реализуется спин-орбитальное взаимодействие. $i, j, k$ обозначают номер ячейки, в дальнейшем, мы будем писать "частица". Вывод системы уравнений квантовой гидродинамики начинается с введения многочастичного Гамильтониана взаимодействий

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\hat{\vec{p}}_i^{\,2}}{2m_i} - \alpha_i \hat{\vec{\sigma}}_i [\vec{E}_i \times \hat{\vec{p}}_i] - \vec{d}_i \vec{E}_i \right) \tag{1.19}$$

где учтено, что

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i}{m_i c}, \qquad \hat{\vec{p}}_i = -i\hbar \hat{\vec{\nabla}}_i, \tag{1.20}$$

где $\gamma_i$ - гиромагнитное отношение, для электрона имеющее вид $\gamma_i = e_i\hbar/2m_i c$, $m_i$ - масса частицы, $\hat{\vec{p}}_i$ - оператор импульса $i$-ой частицы, $\vec{E}_i$ - электрическое поле, $\vec{d}_i$ дипольный момент и $\vec{\sigma}_i$ матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Состояние системы $N$ частиц задаётся многочастичной волновой функцией в $3N$ - мерном конфигурационном пространстве $\Psi = \Psi(R,t)$, где $R = \{\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N\}$.

## Уравнение непрерывности

Вывод уравнений динамики на основе метода квантовой гидродинамики начинается с введения поля концентрации частиц в окрестности точки $\vec{r}$ физического трёхмерного пространства

$$n(\vec{r},t) = \int dR \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \Psi^\dagger(R,t) \Psi(R,t) \tag{1.22}$$

где $dR = \Pi_{j=1}^{N} dr_j$. Дифференцируя по времени выражение для концентрации (1.22), и, применяя многочастичное уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \partial_t \Psi(R,t) = \hat{H}\Psi(R,t)$$

с Гамильтонианом взаимодействий (1.19), приходим к выражению

$$\partial_t n(\vec{r},t) = \int dR \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \left( \frac{\partial \Psi^\dagger(R,t)}{\partial t} \Psi(R,t) + \Psi^\dagger(R,t) \frac{\partial \Psi(R,t)}{\partial t} \right), \tag{1.23}$$

и, далее, подставляем частную производную по времени от многочастичной волновой функции из уравнения Шредингера

$$\partial_t n = \int dR \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r_i}) \cdot (-\frac{i}{\hbar}\Psi^\dagger(\hat{H}\Psi) + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\Psi)^\dagger\Psi) = \tag{1.24}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int dR \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r_i})(\Psi^+(\frac{(\hat{p_i}^\dagger)^2}{2m_i} - \alpha_i \hat{\vec{\sigma}}_i^\dagger[\vec{E}_i \times \hat{\vec{p_i}}^\dagger] - \vec{d}_i\vec{E}_i)\Psi -$$
$$- \Psi^\dagger(\frac{\hat{p_i}^2}{2m_i} - \alpha_i\hat{\vec{\sigma}}_i[\vec{E}_i \times \hat{\vec{p_i}}] - \vec{d}_i\vec{E}_i)\Psi) \tag{1.25}$$

$$\partial_t n = \frac{i}{\hbar}\int dR \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r_i})\frac{1}{2m_i}((\Psi^\dagger(\hat{p}_i^\dagger)^2)\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi - (2\alpha_i\hat{\vec{\sigma}}_i[\vec{E}_i \times \hat{\vec{p_i}}]\Psi)^\dagger\Psi$$
$$+ \Psi^\dagger 2\alpha_i\hat{\vec{\sigma}}_i[\vec{E}_i \times \hat{\vec{p_i}}]\Psi - 2m_i\vec{d}_i\vec{E}_i\Psi^\dagger\Psi + 2m_i\Psi^\dagger\vec{d}_i\vec{E}_i\Psi). \tag{1.26}$$

В первую очередь, рассмотрим слагаемые, связанные с кинетической энергией, и пропорциональные квадрату оператора импульса

$$(\Psi^\dagger(\hat{p}_i^\dagger)^2)\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi = (\Psi^\dagger\hat{p}_i^{\alpha\dagger}\hat{p}_{i\alpha}^\dagger)\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi = i\hbar\nabla_{i\alpha}(\Psi^\dagger\hat{p}_i^{\alpha\dagger})\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi$$
$$= i\hbar\nabla_{i\alpha}((\Psi^\dagger\hat{p}_i^{\alpha\dagger})\Psi) + (\Psi^\dagger\hat{p}_i^{\alpha\dagger})\hat{p}_{i\alpha}\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi$$
$$= i\hbar\nabla_{i\alpha}((\Psi^\dagger\hat{p}_i^{\alpha\dagger})\Psi) + i\hbar\nabla_i^\alpha(\Psi^\dagger\hat{p}_{i\alpha}\Psi) + \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi - \Psi^\dagger\hat{p}_i^2\Psi$$
$$= i\hbar\sum_\alpha \nabla_i^\alpha((\hat{p}_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi + \Psi^\dagger\hat{p}_i^\alpha\Psi). \tag{1.27}$$

В дальнейшем учтем, что для эрмитово сопряженных операторов действует правило $(\hat{A}_i^\mu\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger\hat{A}_i^{\mu\dagger}$. Теперь рассмотрим вклад спин-орбитального взаимодействия в плотность тока

$$-\Psi^\dagger 2m_i\alpha_i\sum_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_i^{\gamma\dagger}E_i^\beta\sigma_i^{\dagger\alpha}\Psi + \Psi^\dagger 2m_i\alpha_i\sum_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\alpha E_i^\beta p_i^\gamma\Psi$$

$$= 2m_i\alpha_i\sum_{\alpha\beta\gamma}(\Psi^\dagger\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\alpha E_i^\beta(-i\hbar\nabla_i^\gamma)\Psi - \Psi^\dagger\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_i^{\gamma\dagger}E_i^\beta\sigma_i^\alpha\Psi)$$

$$= 2m_i\alpha_i\sum_{\alpha\beta\gamma}(-i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i^\gamma(\Psi^\dagger\sigma_i^\alpha E_i^\beta\Psi) + \Psi^\dagger\epsilon_{\alpha\beta\gamma}i\hbar\sigma_i^\alpha(\nabla_i^\gamma E_i^\beta)\Psi$$

$$+\Psi^\dagger\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_i^{\gamma\dagger}E_i^\beta\sigma_i^\alpha\Psi-\Psi^\dagger\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_i^{\gamma\dagger}E_i^\beta\sigma_i^\alpha\Psi)=-2m_i\alpha_i i\hbar\sum_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i^\gamma(\Psi^\dagger\sigma_i^\alpha E_i^\beta\Psi)$$

$$=-2m_i\alpha_i i\hbar\sum_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i^\alpha(\Psi^\dagger\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi). \quad (1.28)$$

Таким образом,

$$\partial_t n=-\int dR\sum_i\delta(\vec r-\vec r_i)\frac{1}{2m_i}\sum_\alpha\nabla_i^\alpha((p_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi+\Psi^\dagger p_i^\alpha\Psi-$$

$$-2m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Psi^\dagger\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi). \quad (1.29)$$

Учтём, что итоговое выражение (1.29) можно представить как

$$\partial_t n=-\int dR\sum_i\delta(\vec r-\vec r_i)\frac{1}{2m_i}\sum_\alpha\nabla_i^\alpha(\Psi^\dagger p_i^{\dagger\alpha}\Psi+\Psi^\dagger p_i^\alpha\Psi-$$

$$-m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Psi^\dagger\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi)-m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Psi^\dagger\sigma_i^{\beta\dagger}E_i^\gamma\Psi). \quad (1.30)$$

Вводя ковариантную производную $i$-той частицы в форме

$$j_i^\alpha=p_i^\alpha-\alpha_i m_i\sum_{\beta,\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta, \quad (1.31)$$

выражение (1.24) можно привести к виду

$$\partial_t n=-\int dR\sum_i\delta(\vec r-\vec r_i)\frac{1}{2m_i}\sum_\alpha\nabla_i^\alpha((j_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi+h.c.)=$$

$$=-\sum_\alpha\int dR\sum_i\nabla_i^\alpha(\delta(\vec r-\vec r_i)\frac{1}{2m_i}((j_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi+h.c.))+$$

$$+\sum_\alpha\int dR\sum_i(\nabla_i^\alpha\delta(\vec r-\vec r_i))\frac{1}{2m_i}((j_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi+\Psi^\dagger j_i^\alpha\Psi). \quad (1.32)$$

Учитывая, что

$$\nabla_i^\alpha\delta(\vec r-\vec r_i)=-\nabla^\alpha\delta(\vec r-\vec r_i) \quad (1.33)$$

и

$$\int dR_N\nabla_i^\alpha f(R)=\int dR_{N-1}dr_i\nabla_i^\alpha f(R)=0, \quad (1.34)$$

получим следующее уравнение

$$\partial_t n=-\sum_\alpha\nabla^\alpha\int dR\sum_i\delta(\vec r-\vec r_i)\frac{1}{2m_i}((j_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi+\Psi^\dagger j_i^\alpha\Phi), \quad (1.35)$$

которое и является уравнением непрерывности

$$\partial_t n(\vec{r},t) + \nabla_\alpha j^\alpha(\vec{r},t) = 0. \tag{1.36}$$

При выводе уравнения (1.36) было получено микроскопическое представление плотности тока

$$j^\alpha(\vec{r},t) = \int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i})\frac{1}{2m_i}((j_i^\alpha\Psi)^\dagger\Psi + \Psi^\dagger j_i^\alpha\Psi). \tag{1.37}$$

## Уравнение динамики плотности тока

Уравнение баланса импульса для рассматриваемой системы частиц можно получить, дифференцируя по времени определение плотности тока (1.37) и используя уравнение Шредингера

$$\partial_t j^\alpha = \int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i})\frac{1}{2m_i}(\partial_t\Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger}\Psi + \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger}\partial_t\Psi + \partial_t\Psi^\dagger p_i^\alpha\Psi + \Psi^\dagger p_i^\alpha\partial_t\Psi$$
$$- \partial_t\Psi^\dagger 2m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta\Psi - \Psi^\dagger 2m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta\partial_t\Psi). \tag{1.38}$$

Рассмотрим пятое и шестое слагаемые в правой части уравнения (1.38), содержащие спин-орбитальное взаимодействие, отдельно, и преобразуем, подставив производные по времени от волновых функций из уравнения Шредингера

$$-\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}2m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta\Psi - \Psi^\dagger 2m_i\alpha_i\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta\frac{\partial\Psi}{\partial t} =$$
$$= -2m_i\alpha_i\frac{i}{\hbar}\sum_k(\Psi^\dagger(\frac{(p_k^\dagger)^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}p_k^{\eta\dagger}E_k^\nu\sigma_k^{\dagger\mu})\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}E_i^\gamma\sigma_i^\beta\Psi,$$
$$-\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma(\frac{p_k^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta)\Psi). \tag{1.39}$$

Рассмотрим и преобразуем слагаемые в выражении (1.39), пропорциональные $\alpha_k$

$$-\Psi^\dagger\alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}p_k^{\eta\dagger}E_k^\nu\sigma_k^\mu\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi+\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta\Psi$$
$$=-i\hbar\sum_{\mu\nu\eta}\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger\epsilon_{\mu\nu\eta}E_k^\nu\sigma_k^\mu\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi)$$
$$+i\hbar\Psi^\dagger\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}E_k^\nu\sigma_k^\mu\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta(\nabla_k^\eta E_i^\gamma)\Psi$$
$$-\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta\Psi+\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\alpha_k\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta\Psi$$
$$=-i\hbar\sum_{\mu\nu\eta}\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger\epsilon_{\mu\nu\eta}E_k^\nu\sigma_k^\mu\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi)$$
$$+i\hbar\Psi^\dagger\sum_{\mu\nu\eta}\epsilon_{\mu\nu\eta}E_k^\nu\sigma_k^\mu\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta(\nabla_k^\eta E_i^\gamma)\Psi, \quad (1.40)$$

Далее,

$$\Psi^\dagger\frac{(p_k^\dagger)^2}{2m_k}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi-\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\frac{p_k^2}{2m_k}\Psi$$
$$=\frac{1}{2m_k}(i\hbar\sum_\eta\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger})\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi-\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\sum_\eta p_k^\eta p_k^\eta\Psi)$$
$$=\frac{1}{2m_k}(i\hbar\sum_\eta\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi)-i\hbar\sum_\eta\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta(\nabla_k^\eta E_i^\gamma)\Psi$$
$$-i\hbar\sum_\eta\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\nabla_k^\eta\Psi-\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\sum_\eta p_k^\eta p_k^\eta\Psi)$$
$$=\frac{1}{2m_k}(i\hbar\sum_\eta\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma\Psi)-i\hbar\sum_\eta\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta(\nabla_k^\eta E_i^\gamma)\Psi$$
$$+i\hbar\sum_\eta\nabla_k^\eta(\Psi^\dagger\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta E_i^\gamma p_k^\eta\Psi)-i\hbar\sum_\eta\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_i^\beta(\nabla_k^\eta E_i^\gamma)p_k^\eta\Psi). \quad (1.41)$$

Теперь рассмотрим первые четыре слагаемых в правой части уравнения (1.38) и проведем аналогичную процедуру их преобразования, подставив производную по времени от волновой функции из уравнения Шредингера

$$\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}p_i^{\alpha\dagger}\Psi+\Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}p_i^\alpha\Psi+\Psi^\dagger p_i^\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\sum_k (\Psi^\dagger (\frac{(p_k^\dagger)^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} p_k^{\eta\dagger} E_k^\nu \sigma_k^{\mu\dagger}) p_i^{\alpha\dagger}\Psi$$

$$- \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger} (\frac{p_k^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} \sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta)\Psi$$

$$+ \Psi^\dagger (\frac{(p_k^\dagger)^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} p_k^{\eta\dagger} E_k^\nu \sigma_k^{\mu\dagger}) p_i^{\alpha}\Psi$$

$$- \Psi^\dagger p_i^{\alpha} (\frac{p_k^2}{2m_k} - \vec{d}_k\vec{E}_k - \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} \sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta)\Psi). \quad (1.42)$$

Преобразуем отдельно слагаемые в выражении (1.42), содержащие энергию электрического дипольного момента $k$-ой частицы во внешнем электрическом поле $-\vec{d}_k\vec{E}_k$

$$\sum_\beta (-\Psi^\dagger d_k^\beta E_k^\beta p_i^{\alpha\dagger}\Psi + \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger} d_k^\beta E_k^\beta \Psi - \Psi^\dagger d_k^\beta E_k^\beta p_i^\alpha \Psi + \Psi^\dagger p_i^\alpha d_k^\beta E_k^\beta \Psi) =$$

$$= \sum_\beta (-i\hbar d_k^\beta (\nabla_i^\alpha E_k^\beta)\Psi - \Psi^\dagger p_i^\alpha d_k^\beta E_k^\beta \Psi + \Psi^\dagger p_i^\alpha d_k^\beta E_k^\beta \Psi -$$

$$- \Psi^\dagger d_k^\beta E_k^\beta p_i^\alpha \Psi - \Psi^\dagger i\hbar d_k^\beta (\nabla_i^\alpha E_k^\beta)\Psi + \Psi^\dagger d_k^\beta E_k^\beta p_i^\alpha \Psi) =$$

$$= -2i\hbar \sum_\beta \Psi^\dagger d_k^\beta (\nabla_i^\alpha E_k^\beta)\Psi. \quad (1.43)$$

Преобразуем слагаемые в выражении (1.42), которые вытекают из учета кинетической энергии частиц

$$\frac{1}{2m_k}(\Psi^\dagger (p_k^\dagger)^2 p_i^{\alpha\dagger}\Psi - \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger} p_k^2 \Psi + \Psi^\dagger (p_k^\dagger)^2 p_i^{\alpha\dagger}\Psi - \Psi^\dagger p_i^\alpha p_k^2\Psi) =$$

$$= \frac{1}{2m_k}(i\hbar \sum_\eta \nabla_k^\eta (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} p_i^{\alpha\dagger}\Psi) + \sum_\eta \Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} p_i^{\alpha\dagger} p_k^\eta \Psi - \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger} p_k^2 \Psi +$$

$$+ i\hbar \sum_\eta \nabla_k^\eta (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}) p_i^\alpha \Psi - \Psi^\dagger p_i^\alpha p_k^2 \Psi) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m_k} \sum_\eta \nabla_k^\eta (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} p_i^{\alpha\dagger}\Psi + \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger} p_k^\eta \Psi + \Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} p_i^\alpha \Psi + \Psi^\dagger p_i^\alpha p_k^\eta \Psi) \quad (1.44)$$

И, наконец, рассмотрим оставшиеся слагаемые

$$-\alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} E_k^\nu \sigma_k^{\mu\dagger} p_i^\alpha \Psi + (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} E_k^\nu \sigma_k^{\mu\dagger}) p_i^{\alpha\dagger}\Psi$$

$$-\Psi^\dagger p_i^\alpha(\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta\Psi) - \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger}\sigma_k^\mu E_k^\nu p_k^\eta\Psi)$$

$$= \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} p_i^\alpha E_k^\nu (\Psi^\dagger \sigma_k^\mu p_k^\eta \Psi + \Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sigma_k^\mu\Psi)$$

$$- \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} E_k^\nu (\Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sigma_k^\mu p_i^\alpha \Psi + \Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger} p_i^{\alpha\dagger}\sigma_k^\mu\Psi)$$

$$= \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} (-i\hbar\nabla_i^\alpha E_k^\nu)(\Psi^\dagger \sigma_k^\mu p_k^\eta \Psi + \Psi^\dagger p_k^{\eta\dagger}\sigma_k^\mu\Psi)$$

$$+ \alpha_k \sum_{\mu\nu\eta} \epsilon_{\mu\nu\eta} E_k^\nu p_k^\eta (\Psi^\dagger \sigma_k^\mu p_i^\alpha \Psi + \Psi^\dagger p_i^{\alpha\dagger}\sigma_k^\mu\Psi) \quad (1.45)$$

Подставим преобразованные выше выражения обратно в уравнение (1.38) и выделим слагаемое, содержащее поляризацию. Для этого проведем процедуру усреднения

$$\int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \frac{1}{2m_i} \sum_k (2\Psi^\dagger d_k^\mu \Psi \nabla_i^\alpha E_k^\mu) =$$

$$= \int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \frac{1}{m_i} \Psi^\dagger d_i^\mu \Psi \nabla_i^\alpha E_i^\mu =$$

$$= \int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \nabla^\alpha E^\mu \frac{1}{m_i} \Psi^\dagger d_i^\mu \Psi =$$

$$= \frac{1}{m} \nabla^\alpha E^\mu \int dR \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \Psi^\dagger d_i^\mu \Psi. \quad (1.46)$$

В выражении (1.46) можно ввести плотность дипольного момента или электрическую поляризацию, заданную в окрестности точки $\vec{r}$ трёхмерного пространства, в виде

$$P^\alpha = \int dR \sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \Psi^\dagger d_i^\alpha \Psi. \quad (1.47)$$

После подстановки всех выведенных выражений в правую часть уравнения (1.38), и проведения процедуры усреднения, мы приходим к окончательному виду уравнения эволюции плотности тока

$$\partial_t j^\alpha(\vec{r},t) + \partial_\beta \Pi^{\alpha\beta}(\vec{r},t) = \frac{1}{m} P_\beta(\vec{r},t)\partial^\alpha E^\beta(\vec{r},t) + F_{so}^\alpha(\vec{r},t), \quad (1.48)$$

где поле силы, вызванной спин-орбитальным взаимодействием выведено в виде

$$F^{\alpha}_{so} \;=\; -\frac{\gamma}{mc}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^{\delta}E_{\gamma}(\vec{r},t)J^{\beta\delta}_{s}(\vec{r},t) \;+\; \frac{\gamma}{mc}\epsilon^{\beta\delta\gamma}\partial^{\alpha}E_{\delta}(\vec{r},t)J^{\beta\gamma}_{s}(\vec{r},t). \quad (1.49)$$

Микроскопическое представление спинового тока было получено при выводе уравнения (1.48) в виде

$$J^{\alpha\beta}_{s}(\vec{r},t) \;=\; \int dR\sum_{i}^{N}\delta(\vec{r}\;-\;\vec{r}_{i})\frac{1}{2m_{i}}\Big((\sigma^{\alpha}_{i}\hat{j}^{\beta}_{i}\Psi)^{\dagger}\Psi \;+\; \Psi^{\dagger}(\sigma^{\alpha}_{i}\hat{j}^{\beta}_{i}\Psi)\Big), \quad (1.50)$$

где оператор тока определяется выражением

$$\hat{j}^{\alpha} = -i\hbar\partial^{\alpha}_{i} - \alpha_{i}m_{i}\sum_{\beta,\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}E^{\gamma}_{i}\sigma^{\beta}_{i}. \quad (1.51)$$

Рассмотрим уравнение динамики плотности тока (1.48) подробно. Второе слагаемое в левой части уравнения представляет собой пространственную производную от тензора плотности потока импульса, микроскопическое представление которого получено в виде

$$\Pi^{\alpha\beta} \;=\; \int dR\sum_{i}^{N}\delta(\vec{r}\;-\;\vec{r}_{i})\frac{1}{4m_{i}}\Big(\Psi^{\dagger}\hat{j}^{\alpha}_{i}\hat{j}^{\beta}_{i}\Psi + (\hat{j}^{\alpha}_{i}\Psi)^{\dagger}\hat{j}^{\beta}_{i}\Psi + h.c.\Big). \quad (1.52)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.48) есть поле плотности силы, действующей со стороны неоднородного электрического поля на плотность дипольных моментов или поляризацию. В уравнении появляется влияние спин-орбитального взаимодействия, которое представлено полем плотности силы $F^{\alpha}_{so}$ (1.49).

## Поле скоростей в уравнениях квантовой гидродинамики

Для выделения векторного поля скоростей в уравнениях квантовой гидродинамики необходимо представить волновую функцию $N$ частиц в виде разложения Маделунга [21]

$$\Psi = a(R,t)exp(\frac{i}{\hbar}\xi(R,t))\phi(R,t), \quad (1.53)$$

где $a(R,t)$ — амплитуда, $\xi$ — фаза, $\phi$ — нормированный спинор ($\phi^\dagger\phi = 1$). Разложение Маделунга, впервые примененное для бесспиновых частиц [21], помогает получить явную форму квантового потенциала Бома. Подстановка волновой функции в явном виде в определение основных величин, таких как плотность тока $j^\alpha$, плотность потока импульса $\Pi^{\alpha\beta}$ и плотность спинового тока $J_s^{\alpha\beta}$ приводит к их макроскопическому представлению

$$j^\alpha(r,t) = n(r,t)v^\alpha(r,t),$$

$$\Pi^{\alpha\beta}(r,t) = mn(r,t)v^\alpha(r,t)v^\beta(r,t) + \overbrace{p^{\alpha\beta}(r,t)}^{kinetic\ pressure\ tensor} + \Sigma_s^{\alpha\beta}(r,t)$$

$$J_s^{\alpha\beta}(r,t) = \gamma S^\alpha(r,t)v^\beta(r,t) + J_{therm}^{\alpha\beta} + \Omega_s^{\alpha\beta}(r,t). \quad (1.54)$$

Выражение для плотности тока $j^\alpha$ содержит гидродинамическую скорость $v^\alpha$, которая связана со скоростью $i$-частицы соотношением $z_i^\alpha = v_i^\alpha - v^\alpha$, где $z_i^\alpha$ - это тепловая скорость. Разложение Маделунга подразумевает для микроскопической скорости $i$-й частицы зависимость

$$v_i^\alpha(R,t) = \frac{1}{m}\partial^\alpha\xi(R,t) - \frac{i\hbar}{m}\phi^\dagger\partial_i^\alpha\phi. \quad (1.55)$$

В разложении тензора плотности потока импульса появляется тензор кинетического давления

$$p^{\alpha\beta} = \int dR\sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)a^2 m_i z_i^\alpha z_i^\beta. \quad (1.56)$$

Тензор $\Sigma_s^{\alpha\beta}$ связан с квантовыми и спиновыми эффектами, и его учет приводит к появлению в уравнении динамики плотности тока квантового потенциала Бома и спиновой части потенциала Бома

$$\Sigma_s^{\alpha\beta} = \overbrace{\int dR\sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\frac{\hbar^2}{2m_i}\left(\partial_i^\alpha a(R,t)\partial_i^\beta a(R,t) - a(R,t)\partial_i^\alpha\partial_i^\beta a(R,t)\right)}^{Bohm\ potential,\ quantum\ effect}$$

$$+ \overbrace{\int dR\sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\frac{\hbar^2}{4m_i}a^2\partial_i^\alpha s_i^\mu\partial_i^\beta s_i^\mu}^{Spin\ part\ of\ Bohm\ potential}. \quad (1.57)$$

В выражении для плотности спинового тока $J_s^{\alpha\beta}$ (1.54) первое слагаемое характеризует спиновый ток, возникающий в результате движения спинов, обладающих гидродинамической скоростью $v^\alpha$. Второе слагаемое является тепловым спиновым током

$$J_{therm}^{\alpha\beta} = \int dR \sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) a^2 z_i^\beta s_i^\alpha, \tag{1.58}$$

где спин $i$-ой частицы $s_i^\alpha$ связан с тепловыми флуктуациями спина $w_i^\alpha$ относительно среднего макроскопического значения соотношением $w_i^\alpha = s_i^\alpha - S^\alpha$. Последнее слагаемое в макроскопическом выражении плотности спинового тока $\Omega_s^{\alpha\beta}$ связано с квантовыми и спиновыми эффектами, и было получено ранее в работе [31]

$$\Omega_s^{\alpha\beta} = -\int dR \sum_i^N \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \frac{\hbar^2}{2m_i} a^2 \epsilon^{\alpha\mu\nu} s_i^\mu \partial_i^\beta s_i^\nu$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \epsilon^{\alpha\mu\nu} \frac{S^\mu}{n} \partial^\beta S^\nu + spin - thermal\ coupling, \tag{1.59}$$

где первое слагаемое является макроскопическим представлением части спинового тока, возникающего в среде со спиральной структурой спинов частиц, но не связанного с движением спинов в пространстве. Второе слагаемое в правой части (1.59) появляется из учета влияния тепловых эффектов и имеет сложную структуру [31]. Если мы пренебрегаем тепловыми эффектами, то второе слагаемое можно не учитывать.

Рассмотрим равновесное состояние, которое обычно реализуется в кристаллической структуре мультиферроика, когда $v^\alpha = 0$, $\partial_t n = 0$, а также пренебрегая тепловыми эффектами. Подставим плотности силы, возникающей в результате спин-орбитального взаимодействия (1.49), в правую часть уравнения (1.48), и учтем, что спиновый ток определяется только неоднородной спиновой структурой вещества (1.59) и не связан с движением спинов в пространстве

$$P_\beta \partial^\alpha E^\beta - \frac{\gamma}{mc}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\delta E_\gamma J_s^{\beta\delta} + \frac{\gamma}{mc}\epsilon^{\beta\delta\gamma}\partial^\alpha E_\delta J_s^{\beta\gamma}$$
$$= P_\beta \partial^\alpha E^\beta + \frac{\gamma\hbar^2}{2m^2c}\epsilon^{\beta\mu\nu}\frac{S^\mu}{n}\left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\delta E^\gamma \partial^\delta - \epsilon^{\beta\delta\gamma}\partial^\alpha E^\delta \partial^\gamma\right) S^\nu = 0. \quad (1.60)$$

Уравнение (1.60) связывает электрическую дипольную поляризацию, индуцированную в результате спин-орбитального взаимодействия, и плотность спинового тока (1.59), не связанную с движением спинов в пространстве. Данная зависимость была получена из основных принципов теоретической модели, в процессе её построения, впервые, и представляет фундаментальный результат, в контексте развития спин-токовой модели магнитоэлектрического эффекта в мультиферроиках с антисимметричным обменным взаимодействием.

В общем случае, электрическое поле $E_\gamma$ в уравнении (1.60) складывается из внешнего поля $E^\gamma_{ext}$ и поля, создаваемого ионами среды $E^\gamma_{int}$

$$E^\alpha_{int} = \int d\vec{r}\,' G^{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}\,')P^\beta(\vec{r}\,',t) + e\partial_\beta \int d\vec{r}\,' G(\vec{r},\vec{r}\,')n(\vec{r}\,',t), \quad (1.61)$$

где функции Грина кулоновского и диполь-дипольного взаимодействий определяются в форме

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad G^{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}\,') = \partial^\alpha\partial^\beta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right). \quad (1.62)$$

Электрическое поле, создаваемое частицами среды, подчиняется уравнению Максвелла

$$div\vec{E}_{int}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) - 4\pi div\vec{P}(\vec{r},t). \quad (1.63)$$

# Выводы

В рамках проведения научной работы были изучены механизмы возникновения магнитоэлектрического эффекта в мультиферроиках второго типа. Были исследованы теоретические модели описания электрической дипольной поляризации, возникающей в средах с определенной магнитной структурой, а также её контроль. В качестве основного направления исследований был выбрал механизм, основанный на спин-орбитальном взаимодействии. В настоящее время существует две основных теоретических модели, позволяющие вычислить значение электрической поляризации: феноменологическая модель М. Мостового и спин-токовая модель, разработанная Катсурой, Нагаоши и Балатским. Как было замечено в процессе изучения спин-токовой модели, спиновый ток в контексте спин-орбитального взаимодействия определен неоднозначно, его связь с поляризацией не была выведена. В попытке устранить существующие противоречия, была поставлена и решена задача о построении новой теоретической модели описания электрической дипольной поляризации на основе метода многочастичной квантовой гидродинамики.

1. Была рассмотрена система частиц, обладающих индуцированными дипольными моментами и спинами, ориентированными произвольным образом. В системе реализуется спин-орбитальное взаимодействие спиновых магнитных моментов с внешними электрическими полями и полями, генерируемыми диполями и зарядами среды. Был задан многочастичный Гамильтониан и определены основные функции координат и времени, такие как концентрация частиц в окрестности точки пространства, плотность спина и электрическая поляризация.

2. На основе метода многочастичной квантовой гидродинамики были выведены уравнение непрерывности и уравнение динамики плотности тока. При получении уравнения непрерывности в нем возникает плотность

тока в микроскопическом представлении. При выводе уравнения динамики плотности тока, было получено микроскопическое представление для плотности потока импульса, электрической поляризации, плотности спинового тока.

3. Уравнение динамики плотности тока, для рассматриваемой системы, полученное впервые, содержит слагаемые, характеризующие действие электрических полей на поляризацию среды и эффекты спин-орбитального взаимодействия. Поле силы, возникающей в результате спин-орбитального взаимодействия, содержит выражение для плотности спинового тока.

4. Было показано, что в системах с неоднородной структурой намагниченности, возникает дополнительный спиновый ток, который при учете спин-орбитального взаимодействия приводит к появлению электрической дипольной поляризации.

Таким образом, была предложена гидродинамическая модель, позволяющая определить прямую взаимосвязь электрической поляризации со спиновым током, в среде с неоднородным распределением спинов частиц и спин-орбитальным взаимодействием.

# Список литературы

## Литература


[1] P. W. Anderson, New Approach to the Theory of Superexchange Interactions Phys. Rev. **115**, 2 (1959).

[2] Maxim Mostovoy, Ferroelectricity in Spiral Magnets, Phys. Rev. Lett. **96**, 067601 (2006).

[3] H. Katsura, N. Nagaosa, A. V. Balatsky, Spin Current and Magnetoelectric Effect in Noncollinear Magnets, Phys. Rev. Lett. **95**, Iss. 5. 057205 (2006).

[4] А. П. Пятаков, А. К. Звездин, Магнитоэлектрические материалы и мультиферроики, УФН, **182**, 593 (2012).

[5] Daniel Khomskii, Classifying multiferroics: Mechanisms and effects, Physics **2**, 20 (2009).

[6] T. Kimura, T. Goto, H. Shintani, et al., Magnetic control of ferroelectric polarization, Nature **426**, 55 (2003).

[7] P. Curie, Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie d'un champ electrique, Journal of Theoretical and Applied Physics 393 (1894).

[8] I. E. Dzyaloshinskii, On the Magneto-electrical effect in antiferromagnets, Journal of Experimental and Theoretical Physics **10**, 628 (1959).

[9] D. N. Astrov, The Magnetoelectric effect in Antiferromagnetics, JETF **11**, No. 3, 708 (1960).

[10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевским, Теоретическая физика: Электродинамика сплошных сред, – М.: Наука. 1986. Т.VIII. 629с.

[11] V. J. Folen, G. T. Rado, E. W. Stalder, Anisotropy of the Magnetoelectric Effect in Cr2O3, Phys. Rev. Lett. **6**, 607 (1961).

[12] А. В. Калгин, Е. С. Григорьев, З. Х. Граби, Магнитоэлектрический эффект: история, современное состояние исследований и перспективы применения, АЭЭ № 3-2, 122 (2013).

[13] Y. Tokura, S. Seki and N. Nagaosa, Multiferroics of spin origin, Reports on Progress in Physics, **77**(7), 076501 (2014).

[14] https://www.phys.msu.ru/rus/about/sovphys/ISSUES-2018/02(130)-2018/27016/

[15] I. A. Sergienko, E. Dagotto, Role of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction in multiferroic perovskites, Physical Review B **73**, Iss. 9, 094434 (2006).

[16] А. С. Москвин, И. Г. Бострем, Некоторые особенности обменного взаимодействия в ортоферритах ортохромитах, Физика твердого тела **19**, 1616 (1977).

[17] P. W. Anderson and H. Hasegawa, Considerations on Double Exchange, Phys. Rev. **100**, 675 (1955).

[18] T. Moriya, Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism, Phys. Rev. **120**, 91 (1960).

[19] Jiangping Hu, Microscopic Origin of Magnetoelectric Coupling in Noncollinear Multiferroics, Phys. Rev. Lett. **100**, 077202 (2008).

[20] L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov, Quantum hydrodynamics of particle systems with Coulomb interaction and quantum Bohm potential, Theoret. and Math. Phys. **118**:2, 227 (1999).

[21] P. A. Andreev, L. S. Kuzmenkov, Problem with the single-particle description and the spectra of intrinsic modes of degenerate boson-fermion systems, Phys. Rev. A. **78**, 053624 (2008).

[22] L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov, V. V. Fedoseev, Microscopic Quantum Hydrodynamics of Systems of Fermions: Part I, Theoret. and Math. Phys. **126**:1, 110 (2001).

[23] Pavel A. Andreev, Quantum hydrodynamic theory of quantum fluctuations in dipolar Bose–Einstein condensate, Chaos **31** (2), 023120 (2021).

[24] Pavel A. Andreev, I. N. Mosaki, Mariya Iv. Trukhanova, Quantum hydrodynamics of the spinor Bose–Einstein condensate at non-zero temperatures, Physics of Fluids **33**(6), 067108 (2021).

[25] Pavel A. Andreev, Spin-electron acoustic soliton and exchange interaction in separate spin evolution quantum plasmas. Physics of Plasmas **23**(1), 012106 (2016).

[26] P. Andreev and M. Trukhanova, Separated spin evolution quantum hydrodynamics of degenerate electrons with spin–orbit interaction and extraordinary wave spectrum. Journal of Plasma Physics **84**(5), 905840504 (2018).

[27] Chia-Hui Lin, Chi-Shung Tang, Yia-Chung Chang, Nonmagnetic control of spin flow: Generation of pure spin current in a Rashba-Dresselhaus quantum channel, Phys. Rev. B **78**, 245312 (2008).

[28] P. A. Andreev, L. S. Kuzmenkov, and M. I. Trukhanova, Quantum hydrodynamics approach to the formation of waves in polarized two-dimensional systems of charged and neutral particles, Phys. Rev. B **84**, 245401 (2011).

[29] Foldy Leslie, Wouthuysen Siegfried, On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).

[30] К. Ициксон, Ж. Б. Зюбер, Квантовая теория поля: Пер. с англ. —М.: Мир, 1984. Т.1, 448с.

[31] L. S. Kuz'menkov, F. Asenjo, S. M. Mahajan, P. A. Andreev, Exchange interaction in quantum hydrodynamics, Joint ICTP-IAEA College on plasma physics, Miramare - Trieste, Italy, 2012.